

System signature の計算方法とその応用

—Consecutive- k -out-of- n :F システムを例として—

中村 太信¹・周 蕾²

(受付 2024 年 12 月 4 日；改訂 2025 年 2 月 5 日；採択 3 月 10 日)

要 旨

本論文では、コヒーレントシステムに対する system signature の算出方法を概説し、特に consecutive- k -out-of- n :F (Con/ k/n :F) システムに対する具体的な手法および計算例を示す。Con/ k/n :F システムは、 n 個のコンポーネントが線形に配置され、少なくとも k 個の連続したコンポーネントが故障した場合にシステム故障となるシステムモデルである。このモデルは石油パイプラインや高速道路の街灯、生産監視システムなど、様々な応用例を持つ。近年、信頼性工学の分野では、system signature の概念が注目されている。ここで、system signature とはシステムの構造にのみ依存する特性量であり、システム構造の比較や保全計画の立案に有用である。しかし、素朴な計算方法では、大規模なシステムに対して system signature を算出することが困難である。本論文では、Con/ k/n :F システムに対するピボット分解法に基づく system signature の算出方法を示す。この手法は規則的な構造を持つシステム群に適用可能である。その後、system signature の理論的応用の 1 つとして、故障コンポーネント数の期待値について述べる。最後に、汎用的な system signature の算出方法の可能性について議論する。

キーワード：コヒーレントシステム、system signature、consecutive- k -out-of- n :F システム、ピボット分解法。

1. はじめに

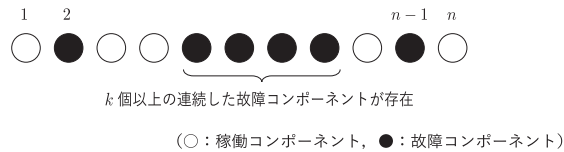
現代社会は、電力システム、交通システム、通信システムなど、様々なシステムに支えられている。これらの重要なインフラストラクチャの故障は、社会や経済に重大な影響を及ぼす可能性があるため、システムの信頼性向上と効率的な保全は、安全・安心な社会の実現に不可欠である。

信頼性工学(reliability engineering)は、各種製品やシステムの品質と信頼性を向上・保証し、信頼性・安全性上の問題の再発防止・未然防止を目的とする学問である(山本 他, 2021b)。この分野において、システムの寿命分布を導出し、信頼性などを評価することは重要な課題である。特に、現代のシステムは複雑化・大規模化しており、システム全体の信頼性を個々のコンポーネントの信頼性から導出することが必要となっている。そのため、システムの構造に基づいて信頼性を評価する手法が求められている。

近年、信頼性工学の分野では、system signature の概念が注目されている(Naqvi et al.,

¹ 東海大学 情報理工学部：〒259-1292 神奈川県平塚市北金目 4-1-1; nkmr@tokai.ac.jp

² 長岡技術科学大学 工学部：〒940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1; zhoulei@vos.nagaokaut.ac.jp

図 1. $\text{Con}/k/n:F$ システムの故障例.

2022). ここで, system signature とは, システムの構造のみに依存し, コンポーネントの寿命分布には依存しない特性量であり, システムの信頼性評価のための有用なツールとなっている (Samaniego, 2007). System signature を用いてさまざまなシステムの信頼性特性を評価し, システム構造を比較することが可能となる. また, system signature に基づいて最適な保全計画を立案することも可能である (Zhou and Yamamoto, 2022; Asadi et al., 2023). しかしながら, system signature の理論的な有用性にもかかわらず, その適用範囲は限定的である. その主な理由は, 素朴な計算方法では, コンポーネント数が少なくシステムの構造関数が極めて単純な場合を除いて, system signature の算出が困難であるためである.

現代のシステムは大規模で複雑であるが, 多くの場合, 特徴的な構造を有しているため, これらの特性を反映したシステムモデルが活用されている. 最も基本的なモデルとして, 直列システムと並列システムが挙げられる. 直列システムは, 少なくとも 1 つのコンポーネントが故障した場合にシステムが故障し, 一方, 並列システムは, すべてのコンポーネントが故障した場合にのみシステムが故障する. これらを一般化した k -out-of- $n:F$ システムは, n 個のコンポーネントのうち少なくとも k 個が故障した場合にシステムが故障する. これらのシステムは比較的単純かつ一般的でありながら, 多様な問題に適用可能である.

しかし, k -out-of- $n:F$ システムでは, システムの状態が故障したコンポーネントの数のみに依存し, その位置には依存しない. 一方, 実際のシステムでは, 故障したコンポーネントの位置を考慮することが重要となる場合がある. 例えば, 実社会にはコンポーネントの集中故障がシステム故障を引き起こすようなシステムが存在する. このようなシステムとして, 1980 年に Kontoleon (1980) が初めて研究し, その後, Chiang and Niu (1981) によって正式に「consecutive- k -out-of- $n:F$ システム」と命名されたモデルがある.

Consecutive- k -out-of- $n:F$ (以下, $\text{Con}/k/n:F$) システムとは, n 個のコンポーネントが線形に配置されており, 少なくとも k 個の連続したコンポーネントが故障した場合にシステムが故障するシステムモデルである (図 1). 以下に, $\text{Con}/k/n:F$ システムの応用例を示す.

応用例 1: 石油パイプラインシステム (Chiang and Niu, 1981). n 個のポンプステーションから構成されるパイプラインシステムを考える. 各ポンプステーションは隣接する k 個のステーションまで石油を輸送する能力を持つ. 1 つのポンプステーションが故障しても, 隣接するステーションが負荷を担うことができるため, 石油の流れは中断されない. しかし, k 個以上の連続したポンプステーションが故障した場合, 石油の流れが中断され, その結果, システム全体の故障となる. このような石油パイプラインシステムは $\text{Con}/k/n:F$ システムとしてモデル化できる.

応用例 2: 高速道路の街灯 (Dafnis et al., 2019). 一定の間隔で n 個の街灯が設置された高速道路を考える. 夜間において, k 個の連続する街灯が機能しないと, 特定区域の照明が不足し, 交通に影響を及ぼす可能性がある. このような街灯システムは $\text{Con}/k/n:F$ システムとしてモデル化できる.

応用例 3：生産監視システム (Zhao et al., 2019). n 個のカメラで構成された生産監視システムを考える. 各カメラは隣接する k 個のユニットを監視可能である. 1つのカメラが故障しても, 隣接カメラが代替監視を行える. しかし, k 個の連続するカメラが故障すると, 監視不能領域が生じ, システム全体としては故障となる. このような生産監視システムは $\text{Con}/k/n:F$ システムとしてモデル化できる.

前述のとおり, 一般的に system signature の計算は困難であり, このことは実践的な応用における重大な障壁となっている. 本論文では, system signature の定義を述べた上で, さまざまな計算方法を紹介する. 特に, $\text{Con}/k/n:F$ システムに対する具体的な計算法を述べる. その後, system signature の理論的応用の 1 つとして, 故障コンポーネント数の期待値について述べる.

2. コヒーレントシステムと system signature の定義

2.1 コヒーレントシステムとは

本節では, コヒーレントシステムの定義を述べる. n 個のコンポーネントからなるシステムを考え, 各コンポーネントは稼働状態または故障状態のいずれかであると仮定する. コンポーネント j の状態を示すために, 指示変数 x_j を次のように定義する.

$$(2.1) \quad x_j = \begin{cases} 1, & \text{コンポーネント } j \text{ が稼働している場合} \\ 0, & \text{コンポーネント } j \text{ が故障した場合} \end{cases}$$

このとき, ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ はすべてのコンポーネントの状態を表し, 状態ベクトルと呼ばれる.

