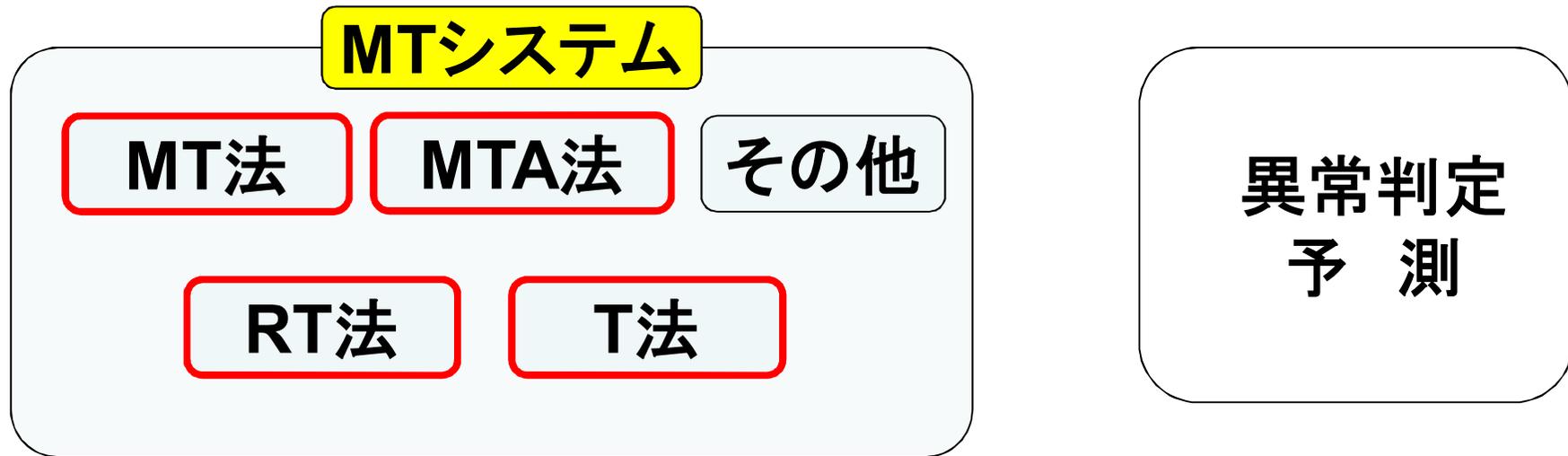


# MTシステムの諸問題と改良手法

早稲田大学 創造理工学部 経営システム工学科

永田 靖

★印のページは配布資料に追記・修正しています。



田口玄一博士が開発

タグチ流 多変量解析法

タグチメソッド(品質工学)の主要な柱のひとつ

全体的な解説: 品質工学会(2007), 立林・手島・長谷川(2008)

その他:  
TS法, マルチ法, 誤圧など

本稿: MT法, MTA法, RT法, T法の性質・注意点を述べ,  
改良手法を示す. 報告者らの研究を中心に紹介.

# 1. はじめに

## MT法・・・マハラノビス・タグチ法

表 1.1 データの形式

No.	良・不良	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$
1	良	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1p}$
2	良	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2p}$
...	...	...	...	...	...
$n$	良	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{np}$
1	不良	$y_{11}$	$y_{12}$	...	$y_{1p}$
2	不良	$y_{21}$	$y_{22}$	...	$y_{2p}$
...	...	...	...	...	...
$m$	不良	$y_{m1}$	$y_{m2}$	...	$y_{mp}$

1. データの形式は判別分析
2. 良品は1つの群をなす
3. 不良品は1つの群をなさない

(例) 自動販売機の貨幣認識

正貨は1つの群

偽造貨幣はいろいろなタイプ

⇒ 判別分析ではなく, **MT法**

## MT法(マハラノビス・タグチ法)のステップ

1. 良品で1つの群(母集団)を想定する(単位空間と呼ぶ)
2. 単位空間のデータからマハラノビスの距離を算出する
3. 不良品のデータを2で算出したマハラノビスの距離に代入して、変数を選択する
4. 良・不良を判定するためのデータをマハラノビスの距離に代入して判定する

## MT法 vs 判別分析・管理図

MT法	判別分析	多変量管理図
良品で1つの群(母集団)を想定する(単位空間と呼ぶ)	2群を想定	正常群を想定
単位空間のデータからマハラノビスの距離を算出する	2群のデータから算出	MT法と同じ
不良品のデータより変数選択	2群のデータから変数選択	通常, 変数選択しない
予測する(判定する)	判別する	判定する

- ・統計学を学んだ者にとっては、MT法の原型は統計学の枠組みにおける自然な発想という印象.
- ・一方、MT法に関連して田口博士が追加していった新たなアイデアや考え方(総じて、**MTシステム**と呼ぶ)には興味がある.
- ・統計学と一線を画していた人々へMTシステムが急速に普及していったことにも興味がある(**観察研究の必要性**、**田口博士の影響**、**手法の簡便さ**).
- ・MTシステムが普及している現在、その方法論の**妥当性を検討**しておきたい.

## 2. MT法

### 2.1 MT法と判別分析



判別分析・・・2つの群を想定する.

MT法・・・1つの群(単位空間)を想定する.

良品群・不良品群といっても, 良品群は1つの群をなすが, 不良品群は群をなすとは考えにくいなら, MT法を用いる.

田口先生のMT法の着想のきっかけ:

「幸福な家庭は互いにすべて似かよったものであり, 不幸な家庭はどこもその不幸のおもむきが異なっているものである」 (トルストイ『アンナ・カレーニナ』) 7/84

# 判別分析の考え方

第1母集団 [1]  $N(\vec{\mu}_1, \Sigma)$

第2母集団 [2]  $N(\vec{\mu}_2, \Sigma)$

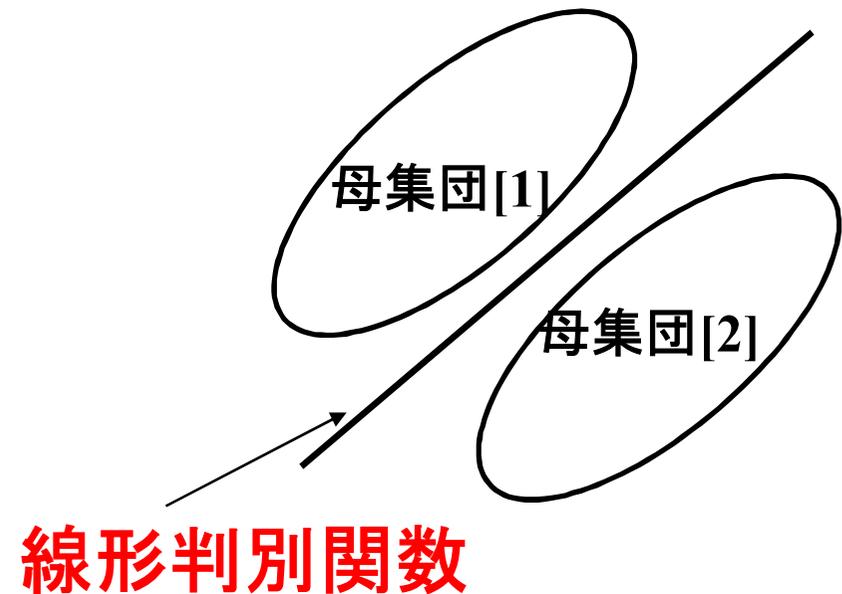
$$\hat{D}^{[1]2} = (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}_1)^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}_1)$$

$$\hat{D}^{[2]2} = (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}_2)^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}_2)$$

$$z = \frac{1}{2} (\hat{D}^{[1]2} - \hat{D}^{[2]2})$$

$z \geq 0 \Rightarrow \vec{x}$  は第2母集団

$z < 0 \Rightarrow \vec{x}$  は第1母集団



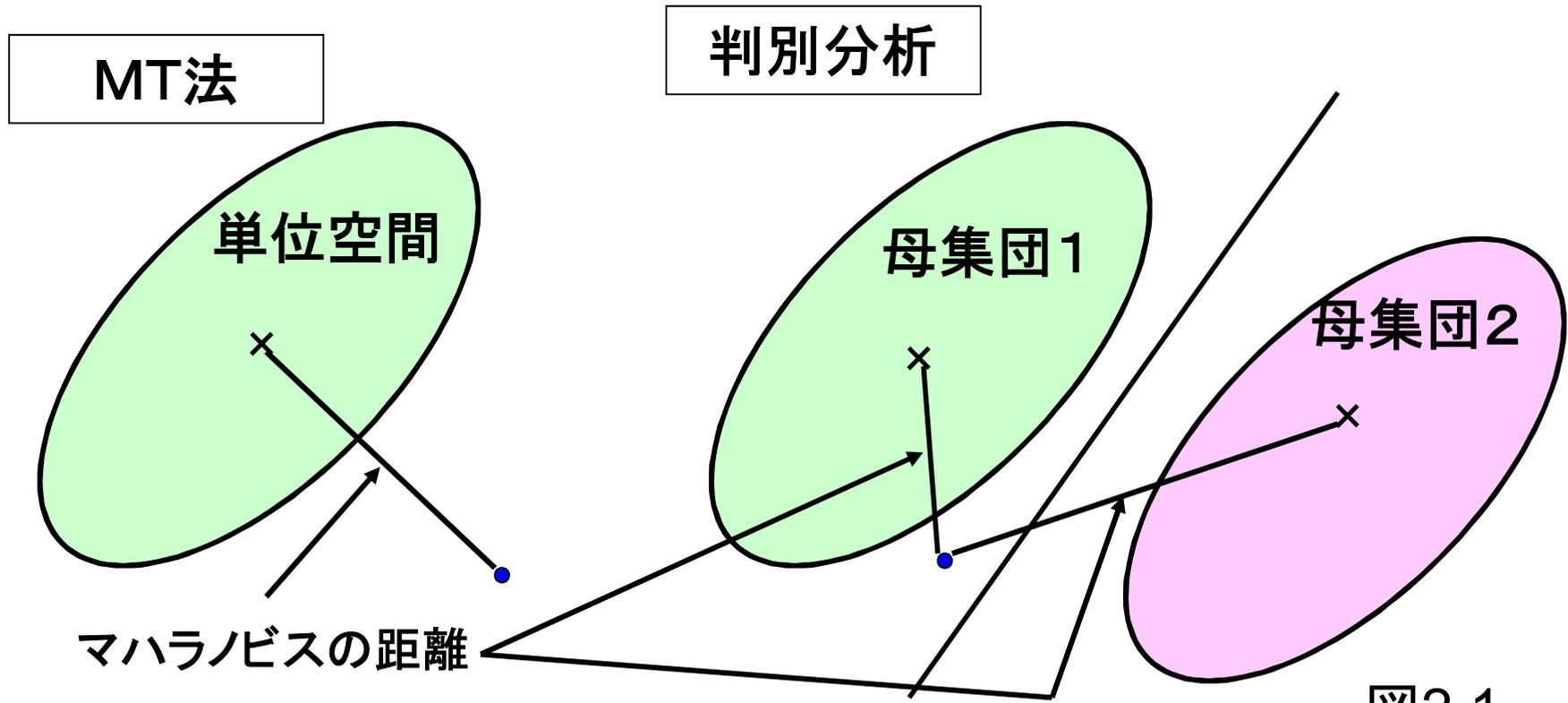


図2.1

MT法が有効なデータパターン

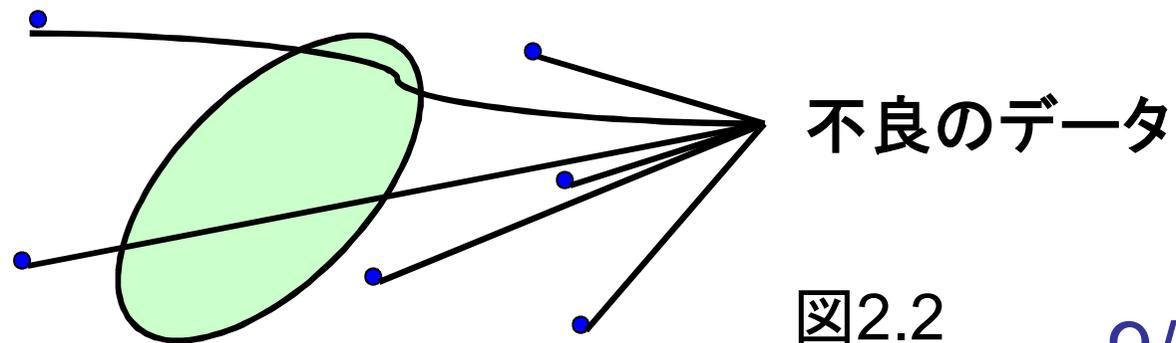


図2.2

## 2.2 MT法における予測バイアスの問題

(宮川・永田(2003))

$\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$   $p$ 次元正規分布

$$\hat{D}_i^2 = (\vec{x}_i - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_i - \hat{\vec{\mu}}) = \vec{z}_i^T R^{-1} \vec{z}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$D^2 = (\vec{x} - \vec{\mu})^T \Sigma^{-1} (\vec{x} - \vec{\mu})$$

$$D^2 \sim \chi^2(p)$$

$$E(D^2) = p, \quad V(D^2) = 2p$$

$p + a\sqrt{2p}$  : 棄却限界値

$$\hat{D}_i^{*2} \equiv \frac{1}{p} \hat{D}_i^2$$

$$\Rightarrow \overline{\hat{D}_i^{*2}} = 1$$

『単位空間』  
の名称由来

$$\vec{x}_0 \sim N(\vec{\mu}, \Sigma)$$

$$\hat{D}_0^2 = (\vec{x}_0 - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_0 - \hat{\vec{\mu}})$$

$$E(\hat{D}_0^2) = \frac{p(n+1)}{n-p-2}$$

推定量

$\Rightarrow n \gg p$  なら  $E(\hat{D}_0^2) \approx p$

表2.1

$n$	$p$	$E(D_0^2)$	bias
100	10	11.5	1.5
100	30	44.6	14.6
100	50	105.2	55.2
100	70	252.5	182.5
100	90	1136.3	1046.3
100	95	3198.3	3103.3

$n \gg p$  でないなら,  
バイアス調整が必要

### 3. MTA法(マハラノビス・タグチ・アジョイント法)

(田口(2002))



$$\hat{D}^2 = (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}})$$
$$= \vec{z}^T R^{-1} \vec{z}$$

12/84

多重共線性： $R^{-1}$  が存在しない

(1) サンプル数より変数の個数が多い ( $n < p$ )

(2) 変数間に線形関係がある

( $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = 0$ , 少なくとも2つの $a_i \neq 0$ )

$$\begin{aligned}\hat{D}^2 &= (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x} - \hat{\vec{\mu}}) \\ &= \vec{z}^T R^{-1} \vec{z}\end{aligned}$$

$R^{-1}$  を  $R$  の余因子行列で置き換える

$$\hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z}$$

余因子: 行列  $R$  から第  $i$  行, 第  $j$  列を取り除いた  $(p-1)$  次の行列の行列式を  $\Delta_{ij}$  と表すとき,  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$  ( $= R_{ij}$ ) を  $r_{ij}$  の余因子  
余因子行列  $\tilde{R}$ :  $(i, j)$  要素が  $R_{ji}$  の行列

### 3.1 MTA法の特徴 (宮川(2003), 宮川・永田(2003))

(例3.1)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$$

単位空間では

$$z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3 = 0$$

$\Rightarrow |R| = 0 \Rightarrow R$  の逆行列は存在しない ( $\text{rank } R = 2$ )

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \Rightarrow R_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = \frac{1}{4}$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow R_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{3} & 3 & -\sqrt{3} \\ 1 & -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z} = \frac{1}{4} (z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3)^2$$

単位空間では

$$z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3 = 0$$

単位空間では  $\hat{D}_A^2 = 0$

★ 単位空間外で  $\hat{D}_A^2 > 0$  なら判定の尺度になる.

★ 単位空間外で  $\hat{D}_A^2 = 0$  なら判定の尺度にならない.

