

デフォルト解析とモンテカルロ計算 ～レア・イベントに対するアプローチ～

清水 泰隆

早稲田大学理工学術院; JST CREST

リスク解析戦略研究センター シンポジウム
2020年8月31日

今日の目標：信用リスク・モデリングとデフォルト確率の計算

1 確率過程入門

- ブラウン運動と複合ポアソン過程
- 『統計学実践ワークブック』（統計検定準1級対応）15章から.

2 信用リスク (credit risk) モデリング

- 構造的アプローチ
- デフォルト・リスク

3 “レア・イベント”のモンテカルロ計算

- 確率過程に対する**重点サンプリング**
- 実践：**デフォルト確率**の計算・シミュレーション

Part I

確率過程入門

確率過程とは？

定義

各 $t \in [0, \infty)$ に対して，確率変数 X_t の族 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ を**確率過程**という．

- 確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ が与えられたとき，その実現値の集合を $(x_t)_{t \geq 0}$ と書くと， $t \mapsto x_t$ なる t の関数が描かれ，これを X の**パス (path)** と呼びます．
- 確率過程のパスには連続なもの，不連続なものがあります．
 - 連続パスの代表 \Rightarrow **ブラウン運動**
 - 不連続パスの代表 \Rightarrow **(複合) ポアソン過程**

確率過程の性質は千差万別でスタート地点は様々ですが、今日は統計検定準1級の教科書「統計学実践ワークブック」の15章を参考に、その入門とします。

定義 (独立定常増分過程)

以下の(1),(2)を満たす確率過程 $X = (X_t)_{t \geq 0}$ を独立定常増分過程と言う。

- (1) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n$ に対して,
 $X_{t_0}, (X_{t_1} - X_{t_0}), (X_{t_2} - X_{t_1}), \dots, (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$ は互いに独立。
- (2) 任意の $0 \leq t < t+h$ に対して, $(X_{t+h} - X_t)$ の分布と $(X_h - X_0)$ の分布は同じ。

以下では、独立・定常増分をもつ確率過程のうち、連続パス、不連続パスをもつ代表例を1つずつ取り上げます。

連続パスの代表例

定義 (ブラウン運動)

確率過程 $B = (B_t)_{t \geq 0}$ が以下の (1)-(3) の性質をみたすとき, B は**ブラウン運動**.

- (1) B は独立定常増分過程で $B_0 = 0$.
- (2) 各 $t \geq 0$ に対して, (周辺分布) $B_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$.
- (3) B のパスは連続.

- 特に, (2) において, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ となるものを**標準ブラウン運動**と呼びます
- 標準ブラウン運動を $W = (W_t)_{t \geq 0}$ とおくと

$$B_t = \mu t + \sigma W_t$$

と書いて, 平均 $\mathbb{E}[B_t] = \mu t$ の部分は**ドリフト**と呼ばれ, B を「ドリフト付きブラウン運動」と言うこともあります.

演習：[0, 1] 区間上にブラウン運動のパスを描いてみましょう

- $[0, 1]$ を N 等分して $\Delta = \frac{1}{N}$ とすると, $k = 1, 2, \dots$ に対して,

$$B_{k\Delta} = \sum_{i=1}^k (B_{i\Delta} - B_{(i-1)\Delta}) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^k N(\mu\Delta, \sigma^2\Delta) \quad (\text{ランダム・ウォーク})$$

- $\Delta \downarrow 0$ とすると, 連続パスの近似になります.

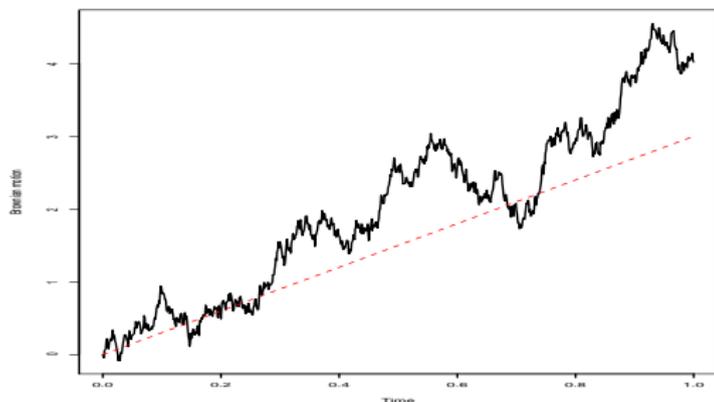


Figure: $\Delta = \frac{1}{1000}$ でプロット; $B_t = \mu t + \sigma W_t$, $W_t \sim N(0, t)$, $\mu = 3, \sigma = 2$

- 株価や資産価値, 企業価値の変動などをモデリングするのに使われます.