また, システムの状態はコンポーネントの状態によって決定されると仮定したとき, システムの状態を示す関数 φ は次式で定義される.

$$(2.2) \quad \varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{状態ベクトル } \mathbf{x} \text{ のときシステムが稼働している場合} \\ 0, & \text{状態ベクトル } \mathbf{x} \text{ のときシステムが故障した場合} \end{cases}$$

ここで, $\varphi(\mathbf{x})$ はシステムの構造関数と呼ばれる.

定義 1 にコヒーレントシステムの定義を示す.

定義 1. リレバントで単調なシステムをコヒーレント (coherent) システムと呼ぶ.

$a \in \{0, 1\}$ に対して, $(a_j, \mathbf{x}) \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \dots, x_n)$ とする. このとき, コンポーネント j が構造 φ に対してリレバントでないとは, 任意の \mathbf{x} に対して $\varphi(1_j, \mathbf{x}) = \varphi(0_j, \mathbf{x})$ が成り立つことを意味する. これは, コンポーネント j の状態が変化することが, システムの状態が変化することに影響を及ぼさないことを意味する. それ以外の場合, コンポーネント j は構造 φ に対してリレバントであるとされる.

単調なシステムとは, システムの構造関数が各コンポーネントの状態に対して単調増加であることを指す. すなわち, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を状態ベクトルとすると, $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ を満たす任意の \mathbf{x} および \mathbf{y} に対して $\varphi(\mathbf{x}) \leq \varphi(\mathbf{y})$ が成り立つ. これは, コンポーネントの状態が改善されたとき, システムの状態は悪くはならないことを意味する.

状態ベクトル \mathbf{x} が $\varphi(\mathbf{x}) = 1$ を満たすとき, \mathbf{x} をパスベクトルと呼ぶ. さらに, 全ての $\mathbf{y} < \mathbf{x}$ に対して $\varphi(\mathbf{y}) = 0$ が成り立つとき, \mathbf{x} を極小パスベクトルと呼ぶ. \mathbf{x} が極小パスベクトルであるとき, 集合 $A = \{j \mid x_j = 1\}$ を極小パス集合と呼ぶ. すなわち, 極小パス集合とは, システ

ムの稼働を保証する最小のコンポーネント集合である。

一方、状態ベクトル x が $\varphi(x) = 0$ を満たすとき、 x をカットベクトルと呼ぶ。さらに、全ての $y > x$ に対して $\varphi(y) = 1$ が成り立つとき、 x を極小カットベクトルと呼ぶ。 x が極小カットベクトルであるとき、集合 $C = \{j \mid x_j = 0\}$ を極小カット集合と呼ぶ。すなわち、極小カット集合とは、システムの故障を引き起こす最小のコンポーネント集合である。

コヒーレントシステムやパスやカットに関する詳細は大鑄 (2019) を確認されたい。

2.2 システムの信頼度関数

本節では、システムの信頼度関数を説明する。システム寿命を表す確率変数を T とするとき、システムの信頼度関数 (reliability function) は $P(T > t)$ と与えられ、これは、時刻 t までにシステムが故障しない確率を意味する。システム全体の信頼度は、コンポーネントの信頼度とその構成方法から求められる。 n 個のコンポーネントの寿命を表す確率変数を X_1, X_2, \dots, X_n とし、独立同一分布に従うとする。また、 $i = 1, \dots, n$ に対して、 $\bar{F}(t) = 1 - F(t) = P(X_i > t)$ を時刻 t でのコンポーネントの信頼度とする。このとき、システムの信頼度関数は様々な表現で与えられる。

まず、 $i = 0, 1, 2, \dots, n$ に対して、 $r_i(n)$ を次のように定義する。

$$(2.3) \quad r_i(n) \equiv \left| \left\{ x \mid \varphi(x) = 1 \text{ and } \sum_{j=1}^n (1 - x_j) = i \right\} \right|$$

ただし、 $|\cdot|$ は集合の要素数を表す。すなわち、 $r_i(n)$ は n 個のコンポーネントを持つシステムにおいて、ちょうど i 個のコンポーネントが故障する場合にシステムが稼働状態となるシステムの状態数 (以下、稼働状態数) を意味する。本論文では、簡単のため、 $r_i(n)$ は r_i と書くことがある。このとき、寿命 T をもつシステムの信頼度関数は次のように表現できる。

$$(2.4) \quad P(T > t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(F(t))^i (\bar{F}(t))^{n-i}$$

次に、独立同一分布に従う寿命をもつ n 個のコンポーネントからなるシステムが時刻 t_0 で稼働している確率を考える。このとき、 $p = \bar{F}(t_0)$ および $q = F(t_0)$ とおくと、式 (2.4) から信頼度多項式 $h(q)$ を導出できる。

$$(2.5) \quad h(q) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i q^i p^{n-i}$$

また、包除原理 (Inclusion-exclusion principle) を用いて、信頼度関数を導出することもできる。コヒーレントシステムにおいて、極小カットを次のように定義する。

$$(2.6) \quad C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$$

ここで、 m は極小カットの数である。また、 \tilde{C}_i ($i = 1, 2, \dots, m$) を極小カット C_i 内の全てのコンポーネントが故障する事象とする。以後、本論文では「事象 \tilde{C}_i が生起する」ことを「極小カット C_i が生起する」と記述することもある。このとき、システムの信頼度 R は

$$(2.7) \quad R = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^m \tilde{C}_i\right)$$

で得ることができ、包除原理を適用することで式(2.7)は

$$(2.8) \quad R = 1 - \sum_{i=1}^{2^m-1} (-1)^{|I_i|+1} P\left(\bigcap_{j \in I_i} \tilde{C}_j\right)$$

と書くことができる(弓削・柳, 2004). ここで I_i は \mathcal{C} の空でない部分集合である.

式(2.8)の各項は全て積事象の確率であり, それらは容易に求めることができるため, 理論上システム信頼度は式(2.8)で算出できることになる. 例えば, Cowell (2015) は包除原理を用いて Con/ k/n :F システムを d 次元に拡張したシステムの信頼度関数を導出した. しかし, 各項の数は極小カット数に対して指数的に増えるため, システムサイズが大きくなると信頼度算出時間も指数的に増えることになる.

ここで, 式(2.8)は多くの互いに打ち消しあう項を含んでいることに注目し, それらを取り除くと,

$$(2.9) \quad R = 1 + \sum_i d_i P(E_i)$$

と書くことができる. ここで, E_i は $\{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ の部分集合に含まれるコンポーネントがすべて故障する事象であり, 係数 d_i は domination と呼ばれる. 式(2.9)は式(2.8)を使用した場合に比べ, 同じ事象の確率を複数回求める必要がないため, 効率的にシステム信頼度を求めることができる.

2.3 System signature の定義

本節では, system signature の定義を述べる. n 個のコンポーネントからなるシステムの故障時間を T , 各コンポーネントの故障時間を X_1, X_2, \dots, X_n とする. また, $X_{i:n}$ は X_1, \dots, X_n の中で i 番目に短い故障時間 (i -out-of- n :F システムの故障時間)を表す.

このとき, Samaniego (1985) は独立同一分布に従う寿命をもつ n 個のコンポーネントを持つコヒーレントシステムの信頼度関数は次式で表されることを示した.

$$(2.10) \quad \begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{i=1}^n P(T > t, T = X_{i:n}) \\ &= \sum_{i=1}^n P(T > t | T = X_{i:n}) P(T = X_{i:n}) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i P(X_{i:n} > t) \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=0}^{i-1} \binom{n}{j} (F(t))^j (\bar{F}(t))^{n-j} \end{aligned}$$

ここで, 式(2.10)に現れる s_i ($i = 1, 2, \dots, n$) は system signature と呼ばれる確率ベクトルの要素であり, 次のように定義される.