一方,

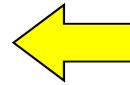
$$R\tilde{R} = |R| I_p \quad (I_p \text{ は } p \text{ 次の単位行列})$$

$$R^{-1} \text{ が存在するならば } \tilde{R} = |R| R^{-1}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z} = |R| \vec{z}^T R^{-1} \vec{z}$$

(例3.2)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



単位空間では

$$z_1 - z_2 = 0, \quad z_3 - z_4 = 0$$

$\Rightarrow |R| = 0 \Rightarrow R$  の逆行列は存在しない ( $\text{rank } R = 2$ )

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = 0$$

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R_{21} = (-1)^{2+1} \Delta_{21} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z} = 0$$

$R$  のランクが2つ以上落ちると  
(変数間に2つ以上の(線形)関係が成り立つと)

$$\tilde{R} = 0 \Rightarrow \hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z} = 0$$

$\Rightarrow$  MTA法は機能しない.

## MTA法の本質(まとめ)

(1)  $R^{-1}$  が存在するとき:

$$\hat{D}_A^2 = \vec{z}^T \tilde{R} \vec{z} = |R| \vec{z}^T R^{-1} \vec{z} = |R| \hat{D}^2$$

田口博士:  
「分散がゼロの変数に  
着目しなさい。」

「単位空間外で変動  
するなら有効な変数」

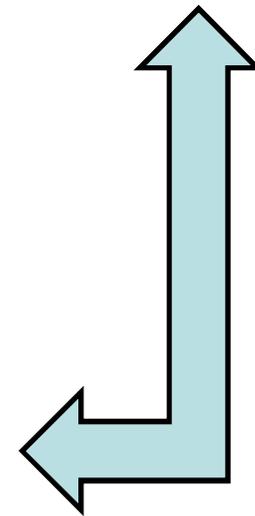
(2)  $R$  のランクが1つだけ落ちるとき:

$$\hat{D}_A^2 = a(\text{単位空間での変数間の線形関係式})^2$$

$$\text{単位空間内: } \hat{D}_A^2 = 0$$

$$\textcircled{1} \text{ 単位空間外: } \hat{D}_A^2 > 0 \quad \dots \quad \hat{D}_A^2 \text{ は有効}$$

$$\textcircled{2} \text{ 単位空間外: } \hat{D}_A^2 = 0 \quad \dots \quad \hat{D}_A^2 \text{ は無効}$$



(3)  $R$  のランクが2つ以上落ちるとき:

常に,  $\hat{D}_A^2 = 0$  となってMTA法は機能しない.

## 3.2 MTA法の改良手法 (宮川・永田(2003))

スペクトル分解:

$$R = \lambda_1 \bar{w}_1 \bar{w}_1^T + \lambda_2 \bar{w}_2 \bar{w}_2^T + \dots + \lambda_p \bar{w}_p \bar{w}_p^T$$

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$  : 固有値

$\bar{w}_i$  :  $\lambda_i$  に対応する長さ1の固有ベクトル

$\Rightarrow R^{-1}$  が存在するなら

$$R^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} \bar{w}_1 \bar{w}_1^T + \frac{1}{\lambda_2} \bar{w}_2 \bar{w}_2^T + \dots + \frac{1}{\lambda_p} \bar{w}_p \bar{w}_p^T$$

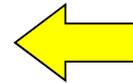
$R$  のランクが1つだけ落ちる ( $\lambda_p = 0$ )

⇒ 変数間に線形関係式が1つ成立

⇒  $\lambda_p$  の固有ベクトル  $\vec{w}_p$  が線形関係式の係数

(例3.3)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 & \sqrt{3}/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 1 \end{bmatrix}$$



単位空間では

$$z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad \vec{w}_1 = \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{2}{\sqrt{10}}, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \right)^T$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}, \quad \vec{w}_2 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

$$\lambda_3 = 0, \quad \vec{w}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^T$$

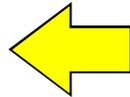
$R$  のランクが  $(p - q)$  個落ちる ( $\lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} = \dots = \lambda_p = 0$ )

$\Rightarrow$  変数間に線形関係式が  $(p - q)$  個成立

$\Rightarrow \lambda_{q+1}, \lambda_{q+2}, \dots, \lambda_p$  の固有ベクトルが線形関係式の係数

(例3.4)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 1 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$



単位空間では

$$z_1 - z_2 = 0, \quad z_3 - z_4 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \vec{w}_1 = (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)^T$$

$$\lambda_2 = 1, \quad \vec{w}_2 = (0.5, 0.5, -0.5, -0.5)^T$$

$$\lambda_3 = 0, \quad \vec{w}_3 = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0 \right)^T$$

$$\lambda_4 = 0, \quad \vec{w}_4 = \left( 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^T$$

## 閾値 $c$ を設定

$$\lambda_{q+1} < c, \lambda_{q+2} < c, \dots, \lambda_p < c$$

$\Rightarrow \lambda_{q+1} = \lambda_{q+2} = \dots = \lambda_p = 0$  とみなす.

$$\Rightarrow R \approx \lambda_1 \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{w}}_1^T + \dots + \lambda_q \bar{\mathbf{w}}_q \bar{\mathbf{w}}_q^T + \lambda_{q+1} \bar{\mathbf{w}}_{q+1} \bar{\mathbf{w}}_{q+1}^T + \dots + \lambda_p \bar{\mathbf{w}}_p \bar{\mathbf{w}}_p^T$$

削除する

$$\Rightarrow R^+ \approx \frac{1}{\lambda_1} \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{w}}_1^T + \dots + \frac{1}{\lambda_q} \bar{\mathbf{w}}_q \bar{\mathbf{w}}_q^T$$

$\Rightarrow$  第1種の距離の2乗:

$$\hat{D}_{(1)}^2 = \bar{\mathbf{z}}^T R^+ \bar{\mathbf{z}}$$

第2種の距離の2乗:

$$\hat{D}_{(2)}^2 = \left( \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{w}}_{q+1} \right)^2 + \left( \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{w}}_{q+2} \right)^2 + \dots + \left( \bar{\mathbf{z}}^T \bar{\mathbf{w}}_p \right)^2$$

(例3.5) 例3.3に基づいて

$$\begin{aligned} R^+ &= \frac{1}{\lambda_1} \bar{\mathbf{w}}_1 \bar{\mathbf{w}}_1^T + \frac{1}{\lambda_2} \bar{\mathbf{w}}_2 \bar{\mathbf{w}}_2^T \\ &= \frac{2}{5} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} + \frac{2}{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 28 & 2\sqrt{3} & -22 \\ 2\sqrt{3} & 4 & 2\sqrt{3} \\ -22 & 2\sqrt{3} & 28 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{\mathbf{D}}_{(1)}^2 &= \tilde{\mathbf{z}}^T R^+ \tilde{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

$$\vec{z}^T \vec{w}_3 = (z_1, z_2, z_3) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} (z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3)$$

$$\Rightarrow \tilde{D}_{(2)}^2 = (\vec{z}^T \vec{w}_3)^2 = \frac{1}{5} (z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3)^2$$

単位空間では

$$z_1 - \sqrt{3}z_2 + z_3 = 0$$

(例3.6) 例3.4に基づいて

$$R^+ = \frac{1}{\lambda_1} \bar{w}_1 \bar{w}_1^T + \frac{1}{\lambda_2} \bar{w}_2 \bar{w}_2^T$$
$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix} (0.5, 0.5, 0.5, 0.5) + \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{pmatrix} (0.5, 0.5, -0.5, -0.5)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ 1 & 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 1 \\ -0.5 & -0.5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{D}_{(1)}^2 = \tilde{z}^T R^+ \tilde{z}$$

$$\vec{z}^T \vec{w}_3 = (z_1, z_2, z_3, z_4) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_1 - z_2)$$

$$\vec{z}^T \vec{w}_4 = (z_1, z_2, z_3, z_4) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (z_3 - z_4)$$

単位空間では

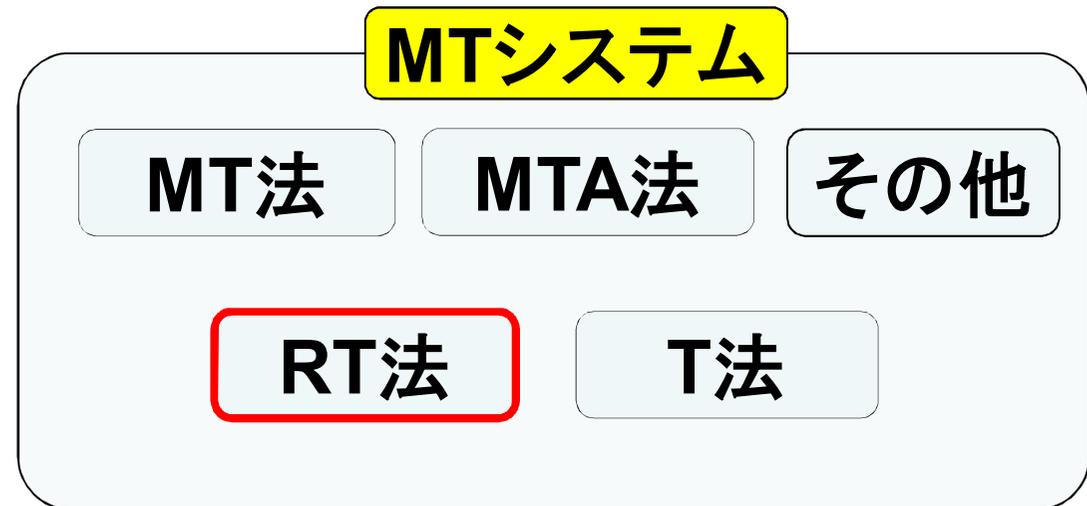
$$z_1 - z_2 = 0, \quad z_3 - z_4 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{D}_{(2)}^2 = (\vec{z}^T \vec{w}_3)^2 + (\vec{z}^T \vec{w}_4)^2 = \frac{1}{2} (z_1 - z_2)^2 + \frac{1}{2} (z_3 - z_4)^2$$

## = 要点 =

- MTA法では情報の一部しか使用しておらず, しかもMTA法では判別能力を有しない場合もある.
  - MTA法は多重共線性の問題を部分的に解決.
  - 多重共線性を構成する変数とそれ以外の変数に基づいて2種類の距離を作成することにより, MT法が抱える多重共線性の問題を解決できる.
- (補足)固有値の小さな部分の対処の方法については, いろいろなアイデアが提出されている.

## 4. RT法 (Recognition Taguchi法)



- ・MT法の中では一番新しい手法
  - ・RT法では、パラメータ設計と同様の簡便な計算だけ。
  - ・標準SN比の考え方を応用して信号のない場合を取り扱う。
  - ・・・独特のアイディアに満ちた方法。
- 画素データのような「2値データ」だけでなく、「連続量ないしは多値離散量と呼ぶ」に対しても適用できる。 29/84

「連続量や多値離散量のデータ」にRT法:

- ・注意が必要.
- ・RT法で用いられている距離には望ましくない性質

本章では, そのような性質について議論

改良する方法を提示

## 4.1 RT法の概要 (田口(2006a))

表4.1 初期データの形式と統計量

No.	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	$L$	$S_T$	$V_e$	$Y_1$	$Y_2$	$D^2$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1p}$	$L_1$	$S_{T1}$	$V_{e1}$	$Y_{11}$	$Y_{21}$	
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2p}$	$L_2$	$S_{T2}$	$V_{e2}$	$Y_{21}$	$Y_{22}$	
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nk}$	$L_n$	$S_{Tn}$	$V_{en}$	$Y_{n1}$	$Y_{n2}$	
平均	$m_1$	$m_2$	...	$m_p$						

$$r = \sum_{j=1}^p m_j^2$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^p m_j x_{1j} = m_1 x_{11} + m_2 x_{12} + \dots + m_p x_{1p}$$

$$Y_{11} = \beta_1 = L_1 / r$$

$$Y_{21} = \sqrt{V_{e1}}$$

$$S_{e1} = S_{T1} - S_{\beta_1} = \sum_{j=1}^p x_{1j}^2 - L_1^2 / r, \quad V_{e1} = \frac{S_{e1}}{k-1}$$

表4.1 初期データの形式と統計量

No.	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	$L$	$S_T$	$V_e$	$Y_1$	$Y_2$	$D^2$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$V_{11} = \frac{S_{11}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2}{n-1}$				$Y_{11}$	$Y_{21}$	$D^2_1$	
2	$x_{21}$	$x_{22}$					$Y_{21}$	$Y_{22}$	$D^2_2$	
⋮	⋮	⋮					⋮	⋮	⋮	
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	$V_{22} = \frac{S_{22}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2}{n-1}$				$Y_{n1}$	$Y_{n2}$	$D^2_n$	
平均	$m_1$	$m_2$								

RT法で用いられている  
マハラノビスの距離

$$V_{12} = \frac{S_{12}}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_{i1} - \bar{Y}_1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2)}{n-1}$$

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - \bar{Y}_1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

## 新たなデータの採取と統計量の計算

	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	$L$	$S_T$	$V_e$	$Y_1$	$Y_2$	$D^2$
新	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	$L$	$S_T$	$V_e$	$Y_1$	$Y_2$	$D^2$

RT法で用いられている

マハラノビスの距離

$$D^2 = (1/2)[V_{22}(Y_1 - \bar{Y}_1)^2 - 2V_{12}(Y_1 - \bar{Y}_1)(Y_2 - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_2 - \bar{Y}_2)^2]$$

$m_1, m_2, \dots, m_p, V_{11}, V_{22}, V_{12}, \bar{Y}_1, \bar{Y}_2$  : 初期データより計算した値を使う

初期データより定めた閾値と比較して異常かどうか判定

## 4.2 RT法の適用上の注意 (永田・土居(2009)) —変数の単位の問題—

一番初期に提案されたMTシステムでは

$$\hat{D}_i^2 = (\vec{x}_i - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_i - \hat{\vec{\mu}}) = \vec{z}_i^T R^{-1} \vec{z}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\hat{D}_0^2 = (\vec{x}_0 - \hat{\vec{\mu}})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_0 - \hat{\vec{\mu}})$$

- ・マハラノビスの距離では各変数間の単位が異なってもよい
- ・マハラノビスの距離は変数の単位に依存しない量

## RT法の適用では:

- ・ 全ての変数(項目)の単位が揃っている, または, 無次元数
- ・ 田口: 「 $p$ 個の項目  $x_1, x_2, \dots, x_p$  が全て **同一次元**のデータ (たとえば画素のデータ, 時系列のデータなど) であるとき」
- ・ 田口(2006a,b)では **文字認識問題**を意図してRT法が提案
- ・ 単位の問題に配慮せずに適用されている事例が散見
- ・ 変数間で単位が異なると,  $r$  や  $L$  などの計算において単位が異なるものを加える → **加え合わさった量の意味が不明**

$$r = \sum_{j=1}^p m_j^2$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^p m_j x_{1j} = m_1 x_{11} + m_2 x_{12} + \dots + m_p x_{1p}$$

$$S_{e1} = S_{T1} - S_{\beta 1} = \sum_{j=1}^p x_{1j}^2 - L_1^2 / r, \quad V_{e1} = \frac{S_{e1}}{k-1}$$

全ての項目の単位が揃っていても、揃っていなくても・・・  
大久保・永田(2012)は次を示した.

・他の項目よりも非常に大きな絶対値をとる項目があれば、その項目により判定結果がほぼ決まる.

・他の項目に比べ微小な値しかとらない項目は、判定結果にほとんど寄与しない.