定義 (計数過程)

正值確率変数列 $T = (T_k)_{k=1,2,\dots}$ が、自然数 k に対して $T_k < T_{k+1}$ をみたすとし、 $T_0 = 0$ とする。これを用いて確率過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ を

$$N_t = \sum_{k=1}^{\infty} I(T_k \leq t) \quad (1)$$

と定める。ただし、 $I(A)$ はイベント A が起こったとき 1、起こらなければ 0 をとる定義関数である。このような N を、 T から定まる **計数過程 (点過程)** という。

- 繰り返し起こるイベントに対して用いられる確率モデルです。
- T_n は n 番目のイベント発生時刻です。
- N_t は時刻 t までに起こるイベントの回数です。

不連続パスの代表例

定義 (ポアソン過程)

前述の点過程 $N = (N_t)_{t \geq 0}$ において, イベントの発生間隔 $W_k := T_k - T_{k-1}$ が,

$$(IID) \quad W_k \sim \text{Exp}(\lambda), \quad k = 1, 2, \dots$$

となるものを, 強度 λ のポアソン過程という.

ポアソン過程については以下が知られています.

定理

- (1) N は独立定常増分過程である.
- (2) 任意の $t \geq 0$ に対して N_t は強度 λt のポアソン分布 $Po(\lambda t)$ に従う. すなわち,

$$P(N_t = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

※統計検定 (準1級) の教科書では, これを「定義」としています.

ポアソン過程のパス

- ポアソン過程のパスを描きたいなら、独立定常増分性を利用します：任意の $\Delta > 0$ に対して、

$$N_{k\Delta} = \sum_{i=1}^k (N_{i\Delta} - N_{(i-1)\Delta}) \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^k Po(\lambda\Delta) \quad (\text{IID 和})$$

ただし、 $N_0 = 0$ としておきます。

- $\mathbb{P}(N_{i\Delta} - N_{(i-1)\Delta} \geq 2) = O(\Delta^2)$ なので、 Δ が十分小さければ、区間 $[(i-1)\Delta, i\Delta]$ で起こるジャンプは、だいたい、0 回か 1 回です。
- $\Delta > 0$ を十分小さく取って、 $N_0, N_\Delta, N_{2\Delta}, \dots$ をプロットしていけば、ポアソン過程のパスが描けます。つまり、 $Po(\lambda\Delta)$ を使って「ランダム・ウォーク」を描くということです。
- 演習： $\lambda = 5$ のポアソン過程のパスを $[0, 1]$ 区間に描いてみましょう

定義 (複合ポアソン過程)

