正規分布 (2) 付録

坂田綾香

大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構
統計数理研究所

t統計量

$z_i = (x_i - \mu)/\sigma$とおくと$\frac{dz_i}{dx_i} = 1/\sigma$なので変数変換公式（後出）から

$$p(\{x_i\};\mu,\sigma^2) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} \rightarrow \quad p(\{z_i\};\mu,\sigma^2) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z_i^2}{2}}$$

一方，下記のように，t統計量は$\{z_i\}$のみの式で書ける

$$\frac{\left(\frac{1}{N}\sum_j x_j\right) - \mu}{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N \left(x_i - \frac{1}{N}\sum_j x_j\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{N}\sum_j (x_j - \mu)/\sigma}{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N \left((x_i - \mu)/\sigma - \frac{1}{N}\sum_j (x_j - \mu)/\sigma\right)^2}} = \frac{\frac{1}{N}\sum_j z_j}{\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^N \left(z_i - \frac{1}{N}\sum_j z_j\right)^2}}$$

注意：これからt分布の具体形を求めるのはやや煩雑な導出になるが，
まず重要なのはそこではなく，　μ, σ^2によらない分布になることである

確率密度の変数変換

xに関する積分を,
$x = f(y)$を満たすyに関する積分に変換するには

$p(x)dx \to f'(y)p\big(f(y)\big)dy$とすれば
すべての期待値が変換前と同じになる

$$\int_{-\infty}^{\infty} p\big(f(y)\big)f'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} A(f(y))p\big(f(y)\big)f'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} A(x)p(x)dx$$

※簡単のため$f'(y) > 0$が常に成り立つと仮定