## 4.3 統計量の意味と基本的性質 (永田・土居(2009))

$r \neq 0$  (少なくとも1つの  $m_j$  はゼロではない) を仮定している  
もし,  $r = 0$  ( $m_1 = m_2 = \dots = m_p = 0$ ) なら,  $Y_{1i}$  は定義できない

$$r = \sum_{j=1}^p m_j^2$$

$$Y_{1i} = \beta_1 = L_1 / r$$

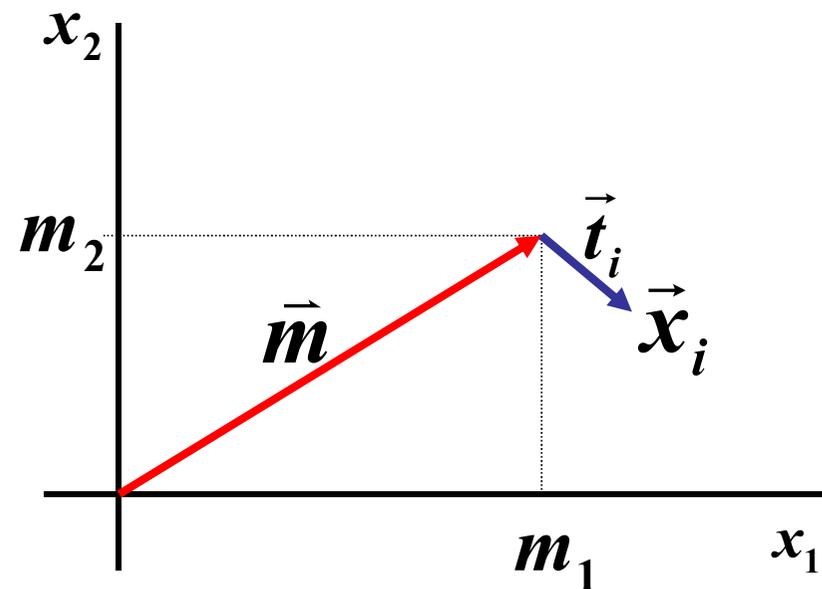
単位空間の  $n$  個の点を次のように表す

$$\begin{aligned}\vec{x}_i &= (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})^T \\ &= (m_1 + t_{i1}, m_2 + t_{i2}, \dots, m_p + t_{ip}) \\ &= \vec{m} + \vec{t}_i\end{aligned}$$

$$\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_p)^T$$

$$\vec{t} = (t_1, t_2, \dots, t_p)^T$$

$$\vec{t} = \vec{0}$$



$p=2$  の場合 37/84

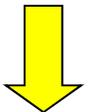
$$Y_{i1} = 1 + \vec{m}^T \vec{t}_i / r$$

$$\vec{\bar{t}} = \vec{0}$$

$$S_{ei} = \vec{t}_i^T \vec{t}_i - (\vec{m}^T \vec{t}_i)^2 / r$$

$$(Y_{i2} = \sqrt{V_{ei}} = \sqrt{S_{ei} / (k - 1)})$$

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_{i1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (1 + \vec{m}^T \vec{t}_i / r) \\ &= 1 + \vec{m}^T \vec{\bar{t}} / r = 1 \end{aligned}$$



$$Y_{i1} = 1 \Leftrightarrow \vec{m}^T \vec{t}_i = 0$$

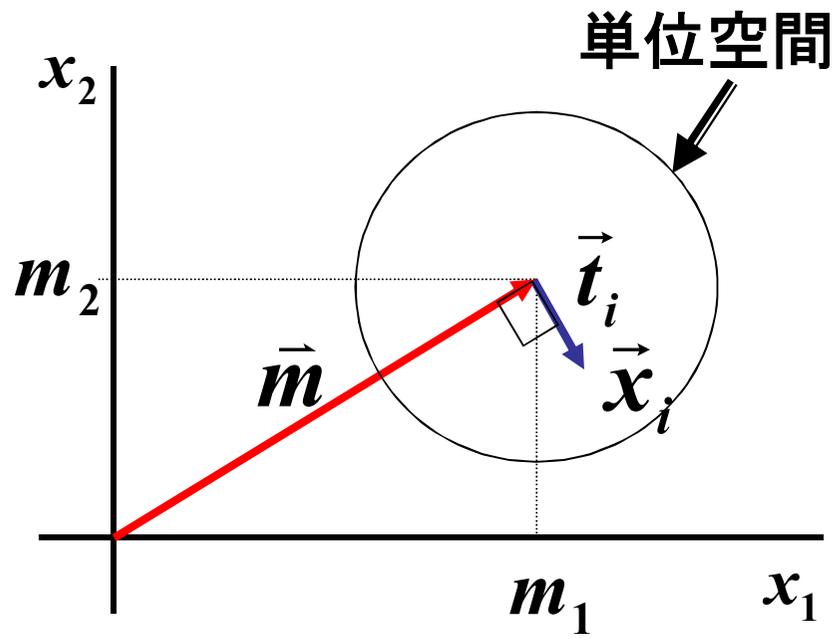
$$\Leftrightarrow S_{ei} = \vec{t}_i^T \vec{t}_i$$

iが抜けて  
いました

$$Y_{i1} = 1$$

$$Y_{i2} = 0$$

$$\vec{t}_i = \vec{0} \quad (\Leftrightarrow \vec{x}_i = \vec{m})$$



$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

$$D_i^2 = (1/2)[V_{11}\bar{Y}_2^2] > 0$$

中心位置でのマハラノビス  
の距離が0でない ★ 38/84

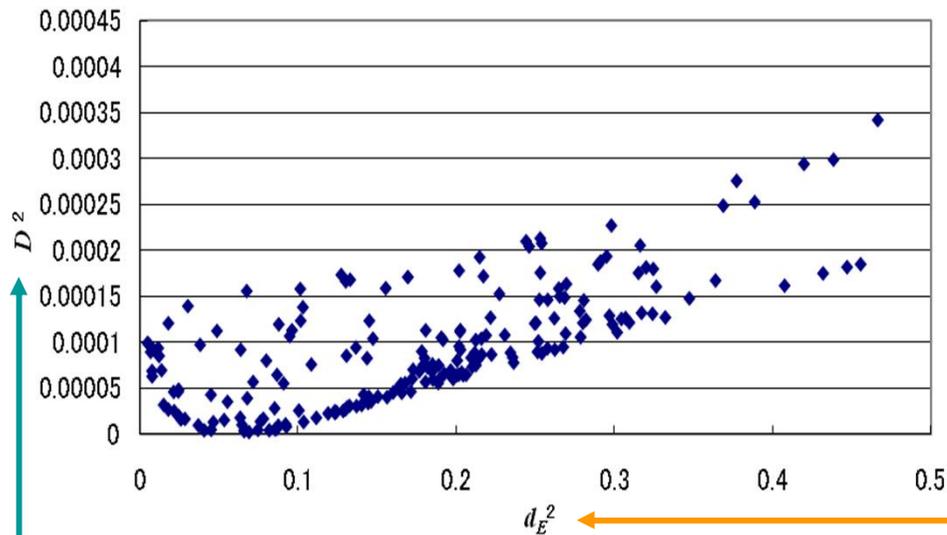
## 4.4 RT法で用いるマハラノビスの距離の性質 (永田・土居(2009))

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

- ・項目数 $p$ , 各項目の従う確率分布, 各項目間の相関関係を設定
- ・200組( $n=200$ )の乱数を発生
- ・200個の  $D_i^2$  ( $i=1,2,\dots,200$ )の値を求める
- ・各データに対して平均ベクトルからのユークリッド距離の2乗を求め,  $(d_{Ei}^2, D_i^2)$  ( $i=1,2,\dots,200$ )の散布図を考察対象

$$\begin{aligned} d_{Ei}^2 &= (\vec{x}_i - \vec{m})^T (\vec{x}_i - \vec{m}) \\ &= (x_{i1} - m_1)^2 + (x_{i2} - m_2)^2 + \dots + (x_{ip} - m_p)^2 \end{aligned}$$

(例4.1) 2項目 ( $p=2$ ),  $x_1 \sim U(1,2)$ ,  $x_2 \sim U(4,5)$ , 独立

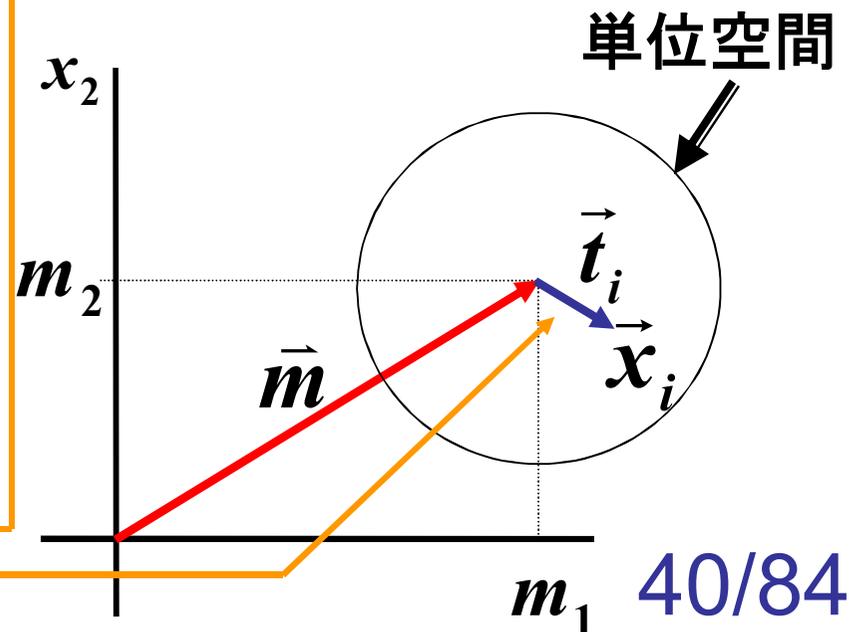


$(d_{Ei}^2, D_i^2)$ の散布図

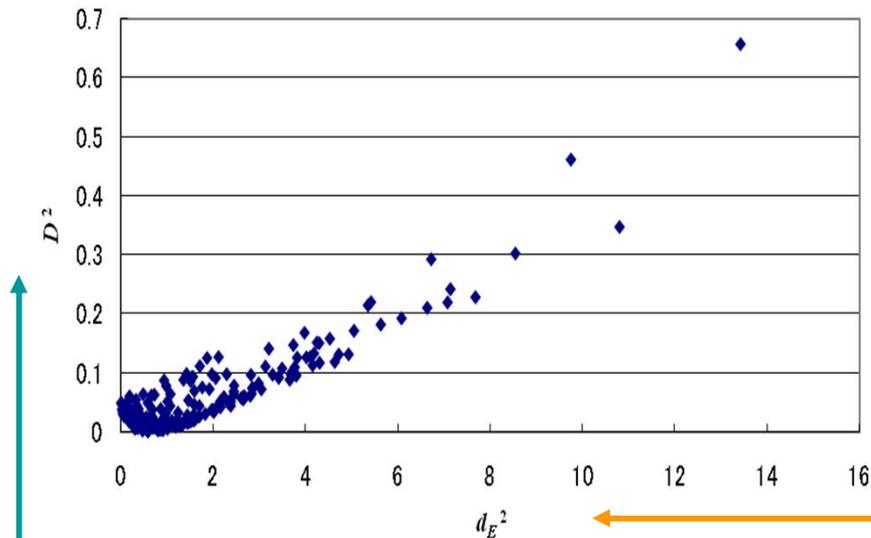
図4.1 RT法のマハラノビスの距離のプロット( $p=2$ , 一様分布, 独立)

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

$$d_{Ei}^2 = (\vec{x}_i - \vec{m})^T (\vec{x}_i - \vec{m})$$



(例4.2) 2項目 ( $p=2$ ),  $x_1 \sim N(1,1^2)$ ,  $x_2 \sim N(2,1^2)$ , 独立



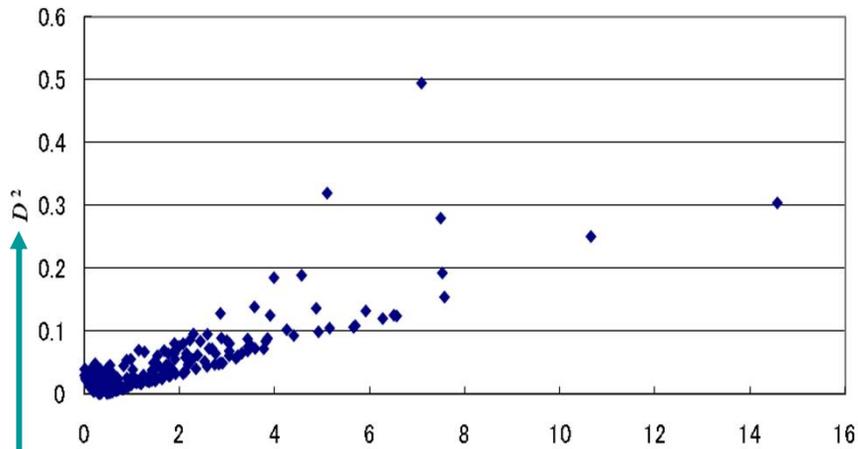
$(d_{Ei}^2, D_i^2)$ の散布図

図4.2 RT法のマハラノビスの距離の  
プロット( $p=2$ , 正規分布, 独立)

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

$$d_{Ei}^2 = (\vec{x}_i - \vec{m})^T (\vec{x}_i - \vec{m})$$

(例4.3) 2項目 ( $p=2$ ),  $x_1 \sim N(1,1^2)$ ,  $x_2 \sim N(2,1^2)$ , 相関あり

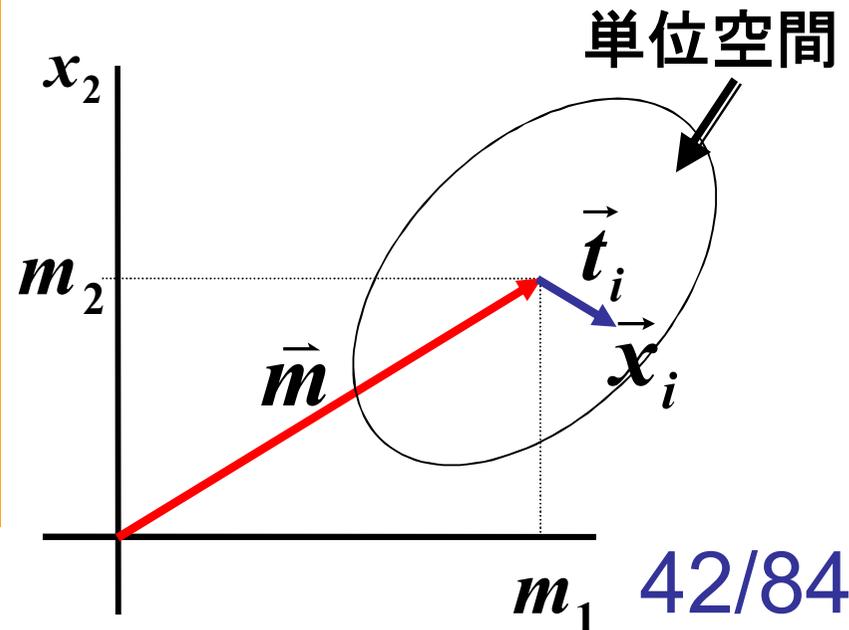


$(d_{Ei}^2, D_i^2)$ の散布図

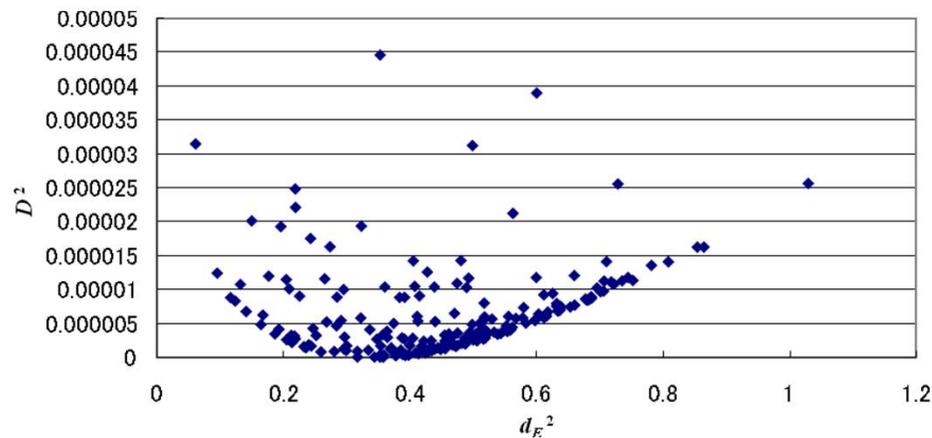
図4.3 RT法のマハラノビスの距離のプロット  
( $p=2$ , 正規分布, 相関=0.5)