定義 2 (system signature). コヒーレントシステムにおける n 個のコンポーネントの寿命が独立かつ同一分布であると仮定する. system signature \mathbf{s} は, i 番目のコンポーネントの故障がシステムの故障を引き起こす確率 s_i を要素とする n 次元の確率ベクトルである. すなわち,

$$(2.11) \quad s_i = P(T = X_{i:n}),$$

である.

3. System signature の算出方法

本章では, system signature の算出方法について述べる.

System signature は, 定義 2 とは異なる方法で定義することもできる. Kochar et al. (1999) は $i = 1, 2, \dots, n$ に対して, 次のように定義している.

$$(3.1) \quad s_i = \frac{\text{システム故障が } i \text{ 番目のコンポーネント故障によって引き起こされる順列の数}}{n!}.$$

ここで, コンポーネント寿命が独立同一分布に従うと仮定されているため, これらの n 個の異なる故障時間の順列はすべて等確率で発生することに注意する.

ここで, 式 (3.1) を用いた system signature の計算例を示す. 例として, Con/2/4:F システムを考える. このシステムの 4 つのコンポーネントの故障時間 X_1, X_2, X_3, X_4 は $4! = 24$ 通りの順序で並べることができ, 独立同一分布の仮定により, これら 24 通りの順列は等確率で発生する. 故障を引き起こすコンポーネント故障時間の順序とシステム寿命の関係を表 1 に示す. したがって, Con/2/4:F システムの system signature は

$$(3.2) \quad s = \left(0, \frac{12}{24}, \frac{12}{24}, 0\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

である.

一般的に, system signature はコンポーネント数が少ない, もしくは, システム構造が直列

表 1. Con/2/4:F システムにおけるコンポーネント故障時間の順序とシステム寿命 T .

コンポーネント故障時間の順序	システム寿命 T に等しい順序統計量
$X_1 < X_2 < X_3 < X_4$	$X_{2:4}$
$X_1 < X_2 < X_4 < X_3$	$X_{2:4}$
$X_1 < X_3 < X_2 < X_4$	$X_{3:4}$
$X_1 < X_3 < X_4 < X_2$	$X_{3:4}$
$X_1 < X_4 < X_2 < X_3$	$X_{3:4}$
$X_1 < X_4 < X_3 < X_2$	$X_{3:4}$
$X_2 < X_1 < X_3 < X_4$	$X_{2:4}$
$X_2 < X_1 < X_4 < X_3$	$X_{2:4}$
$X_2 < X_3 < X_1 < X_4$	$X_{2:4}$
$X_2 < X_3 < X_4 < X_1$	$X_{2:4}$
$X_2 < X_4 < X_1 < X_3$	$X_{3:4}$
$X_2 < X_4 < X_3 < X_1$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_1 < X_2 < X_4$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_1 < X_4 < X_2$	$X_{3:4}$
$X_3 < X_2 < X_1 < X_4$	$X_{2:4}$
$X_3 < X_2 < X_4 < X_1$	$X_{2:4}$
$X_3 < X_4 < X_1 < X_2$	$X_{2:4}$
$X_3 < X_4 < X_2 < X_1$	$X_{2:4}$
$X_4 < X_1 < X_2 < X_3$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_1 < X_3 < X_2$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_2 < X_1 < X_3$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_2 < X_3 < X_1$	$X_{3:4}$
$X_4 < X_3 < X_1 < X_2$	$X_{2:4}$
$X_4 < X_3 < X_2 < X_1$	$X_{2:4}$

や並列のようにシンプルなものでない限り、算出するのは困難であることが知られている (Da et al., 2012). そのため、効率的な system signature の算出方法が求められる.

3.1 稼働状態数を用いた system signature の計算

本節で, system signature を, 稼働状態数を用いて計算する方法を示す (Boland, 2001).

$a_i \equiv \frac{r_i}{\binom{n}{i}}$ とすると, 式 (2.5) は

$$(3.3) \quad h(q) = \sum_{j=0}^n a_j \binom{n}{j} q^j p^{n-j}$$

と書ける.

一方で, 式 (2.10) より, 和の順序を入れ替えることで,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} P(T > t) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n s_i \right) \binom{n}{j} (F(t))^j (\overline{F}(t))^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{i=j+1}^n s_i \right) \binom{n}{j} q^j p^{n-j} \end{aligned}$$

となる.

式 (3.3) と式 (3.4) の係数を比較することで, $i = 0, \dots, n-1$ に対して

$$(3.5) \quad a_i = \sum_{j=i+1}^n s_j$$

を得る. また, 式 (3.5) から, 次のような s_i と a_i の関係式が導かれる (Boland, 2001).

$$(3.6) \quad s_{i+1} = a_i - a_{i+1}$$

ただし, $a_{n+1} = 0$ とする. すなわち, 「system signature を求める問題」は「稼働状態数 r_i を求める問題」に帰着する.

3.1.1 Con/ k/n :F システムにおける稼働状態数の算出

本項では, Con/ k/n :F システムにおける稼働状態数の算出について述べる. 独立同一分布に従う寿命をもつコンポーネントからなる Con/ k/n :F システムの信頼度 $R_L(k, n)$ は次式で表される.

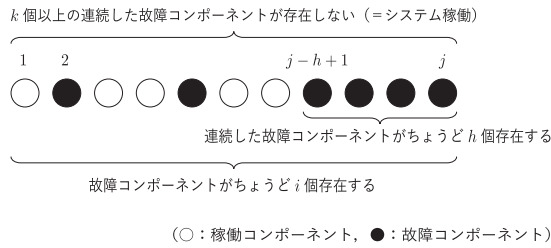
$$(3.7) \quad R_L(k, n) = \sum_{i=0}^n r_i(k, n) q^i p^{n-i}$$

ここで, $r_i(k, n)$ は k 個以上の連続した故障コンポーネントが存在しないような i 個の故障コンポーネントの並べ方の数を表す. Bollinger and Salvia (1982) は, $r_i(k, n)$ を次のように与えた.

$$(3.8) \quad r_i(k, n) = \begin{cases} 0, & i = n \geq k \text{ の場合} \\ \binom{n}{i}, & 0 \leq i \leq k-1 \text{ の場合} \\ \sum_{j=1}^k r_{i-j+1}(k, n-j), & k \leq i < n \text{ の場合} \end{cases}$$

3.1.2 ピボット分解法を用いた Con/ k/n :F システムにおける稼働状態数の算出

本項では, Nakamura and Yamamoto (2022) に基づいて, 式 (3.8) とは異なる再帰方程式を用

図 2. $r_i(k, j; h)$ の説明.

いてシステムの稼働状態数を導出する. Nakamura and Yamamoto (2022) は $\text{Con}/k/n:F$ システムを 2 次元平面に拡張したシステムに対して, 再帰的な稼働状態数の算出方法を提案したが, この方法は $\text{Con}/k/n:F$ システムに対しても適用可能である. この方法の基礎となっているのは, ピボット分解法 (Kuo and Zuo, 2003) である. ピボット分解法により, 選択したコンポーネントの状態に基づいて信頼度を分解し, 複雑なシステムの信頼度解析を体系的に行うことができる.

まず, 次の記号を定義する. $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, x_j を $\text{Con}/k/n:F$ システムの左から数えて j 番目のコンポーネントが稼働しているときに 0, 故障したときに 1 となる 2 値変数とする. $r_i(k, j; h)$ は, 図 2 に示す,

- (1) 故障コンポーネントがちょうど i 個存在する
- (2) 右端 (コンポーネント j 番目) から見て連続した故障コンポーネントがちょうど h 個存在する (すなわち, コンポーネント $j-h+1$ から j までが故障している)
- (3) k 個以上の連続した故障コンポーネントが存在しない (すなわち, システムは稼働している)

を満たす $\text{Con}/k/j:F$ システム内の j 個のコンポーネントの状態の総数である.

