13

A

総合研究大学院大学複合科学研究科統計科学専攻
5年一貫制博士課程入学試験問題

科目 数理

2012年8月20日(月) 10:00~12:00

注意事項

1. 試験開始の合図まで, この問題冊子を開かないこと.
2. 問題は第1問から第4問まである.
3. 本冊子に落丁, 乱丁, 印刷不鮮明な箇所などがあった場合には申し出ること.
4. 答案用紙4枚が渡されるので, すべての答案用紙について所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
5. 解答にあたっては, 問題ごとに指定された答案用紙を使用すること. 書ききれない場合には答案用紙の裏面を使用してもよい.
6. 計算用紙3枚が渡されるので, 所定の場所に受験番号と名前を忘れずに記入すること.
7. 答案用紙, 計算用紙および問題冊子は持ち帰らないこと.

受験番号 ____________

第1問

[問1]　以下の行列 A, B について, 積 AB 及び BA を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[問2]　実数値関数 $f(x) = \exp(x\cos x)$ の導関数を求めよ. ただし, $\exp(y)$ は e^y と同じ意味である (e は自然対数の底).

[問3]　次の定積分を計算せよ.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2 - x - 6} dx$$

[問4]　確率変数 X が二項分布 $\mathrm{B}(160, \frac{1}{4})$ に従うとする. 確率変数 Y を

$$Y = \frac{X - 20}{2}$$

で定義するとき, Y の平均と分散を求めよ. ここで, $\mathrm{B}(n, p)$ の n は試行数, p は事象の生起確率をあらわす.

第 2 問

[問 1]　$p(x)$ を確率密度関数とするとき, 以下の問いに答えよ. ただし, $p(x)$ のあらわす確率分布の期待値および分散は存在するものとする.

(1) $f(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 p(x) dx$ を最小にする a を求めよ.

(2) $|x-a|$ を $x-a$ の絶対値として,

$$g(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x-a| p(x) dx$$

を最小にする a に対し,

$$\int_{a}^{+\infty} p(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} p(x)\, dx$$

となることを示せ.

[問 2]　2 階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

において

(1) $y = xe^{2x}$ が解の 1 つであることを示せ.

(2) $x = 0$ のときに

$$y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = 1$$

であるような解を求めよ.

$\boxed{\text{第 3 問}}$

N 個の確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_N$ が平均ベクトル $\mathbf{0}$, 分散共分散行列 A^{-1} の多変量正規分布に従っているとし, その確率密度関数を

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N) = \frac{1}{C}\exp\left(-\frac{1}{2}{}^t\mathbf{x}\,A\,\mathbf{x}\right)$$

とする. ここで, $\mathbf{x}$ は $x_1, x_2, \ldots, x_N$ を成分とする縦ベクトルであり, ${}^t\mathbf{x}$ はそれを転置した横ベクトルをあらわす. また, C は正規化のための定数であり, $|A|$ を行列 A の行列式とすると $C = (2\pi)^{\frac{N}{2}}|A|^{-\frac{1}{2}}$ と書ける. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) 行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

で与えられたとして,

(i) X_1 の周辺確率密度関数 $p(x_1)$ を求めよ.

(ii) $X_1 = x_1$ としたときの X_2 の条件つき確率密度関数 $p(x_2|x_1)$ を求めよ.

(iii) 行列 A の固有値をすべて求めよ. また各固有値に対応する固有ベクトルを求めよ.

(iv) $p(x_1, x_2) =$ 定数 で定まる曲線 (等高線) のおよその形状を (x_1, x_2) 平面の上に図示せよ.

(2) 行列 A が

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられたとする. $S = \frac{1}{2}X_1 + X_2 + X_3$ とおくとき, $S = s$ としたときの X_2, X_3 の条件つき確率密度関数 $p(x_2, x_3|s)$ を求めよ.

$\boxed{\text{第4問}}$

任意の実数係数多項式 $P(x), Q(x)$ に対し, 内積を

$$(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx$$

とし, 以下の漸化式により多項式の列 $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots$ を定める.

$$L_0(x) = \alpha_0,\ \ L_n(x) = \alpha_n \left\{ x^n - \sum_{k=0}^{n-1} (x^n, L_k(x))L_k(x) \right\}\ (n = 1, 2, \ldots)$$

ただし, α_n は $(L_n(x), L_n(x)) = 1\quad (n = 0, 1, \ldots)$ により定まる正の定数とする. このとき, 以下の問いに答えよ.

(1) $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$ を求めよ.

(2) 次の (i) と (ii) が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ.

(i) $L_n(x)$ は n 次の多項式である

(ii) $n \geq 1$ のとき, $(L_n(x), L_m(x)) = 0\quad (0 \leq m \leq n-1)$

(3) $n \geq 1$ のとき, $n-1$ 次以下の任意の多項式 $Q(x)$ に対して $(L_n(x), Q(x)) = 0$ が成り立つことを示せ.

(4) $L_n(x)$ は開区間 $(-1, 1)$ 内にちょうど n 個の相異なる零点 ($L_n(x) = 0$ となる実数 x) を持つことが知られている. それらの零点を $x_1, \ldots, x_n$ とし,

$$w_k = \int_{-1}^{1} l_k(x)dx,\quad l_k(x) = \frac{\Pi_{j \neq k}(x - x_j)}{\Pi_{j \neq k}(x_k - x_j)}\qquad (k = 1, \ldots, n)$$

とするとき, 任意の $2n-1$ 次以下の多項式 $P(x)$ に対して,

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k P(x_k)$$

が成り立つことを示せ. ただし, $\Pi_{j \neq k}$ は $j = k$ を除いて $j = 1$ から $j = n$ までの積をとることをあらわす.

(ヒント：$P(x)$ に対して, $Q(x_1) = P(x_1), \ldots, Q(x_n) = P(x_n)$ を満たす $n-1$ 次以下の多項式 $Q(x) = P(x_1)l_1(x) + \cdots + P(x_n)l_n(x)$ を考えよ)

このページは意図的に白紙としている.