強度 λ のポアソン過程 N と, それと独立な IID 正值確率変数 $(U_k)_{k=1,2,\dots}$ に対して,

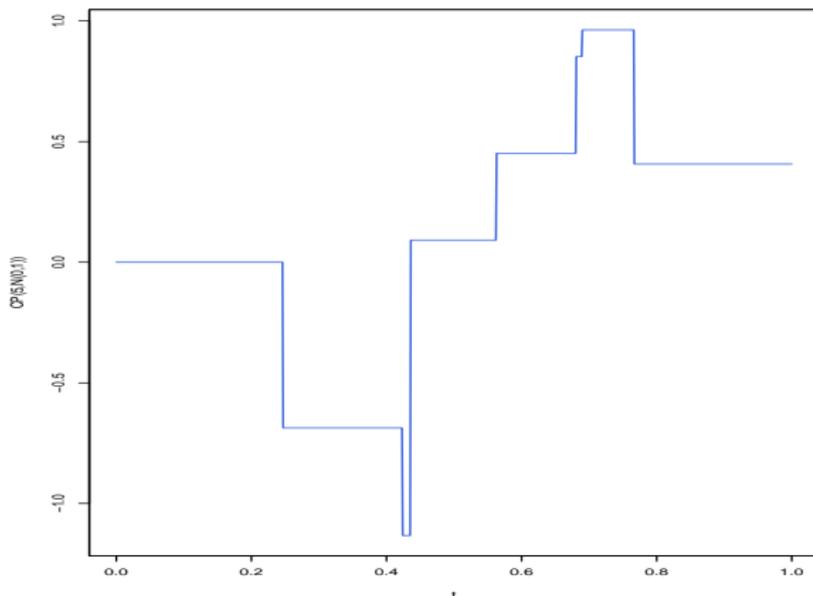
$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} U_k, \quad U_k \sim p \text{ (確率密度関数)} \quad (2)$$

なる $X = (X_t)_{t \geq 0}$ を複合ポアソン過程といい,

$$X \sim CP(\lambda, p)$$

と表す.

演習： $CP(5, N(0, 1))$ パスを $[0, 1]$ 区間に描いてみましょう



ヒント： $[0, 1]$ 区間を N 分割し， $\Delta = 1/N$ とする． $N_{k\Delta} - N_{(k-1)\Delta} = 1$ となったら $U \sim N(0, 1)$ を足していけばよい． (図では $\Delta = \frac{1}{1000}$ としている)

Part II

信用リスクモデリング

信用リスクとは？

- 融資や、社債や国債などの取引において、その取引相手はその利息や元本などの支払いができなくなる状態（債務不履行（デフォルト））に陥るときに生じるリスク。
 - デフォルト時の損失額評価
 - クレジット・デリバティブ（CDS など）のプライシング
 - 企業格付の問題
- 今日は「**デフォルト確率**」に焦点を当てます（デフォルト・リスク）。
⇒ **Q. デフォルトはなぜ起こるのか？**

デフォルトをどのように定義するか？

- **構造的アプローチ** (e.g., Merton, 1974, 1976) : “企業価値”を $X = (X_t)_{t \geq 0}$ としてモデルリング. 時刻 t での “価値” X_t が, ある閾値 d を下回ることによりデフォルトが起こると考えます :

$$\tau := \inf\{t > 0 \mid X_t < d\}.$$

このとき,

$$\mathbb{P}(\tau \leq t) = \mathbb{P}\left(\inf_{s \leq t} X_s < d\right).$$

- **縮約的アプローチ** (e.g., Jarrow and Turnbull, 1995) : デフォルトが起こる理由は分からないが, 確率的に (繰り返し) 起こるイベントとみなし, そのイベント時刻 τ が強度 $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ の (非斉時的) ポアソン過程に従うと考えます :

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right).$$

※通常のポアソン過程なら $\lambda_s \equiv \lambda$ (定数) なので, $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$.

- いずれにしても, 興味の対象は**デフォルト確率** $\mathbb{P}(\tau \leq t)$ です.

例：企業価値（e.g., 株価）のモデリング（Merton モデル）

Example

■ 幾何ブラウン運動 (Merton, 1974)

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma W_t) \Leftrightarrow X \sim GB(\mu, \sigma^2; X_0)$$

■ 時折，ひどく下落することがある...

- リーマンショック (T_1), 大地震 (T_2), 東京アラート (T_3), ... etc. $\Rightarrow N \sim Po(\lambda)$?
- 各 T_k の時の下落率?

$$X_{T_k} = \gamma \cdot X_{T_{k-1}}, \quad \gamma := \exp(-U_k) \in (0, 1)$$

ただし, $U_k \sim p$: 確率密度 p をもつ正值確率変数.

■ 幾何レヴィ過程 (Merton, 1976) (大きな下落リスクを考慮した株価モデル)

$$X_t = X_0 \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \sum_{k=1}^{N_t} U_k\right) \Leftrightarrow X \sim GL(\mu, \sigma^2, \lambda, p; X_0)$$

多くの実証研究では「下向きジャンプがある」と示唆されているようです: e.g., Carr et al (2002), Madan. and Schoutens (2008), Schoutens and Cariboni (2009).