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

$$d_{Ei}^2 = (\vec{x}_i - \vec{m})^T (\vec{x}_i - \vec{m})$$



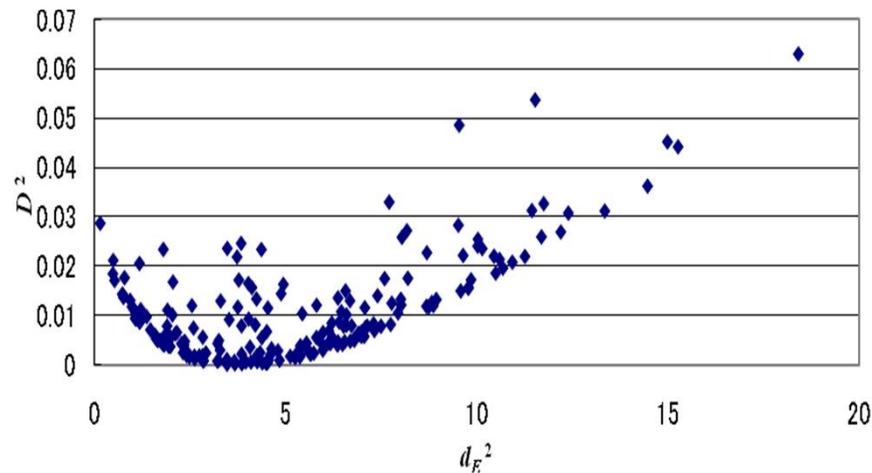
(例4.4) 5項目 ( $p=5$ ),  $x_1 \sim U(1,2)$ ,  $x_2 \sim U(2,3)$ ,  
 $x_3 \sim U(3,4)$ ,  $x_4 \sim U(4,5)$ ,  $x_5 \sim U(5,6)$ , 独立



$(d_{Ei}^2, D_i^2)$ の散布図

図4.4 RT法のマハラノビスの距離のプロット  
( $p=5$ , 一様分布, 独立)

(例4.5) 5項目 ( $p=5$ ),  $x_1 \sim N(1,1^2)$ ,  $x_2 \sim N(1,1^2)$ ,  
 $x_3 \sim N(1.5,1^2)$ ,  $x_4 \sim N(2,1^2)$ ,  $x_5 \sim N(2,1^2)$ , 独立



$(d_{Ei}^2, D_i^2)$ の散布図

図4.5 RT法のマハラノビスの距離のプロット  
( $p=5$ , 正規分布, 独立)

## 4.5 RT法で用いるマハラノビスの距離の改良1 (永田・土居(2009))

$$D_i^2 = (1/2)[V_{22}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}(Y_{i1} - 1)(Y_{i2} - \bar{Y}_2) + V_{11}(Y_{i2} - \bar{Y}_2)^2]$$

距離についての望ましい性質

- ・単位空間の中心位置では0
- ・中心位置から離れるにしたがって増加していくと考えられる距離

$$D_i^{\#2} = (1/2)[V_{22}^{\#}(Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2 - 2V_{12}^{\#}(Y_{i1} - \bar{Y}_1)Y_{i2} + V_{11}^{\#}Y_{i2}^2]$$

$$V_{11}^{\#} = \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - \bar{Y}_1)^2 / n$$

$$V_{22}^{\#} = \sum_{i=1}^n Y_{i2}^2 / n$$

$$V_{12}^{\#} = \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - \bar{Y}_1)Y_{i2} / n$$

(例4.6) 例4.1と同じ乱数  
2項目 ( $p=2$ ),  
 $x_1 \sim U(1,2)$ ,  $x_2 \sim U(4,5)$   
独立

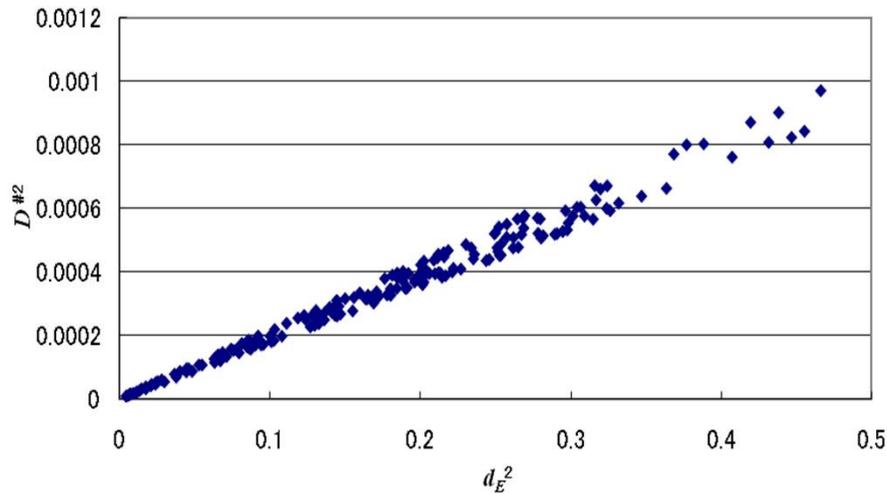


図4.6  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=2$ , 一様分布, 独立)

(例4.7) 例4.2と同じ乱数  
2項目 ( $p=2$ ),  
 $X_1 \sim N(1,1^2)$ ,  $X_2 \sim N(2,1^2)$   
独立

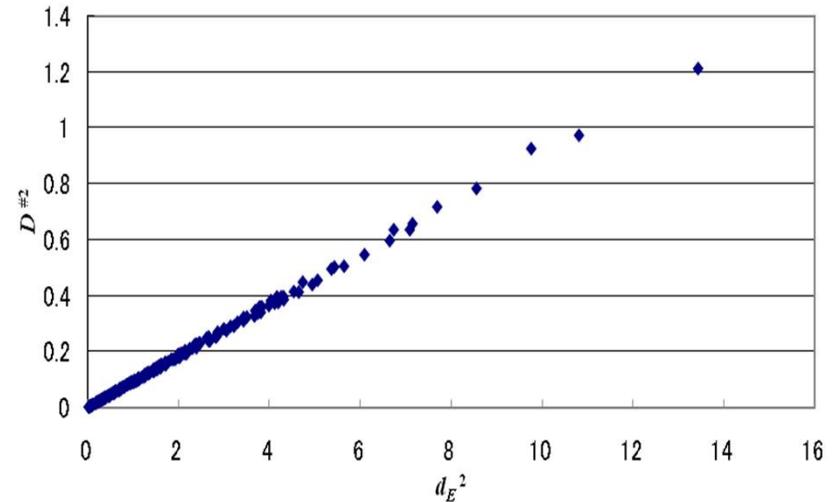
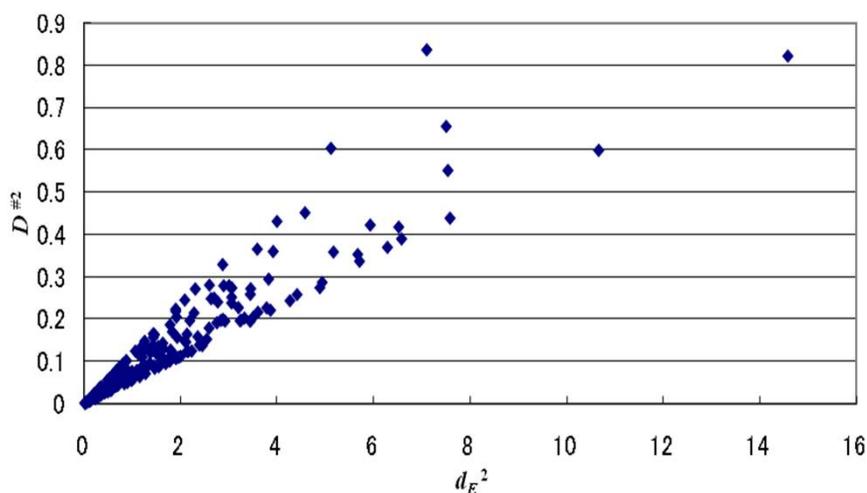
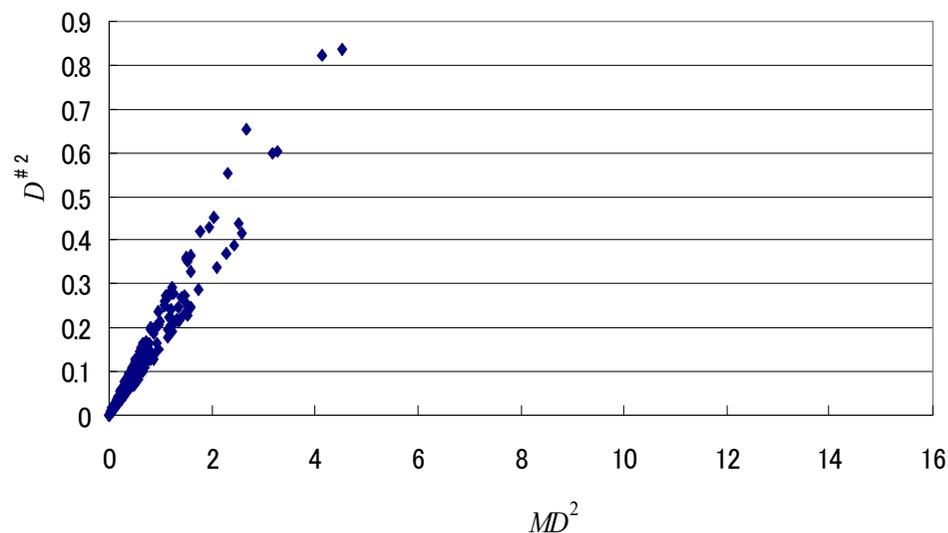


図4.7  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=2$ , 正規分布, 独立)

(例4.8) 例4.3と同じ乱数,  
 2項目 ( $p=2$ ),  
 $X_1 \sim N(1, 1^2)$ ,  $X_2 \sim N(2, 1^2)$   
 相関係数=0.5



(a)  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$  の散布図



(b)  $(MD_i^2, D_i^{\#2})$  の散布図

図4.8  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$  および  $(MD_i^2, D_i^{\#2})$  の散布図  
 ( $p=2$ , 正規分布, 相関係数=0.5)

47/84

$$d_{Ei}^2 = (\vec{x}_i - \vec{m})^T (\vec{x}_i - \vec{m})$$

$$MD_i^2 = (\vec{x}_i - \vec{m})^T \hat{\Sigma}^{-1} (\vec{x}_i - \vec{m})$$

(例4.9) 例5.4と同じ乱数  
5項目 ( $p=5$ ),

$$x_1 \sim U(1,2), x_2 \sim U(2,3),$$

$$x_3 \sim U(3,4), x_4 \sim U(4,5),$$

$$x_5 \sim U(5,6)$$

独立

(例4.10) 例4.5と同じ乱数  
5項目 ( $p=5$ ),

$$x_1 \sim N(1,1^2), x_2 \sim N(1,1^2),$$

$$x_3 \sim N(1.5,1^2), x_4 \sim N(2,1^2),$$

$$x_5 \sim N(2,1^2)$$

独立

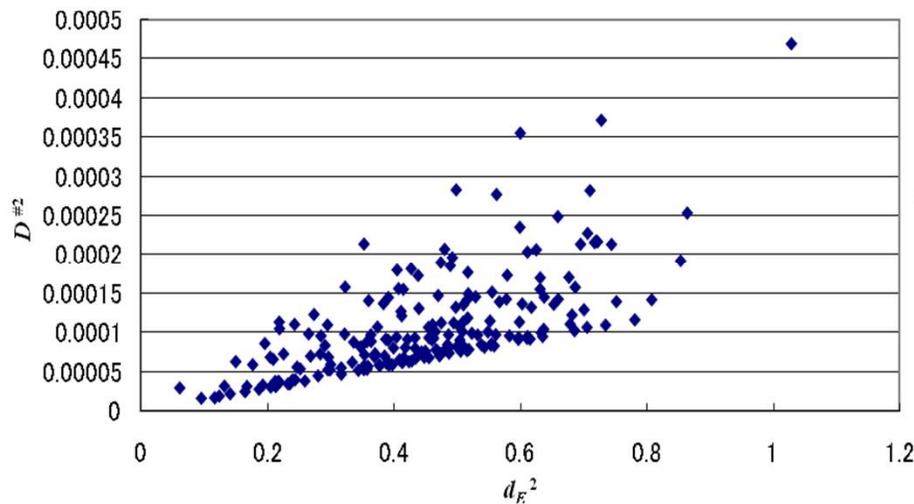


図4.9  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=5$ , 一様分布, 独立)

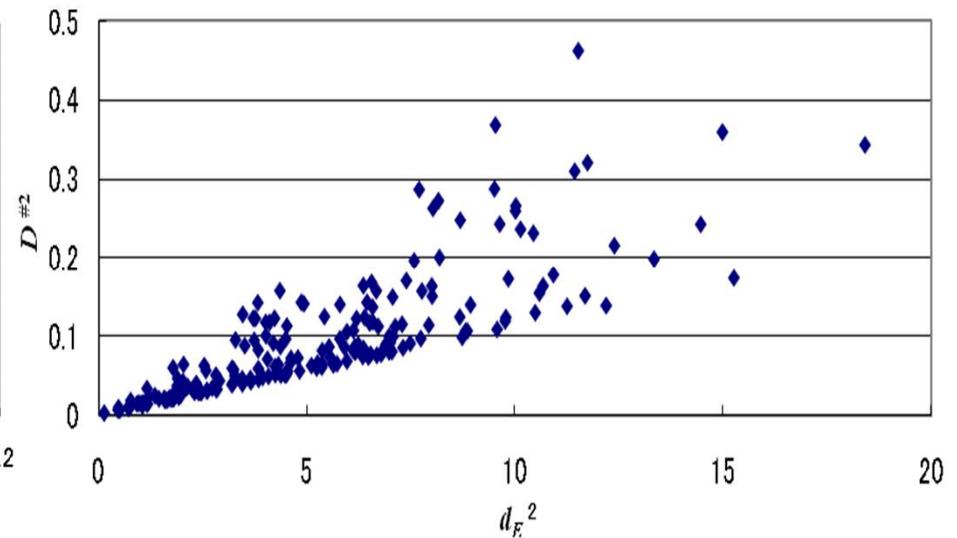


図4.10  $(d_{Ei}^2, D_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=5$ , 正規分布, 独立)

## さらなる改良

$$D_i^{\#2} = (1/2)[V_{22}^{\#}(Y_{i1} - 1)^2 - 2V_{12}^{\#}(Y_{i1} - 1)Y_{i2} + V_{11}^{\#}Y_{i2}^2]$$



$$DC_i^{\#2} = \frac{1}{2}\{(Y_{i1} - 1)^2 V_{22}^{\#} - 2(Y_{i1} - 1)Y_{i2} \sqrt{p-1} V_{12}^{\#} + Y_{i2}^2 (p-1) V_{11}^{\#}\}$$

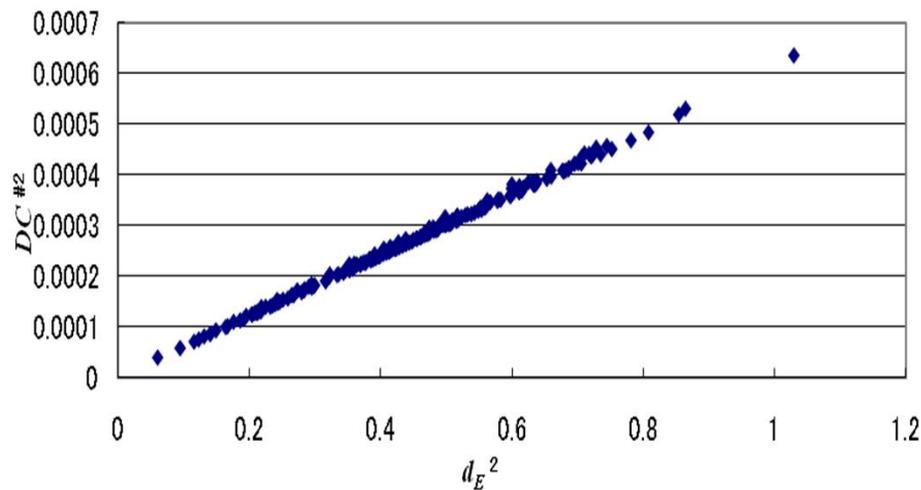


図4.11  $(d_{Ei}^2, DC_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=5$ , 一様分布, 独立)