これらの記号を用いて, 次の定理により $\text{Con}/k/n:F$ システムの稼働状態数 $r_i(k, n)$ を得ることができる.

定理 1. (a) $j = 1, 2, \dots, n$, $i = 0, 1, \dots, j$, および, $h = 0, 1, \dots, k-1$ に対して,

$$(3.9) \quad r_i(k, j; h) = \begin{cases} \sum_{g=0}^{k-1} r_i(k, j-1; g), & h = 0 \text{ の場合} \\ r_{i-1}(k, j-1; h-1), & 1 \leq h \leq k-1 \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

であり, 境界条件は, $i = 0, 1, \dots, n$ および $h = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$(3.10) \quad r_i(k, 0; h) = \begin{cases} 1, & i = 0 \text{ かつ } h = 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

で与えられる.

(b) $i = 0, 1, \dots, n$ に対して,

$$(3.11) \quad r_i(k, n) = \sum_{h=0}^{k-1} r_i(k, n; h)$$

が成り立つ。

式(3.9)は、 $r_i(k, j; h)$ を次の3つの場合に分類して計算している。

- $h = 0$ の場合：この場合は、 j 番目のコンポーネントが稼働していることを意味する。右端の連続する故障数がゼロとなるため、 $(j - 1)$ 番目までの状態で右端の連続故障数が g 個 ($0 \leq g \leq k - 1$) である全ての状態の合計を取っている。これは、稼働コンポーネントが追加されることで、右端の連続故障数がリセットされることを意味している。

- $1 \leq h \leq k - 1$ の場合：この場合は、 j 番目のコンポーネントが故障しており、右端に連続して h 個の故障コンポーネントが存在する場合である。故障コンポーネントが1つ増加し、右端の連続故障数も1つ増加するため、 $(j - 1)$ 番目までの状態で故障コンポーネント数が $(i - 1)$ 個、右端の連続故障数が $(h - 1)$ 個である状態から導かれる。

- 上記以外の場合：これは、連続した故障コンポーネント数が k 個以上となり、システム故障となる場合や、論理的に存在し得ない状態を表している。したがって、そのような稼働状態数はゼロと定義する。

式(3.11)により、Con/ k/n :F システムにおいて、故障コンポーネントがちょうど i 個である稼働状態数を求める。右端の連続故障数 h が0から $(k - 1)$ までの全ての可能な状態について和を取ることで、システムが連続する k 個の故障を含まない条件下での全ての稼働状態数を計算している。

以上のように、定理1は、ピボット分解法 (Kuo and Zuo, 2003) の考え方をを用いて、右端のコンポーネントの状態で場合分けを行うことで、稼働状態数を再帰的に計算する方法を与えている。この再帰的な計算により、大規模なシステムにおいても稼働状態数を効率的に計算することが可能となる。

3.1.3 計算例：Con/2/5:F システムの場合

本項では、Con/ k/n :F システムの system signature を算出する手順について述べる。例として、Con/2/5:F システムを考える。まず、以下のように、定理1を用いて稼働状態数 $r_i(2, 5)$ ($i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) を計算する。

ステップ1：初期条件の設定。まず、式(3.10)から次のように境界条件を求める。

$$(3.12) \quad r_i(2, 0; h) = \begin{cases} 1, & i = 0 \text{ かつ } h = 0 \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

ステップ2：再帰的な $r_i(2, j; h)$ の計算。次に、式(3.9)から次のように $r_i(2, j; h)$ を再帰的に計算する。

$j = 1$ の場合：

$$r_0(2, 1; 0) = r_0(2, 0; 0) = 1$$

$$r_1(2, 1; 1) = r_0(2, 0; 0) = 1$$

$j = 2$ の場合：

$$r_0(2, 2; 0) = r_0(2, 1; 0) = 1$$

$$r_1(2, 2; 0) = r_1(2, 1; 0) + r_1(2, 1; 1) = 0 + 1 = 1$$

$$r_1(2, 2; 1) = r_0(2, 1; 0) = 1$$

$$r_2(2, 2; 1) = r_1(2, 1; 0) = 0$$

$j = 3$ の場合 :

$$\begin{aligned} r_0(2, 3; 0) &= r_0(2, 2; 0) = 1 \\ r_1(2, 3; 0) &= r_1(2, 2; 0) + r_1(2, 2; 1) = 1 + 1 = 2 \\ r_1(2, 3; 1) &= r_0(2, 2; 0) = 1 \\ r_2(2, 3; 1) &= r_1(2, 2; 0) = 1 \\ r_3(2, 3; 1) &= r_2(2, 2; 0) = 0 \end{aligned}$$

$j = 4$ の場合 :

$$\begin{aligned} r_0(2, 4; 0) &= r_0(2, 3; 0) = 1 \\ r_1(2, 4; 0) &= r_1(2, 3; 0) + r_1(2, 3; 1) = 2 + 1 = 3 \\ r_2(2, 4; 0) &= r_2(2, 3; 0) + r_2(2, 3; 1) = 0 + 1 = 1 \\ r_1(2, 4; 1) &= r_0(2, 3; 0) = 1 \\ r_2(2, 4; 1) &= r_1(2, 3; 0) = 2 \\ r_3(2, 4; 1) &= r_2(2, 3; 0) = 0 \end{aligned}$$

$j = 5$ の場合 :

$$\begin{aligned} r_0(2, 5; 0) &= r_0(2, 4; 0) = 1 \\ r_1(2, 5; 0) &= r_1(2, 4; 0) + r_1(2, 4; 1) = 3 + 1 = 4 \\ r_2(2, 5; 0) &= r_2(2, 4; 0) + r_2(2, 4; 1) = 1 + 2 = 3 \\ r_1(2, 5; 1) &= r_0(2, 4; 0) = 1 \\ r_2(2, 5; 1) &= r_1(2, 4; 0) = 3 \\ r_3(2, 5; 1) &= r_2(2, 4; 0) = 1 \end{aligned}$$

ステップ 3 : 稼働状態数の和の計算. 最後に, 式 (3.11) を用いて, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して, $r_i(2, 5) = r_i(2, 5; 0) + r_i(2, 5; 1)$ を計算する. 具体的には,

$$\begin{aligned} r_0(2, 5) &= r_0(2, 5; 0) + r_0(2, 5; 1) = 1 + 0 = 1 \\ r_1(2, 5) &= r_1(2, 5; 0) + r_1(2, 5; 1) = 4 + 1 = 5 \\ r_2(2, 5) &= r_2(2, 5; 0) + r_2(2, 5; 1) = 3 + 3 = 6 \\ r_3(2, 5) &= r_3(2, 5; 0) + r_3(2, 5; 1) = 0 + 1 = 1 \\ r_4(2, 5) &= r_4(2, 5; 0) + r_4(2, 5; 1) = 0 + 0 = 0 \\ r_5(2, 5) &= 0 \end{aligned}$$

この結果から, Con/2/5:F システムの稼働状態数を求めることができた.