連続パスと不連続パス

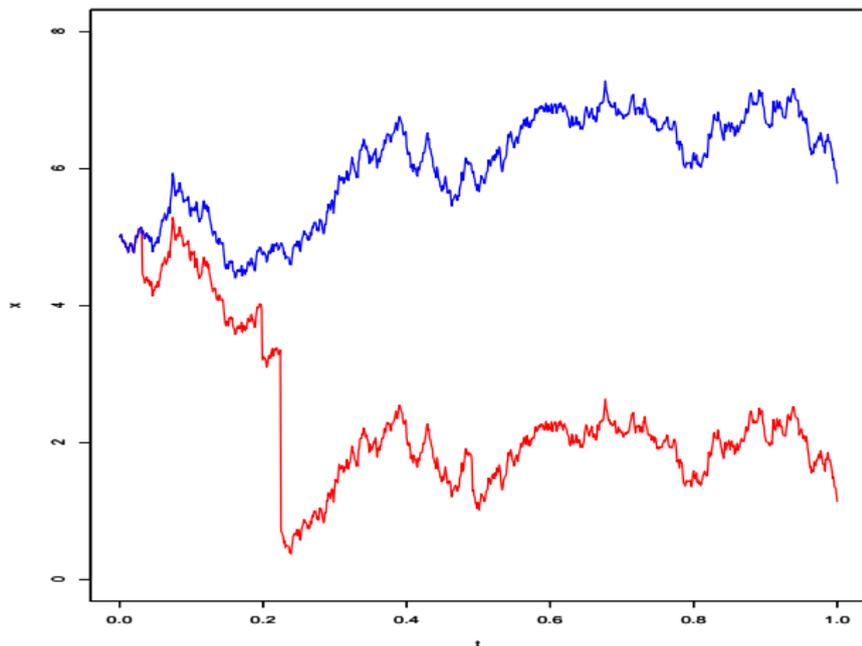


Figure: 幾何ブラウン運動 (GB) と幾何レヴィ過程 (GL) のパス

デフォルト確率

Merton モデル $X \sim GB(\mu, \sigma^2; e^x)$ のデフォルト時刻を

$$\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t < e^d\} = \inf\{t > 0 \mid B_t < d\}$$

で定めると、**デフォルト確率**について以下のことが知られている。

定理

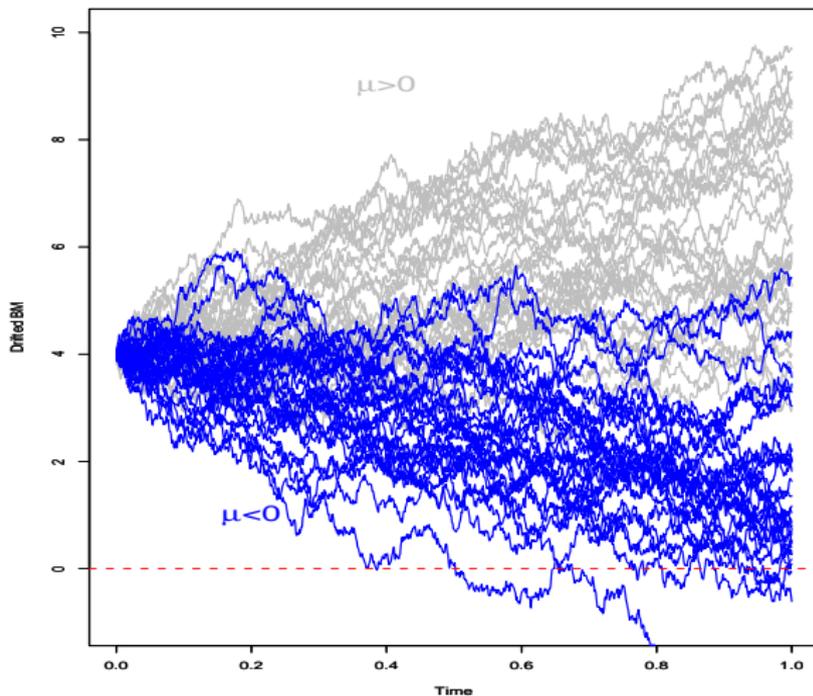
$d \in \mathbb{R}$ に対して、初期値 $X_0 = e^x > e^d$ とする。このとき、任意の $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$, および、 $T > 0$ に対して、