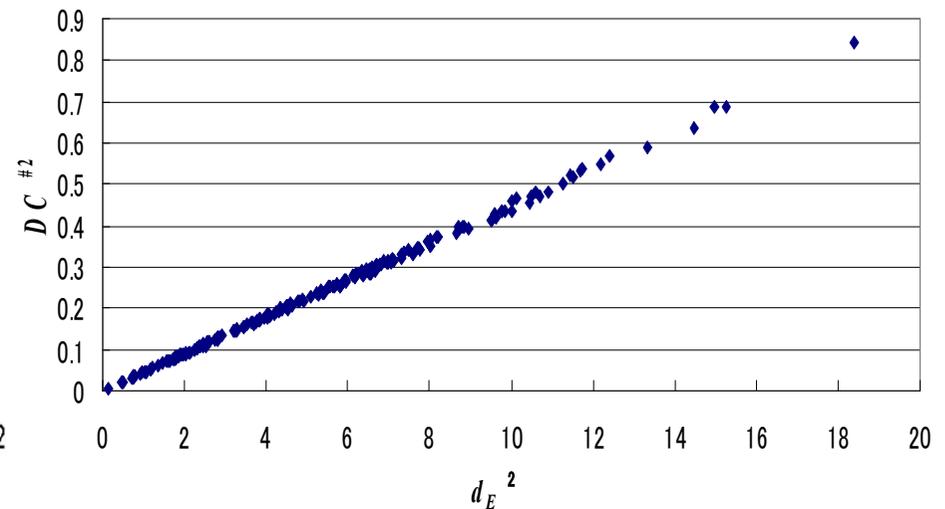


図4.12  $(d_{Ei}^2, DC_i^{\#2})$ の散布図  
( $p=5$ , 正規分布, 独立)

## = 要点 =

- ・RT法を適用する際には，各変数の単位が同じか各変数が無次元数でなければならない。
- ・RT法の距離は，単位空間の中心位置で大きめの値を取ってしまい，中心から少し離れたところでゼロになるという望ましくない性質がある。
- ・距離  $DC^{#2}$  はRT法の望ましくない性質を改良する。

## 4.6 RT法で用いるマハラノビスの距離の改良2 (大久保・永田(2012))

RT法:すべての項目の**単位が同じ**, または, **無次元数**

表4.1 初期データの形式と統計量

No.	$x_1$	$x_2$	...	$x_p$	$L$	$S_T$	$V_e$	$Y_1$	$Y_2$	$D^2$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1p}$	$L_1$	$S_{T1}$	$V_{e1}$	$Y_{11}$	$Y_{21}$	
2	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2p}$	$L_2$	$S_{T2}$	$V_{e2}$	$Y_{21}$	$Y_{22}$	
⋮	⋮	⋮	...	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$x_{n1}$	$x_{n2}$	...	$x_{nk}$	$L_n$	$S_{Tn}$	$V_{en}$	$Y_{n1}$	$Y_{n2}$	
平均	$m_1$	$m_2$	...	$m_p$						

$$r = \sum_{j=1}^p m_j^2$$

$$L_1 = \sum_{j=1}^p m_j x_{1j} = m_1 x_{11} + m_2 x_{12} + \dots + m_p x_{1p}$$

$$Y_{11} = \beta_1 = L_1 / r$$

51/84

通常の**標準化**⇒RT法では機能しない( $r=0$ となるから)

- **RT-PC法:**  
Y1: 相関係数行列に基づく第1主成分  
Y2: 残差の標準偏差
- **RT-SD法:**  
項目ごとにその標準偏差で割って無次元化
- **RT-M法:**  
項目ごとにその平均で割って無次元化
- **RT-PC+法:**  
Y1: 相関係数行列に基づく第1主成分  
Y2: 第2主成分  
...  
Yq: 残差の標準偏差

## ★34項目(単位が異なる)のベンチマークデータで検討

- ・単位空間のサンプルサイズが十分大きい:

$MT > RT-PC+ > RT-PC \doteq RT-SD \gg RT-M \gg RT$

$A > B \Leftrightarrow A$ 法のほうがB法より精度がよい

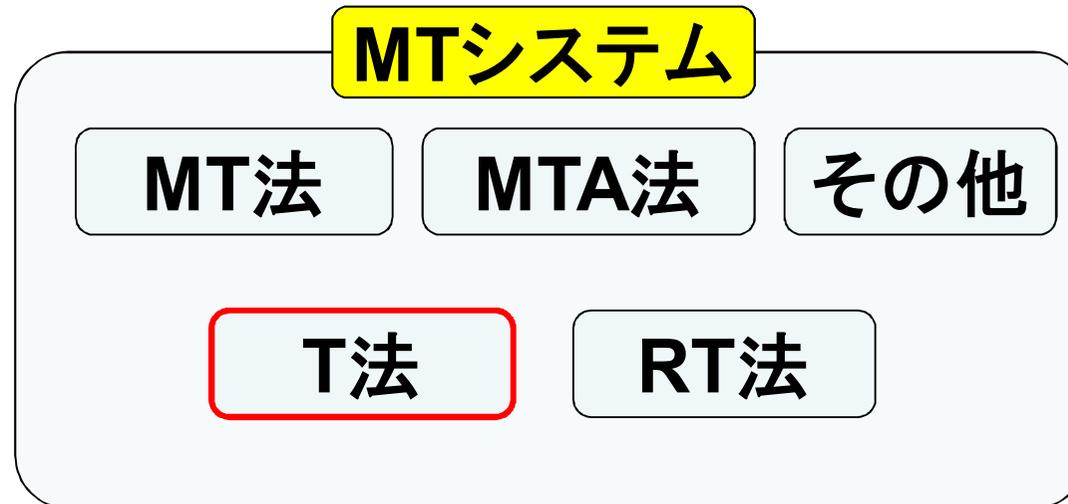
- ・単位空間のサンプルサイズが十分大きくない:

$RT-PC+ > RT-PC \doteq RT-SD \gg MT \gg RT-M \gg RT$

## ★数理的検討+シミュレーション

- ・RT-SD:ベクトルの方向によって検出力に違い
- ・RT-PC:ベクトルの方向によって検出力に違いはない

## 5. T法



- ・サンプル数が項目数よりも**少ない場合**でも実行可能
- ・**多重共線性**の問題がない
- ・計算が**簡便**である

## 5.1 T法の概略（田口(2005b)）

表5.1 全メンバーのデータ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$N$		

$a$

中位

残り

表5.2 単位空間のデータ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$a$		

表5.3 信号メンバーのデータ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$l$		

項目 = 説明変数

出力値 = 目的変数

表5.2 単位空間のデータ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$a$		

表5.3 信号メンバーのデータ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$l$	$x'_{ij}$	$y'_i$

$$\bar{x}_j = \frac{1}{a}(x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{aj})$$

→  $\bar{y} = M_0 = \frac{1}{a}(y_1 + y_2 + \dots + y_a)$

信号データの規準化

$$X_{ij} = x'_{ij} - \bar{x}_j$$

$$M_i = y'_i - \bar{y}$$

表5.4 規準化された信号データ

No.	項目1...項目 $p$	出力値
1		
$l$	$X_{ij}$	$M_i$

表5.4 規準化された信号データ

メンバー	項目1	項目2	...	項目 $p$	$M$
1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1p}$	$M_1$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2p}$	$M_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$l$	$X_{l1}$	$X_{l2}$	...	$X_{lp}$	$M_l$

まず, 項目1 vs  $M$

$$X_1 = \beta_1 M$$

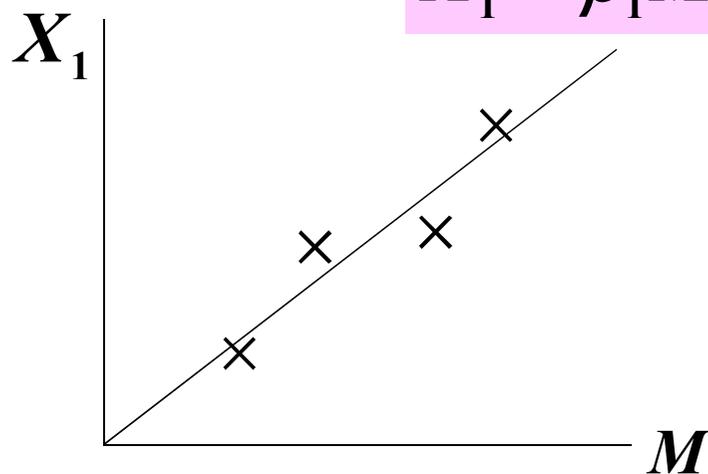


図5.1 イメージ

$$M \rightarrow X_1$$

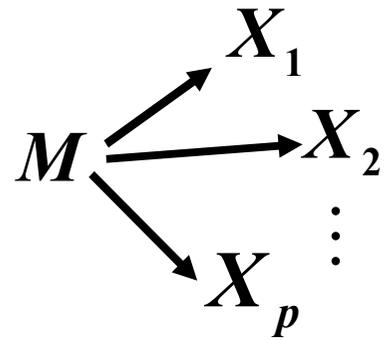
$$\beta_1 = \frac{M_1 X_{11} + M_2 X_{21} + \dots + M_l X_{l1}}{r}$$

$$r = M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_l^2$$

$$\eta_1 = \begin{cases} \frac{1}{r} (S_{\beta_1} - V_{e1}) & (S_{\beta_1} > V_{e1} \text{ の場合}) \\ V_{e1} & \\ 0 & (S_{\beta_1} \leq V_{e1} \text{ の場合}) \end{cases}$$

表5.4 規準化された信号データ

メンバー	項目1	項目2	...	項目 $p$	$M$
1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1p}$	$M_1$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2p}$	$M_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$i$	$X_{i1}$	$X_{i2}$	...	$X_{ip}$	$M_i$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$l$	$X_{l1}$	$X_{l2}$	...	$X_{lp}$	$M_l$



←  $i$  番目の  $M_i$  を予測

項目1 vs $M$	$X_1 = \beta_1 M$	$\eta_1$	$\hat{M}_{i1} = \frac{X_{i1}}{\beta_1}$	}	<p><math>p</math> 個の <math>M_i</math> の 予測値を 統合</p>
項目2 vs $M$	$X_2 = \beta_2 M$	$\eta_2$	$\hat{M}_{i2} = \frac{X_{i2}}{\beta_2}$		
⋮	⋮	⋮	⋮		
項目 $p$ vs $M$	$X_p = \beta_p M$	$\eta_p$	$\hat{M}_{ip} = \frac{X_{ip}}{\beta_p}$		

$M_i$  の統合推定値:

$$\hat{M}_i = \frac{\eta_1 \times \hat{M}_{i1} + \eta_2 \times \hat{M}_{i2} + \dots + \eta_p \times \hat{M}_{ip}}{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p}$$

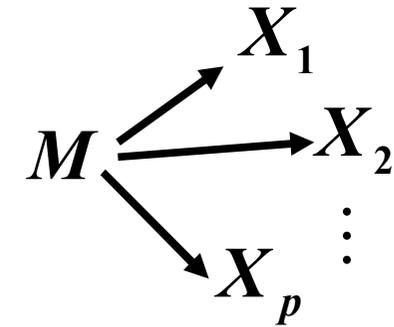


表5.4 規準化された信号データ

メンバー	項目1	項目2	...	項目p	M	$\hat{M}$
1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1p}$	$M_1$	$\hat{M}_1$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2p}$	$M_2$	$\hat{M}_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$X_{i1}$	$X_{i2}$	...	$X_{ip}$	$M_i$	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	$X_{l1}$	$X_{l2}$	...	$X_{lp}$	$M_l$	$\hat{M}_l$

$$S_{eM} = S_{TM} - S_{\beta M}$$

$$V_{eM} = \frac{S_{eM}}{l-1}$$

総合推定のSN比

$$L_M = M_1 \hat{M}_1 + M_2 \hat{M}_2 + \dots + M_l \hat{M}_l$$

$$S_{TM} = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + \dots + \hat{M}_l^2$$

$$S_{\beta M} = \frac{L_M^2}{r}$$

$$\eta_M = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{r} (S_{\beta M} - V_{eM})}{V_{eM}}$$

$$\hat{M}_i = \frac{\eta_1 \times \hat{M}_{i1} + \eta_2 \times \hat{M}_{i2} + \dots + \eta_k \times \hat{M}_{ip}}{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_p}$$

$$\hat{M}_{ij} = \frac{X_{ij}}{\beta_j} = \frac{x'_{ij} - \bar{x}_j}{\beta_j}$$

$$\hat{y}'_i = \hat{M}_i + \bar{y} = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \eta_j} \sum_{j=1}^p \frac{\eta_j}{\beta_j} (x'_{ij} - \bar{x}_j) + \bar{y}$$

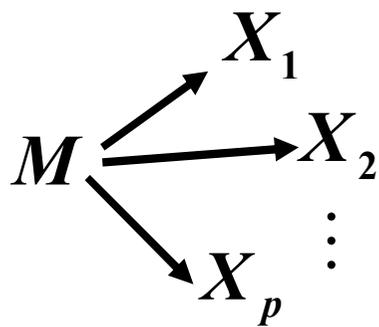
線形予測式

評価指標:

総合推定のSN比

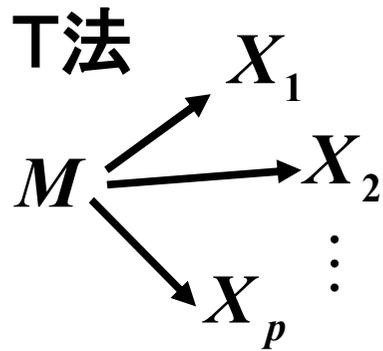
$$\eta_M = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{r} (S_{\beta M} - V_{eM})}{V_{eM}}$$

田口:「1つひとつの項目では比例式  $x = \beta M$  を求めて,  $M_1, M_2, \dots, M_l$  の推定を次式で行う.



$$\hat{M}_i = \frac{x}{\beta}$$

それを総合している. はかりでいろいろな質量を総合するのと同じである.」



⇔

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \beta_1 M + \varepsilon_1 & E(\varepsilon_1) &= 0, V(\varepsilon_1) = \sigma_1^2 \\
 X_2 &= \beta_2 M + \varepsilon_2 & E(\varepsilon_2) &= 0, V(\varepsilon_2) = \sigma_2^2 \\
 & & & \vdots \\
 X_p &= \beta_p M + \varepsilon_p & E(\varepsilon_p) &= 0, V(\varepsilon_p) = \sigma_p^2
 \end{aligned}$$

$$\hat{y}'_i = \hat{M}_i + \bar{y} = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \eta_j} \sum_{j=1}^p \frac{\eta_j}{\beta_j} (x'_{ij} - \bar{x}_j) + \bar{y}$$

線形予測式

背後のモデルが異なる

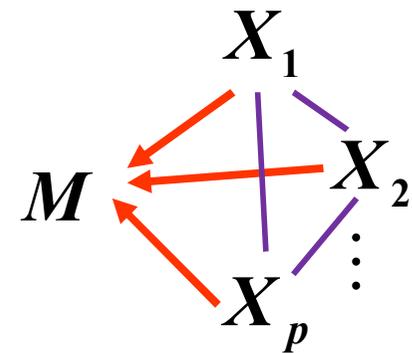
重回帰モデル

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \dots + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \dots + \hat{\beta}_p x_{ip}$$

$$= \sum_{j=1}^p \hat{\beta}_j (x_{ij} - \bar{x}_j) + \bar{y}$$

$\hat{M}_i$



線形予測式

# T法 vs 重回帰分析 よくある解釈に対して

## 1. 評価指標が違う!?

T法は総合SN比, 重回帰分析は残差平方和・寄与率など  
残差平方和(residual sum of squares)

$$RSS = \sum_{i=1}^l (y'_i - \hat{y}'_i)^2 = \sum_{i=1}^l \left\{ (M_i + \bar{y}) - (\hat{M}_i + \bar{y}) \right\}^2 = \sum_{i=1}^l (M_i - \hat{M}_i)^2$$

重回帰分析では残差平方和を最小にする.