次に, 求めた稼働状態数から system signature を求める. まず, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ に対して, $a_i = \frac{r_i(2, 5)}{\binom{5}{i}}$ より,

$$(3.13) \quad (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = \left(1, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, 0, 0\right)$$

であるので, 式 (3.6) より,

$$(3.14) \quad (s_1, s_2, s_3, s_4, s_5) = \left(0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10}, 0\right)$$

が得られた。

3.2 Domination を用いた system signature の計算

前節では、稼働状態数から system signature を計算する方法を説明したが、本節では、domination から system signature を計算する (Boland et al., 2003). Boland et al. (2003) では、信頼度関数を p の多項式として表現しているが、Con/ k/n :F システムの場合は q の多項式としたほうが都合がよい。そこで、式(2.9)より、独立同一分布に従う寿命をもつ n 個のコンポーネントを持つコヒーレントシステムの信頼度関数 $h(q)$ を次式で与える。

$$(3.15) \quad h(q) = \sum_{r=0}^n d_r q^r$$

一方、式(3.3)において、 $p + q = 1$ より、

$$(3.16) \quad h(q) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \binom{n}{j} q^j (1-q)^{n-j}$$

となる。次に、二項定理を用いて $(1-q)^{n-j}$ を展開すると

$$(1-q)^{n-j} = \sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^i q^i$$

が得られ、これを式(3.16)に代入すると、

$$(3.17) \quad h(q) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \binom{n}{j} q^j \left(\sum_{i=0}^{n-j} \binom{n-j}{i} (-1)^i q^i \right)$$

となる。内側の総和を展開して整理すると、

$$(3.18) \quad \begin{aligned} h(q) &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-j} a_j \binom{n}{j} \binom{n-j}{i} (-1)^i q^{j+i} \\ &= \sum_{r=0}^n \left(\sum_{j=0}^{\min(r, n-1)} a_j \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j} (-1)^{r-j} \right) q^r \end{aligned}$$

を得る。

式(3.15)と式(3.18)の係数を比較することで、 $r = 0, 1, \dots, n$ に対して

$$(3.19) \quad d_r = \sum_{j=0}^{\min(r, n-1)} a_j \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j} (-1)^{r-j}$$

を得る。ここで、 $\mathbf{d} = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_n)^\top$ とする。ただし、 $^\top$ は転置を表す。このとき、式(3.19)より、 \mathbf{d} と \mathbf{a} は線形関係にあることがわかるため、その関係は

$$(3.20) \quad \mathbf{d} = \mathbf{M} \mathbf{a}$$

と表現できる。ここで、 $\mathbf{a} = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)^\top$ であり、 \mathbf{M} は次のように定義される $(n+1) \times (n+1)$ 行列である。

$$(3.21) \quad m_{rj} = \begin{cases} \binom{n}{j} \binom{n-j}{r-j} (-1)^{r-j}, & r \geq j \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで, $r, j = 0, 1, \dots, n$ である. また, 逆行列 M^{-1} が存在すれば,

$$(3.22) \quad \boldsymbol{a} = M^{-1} \boldsymbol{d}$$

として \boldsymbol{d} から \boldsymbol{a} を求めることも可能である. したがって, 式(3.6)と式(3.22)を用いることで, domination から system signature を算出することも可能である.

3.2.1 Con/ k/n :F システムにおける domination の算出

本項では, Con/ k/n :F システムにおける domination の算出について述べる. Kossow and Preuss (1989) は Con/ k/n :F システムに関する domination に関する定理を示した.

定理 2. 極小カットで表現可能なシステム故障状態 X の domination を $d(X)$, 連続して故障したコンポーネント数を m とすると, 極小カットで表現可能なシステムの故障状態の domination は次式で求めることができる.

$$(3.23) \quad d(X) = \begin{cases} +1, & m \equiv 0 \pmod{k+1} \text{ の場合} \\ -1, & m \equiv k \pmod{k+1} \text{ の場合} \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

ここで, mod は m を $(k+1)$ で割った場合の余りを表している.

式(3.23)により, 極小カットが繋がるか重なるかして表されている故障状態についての domination を求めることができる.

また, 極小カットセット同士が互いに重なりがない(非連結である)場合は, 次の定理によって domination を求めることができる.

定理 3 (極小カットセットが非連結である場合の domination). 故障状態 X は非連結な g 個のカットセット $X^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, g$) からなるとすると, 故障状態 X の domination $d(X)$ は次式で得られる.

$$(3.24) \quad d(X) = \prod_{i=1}^g d(X^{(i)})$$

最終的に domination が 0 でない極小カットの組合せをすべて算出し, 各極小カットの組合せが生起する確率に domination を掛けた値の総和によってシステム信頼度が算出できる.

3.2.2 計算例: Con/2/5:F システムの場合

本項では, Con/ k/n :F システムの system signature を算出する手順について述べる. 例として, Con/2/5:F システムを考える. 表 2 に, 各極小カットで表現可能なシステム故障状態に対する $d(X_i)$ ($i = 1, 2, \dots, 11$) を示す. 例えば, X_5 に着目すると, 5 個のコンポーネントが連続して故障しており, $m (= 5)$ を $k+1 (= 3)$ で割った場合の余りは 2 であるため, $d(X_5) = -1$ である. X_1 に着目すると, X_1 は非連結な 2 個のカットセット $X_1^{(1)}$ と $X_1^{(2)}$ からなる. $X_1^{(1)}$ と $X_1^{(2)}$ は $m = 2$ なので, $d(X_1^{(1)}) = d(X_1^{(2)}) = -1$ である. したがって,

$$(3.25) \quad d(X_1) = d(X_1^{(1)}) \times d(X_1^{(2)}) = +1$$

である.

Con/2/5:F システムのコンポーネントが共通したコンポーネント故障確率 q をもつとき, 信頼度関数 $R_L(2, 5)$ は式(3.15)より次式で表される.

$$(3.26) \quad R_L(2, 5) = 1 - 4q^2 + 3q^3 + q^4 - q^5$$

表 2. 故障状態と domination の対応.

故障状態	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$d(X_i)$
X_1	1	1	0	1	1	+1
X_2	1	1	0	0	0	-1
X_3	1	1	1	0	0	+1
X_4	1	1	1	1	0	0
X_5	1	1	1	1	1	-1
X_6	0	1	1	0	0	-1
X_7	0	1	1	1	0	+1
X_8	0	1	1	1	1	0
X_9	0	0	1	1	0	-1
X_{10}	0	0	1	1	1	+1
X_{11}	0	0	0	1	1	-1

よって, $\mathbf{d} = (1, 0, -4, 3, 1, -1)^\top$ である.

式(3.21)より, 行列 \mathbf{M} は次のようになる.

$$(3.27) \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 30 & -30 & 10 & 0 & 0 \\ 5 & -20 & 30 & -20 & 5 & 0 \\ -1 & 5 & -10 & 10 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

式(3.22)より, \mathbf{a} は次のように求まる.

$$\mathbf{a} = \left(1, 1, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, 0, 0\right)^\top.$$

これは, 式(3.13)と一致する. よって, 3.1.3 項と同様に Con/2/5:F システムの system signature が計算でき, 式(3.14)を得ることができる.

3.3 他の system signature 算出方法

上記では, 稼働状態数や domination を用いた system signature の算出方法について述べた. 本節では, これらとは異なるアプローチによる system signature 算出方法を紹介する.

まず, 一般的なシステムに対する計算手法として, Reed (2017) は縮約二分決定図(Reduced Ordered Binary Decision Diagram, ROBDD)を用いた効率的なアルゴリズムを提案した. これは従来の列挙的アプローチと比較して, 計算効率を大幅に改善している.

特定のシステム構造に対する計算手法も開発されている. Con/ k/n :F システムについては, Triantafyllou and Koutras (2008) が母関数(generating function)アプローチを用いて system signature の再帰方程式を導出した. さらに, Yi and Cui (2018) は, マルコフ過程に基づく新しい算出方法を提案している. これらの手法は, 特定のシステム構造に特化することで, より効率的な計算を実現している.