$$\mathbb{P}(\tau > T) = \Phi\left(\frac{x - d + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right) - e^{-2\mu(x-d)/\sigma^2} \Phi\left(\frac{-(x-d) + \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

ただし、 $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$ (標準正規分布の分布関数) である。

- 詳細は Rolski et al. (1999), 清水 (2018) などを参照。
- デフォルト確率は一般のモデルでは陽には書けないので、通常は**モンテカルロ法**により、 X のパスを沢山発生させて、デフォルトした回数の割合で確率を近似します。

ドリフトの符号によるデフォルト確率の違い



モンテカルロ法による $\mathbb{P}(\tau \leq T)$ の計算 (“ノーマル法”)

- 1 $B_t = \log X_t = x + \mu t + \sigma W_t$ のパスを発生させる.
- 2 デフォルトを検出: 第 i 番目のパス $B^{(i)}$ に対して ($i = 1, 2, \dots, M$),

$$\tau^{(i)} := \inf\{t > 0 \mid \inf_{s \leq t} B_s^{(i)} < d\} \leq T$$

が起きたかどうか調べる. ※パスの発生の際, Δ をなるべく小さく!

- 3 上記 1,2 を M 回繰り返す, $\{\tau^{(i)} \leq T\}$ ($i = 1, \dots, M$) となったパスの本数を数える:

$$\sum_{i=1}^M I(\tau^{(i)} \leq T)$$

- 4 大数の法則によって,

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I(\tau^{(i)} \leq T) \rightarrow \mathbb{P}(\tau \leq T), \quad M \rightarrow \infty$$

レア・イベントでは誤差が大きくなり収束は遅い

($T = 1$ として) $M = 100$ 回繰り返して平均をとったとする.

■ $\mu = -3$ のとき : $\mathbb{P}(\tau \leq 1) = 0.4023$

⇒ 100 回中 40 回くらいは破産する.

仮に 45 回破産したとしても, 推定値は $45/100 = 0.45$

$$\text{相対誤差} = \frac{0.45 - 0.4023}{0.4023} = 0.118 \approx 12\% \text{程度}$$

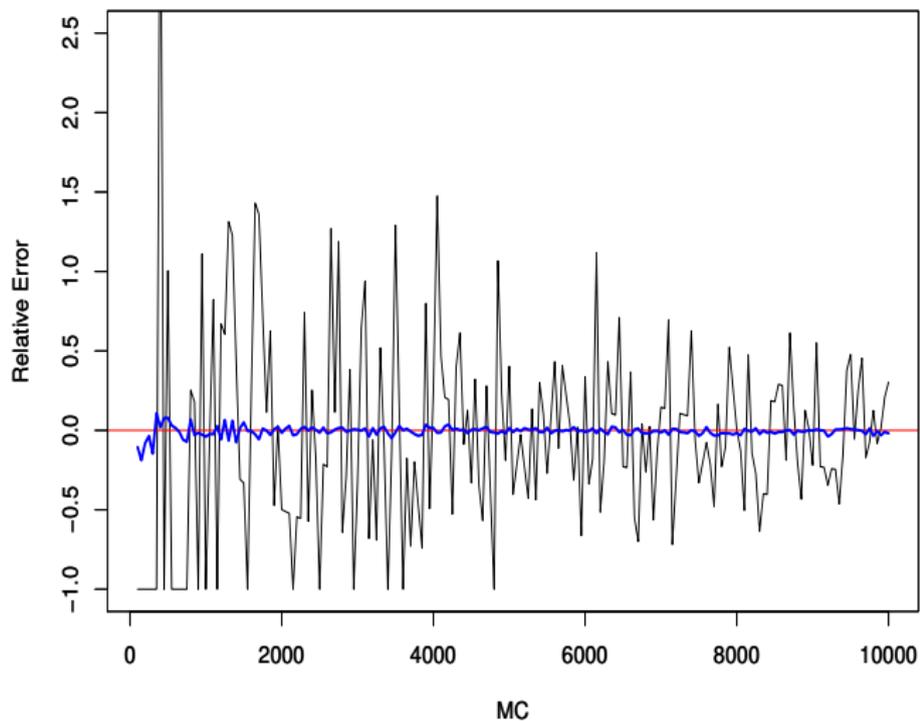
■ $\mu = 3$ のとき : $\mathbb{P}(\tau \leq 1) = 0.0009974172$ (レア・イベント)

