$\boxed{\text{A}}$

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2011年8月18日 (木) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まであり, それぞれ1ページに印刷してある.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙2枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ____________________

$\boxed{\text{第１問}}$

(1) 次の行列の積を求めよ.
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2) 次の行列式を求めよ.
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & b & a \\ c & a & c \end{vmatrix}$$

(3) 次の行列の逆行列を求めよ.
$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) 次の極限値を求めよ.
$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x - x}{\sin x}$$

(5) 次の式を実変数 x について微分せよ.
$$\log \sin x \quad (0 < x < \pi)$$

(6) 次の定積分の値を求めよ.
$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

$\boxed{\text{第 2 問}}$

P_3 を x の 3 次以下の実数係数多項式全体からなる線型空間とし，P_3 における内積を

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$$

と定める．

[問 **1**] $F = \{f \in P_3 | \langle x, f\rangle = \langle x^2, f\rangle = 0\}$ は P_3 の線型部分空間であることを示せ．

[問 **2**] P_3 から 2 次元実線型空間 $\boldsymbol{R}^2$ への写像 L を $L(f) = \begin{pmatrix} \langle x, f\rangle \\ \langle x^2, f\rangle \end{pmatrix}$ と定義する．P_3 の基底を適当に取り，その基底を使って写像 L を行列表示せよ．

[問 **3**] F の正規直交基底を求めよ．

$\boxed{\text{第 3 問}}$

d, l をともに正の実数とする．xy 平面上の長さ $2l$ の線分の中点が x 軸の区間 $[0, d]$ にあるとき，この線分が直線 $x = d$ と交わるかどうかを考える．

[問 1] 線分の中点の座標を $(a, 0)$ (ただし $0 \leq a \leq d$)，線分が x 軸の正の方向となす角度を θ (ただし $-\frac{1}{2}\pi < \theta \leq \frac{1}{2}\pi$) とするとき，線分が直線 $x = d$ と交わるための条件を式で表せ．

[問 2] まず a を固定して考える．θ が区間 $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ を一様に分布する確率変数であると考えて線分が直線 $x = d$ と交わる確率を求めよ．

[問 3] 次に a, θ がそれぞれ区間 $[0, d], (-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ を一様に分布する確率変数であると考えて線分が直線 $x = d$ と交わる確率を求めよ．

3 次元空間でも同様の考察をしてみよう．xyz 空間にある長さ $2l$ の線分の中点が x 軸の区間 $[0, d]$ にあるとき，この線分が平面 $x = d$ と交わるかどうかを考える．

[問 4] 線分の中点の座標を $(a, 0, 0)$ (ただし $0 \leq a \leq d$)，線分が x 軸の正の方向となす角度を θ (ただし $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$) とするとき，線分が平面 $x = d$ と交わるための条件を式で表せ．

[問 5] a が区間 $[0, d]$ を一様に分布し, これとは独立に, 線分の方向も一様に分布する確率変数とするとき，線分が平面 $x = d$ と交わる確率を求めよ．ただし, 線分の方向が一様に分布するとは，線分の端点が線分の中点を中心とする半径 l の球面上に一様に分布するものとする．

$\boxed{\text{第}\,4\,\text{問}}$

繰り返し起きるある事象 I について，任意に選んだ時刻において次に起きるまでの待ち時間が期待値 $\dfrac{1}{\alpha}$ の指数分布に従い，それぞれの待ち時間は独立とする．ただし，期待値 $\dfrac{1}{\alpha}$ の指数分布とは，確率密度が

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

で与えられる確率分布をいう．

[問 1] 事象 I が 2 回起きるまでの待ち時間の分布の確率密度を求めよ．

[問 2] 事象 I が $n\,(> 2)$ 回起きるまでの待ち時間の分布の確率密度を求めよ．

以下では，時刻 0 に事象 I が起きたとする．ある時刻において，最も近い過去に起きた事象 I から最も近い未来に起きる事象 I までの間隔はどのような分布に従うかを考えよう．条件がついている分布だから，期待値 $\dfrac{1}{\alpha}$ の指数分布とは限らない．

[問 3] ある時刻 t において，最も近い過去に事象 I が起きた時刻を確率変数 T_p とし，最も近い未来に事象 I が起きる時刻を確率変数 T_f とする．$T_f - T_p$ の分布の確率密度を求めよ．

[問 4] $T_f - T_p$ の期待値の $t \to \infty$ における極限値を求めよ．