T法では, 総合SN比を評価尺度:

$$\eta_M = 10 \log_{10} \frac{\frac{1}{r} (S_{\beta M} - V_{eM})}{V_{eM}}$$

$$\frac{\frac{1}{r} (S_{\beta M} - V_{eM})}{V_{eM}} = \frac{1}{V_{eM}} - \frac{1}{r} = \frac{l-1}{RSS} - \frac{1}{r}$$

総合SN比とRSSは  
数学的に同値

## T法 vs 重回帰分析 よくある解釈に対して

### 2. T法では重要な項目をすべて予測式に取り入れられる!?

(例) 項目数が3,  $x_1 = cx_2$  とする.

$$\Rightarrow \eta_1 = \eta_2, \quad \hat{M}_{i1} = \hat{M}_{i2}$$

→ 総合推定値:

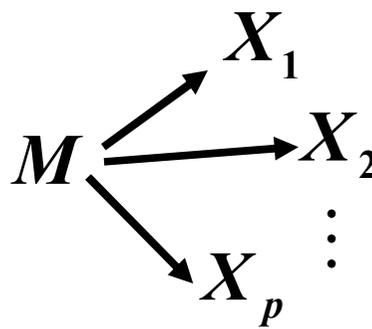
$$\hat{M}_i = \frac{\eta_1 \times \hat{M}_{i1} + \eta_2 \times \hat{M}_{i2} + \eta_3 \times \hat{M}_{i3}}{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3} = \frac{2\eta_1 \times \hat{M}_{i1} + \eta_3 \times \hat{M}_{i3}}{2\eta_1 + \eta_3}$$

すべての変数を取り込んでいるようには見えるものの、  
相関の強い変数を**過大評価**

## T法 vs 重回帰分析 よくある解釈に対して

### 3. 項目間の相関が強いとT法の結果の信憑性は低い!?

T法を想定したモデル



A path diagram on the left shows a latent variable  $M$  with three arrows pointing to observed variables  $X_1$ ,  $X_2$ , and  $X_p$ . A vertical ellipsis is placed between  $X_2$  and  $X_p$ . To the right of the diagram is a double-headed arrow  $\Leftrightarrow$  followed by a list of regression equations:

$$\begin{aligned} X_1 &= \beta_1 M + \varepsilon_1 & E(\varepsilon_1) &= 0, V(\varepsilon_1) = \sigma_1^2 \\ X_2 &= \beta_2 M + \varepsilon_2 & E(\varepsilon_2) &= 0, V(\varepsilon_2) = \sigma_2^2 \\ & & \vdots & \\ X_p &= \beta_p M + \varepsilon_p & E(\varepsilon_p) &= 0, V(\varepsilon_p) = \sigma_p^2 \end{aligned}$$

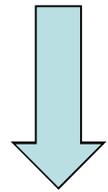
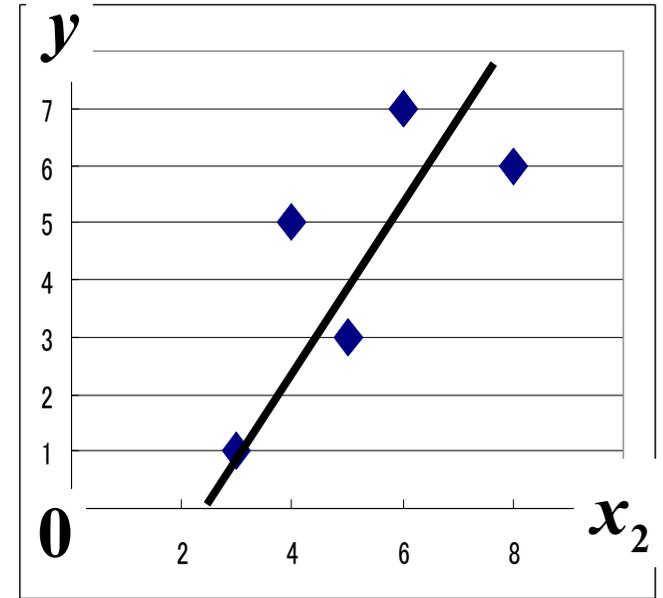
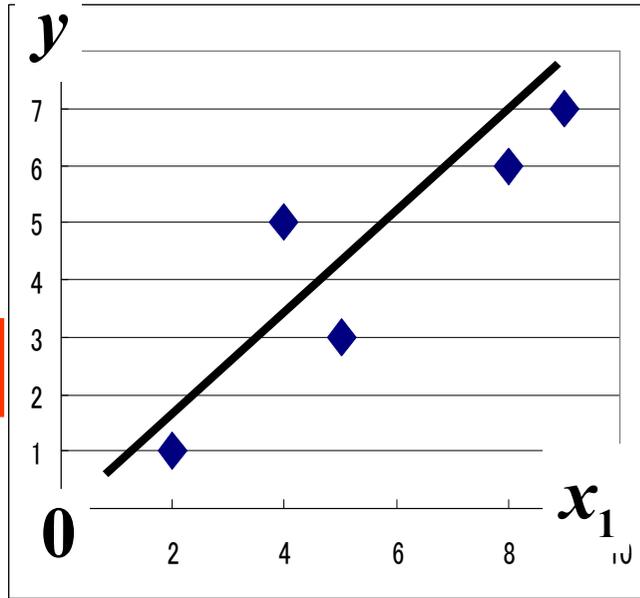
上記モデルでは項目間に強い相関が必然的に生じる。

後のシミュレーションでわかるように、このモデルの下で、T法の性能はそこそこよい。

## 単位空間について

- ・単位空間は, その平均を計算して**規準化するためだけ**
- ・全データを**単位空間**と**信号データ**に分ける**合理的方法は?**
- ・多くのデータを**単位空間**とすると, **信号データ数が減る.**
- ・そこで, **単位空間のデータ数は1**でもよいとされている.
  - ⇒ 出力値 $y$ が**中位にあるデータ**を**単位空間**とする.
  - ⇒ これでよいか?

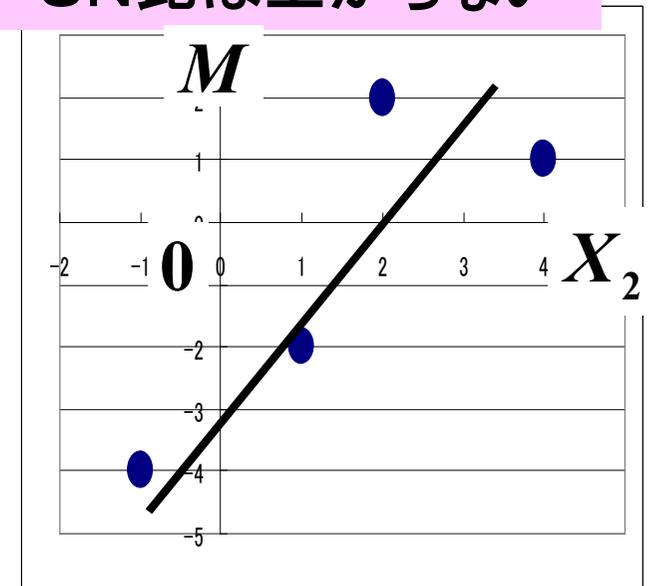
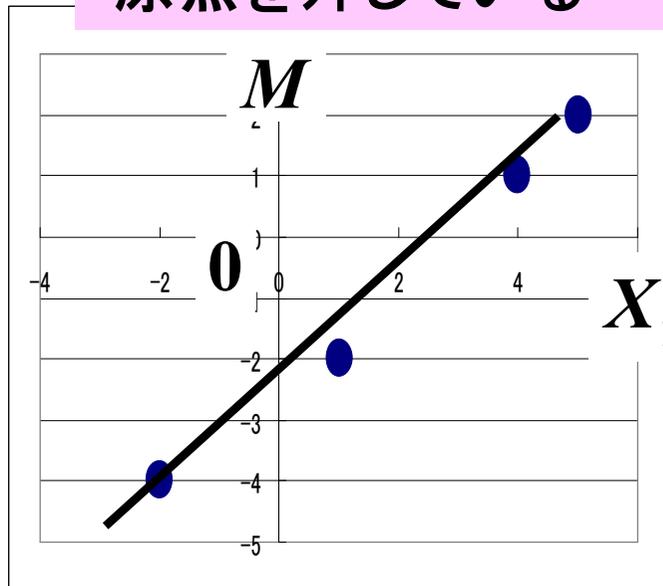
No.	$x_1$	$x_2$	$y$
1	2	3	1
2	5	5	3
3	4	4	5
4	8	8	6
5	9	6	7



標準化

No.	$X_1$	$X_2$	$M$
1	-2	-1	-4
2	1	1	-2
4	4	4	1
5	5	2	2

原点を外している ⇒ SN比は上がらない



T法における規準化の目的:

各項目 vs 出力値 に対して**原点比例式**を当てはめ

しかし,

少ない個数の単位空間の平均により規準化すると**原点を外す**項目が出てくる.

項目数が増えると, 上記の項目の個数が増加

適切な規準化をすれば, 原点を通り, SN比が大きくなる項目であるのに, **不適切な規準化**を行うと**SN比が小さくなる**.

## T法の改良手法の提案: Ta法とTb法

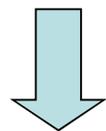
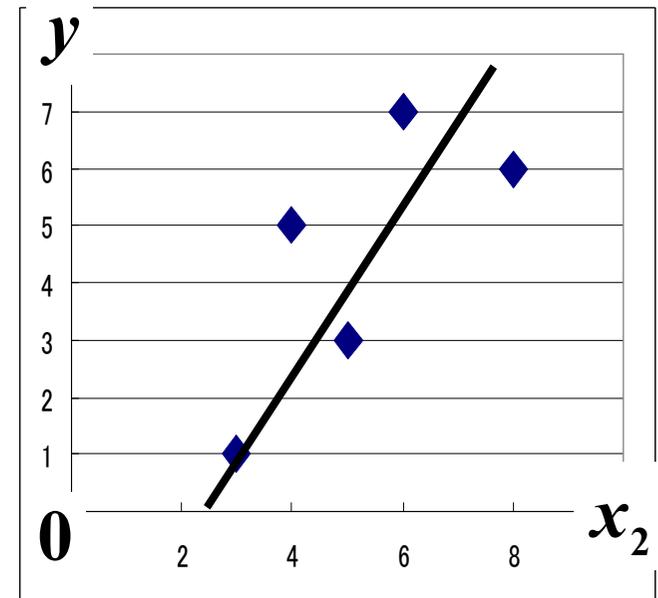
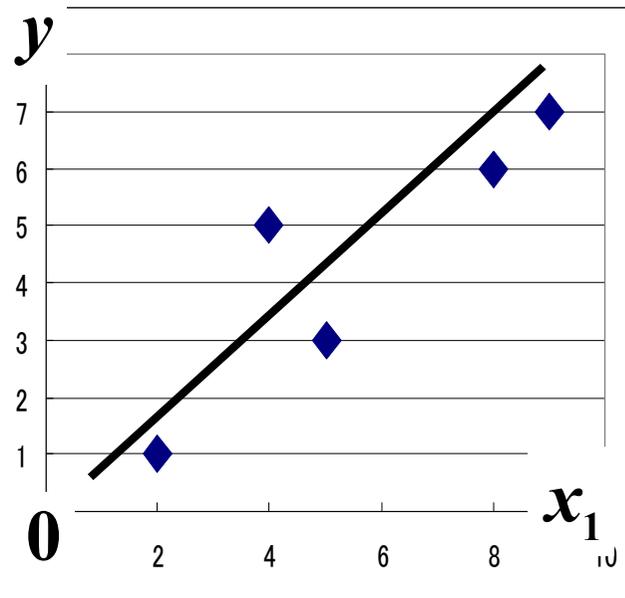
T法a: **すべてのデータの平均**を用いて規準化

品質工学便覧:

「全データの平均値そのものを単位空間とすれば, 単回帰分析をSN比で重み付けた結果と同じになり, MTシステムの特徴である単位空間を使った信号付けの特徴付けが活かせない。」

**私たちの見解は上記とは異なる.**

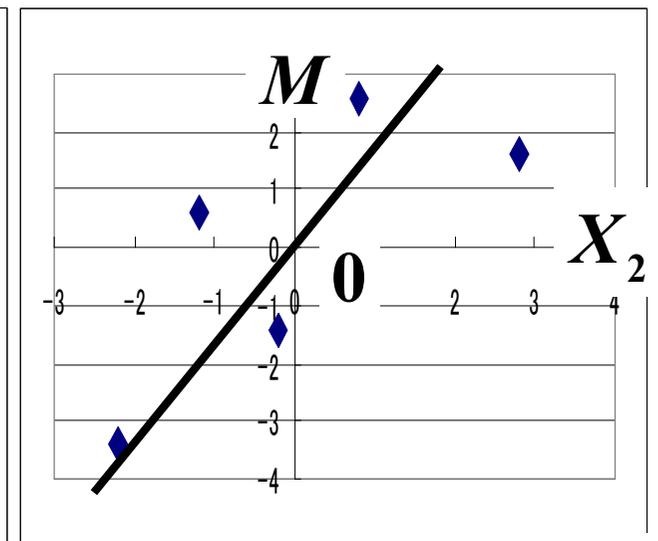
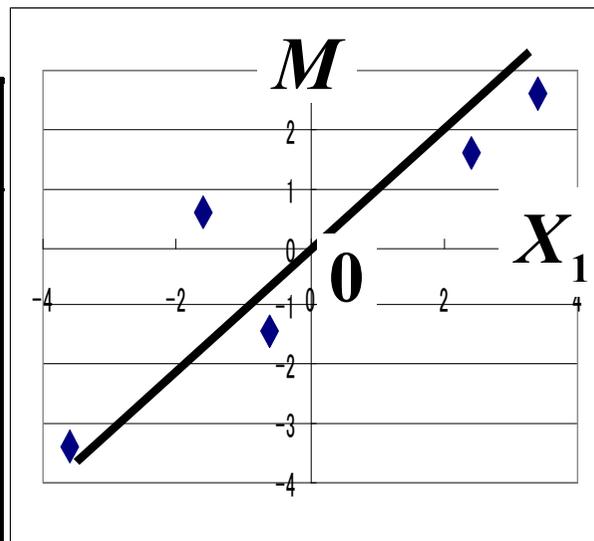
No.	$x_1$	$x_2$	$y$
1	2	3	1
2	5	5	3
3	4	4	5
4	8	8	6
5	9	6	7
平均	5.6	5.2	4.4



Ta法による  
規準化

原点を通る ⇒ SN比は上がる

No.	$X_1$	$X_2$	$M$
1	-3.6	-2.2	-3.4
2	-0.6	-0.2	-1.4
3	-1.6	-1.2	0.6
4	2.4	2.8	1.6
5	3.4	0.8	2.6



## T法b: 各項目で, SN比が最大になるメンバーを用いて規準化

### 項目x1について

#### Step1.

①No.1のメンバーで,  $x1$  と  $y$  を規準化し, ゼロ点比例式を当てはめ, SN比を計算.

②No.2のメンバーで,  $x1$  と  $y$  を規準化し, ゼロ点比例式を当てはめ, SN比を計算.

...

⑤No.5のメンバーで,  $x1$  と  $y$  を規準化し, ゼロ点比例式を当てはめ, SN比を計算.

