$\boxed{\text{A}}$

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2011年1月17日(月) 10:00〜12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙2枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{\text{第1問}}$

[問 **1**] 次の関数を x について微分せよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $e^{-x}\sin x$

(2) $\log_e(\log_e x)$ （ただし, $x > 1$）

[問 **2**] 次の極限を求めよ．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin^2 x}$$

[問 **3**] 次の定積分の値を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^2}dx$

[問 **4**] $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とする．

(1) P^{-1} を求めよ．

(2) $B = P^{-1}AP$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} B^n$ を求めよ．

(4) (3) の結果を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A^n$ を求めよ．

$\boxed{\text{第 2 問}}$

[**問 1**] 実 2 行 2 列の行列全体を $M_2(\mathbf{R})$ とかく．$A \in M_2(\mathbf{R})$ に対し，線形写像 $f_A : M_2(\mathbf{R}) \to M_2(\mathbf{R})$ を $f_A(X) = AX - XA$ と定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $X = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ のとき，$f_A(X)$ を求めよ．

(2) $\operatorname{Ker} f_A = \{X \in M_2(\mathbf{R}) |\, f_A(X) = 0\}$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\operatorname{Im} f_A = \{f_A(X) |\, X \in M_2(\mathbf{R})\}$ の次元と基底を求めよ．

[**問 2**] n 行 n 列の行列で対角線より左下にある成分がすべて 0 であるものを，上三角行列と呼ぶ．実 3 行 3 列の上三角行列全体を $U_3(\mathbf{R})$ とかく．$A \in U_3(\mathbf{R})$ に対し，線形写像 $f_A : U_3(\mathbf{R}) \to U_3(\mathbf{R})$ を $f_A(X) = AX - XA$ と定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする．

(1) $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき，$f_A(X)$ を求めよ．

(2) $\operatorname{Ker} f_A = \{X \in U_3(\mathbf{R}) |\, f_A(X) = 0\}$ の次元と基底を求めよ．

(3) $\operatorname{Im} f_A = \{f_A(X) |\, X \in U_3(\mathbf{R})\}$ の次元と基底を求めよ．

$\boxed{\text{第 3 問}}$

[**問 1**] e を自然対数の底とし，xy 平面から uv 平面への写像 $\mathbf{F}$ を

$$\mathbf{F} : \begin{cases} u = e^x \cos y \\ v = e^x \sin y \end{cases}$$

と定める．さらに，xy 平面上の 4 本の直線 $y = 0$，$y = \pi$，$y = \pi x$，$y = \pi(x-1)$ によって囲まれる領域を D とする．この時，$\mathbf{F}(D)$ を図示し，$\mathbf{F}(D)$ の面積を求めよ．

[**問 2**] x, y を実数とするとき，$x^2 + y^2 = 1$ の条件下で，$x^2 - 4xy - 2y^2$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{\text{第 4 問}}$

動点 P が時刻 0 に原点にあり，数直線上の整数点を時間 1 ごとに確率 $\dfrac{1}{2}$ で正または負の方向に 1 だけ移動する．

(1) 時刻 $1, 2, 3$ において，動点 P がそれまでに訪れた最大の座標の期待値を求めよ．

(2) 動点 P が時刻 t に座標 x にある確率を求めよ．

(3) 動点 Q が時刻 0 に原点にあり，数直線上の整数点を時間 1 ごとに確率 $\dfrac{1}{2}$ で正または負の方向に 1 だけ移動するが，座標 $z\,(>0)$ に着いて以降は静止するものとする．動点 Q が時刻 t に座標 $x\,(<z)$ にある確率を求めよ．

(4) 動点 P が時刻 t までに訪れる最大の座標の確率分布を求めよ．

(5) 時刻 t において，動点 P がそれまでに訪れた最大の座標の期待値を求めよ．