大規模システムを複数のサブシステムに分割して, system signature を計算する方法も提案されてきた. Da et al. (2012) は, 2つのサブシステムからなるコヒーレントシステムについて, それぞれのサブシステムの system signature を用いて, 直列および並列構造の system signature

を計算する手法を提案した．その後，Da et al. (2014) は，この手法を一般化し， n 個のサブシステムからなる k -out-of- n システムの system signature の計算方法を確立した．このようなサブシステムに基づく計算手法は，他の手法と組み合わせることで計算過程を大幅に簡略化できるという利点を持つが，システムをサブシステムに分割できる場合に限り適用可能である．

4. 故障コンポーネント数の期待値算出

本章では，system signature の理論的応用の 1 つとして，故障コンポーネント数の期待値について述べる．故障コンポーネント数の期待値を求めることで，保守計画の最適化や予備のコンポーネント管理のための定量的な基準を提供することが可能となる．

4.1 パス列挙による故障コンポーネント数の期待値の算出

本節では，Endharta et al. (2016) によって提案された，システムが故障するパスを列挙することで故障コンポーネント数の期待値を算出する方法を説明する．この方法は system signature を用いないが，後述する system signature を用いた算出方法との比較のため，本論文で取り上げる．

まず，システム故障時の故障コンポーネント数の期待値について述べる．システムの可能なパスの総数を P ，パス j に従ってシステムが故障する確率を π_j ，パス j における故障までのステップ数を W_j とする．このとき，システム故障時の故障コンポーネント数を表す確率変数 M の期待値は次式で与えられる．

$$(4.1) \quad E[M] = \sum_{j=1}^P \pi_j \cdot W_j$$

次に，時刻 t 以前にシステム故障が発生する場合の故障コンポーネント数の期待値について述べる．時刻 t 以前のシステム故障時の故障コンポーネント数を表す確率変数を $M(t)$ とし， α_{ji} をパス j におけるステップ i の稼働コンポーネントの故障率の和とする．このとき， $M(t)$ の期待値は次のように表される．

$$(4.2) \quad E[M(t)] = \sum_{j=1}^P \pi_j \cdot W_j \cdot F_j(t)$$

ここで，

$$(4.3) \quad F_j(t) = 1 - \sum_{i=0}^{W_j-1} A_{ji} e^{-\alpha_{ji}t}$$

$$(4.4) \quad A_{ji} = \prod_{m=0, m \neq i}^{W_j-1} \frac{\alpha_{jm}}{\alpha_{jm} - \alpha_{ji}}$$

である ($i = 0, 1, \dots, W_j - 1$)．

最後に，時刻 t でシステムが稼働している場合における故障コンポーネント数の期待値について述べる．時刻 t においてシステムが稼働している場合における故障コンポーネント数を表す確率変数を $S(t)$ とすると，その期待値は次式で与えられる．

$$(4.5) \quad E[S(t)] = \sum_{j=1}^P \pi_j \sum_{i=0}^{W_j-1} \sum_{m=0}^{i-1} i A_{jm} \frac{\alpha_{jm}}{\alpha_{ji} - \alpha_{jm}} (e^{-\alpha_{jm}t} - e^{-\alpha_{ji}t})$$

ここで,

$$(4.6) \quad A_{jm} = \prod_{l=0, l \neq m}^{i-1} \frac{\alpha_{jl}}{\alpha_{jl} - \alpha_{jm}}$$

である.

例として, 故障率 λ の指数分布に従う寿命をもつコンポーネントからなる Con/2/4:F システムを考える. 図 3 に Con/2/4:F システムにおける故障までのパスを示す. ここでは, 1 はコンポーネント稼働, 0 はコンポーネント故障を表す. 例えば, Path 2 $((1, 1, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0))$ は最初に左から 4 番目のコンポーネント, 次に左から 2 番目のコンポーネント, 最後に左から 3 番目のコンポーネントが順番に故障するパスを表す. 図 3 に示すように, Con/2/4:F システムは 18 個のパスを持つ. このとき, 表 3 の値を用いると, 以下の結果が得られる.

$$\begin{aligned} E[M] &= \frac{5}{2} \\ E[M(t)] &= \frac{5}{2} - \frac{3}{2}e^{-4\lambda t} + 8e^{-3\lambda t} - 9e^{-2\lambda t} \\ E[S(t)] &= 2e^{-4\lambda t} - 8e^{-3\lambda t} + 6e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

4.2 System signature を用いた故障コンポーネント数の期待値の算出

前節で紹介したパス列挙法は故障コンポーネント数の算出を可能とするが, 各パスに対して W_j と α_{ji} を計算する必要がある, コンポーネント数の増加に伴い計算量が著しく増大する. この課題に対し, Eryilmaz (2012) と Zhou et al. (2020) は system signature を用いた算出方法

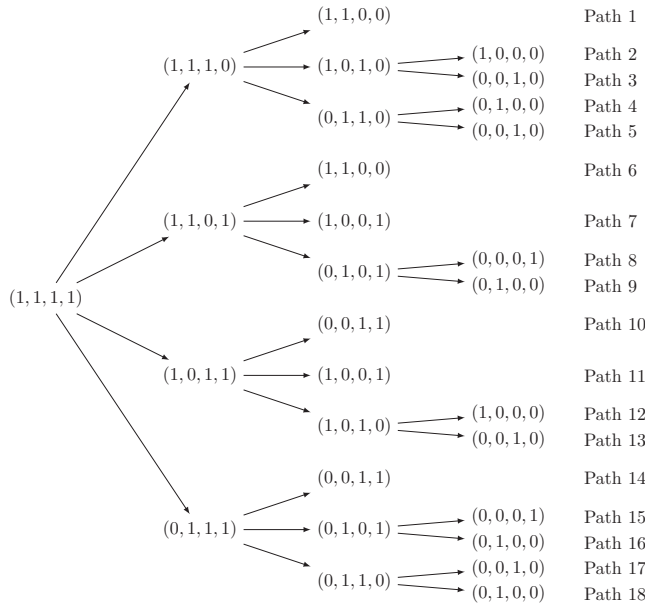


図 3. Con/2/4:F システムにおける故障までのパス.

表 3. Con/2/4:F システムの各パスに対する W_j と π_j .

Path j	W_j	π_j	Path j	W_j	π_j
1	2	1/12	10	2	1/12
2	3	1/24	11	2	1/12
3	3	1/24	12	3	1/24
4	3	1/24	13	3	1/24
5	3	1/24	14	2	1/12
6	2	1/12	15	3	1/24
7	2	1/12	16	3	1/24
8	3	1/24	17	3	1/24
9	3	1/24	18	3	1/24

を導出した．本手法は system signature が得られれば，パスの列挙を必要とせずに期待値を計算できるという利点を持つ．

まず，Eryilmaz (2012) が導出したシステム故障時の故障コンポーネント数の期待値について述べる．このとき， M の期待値は次式で与えられる．

$$(4.7) \quad E[M] = \sum_{i=1}^n i \cdot s_i$$

次に，Zhou et al. (2020) が導出した時刻 t 以前のシステム故障における故障コンポーネント数の期待値について述べる． $M(t)$ の期待値は以下のように展開される．

$$\begin{aligned}
 E[M(t)] &= \sum_{i=1}^n i \cdot P(T = X_{i:n}, T \leq t) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \cdot P(T \leq t | T = X_{i:n}) \cdot P(T = X_{i:n}) \\
 &= \sum_{i=1}^n i \cdot P(X_{i:n} \leq t) \cdot s_i \\
 (4.8) \quad &= \sum_{i=1}^n i \cdot s_i \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} F(t)^j \bar{F}(t)^{n-j}
 \end{aligned}$$

最後に，Zhou et al. (2020) が導出した時刻 t におけるシステム稼働時の故障コンポーネント数の期待値について述べる．まず，以下の事象を定義する．

$$(4.9) \quad B_i = \{X_{i:n} \leq t < X_{(i+1):n}\}$$

このとき，条件付き期待値 $E[S(t)|B_i]$ は，時刻 t までにちょうど i 個のコンポーネントが故障するという条件下で，時刻 t でシステムが稼働している場合の故障コンポーネント数の期待値を表す．これを用いると，

$$\begin{aligned}
 E[S(t)] &= \sum_{i=0}^{n-1} E[S(t)|B_i] \cdot P(B_i) \\
 (4.10) \quad &= \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot P(T > t | B_i) P(B_i)
 \end{aligned}$$