⇒ 1000 回中 1 回破産するかどうか.

仮に 100 回やって 1 回でも破産すると, 推定値は $1/100 = 0.01$

$$\text{相対誤差} = \frac{0.01 - 0.000997}{0.000997} = 9.03 \approx 900\%!!$$

黒線は $\mu = 3$, 青線は $\mu = -3$.



Part III

レア・イベントのモンテカルロ計算

確率過程の重点サンプリング

- 前に見たように、ドリフトが負になるとデフォルトが起きやすく、誤差分散も小さくなります。
- 一方、「重点サンプリング」で見たように、乱数を出す確率分布を変更することで、分散を小さく、収束を早くすることが出来ます：

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^p[f(X)] &= \int f(x)p(x) dx = \int f(x) \underbrace{\frac{p(x)}{q(x)}}_{r(x)} q(x) dx \\ &= \mathbb{E}^q[f(X^*)r(X^*)] \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M f(X_i^*)r(X_i^*), \quad X_i^* \sim q(x) dx\end{aligned}$$

- 確率過程でも同様のことが可能です。つまり、ドリフトが「負」であるようなデフォルトしやすい確率過程のパスからサンプリングして（**重点サンプリング**）、係数を調節する（ $r(X^*)$ ）を掛ける）ことで、効率的にモンテカルロ計算を実行します。

※もちろん、そのような確率過程をうまく選ぶのは簡単ではありませんが...

確率過程の重点サンプリング

例えば、幾何レヴィ過程では、そのような**重点サンプリング**が可能です。

定理 (清水 (2018), 定理 7.28 · 改)

幾何レヴィ過程 $GL(\mu, \sigma^2, \lambda, p; e^x)$ が与えられたとき, (Lundberg) 方程式

$$\mu\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\gamma^2 - \lambda \int_0^\infty (e^{\gamma z} - 1) p(z) dz = 0 \quad \dots (*)$$

を満たす $\gamma > 0$ が存在すると仮定する. この γ を用いて,

$$\mu_* = \mu - \gamma\sigma^2, \quad \lambda_* = \lambda \int_0^\infty e^{\gamma z} p(z) dz, \quad q(x) = \frac{e^{\gamma x}}{\lambda_*} p(x)$$

として, 幾何レヴィ過程 $X^* \sim GL(\mu_*, \sigma^2, \lambda_*, q; e^x)$ を考える. この X^* について $\tau_* = \inf\{t > 0 \mid X_t^* < e^d\}$ と定めると,

$$\mathbb{P}(\tau_* < \infty) = 1$$

(つまり, X^* はデフォルトしやすいモデル) となり, 求めたいデフォルト確率は,

$$\mathbb{P}(\tau \leq T) = \mathbb{E} \left[\underbrace{e^{\gamma(X_{\tau_*}^* - x + d)}}_{r(X^*)} \underbrace{I(\tau_* \leq T)}_{f(X^*)} \right], \quad x > d$$

と, X^* を用いて計算できる.

※理論の詳細は, 清水 (2018) 「保険数理と統計的方法」 7.3.4 節を御覧ください.

【参考・発展】さらに興味のある方へ...

