

平成 24 年度統計数理研究所公開講座
「マルチンゲール理論による統計解析の基礎」のシラバス

西山陽一

概要：連続時間マルチンゲール理論の概説をし、その統計解析への応用法をやさしく解説します。受講対象は測度論的確率論を一度は勉強したことがあるという方を想定しますが、なぜ almost surely などという面倒な議論をしなければならないのかという疑問をお持ちの方や、 σ -加法族に関する条件付き期待値の定義を直観的に把握したいという方にぴったりの講義をします。マルチンゲール理論の概説の部分では、任意抽出定理の使用上の注意、確率積分の直観的解釈、伊藤の公式とは何であるか、マルチンゲール中心極限定理の証明のエッセンスなどを解説します。統計的応用の部分では、センサリング問題や生存解析に応用される計数過程の Nelson-Aalen モデルや Cox 回帰モデル、および、数理ファイナンスで有用な拡散過程モデルにおける高頻度データ解析を解説します。最尤推定量の漸近正規性の証明をすっきり理解して頂くことが最終目標です。

教科書：『マルチンゲール理論による統計解析』西山陽一・著 近代科学社

Part I: イントロダクション (1 日目午前)

- I.1. ルベグ積分の復習 (教科書に該当ページなし)
- I.2. 条件付き期待値 (教科書 3.2 節)
 - I.2.1. 条件付き期待値の直観的理解
 - I.2.2. 条件付き期待値の性質
- I.3. なぜマルチンゲールは役に立つのか? (教科書 1.3 節と 2.1 節)
 - I.3.1. 計量経済への応用
 - I.3.2. 生存解析への応用
- I.4. 離散時間マルチンゲール (教科書 5 章)
 - I.4.1. 定義
 - I.4.2. 閑話休題: なぜマルチンゲールは役に立つのか? を再考
 - I.4.3. 確率積分の原型
 - I.4.4. 停止時刻と任意抽出定理
 - I.4.5. マルチゲール中心極限定理

Part II: 連続時間マルチンゲール理論 (1 日目午後)

II.1. 連続時間マルチンゲールの定義・基本事項 (教科書 6.1 ~ 6.7 節)

連続時間マルチンゲールの定義

例 : ウィナー過程とポアソン過程

局所 っって何 ?

$\varphi(M)$ は劣マルチンゲール

予測可能性と有界変動性

マルチンゲールの可積分性と任意抽出定理

Doob の不等式と Doob-Meyer 分解定理

二次変分

II.2. 確率積分 (教科書 6.8 節)

II.3. 半マルチンゲールと伊藤の公式 (教科書 6.9, 6.10 節)

定義と例

連続半マルチンゲールに対する伊藤の公式

Part III: 「確率過程の推定」への最短入門 (2 日目午前)

III.1. 【準備】確率変数の収束に関する諸概念 (教科書 3.3 節)

III.2. 「計数過程の推定」への最短入門 (教科書 4.1 節)

III.2.1. 強度の導入まで

III.2.2. 強度の例 (教科書 4.4.1 節)

III.2.3. 二次変分と確率積分

III.2.4. マルチンゲール中心極限定理

III.2.5. 最尤推定量の漸近正規性

III.3. 「拡散過程の推定」への最短入門 (教科書 4.2 節)

III.3.1. 伊藤積分およびマルチンゲール中心極限定理

III.3.2. 最尤推定量の漸近正規性

III.4. アプローチのまとめ (教科書 4.3 節)

III.5. 【付録 1】Lenglart の不等式 (教科書 8.1 節)¹

III.6. 【付録 2】マルチンゲール中心極限定理の証明の概略 (教科書 8.3 節)²

¹実際には 2 日目午後に回すかもしれません

²実際には 2 日目午後に回すかもしれません

Part IV: 「確率過程の推定」の実践的話題 (2日目午後)

IV.1. Z-推定量の一般論 (教科書 9.1~9.3 節)

IV.1.1. 一致性 (I.i.d. の場合)

IV.1.2. 一致性 (一般の場合)

IV.1.3. 漸近正規性 (I.i.d. の場合)

IV.1.4. 漸近正規性 (一般の場合)

IV.2. Cox 回帰モデルの推定 (教科書 9.5 節)

IV.3. 拡散過程の高頻度データによる推定 (教科書 9.7~9.8 節)

IV.3.1. ドリフト係数の推定

IV.3.2. 拡散係数の推定