と書ける．ここで，時刻 t までにちょうど i 個のコンポーネントが故障した場合のシステム信頼度は次式で表される．

$$(4.11) \quad P(T > t | B_i) = \sum_{j=i+1}^n s_j$$

したがって，式(4.10)と式(4.11)より，以下の結果を得る．

$$(4.12) \quad E[S(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} i \cdot \left(\sum_{j=i+1}^n s_j \right) \binom{n}{i} F(t)^i \bar{F}(t)^{n-i}$$

例として，故障率 λ の指数分布に従う寿命をもつコンポーネントからなる Con/2/4:F システムを考える．式(3.2)で算出した system signature を用いて計算すると，

$$\begin{aligned} E[M] &= \frac{5}{2} \\ E[M(t)] &= \frac{5}{2}(1 - e^{-\lambda t})^4 + 10(1 - e^{-\lambda t})^3 e^{-\lambda t} + 6(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-2\lambda t} \\ E[S(t)] &= 4(1 - e^{-\lambda t})e^{-3\lambda t} + 6(1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-2\lambda t} \end{aligned}$$

となる．これらの結果は，Endharta et al. (2016)によるパス列挙法で得られた値と一致する．

Endharta et al. (2016)によるパス列挙法は，システムの全故障パスを探索する必要がある，システムの規模が大きくなるにつれて計算量が指数的に増大するため，大規模システムへの適用には計算時間の点において課題がある．一方，system signature を用いた手法は，system signature が得られれば，パスの列挙を必要とせず，より効率的に期待値を算出できる．

計算例として，図4から図7に，故障率 $\lambda = 1$ の指数分布に従う寿命をもつコンポーネントからなる Con/ k / n :F システム ($k = 3, 4, 5, 10$) の (a)時刻 t 以前のシステム故障における故障コンポーネント数の期待値 ($E[M(t)]$) と，(b)時刻 t におけるシステム稼働時の故障コンポーネント数の期待値 ($E[S(t)]$) を示す．

5. おわりに

本論文では，Con/ k / n :F システムを中心にコヒーレントシステムに対する system signature の算出方法について概説した．

一般的に，system signature の算出においてシステム構造の情報を利用することで，算出ア

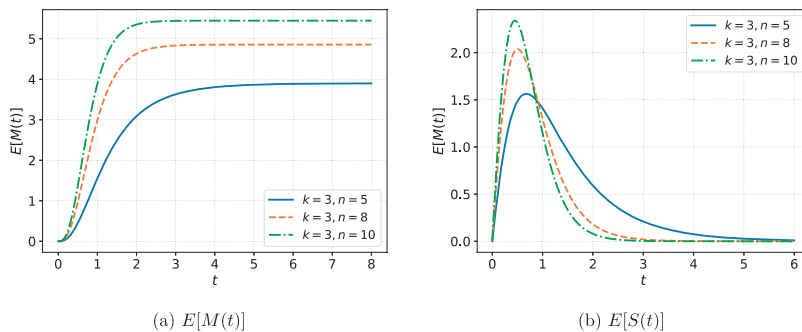
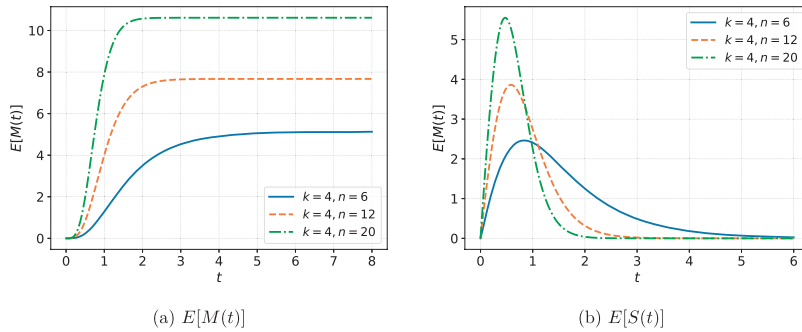
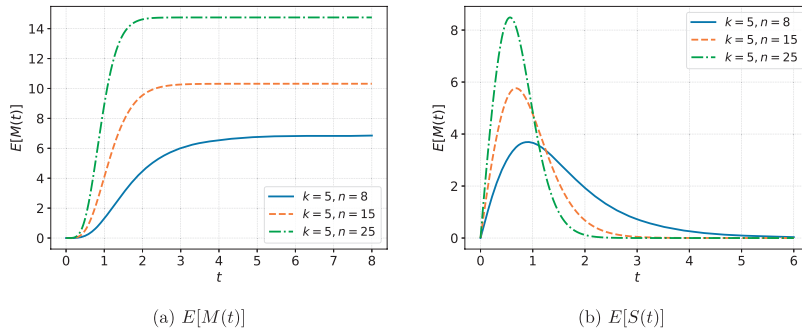
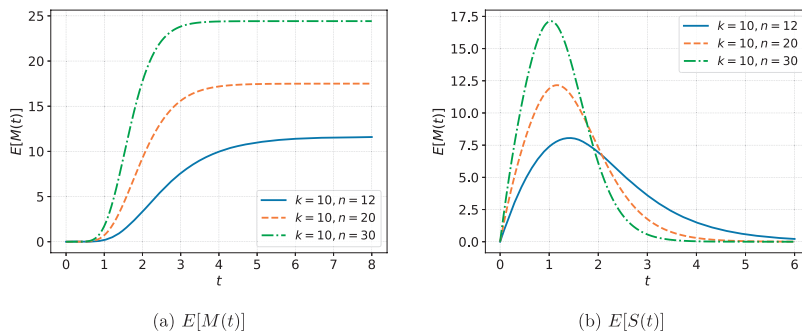


図4. Con/3/ n :F システムにおける故障コンポーネント数の期待値．

図 5. $\text{Con}/4/n:F$ システムにおける故障コンポーネント数の期待値.図 6. $\text{Con}/5/n:F$ システムにおける故障コンポーネント数の期待値.図 7. $\text{Con}/10/n:F$ システムにおける故障コンポーネント数の期待値.

ルゴリズムの性能向上が期待できる。本論文で取り上げた $\text{Con}/k/n:F$ システムは、“規則的な”極小カットを持つという特徴的な構造を有しており（山本 他, 2021a），この構造を活用することで効率的な system signature の算出が可能となった。しかし， $\text{Con}/k/n:F$ システムのみに特化した手法では，汎用性に欠けるという課題がある。

実際，現実のシステムをより忠実に表現するために， $\text{Con}/k/n:F$ システムを以下のような形で一般化したシステムが提案されてきた（Cui and Dong, 2019）。

- 故障基準(単一故障基準と複数故障基準)
- システムの幾何学的構造
- コンポーネントおよびシステムの状態
- 各コンポーネントの重み
- コンポーネント間の従属性

また, Triantafyllou (2015) では, 一般化された $\text{Con}/k/n:F$ システムの関係が体系的に図示されている. このような多様なシステムに対して, 個別に算出方法を開発することは現実的とは言えない. したがって, 性能と汎用性の両面をバランスよく実現する方法の開発が求められる.

性能と汎用性のトレードオフに対して, 定理 1 のピボット分解法に基づく方法の一つの解決策を提示していると考ええる. この手法は Bollinger and Salvia (1982) が導出した式 (3.8) と比べて複雑であるものの, $\text{Con}/k/n:F$ システムに限らず, “規則的” という特徴を持つシステム群に幅広く適用可能であると考えている. 実際に, Nakamura and Yamamoto (2022) は $\text{Con}/k/n:F$ システムを 2 次元平面に拡張したシステムに適用した.