上の変換は、実は一般の独立定常増分過程にも拡張できます。

定理 (エッシャー変換)

独立定常増分過程 $X = (X_t)_{t \in [0, T]}$ に対して、以下を満たす定数 $\gamma > 0$ が存在を仮定：

$$\log \mathbb{E}[e^{-\gamma X_1}] = 0 \quad (\text{Lundberg 方程式})$$

このとき、(t に依らない) 確率 \mathbb{Q} が存在して、任意の $t \in [0, T]$ に対して

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[r(X_t)I(A)], \quad (A \text{ は時刻 } t \text{ までに起こる事象})$$

ただし、 $r(X_t) = \frac{e^{\gamma X_t}}{\mathbb{E}[e^{\gamma X_t}]}$ (X_t に対する **Esscher 変換**)。

実は、このような新しい確率 \mathbb{Q} の下での X が前項の X^* で、

$$\mathbb{Q}(\tau < \infty) = 1$$

となるのですが、これは少し深い話...

※詳細は、清水 (2018) 「保険数理と統計的方法」7.3.3 節。

具体例 1 : Geometric Brownian Motion

Example (幾何ブラウン運動)

この定理を, $\mu > 0$ として $X \sim GB(\mu, \sigma^2; e^x)$ に使ってみると,

$$\mu\gamma - \frac{\sigma^2}{2}\gamma^2 = 0 \quad (\gamma > 0) \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = \frac{2\mu}{\sigma^2}$$

ですから

$$\mu_* = \mu - \gamma\sigma^2 = -\mu \quad \Leftrightarrow \quad X \sim GB(-\mu, \sigma^2)$$

となってドリフトの向きが逆転します. つまり,

$$X_t^* = \exp(x - \mu t + \sigma W_t)$$

から $X_T^{*,i}$, ($i = 1, 2, \dots, M$) をサンプリングすれば, 多くのパスで $\tau_*^{(i)} \leq T$ となるので,

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M e^{\gamma(X_{\tau_*^{*,i}}^* - x + d)} I_{(\tau_*^{(i)} \leq T)} \rightarrow \mathbb{P}(\tau \leq T), \quad M \rightarrow \infty.$$

の計算効率が上がります.

具体例 2 : Geometric Lévy Process

Example (ドリフト付きの複合ポアソン過程)

$S \sim CP(\lambda, \text{Exp}(\mu^{-1}))$ となる複合ポアソン過程 S によって,

$$\log X_t = x + ct - S(t) \Leftrightarrow X \sim GL(c, 0, \lambda, p; e^x), \quad p(z) = \frac{1}{\mu} e^{-\frac{z}{\mu}}$$

を考えます. このとき, $c > \lambda\mu$ なら $\gamma > 0$ が存在して,

$$\gamma = 1/\mu - \lambda/c > 0$$

となりますから,

$$c_* = c, \quad \lambda_* = \frac{c}{\mu}, \quad q(z) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda}{c}z} \Leftrightarrow X \sim GL(c, 0, c/\mu, q; e^x).$$

すなわち, $S^* \sim CP\left(\frac{c}{\mu}, \text{Exp}\left(\frac{\lambda}{c}\right)\right)$ なる複合ポアソン過程によって

$$\log X_t^* = x + ct - S_t^*$$

からサンプリングすればよいはずですが. このときのドリフトは

$$\mathbb{E}[\log X_t^* - x] = c - \frac{c^2}{\lambda\mu} = \frac{c(\lambda\mu - c)}{\lambda\mu} < 0$$

となっていますので, 確かにデフォルトしやすいモデルになっています.

数値例：通常のモンテカルロと重点サンプリング

Example

- $c = 60, \lambda = 3, \mu = 1; x = 3, d = 0$ として,

$$X \sim GL(c, 0, \lambda, \mu^{-1} e^{-z/\mu}; e^x)$$

$$\Rightarrow \gamma = 1/\mu - \lambda/c = 0.95$$

- このとき、以下の解析解が知られている：

$$\mathbb{P}(\tau < \infty) = \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\gamma x} = 0.002780525\dots (= 0.2\%)$$