Step2 Step1で最大のSN比が得られたメンバーで規準化してMを推定

No.	x1	x2	y
1	2	3	1
2	5	5	3
3	4	4	5
4	8	8	6
5	9	6	7

No.	x1	x2	y
1	2	3	1
2	5	5	3
3	4	4	5
4	8	8	6
5	9	6	7

### 項目x2について

同様のステップ

**T法の予測式:**

$$\hat{y}'_i = \hat{M}_i + \bar{y} = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \eta_j} \sum_{j=1}^p \frac{\eta_j}{\beta_j} (x'_{ij} - \bar{x}_j) + \bar{y}$$

**Ta法の予測式:**

$$\hat{y}'_i = \hat{M}_i + \bar{y}' = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \eta_{aj}} \sum_{j=1}^p \frac{\eta_{aj}}{\beta_{aj}} (x'_{ij} - \bar{x}'_j) + \bar{y}'$$

**Tb法の予測式:**

$$\hat{y}'_i = \hat{M}_i = \frac{1}{\sum_{j=1}^p \eta_j(t_j^*)} \sum_{j=1}^p \eta_j(t_j^*) \left( \frac{x'_{ij} - x'_{t_j^*j}}{\beta_j(t_j^*)} + y'_{t_j^*} \right)$$

$\beta_j(t_j^*)$ : 項目  $j$  で, メンバー  $t_j^*$  により規準化した時の比例定数

$\eta_j(t_j^*)$ : 項目  $j$  で, メンバー  $t_j^*$  により規準化した時のSN比

# T法, Ta法, Tb法, 重回帰分析の性能比較

評価指標:

## (1) 残差平方和の平均の期待値

$$ERSS = E\left[\frac{RSS}{l}\right] \quad RSS = \sum_{i=1}^l (y'_i - \hat{y}'_i)^2 \quad \text{残差平方和}$$

$l$ : 信号データの個数

## (2) 予測平方の期待値

$$PE = E[(\hat{y}' - y')^2]$$

新しいデータの予測誤差・・・こちらが重要な指標

# シミュレーションによる検討

## シミュレーションモデル:

### (A)線形重回帰モデル

$$y'_i = b_1 x'_{i1} + b_2 x'_{i2} + \cdots + b_p x'_{ip} + \varepsilon_i$$

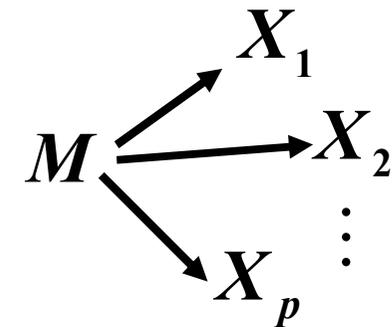
$$x'_{ij} \sim N(0, 1^2), \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2) \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, p)$$

$$\text{Cor}(x'_{i1}, x'_{i2}) = \rho$$

### (B)T法の背後に想定されるモデル

$$x'_{ij} = a_j y'_i + \varepsilon_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, p)$$

$$y'_i \sim N(1, 1^2), \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma_j^2) \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, p)$$



$$\begin{aligned} (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5) &= (1, 1, 1, 1, 1), (0.5, 0.5, 1, 1.5, 1.5), \\ &(1.5, 1.5, 1, 0.5, 0.5), (1 - \sqrt{0.5}, 1, 1, 1, 1 + \sqrt{0.5}), \\ &(1 + \sqrt{0.5}, 1, 1, 1, 1 - \sqrt{0.5}) \end{aligned}$$

モデル(A):  $y'_i = b_1 x'_{i1} + b_2 x'_{i2} + \dots + b_p x'_{ip} + \varepsilon_i$

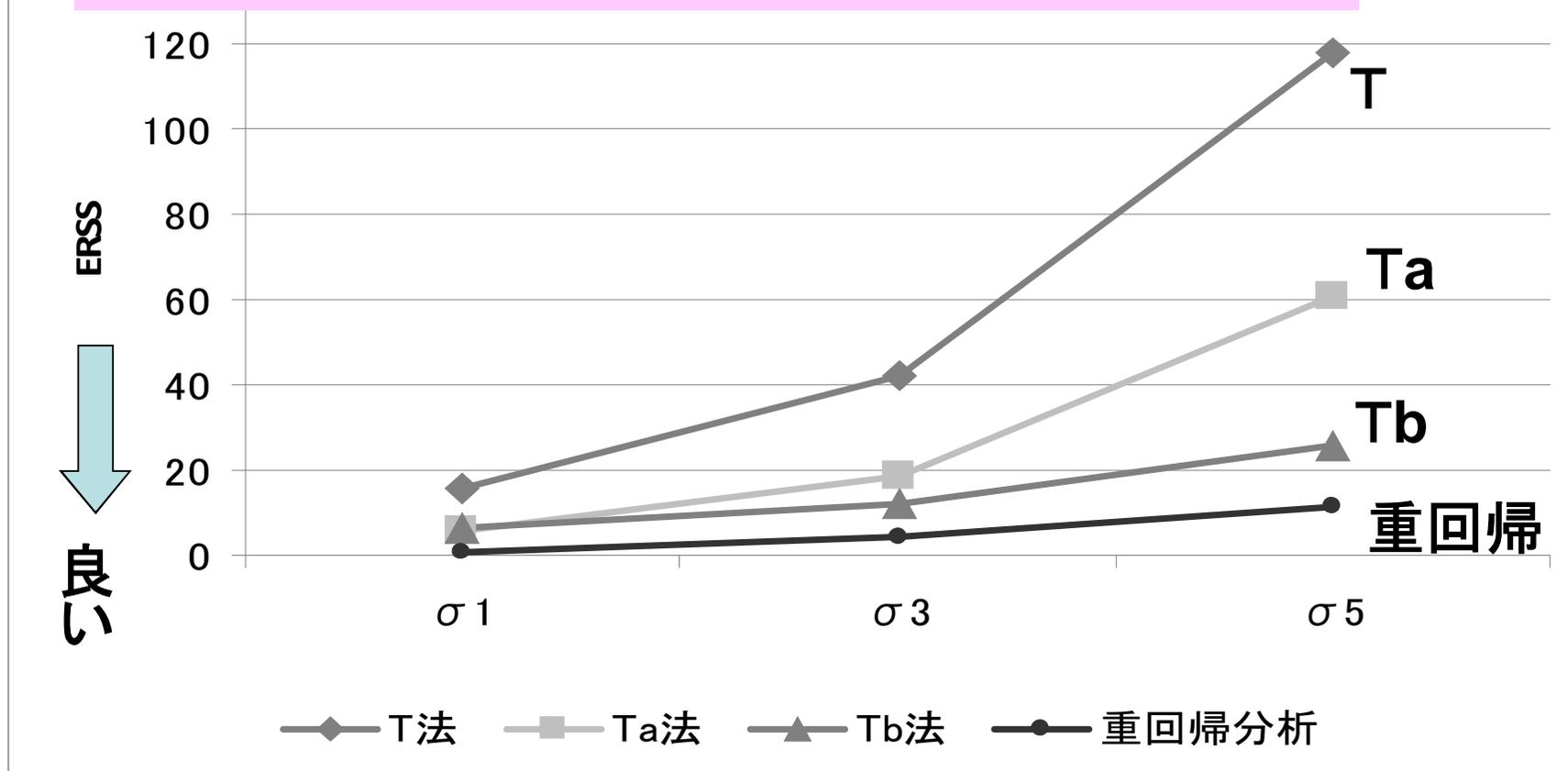


図5.1 モデル(A)でのERSS(残差平方和の期待値)

$(p, N) = (5, 20)$        $(b_1, b_2, \dots, b_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$

$\rho = 0$        $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1.0, 3.0, 5.0)$

モデル(B):  $x'_{ij} = a_j y'_i + \varepsilon_i$

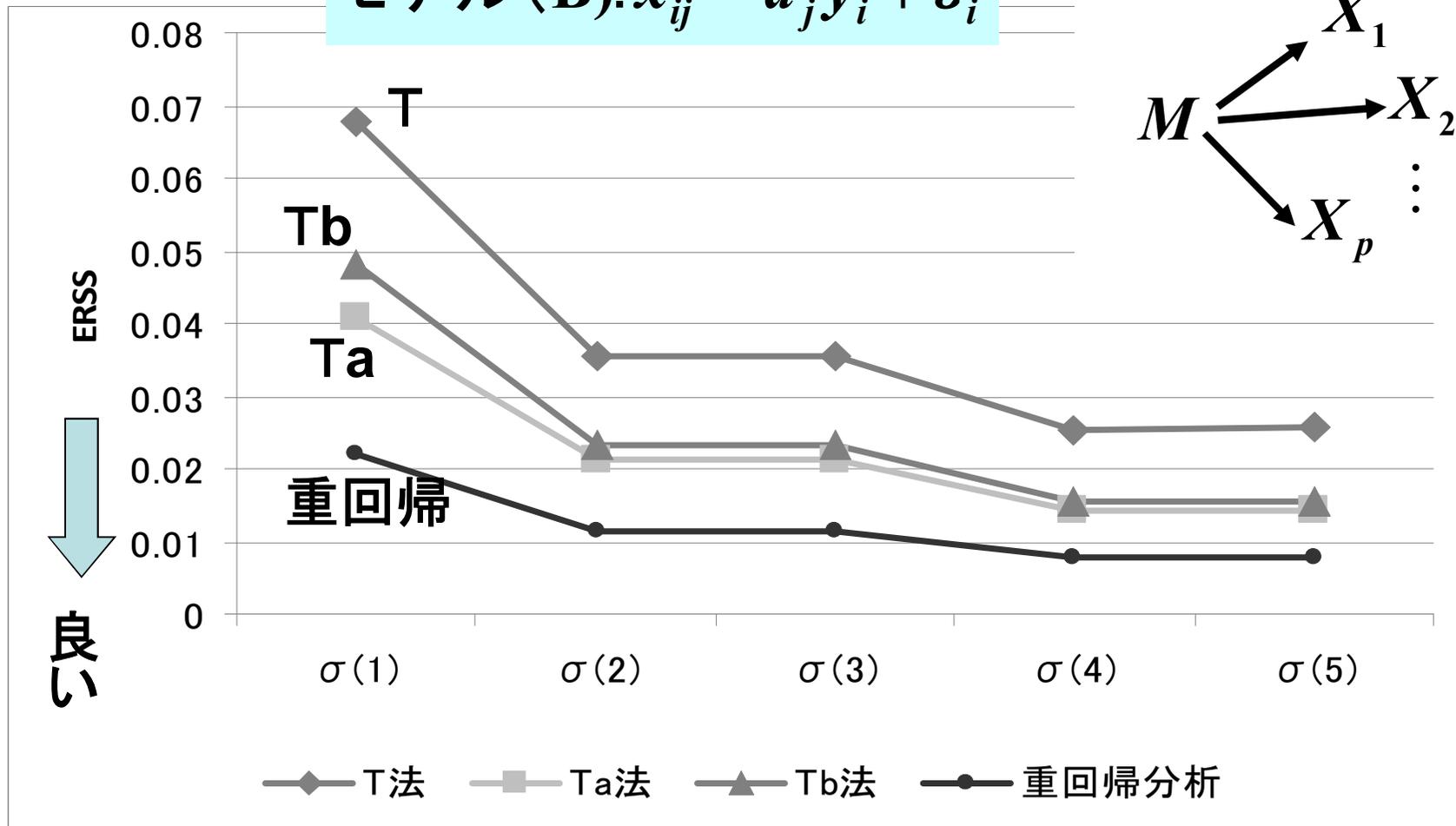


図5.2 モデル(B)でのERSS (残差平方和の期待値)

$(p, N) = (5, 20)$      $(a_1, a_2, \dots, a_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$

$\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)$ : 母分散のパターン

モデル(A):  $y'_i = b_1 x'_{i1} + b_2 x'_{i2} + \dots + b_p x'_{ip} + \varepsilon_i$

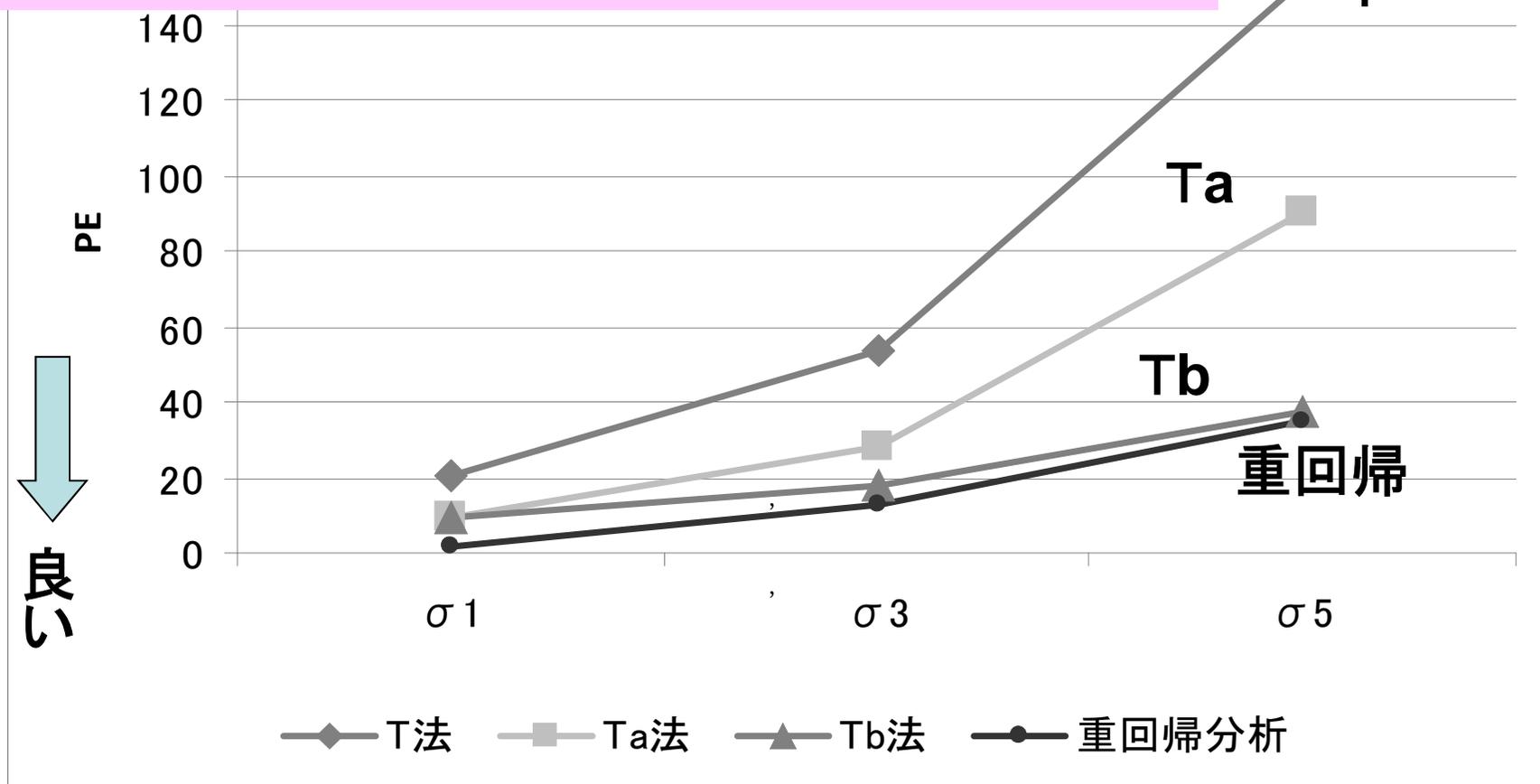


図5.3 モデル(A)でのPE(予測誤差の期待値)

$(p, N) = (5, 20)$      $(b_1, b_2, \dots, b_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$

$\rho = 0$      $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1.0, 3.0, 5.0)$     76/84

$$\text{モデル(A)}: y'_i = b_1 x'_{i1} + b_2 x'_{i2} + \dots + b_p x'_{ip} + \varepsilon_i$$