将来的には, system signature の様々な算出方法を体系的に整理し, 対象とするシステムの特徴に応じて適切な手法を選択できる枠組みの構築を目指している. これにより, 「規則的な構造を持つシステム群」や「サブシステムに分割可能なシステム群」に限らず, さまざまな特徴に基づきグループ化したシステム群に対しても system signature を効率的に算出することが可能となると考える. このような性能と汎用性をバランスよく実現する手法の確立は, システムの信頼性評価や構造比較, さらに保全計画の立案など, system signature の実践的な応用の発展に大きく貢献すると期待される.

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 JP21K14370, JP24K17469 の助成を受けたものです. また, 原稿を注意深くお読みいただき, 適切な助言をいただいたことに対し, 匿名査読者および編集委員に感謝を申し上げます.

参 考 文 献

- Asadi, M., Hashemi, M. and Balakrishnan, N. (2023). An overview of some classical models and discussion of the signature-based models of preventive maintenance, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **39**(1), 4–53.
- Boland, P. J. (2001). Signatures of indirect majority systems, *Journal of Applied Probability*, **38**(2), 597–603.
- Boland, P., Samaniego, F. and Vestrup, E. (2003). Linking dominations and signatures in network reliability theory, *Mathematical and Statistical Methods in Reliability* (eds. B. H. Lindqvist and K. A. Doksum), 89–103, World Scientific, New Jersey.
- Bollinger, R. and Salvia, A. (1982). Consecutive- k -out-of- $n:F$ networks, *IEEE Transactions on Reliability*, **31**(1), 53–56.
- Chiang, D. T. and Niu, S.-C. (1981). Reliability of consecutive- k -out-of- $n:F$ system, *IEEE Transactions on Reliability*, **30**(1), 87–89.
- Cowell, S. (2015). A formula for the reliability of a d -dimensional consecutive- k -out-of- $n:F$ system, *International Journal of Combinatorics*, **2015**, <https://doi.org/10.1155/2015/140909>.
- Cui, L. and Dong, Q. (2019). Consecutive k and related models — A survey, *Stochastic Models in Reliability, Network Security and System Safety* (eds. Q.-L. Li, J. Wang and H.-B. Yu), 3–18, Springer, Singapore.

- Da, G., Zheng, B. and Hu, T. (2012). On computing signatures of coherent systems, *Journal of Multivariate Analysis*, **103**(1), 142–150.
- Da, G., Xia, L. and Hu, T. (2014). On computing signatures of k -out-of- n systems consisting of modules, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **16**(1), 223–233.
- Dafnis, S. D., Makri, F. S. and Philippou, A. N. (2019). The reliability of a generalized consecutive system, *Applied Mathematics and Computation*, **359**, 186–193.
- Endharta, A. J., Yun, W. Y. and Yamamoto, H. (2016). Preventive maintenance policy for linear consecutive- k -out-of- n :F system, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **59**(4), 334–346.
- Eryilmaz, S. (2012). The number of failed components in a coherent system with exchangeable components, *IEEE Transactions on Reliability*, **61**(1), 203–207, <https://doi.org/10.1109/TR.2011.2167781>.
- Kochar, S., Mukerjee, H. and Samaniego, F. J. (1999). The “Signature” of a coherent system and its application to comparisons among systems, *Naval Research Logistics*, **46**(5), 507–523.
- Kontoleon, J. M. (1980). Reliability determination of a r -successive-out-of- n :F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **29**(5), <https://doi.org/10.1109/TR.1980.5220921>.
- Kossow, A. and Preuss, W. (1989). Reliability of consecutive- k -out-of- n :F systems with nonidentical component reliabilities, *IEEE Transactions on Reliability*, **38**(2), 229–233.
- Kuo, W. and Zuo, M. J. (2003). *Optimal Reliability Modeling: Principles and Applications*, John Wiley and Sons, Hoboken.
- Nakamura, T. and Yamamoto, H. (2022). Algorithm for computing the system signatures of linear and circular connected- $(1, 2)$ -or- $(2, 1)$ -out-of- (m, n) :F lattice systems, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **29**(04), <https://doi.org/10.1142/S0218539321410072>.
- Naqvi, S., Chan, P. S. and Mishra, D. B. (2022). System signatures: A review and bibliometric analysis, *Communications in Statistics — Theory and Methods*, **51**(7), 1993–2008.
- 大鑄史男 (2019). 『システム信頼性の数理』, シリーズ情報科学における確率モデル, コロナ社, 東京.
- Reed, S. (2017). An efficient algorithm for exact computation of system and survival signatures using binary decision diagrams, *Reliability Engineering & System Safety*, **165**, 257–267.
- Samaniego, F. J. (1985). On closure of the IFR class under formation of coherent systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **34**(1), 69–72, <https://doi.org/10.1109/TR.1985.5221935>.
- Samaniego, F. J. (2007). *System Signatures and Their Applications in Engineering Reliability*, Springer, New York.
- Triantafyllou, I. S. (2015). Consecutive-type reliability systems: An overview and some applications, *Journal of Quality and Reliability Engineering*, **2015**(1), <https://doi.org/10.1155/2015/212303>.
- Triantafyllou, I. S. and Koutras, M. V. (2008). On the signature of coherent systems and applications, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **22**(1), 19–35, <https://doi.org/10.1017/S0269964808000028>.
- 山本久志, 秋葉知昭, 中村太信, 周 蕾 (2021a). システムの信頼度評価と最適設計, 電子情報通信学会基礎・境界ソサイエティ Fundamentals Review, **14**(4), 287–296, https://doi.org/10.1587/essfr.14.4_287.
- 山本久志, 秋葉知昭, 竹ヶ原春貴, 深津 敦, 古井光明 (2021b). 『確率・統計から始めるエンジニアのための信頼性工学：身近な故障から宇宙開発まで』, コロナ社, 東京.
- Yi, H. and Cui, L. (2018). A new computation method for signature: Markov process method, *Naval Research Logistics*, **65**(5), 410–426.
- 弓削哲史, 柳 繁 (2004). 2 次元連続 k -out-of- n :F システムの信頼度下限値, 電子情報通信学会技術研究報告, **104**(141), 1–6.
- Zhao, J., Si, S. and Cai, Z. (2019). A multi-objective reliability optimization for reconfigurable systems considering components degradation, *Reliability Engineering and System Safety*, **183**, 104–115.
- Zhou, L. and Yamamoto, H. (2022). Number of failed components in consecutive- k -out-of- n :G systems and their applications in optimization problems, *IEICE Transactions on Fundamentals of*

- Electronics, Communications and Computer Sciences*, **105**(6), 943–951.
- Zhou, L., Yamamoto, H. and Xiao, X. (2020). Number of failed components in coherent systems, *Journal of Japan Industrial Management Association*, **71**(2E), 92–98.

Computation of the System Signature and Their Application —Case of Consecutive- k -out-of- n :F Systems—

Taishin Nakamura¹ and Lei Zhou²

¹School of Information Science and Technology, Tokai University

²Faculty of Engineering, Nagaoka University of Technology

This paper introduces methods for calculating the system signature of coherent systems, specifically presenting concrete techniques and calculation examples for Consecutive- k -out-of- n :F (Con/ k/n :F) systems. A Con/ k/n :F system is a system model where n components are arranged linearly, and the system fails when at least k consecutive components fail. This model has various real-world applications, such as oil pipelines, highway street lighting, and production monitoring systems. The system signature is a characteristic that depends solely on the system's structure, making it useful for comparing system structures and planning maintenance policies. However, naive calculation methods make it difficult to compute the system signature for large-scale systems. We present a method based on the pivot decomposition method for calculating the system signature of Con/ k/n :F systems. This technique is applicable to systems with regular structures. Subsequently, we discuss the expected number of failed components as one of the theoretical applications of system signatures. Finally, we discuss the potential for a general method to calculate the system signature.