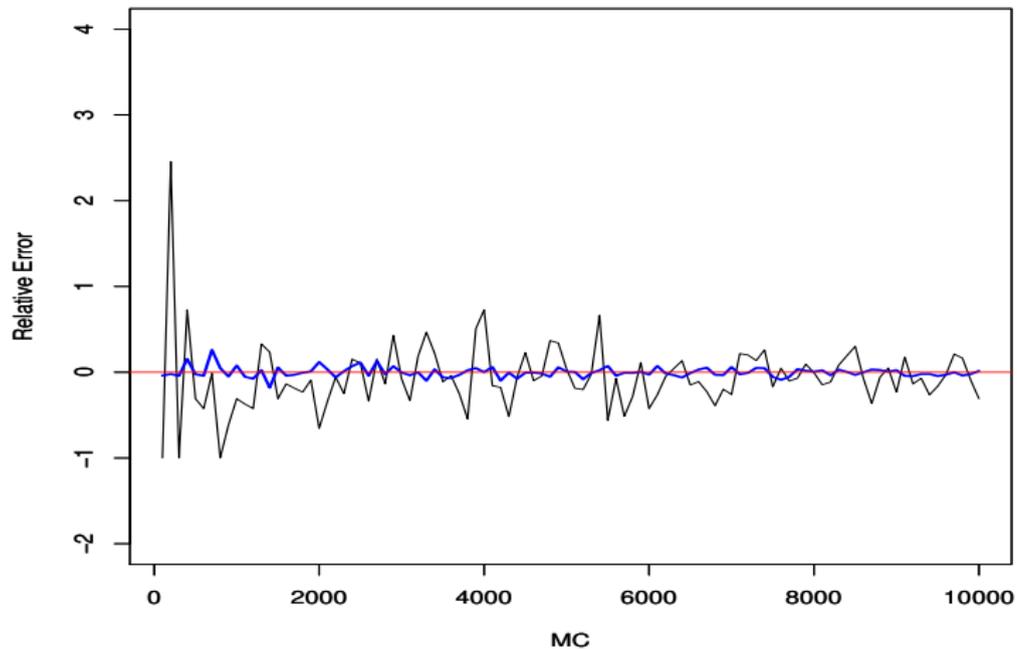
- (“大きい” T に対して) “ノーマルな”モンテカルロと重点サンプリング ($M = 10000$)

$$\mathbb{P}(\tau \leq T) = \mathbb{E} \left[e^{\gamma(X_{\tau_*}^* - x)} I(\tau_* \leq T) \right]$$

とを相対誤差で比較してみる.

- 実際には、 X^* がすぐにデフォルトするので $T = 1$ くらいで OK で、早く計算可能！

相対誤差の比較



- **ブラウン運動と複合ポアソン過程**
 - パスのシミュレーションはランダム・ウォークで OK (増分の独立・定常性を用いる).
- **信用リスクモデル (構造的アプローチ)**
 - 上の2つで結構いろんなモデルができるし、実際にもこれらが多用されている.
 - 少なくとも (連続時間の) 確率モデルを作るとき、最初に考えるべきモデルの候補.
- **レア・イベントの確率計算には重点サンプリングを考えよう.**
 - サンプリングする確率過程はうまく選ぶべき... (難しい)
 - GB や GL はそれがやりやすいモデルとして重宝される (それはモデル選択の大事な要素)
 - 将来は “量子コンピュータ” ?

Bibliography I

- [1] Carr, P.; Geman, H.; Madan, D. B.; Yor M. (2002). The fine structure of asset returns: an empirical investigation. *Journal of Business* **75**, (2), 305–332.
- [2] Jarrow, R. A. and Turnbull, S. (1995). "pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**.
- [3] Madan, D. and Schoutens, W. (2008). Break on through to the single side. *Journal of Credit Risk* **4**, (3), 3–20.
- [4] Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*. **29**, (2), 449 –470.
- [5] Merton, R. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 125–144.
- [6] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V., Teugels, J. (1999). *Stochastic processes for insurance and finance*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.
- [7] Schoutens, W. and Cariboni, J. (2009). *Lévy processes in credit risk*, John Wiley & Sons.
- [8] 清水泰隆 (2018). 保険数理と統計的方法, 共立出版
- [9] 日本統計学会 (2020). 統計学実践ワークブック (統計検定準 1 級対応), 学術図書出版社