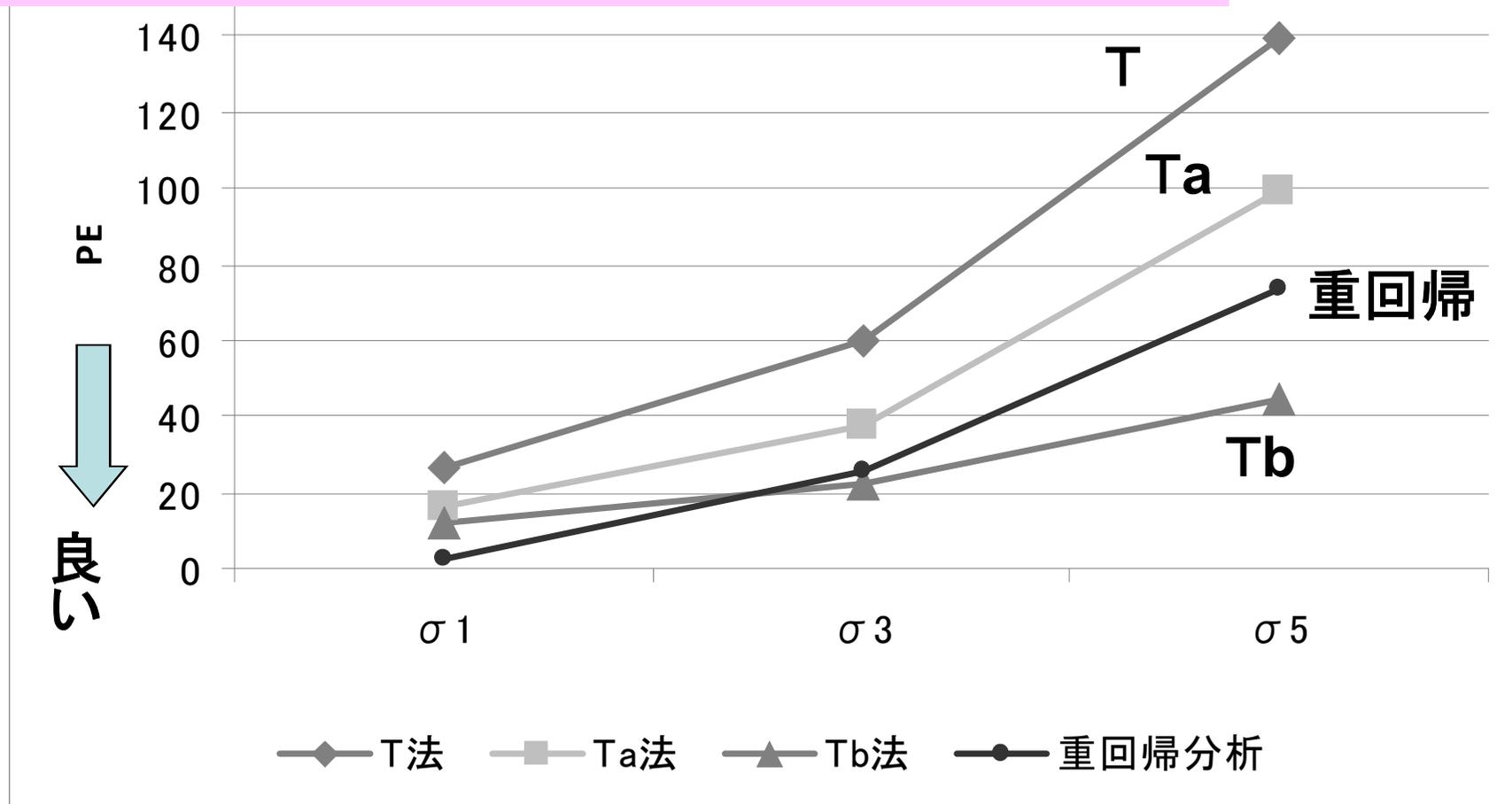


図5.4 モデル(A)でのPE (予測誤差の期待値)

$$(p, N) = (5, 10) \quad (b_1, b_2, \dots, b_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$$

$$\rho = 0 \quad (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (1.0, 3.0, 5.0)$$

モデル(A):  $y'_i = b_1 x'_{i1} + b_2 x'_{i2} + \dots + b_p x'_{ip} + \varepsilon_i$

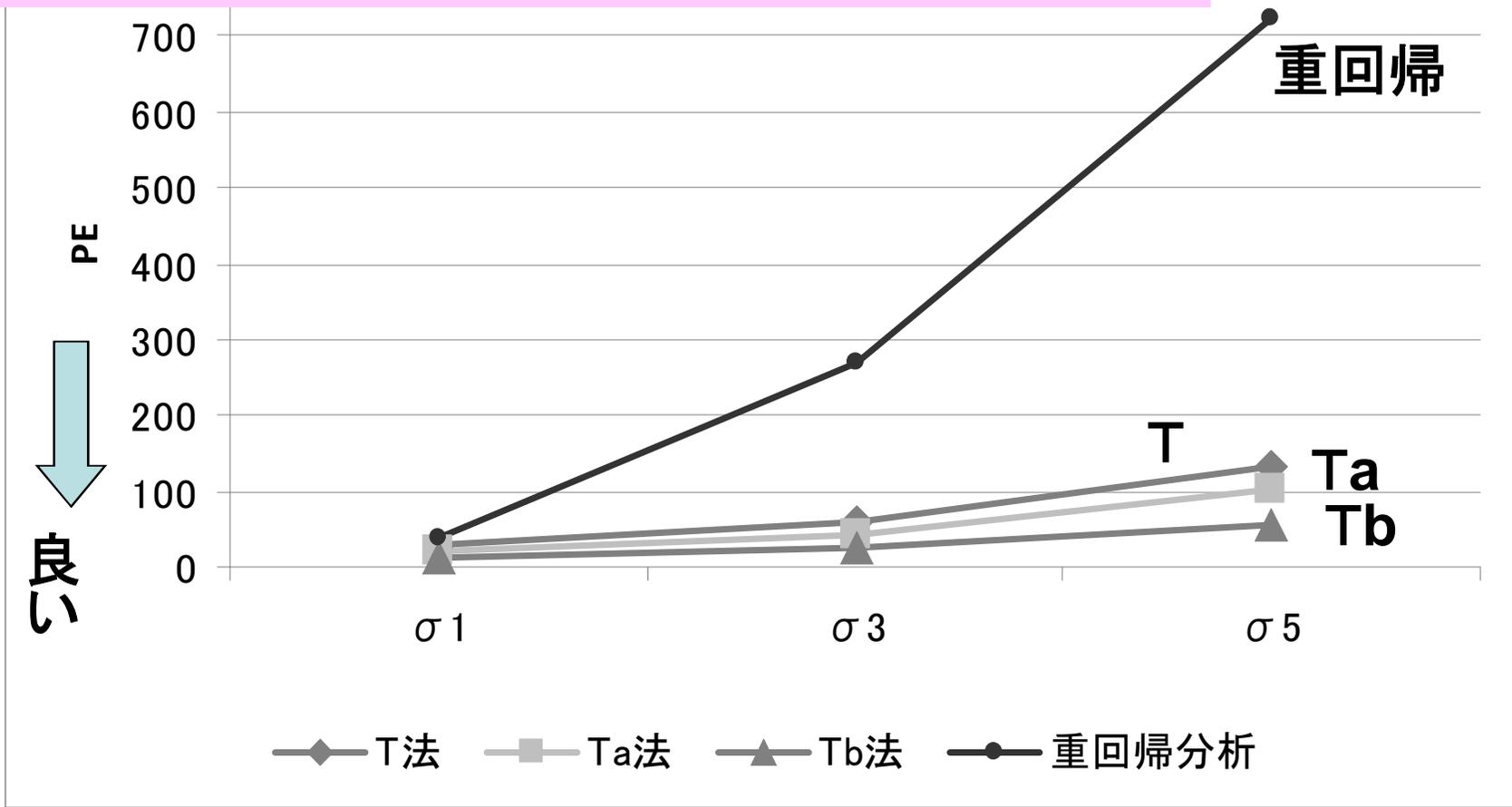


図5.5 モデル(A)でのPE (予測誤差の期待値)

$(p, N) = (5, 7)$      $(b_1, b_2, \dots, b_5) = (2, 2, 2, 2, 2)$

$\rho = 0$      $(\sigma 1, \sigma 2, \sigma 3) = (1.0, 3.0, 5.0)$

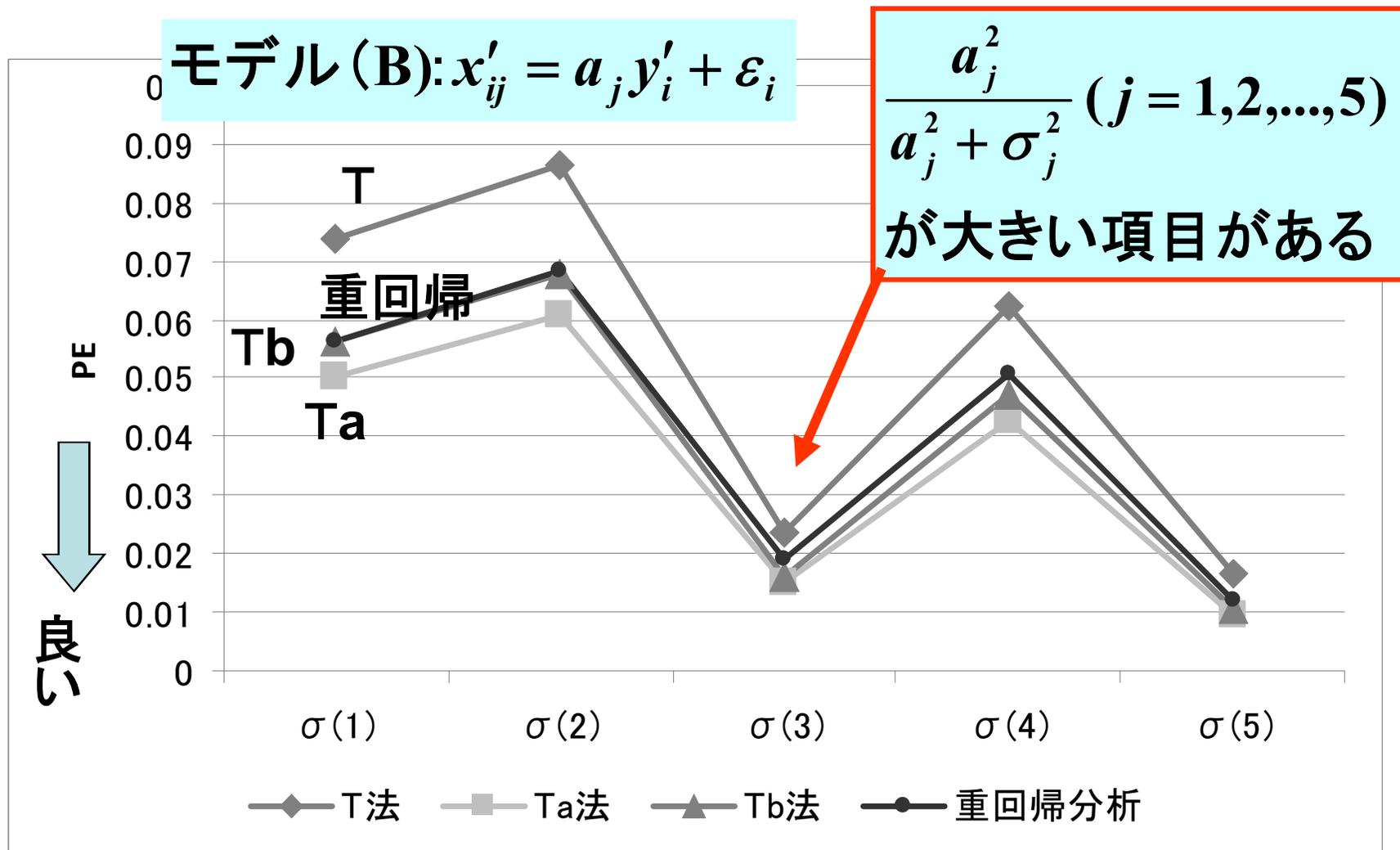


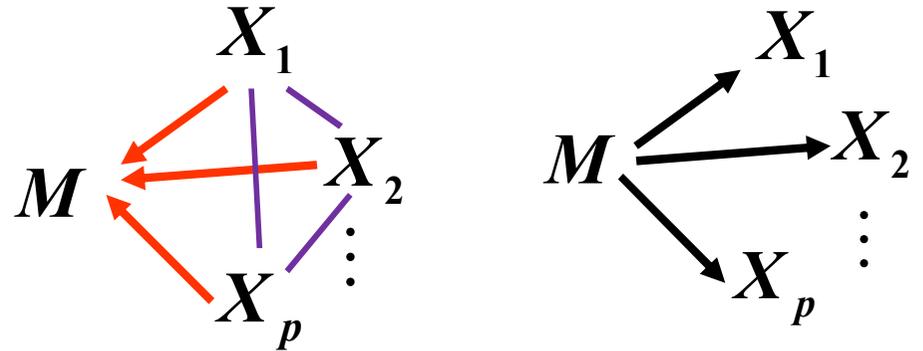
図5.6 モデル(B)でのPE (予測誤差の期待値)

$(p, N) = (5, 20)$      $(a_1, a_2, \dots, a_5) = (1, 1, 2, 3, 3)$

$\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4), \sigma(5)$ : 母分散のパターン 79/84

## まとめ

☆項目と出力がどのような関係にあるのかに着目すべき



- ・サンプルサイズが項目数より十分大きいなら重回帰分析がよい
- ・サンプルサイズが項目数の2倍程度より小さい場合にはTa法またはTb法を用いるとよい
- ・多くの場合にTa法とTb法は同程度の性能を示しており、モデルやパラメータの条件によりその優劣が変化
- ・Ta法やTb法は、T法よりも性能がよい。
- ・実務的には、計算の手間とわかりやすさを考えるとTa法を適用するのがよいであろう
- ・Ta法とTb法の優劣の入れ替わりが何に起因しているのかは今度の課題としたい。

## 6. おわりに

- ・MTシステムは非常に**簡便**.

**簡便性**がタグチメソッドの一つの特徴.

**簡便**だから、多くの技術者が応用し、MTシステムが普及.

- ・田口博士は、ロバストパラメータ設計に関して、永年、新しいアイデアを提案され続け、応用事例を参考にして、**手法を洗練化**.

本質的な部分を残し、応用が楽になるよう計算を**簡便化**する方針.

- ・MTシステムについても、本質的な部分を残しながら**簡便化**する方針 (田口(2012)). 田口(2012)は2005年10月の田口博士の講演録.

田口博士は、この講演の3か月後に病に倒れられた.

本稿で指摘した各手法の問題点は、田口博士がお元気であれば指摘されたであろう。

田口博士なら、これらをどう克服・改良されたかと思いを馳せている。

田口博士がおられないいま、統計科学の側面からMTシステムの本質や発展性を見極めたい。

MTシステムの研究を通じて、タグチメソッドとSQCがもっと融合できればよいと考えている(永田(2007))。

最後に、

MTシステムを開発された田口玄一博士に敬意を表し、心からご冥福をお祈りします。

## 参考文献

- 稲生淳紀・永田靖・堀田慶介・森有紗(2012): タグチのT法およびその改良手法と重回帰分析の性能比較. 品質 42, 265-277.
- 大久保豪人・永田靖(2012): タグチのRT法における同一次元でない連続量データへの適用方法. 品質 42, 248-264.
- 田口玄一(2002): 20世紀のMTS法と21世紀のMT法. 標準化と品質管理 55, 61-70.
- 田口玄一・兼高達貳(編)(2002): MTシステムにおける技術開発. 日本規格協会.
- 田口玄一 (2005a): 目的機能と基本機能(5). 品質工学13,[2],6-10.
- 田口玄一 (2005b): 目的機能と基本機能(6). 品質工学 13,[3], 5-10.
- 田口玄一(2006a): 目的機能と基本機能(11). 品質工学 14, [2], 5-9.
- 田口玄一(2006b): 目的機能と基本機能(12). 品質工学 14, [3], 5-9.
- 田口玄一(2012): 21世紀のMTシステム, MTA法とTS法とT法, 一田口玄一MTシステム講演録一, 品質工学 20, [3], 19--26.
- 立林和夫・長谷川良子・手島昌一(2008): 入門MTシステム. 日科技連出版社.
- 永田靖(2007): タグチメソッドとSQCの“友好的”推進, クオリティマネジメント 58, 8月号, 10-17.
- 永田靖・久富剛(2008): 項目数が $n-1$ 以上の場合のMTシステムの第1種の距離. 品質 38, 142-146.
- 永田靖(2009): 統計的品質管理. 朝倉書店.

- 永田靖・土居大地(2009): タグチのRT法で用いる距離の性質とその改良. 品質 39, 364-375.
- 品質工学会(編纂)(2007): 品質工学便覧. 日刊工業新聞社.
- 宮川雅巳(2000): 品質を獲得する技術. 日科技連出版社.
- 宮川雅巳(2003): SQCから見たタグチメソッド. 品質 33, 27-35.
- 宮川雅巳・永田靖(2003): マハラノビス・タグチ・システムにおける多重共線性対策について. 品質 33, 467-475.
- 宮川雅巳(2004): 統計的因果推論, 朝倉書店.
- 宮川雅巳・田中研太郎・岩澤智之・中西寛子(2007): マハラノビス・タグチ・システムにおける実際の誤判別率. 品質 37, 101-106.
- 吉野荘平, 矢野耕也, 石井ちはる, 和田唯司(2006): MTシステムによる不動産価格の推定(3). 品質工学 14,[1], 68-76.