統計数理（2025）
第 73 巻 第 2 号 253–266

特集「生存時間解析と信頼性解析」
［原著論文］

共役ガンマ事前分布を用いたワイブル分布のベイズ推定

作村 建紀[1]・柳本 武美[2]

（受付 2024 年 11 月 29 日；改訂 2025 年 4 月 13 日；採択 4 月 14 日）

要　旨

ベイズ推論における推定量の構築において，推定対象となる母数の適切な選択と事前密度の選択は重要な課題である．前者においては，指数型分布族では自然母数が候補になる．後者については，弱い情報しか含まない場合はしばしば共役な事前密度が仮定される．強い客観性が望まれると無情報事前密度が仮定される．これは情報が極端に少ない共役事前分布の極限の状態として理解できる．本稿では，2 母数のワイブル分布に対して，共役な事前分布としての共役ガンマ事前密度と無情報事前分布としての Jeffreys 事前密度を連続的に繋がる形で導入する．その上で，指数型分布族における最適性を有するベイズ推定量に基づき，ワイブル分布のベイズ推定量を提案する．提案推定量の性能は二乗損失とカルバック・ライブラー損失のもとでのリスク，および推定量の偏りによって評価される．これらは数値実験によって最尤推定量と比較される．リスク比較の結果は提案推定量が有望な推定量であることを支持する．提案推定量の近似的な不偏性も観察される．また，実データへの適用の結果は推定量の選択の必要性を示唆する．

キーワード：自然母数，共役事前分布，事後平均，無情報事前分布，リスク比較．

1. はじめに

ワイブル分布は信頼性工学分野で重要な分布であり，特に形状パラメータの推定に関心を持たれる．ワイブル分布のハザード関数は形状パラメータの値によって柔軟に変化するためである．また，加速試験などの信頼性試験においても，寿命分布にワイブル分布を基礎とした拡張モデルを考えることができる（Nelson, 1990）．ワイブル分布は次の密度を持つ．

$$f(x|\mu,\tau) = \tau\mu^{-\tau}x^{\tau-1}e^{-(x/\mu)^\tau}, \quad (x > 0)$$

ここで，$\mu > 0$, $\tau > 0$ はそれぞれ尺度パラメータ，形状パラメータと呼ばれる．この密度は，τ を固定したとき指数型分布族に属する．任意の実数 $a > 0$ について，x^a の期待値は $\mu^a\Gamma(1 + a/\tau)$ となる．$\tau = 1$ のとき，密度 $\mu^{-1}e^{-x/\mu}$ の指数分布になる．母数 (μ, τ) の推定にはこれまで多くの推定量が提案されている．中でも最尤推定量（MLE）がよく知られているが，シンプルな形式では表せない（Johnson et al., 1994）．

ワイブル分布の母数推定は 3 つの極値分布族の一つであるグンベル分布と強い関係があ

[1] 法政大学 理工学部：〒 184–8584 東京都小金井市梶野町 3–7–2; sakumura@hosei.ac.jp
[2] 統計数理研究所 名誉教授：〒 190–8562 東京都立川市緑町 10–3; yanagmt@ism.ac.jp

る．すなわち，確率変数 Y が期待値 $\mu_y - \psi(1)/\tau_y$ のグンベル分布に従うとき，e^{-Y} は期待値 $e^{-\mu_y}\Gamma(1+1/\tau_y)$ のワイブル分布に従う．ここで，$\psi(\cdot)$ はディガンマ関数である．ワイブル分布の母数 (μ,τ) とは，$(\mu_y,\tau_y)=(-\log\mu,\tau)$ の関係になる．ワイブル分布での母数推定の議論は，グンベル分布にも大いに関係することは興味深い．

本研究では，このワイブル分布の母数 (μ,τ) に関する推定をベイズ推論の立場で考える．ベイズ推定では事前分布の選択が重要である．ワイブル分布はその密度関数や分布関数が初等関数で書くことができるにも関わらず，事前分布の仮定は難しい．過去の十分なデータがあれば，安定した適切な事前分布が導かれる．一方そうでなければ，無情報事前分布が考えられる．たとえば，Jeffreys 事前分布は一つの候補である．また，参照事前分布についてのワイブル分布に関連する先行研究も存在する（Bernardo, 1979; Sun, 1997; Xu et al., 2015）．本研究では，無情報事前分布として Jeffreys 事前分布を導入する．また，μ に対して共役な事前分布，τ に対してガンマ事前分布とする弱情報事前分布との連結を試みる．

ベイズ推定で重要なもう一つの点は，推定対象の選択である．母数は (μ,τ) に限らず，$(1/\mu,1/\tau)$, (μ^τ,τ) などいろいろと考えられる．どれを対象とするのかによってその事後平均は異なる推定量を誘導する．指数型分布族に対しては自然母数を推定対象とし，その事後平均を考えることで最適性を満たす推定量を構築できる（Yanagimoto and Ohnishi, 2009）．たとえば，平均 u, 分散 $1/v$ の正規分布に従う標本 $\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_n)$ を考える．標本平均を $\bar{w}$ とする．参照事前分布 v^{-1} のもとで，自然母数 (uv,v) の事後平均は，$\widehat{uv}=\hat{v}\bar{w}$，$\hat{v}=(n-1)/\sum_i(w_i-\bar{w})^2$ になる．u の推定量 $\hat{u}$ は $\hat{u}=\widehat{uv}/\hat{v}=\bar{w}$ として求めると，$(\hat{u},\hat{v})$ をプラグインした予測分布と $(\widehat{uv},\hat{v})$ による予測分布が共通になることが示される．$(\hat{u},\hat{v})$ をプラグインした予測子は最適性を有する．さらに，$(\hat{u},1/\hat{v})$ は $(u,1/v)$ の不偏推定量になる（Sakumura and Yanagimoto, 2024）．これは，適切な推定対象の選択が重要であることを示唆するものである．ワイブル分布は τ が未知のときには指数型分布族に属さないため，これは難しい問題になる．本研究では，自然母数に着想を得た推定量を考える．推定量の性能はリスクで評価される．

第 2 節では共役な事前分布と無情報事前分布を滑らかにつなげる事前分布の導出を行う．第 3 節では，その事前分布のもとで提案推定量を導出する．その性能は損失関数のもとでのリスク比較によって第 4 節で検討される．また，偏りについても検討する．第 5 節で実データの例が与えられる．第 6 節で本提案推定量についての包括的な考察を行う．

2.　事前分布の導出

母数 η によるサイズ n の指数型分布族の標本を $\boldsymbol{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ と書く．その確率密度関数は

$$p(\boldsymbol{y}|\eta)=\exp\{n(t(\boldsymbol{y})\eta-M(\eta))\}a(\boldsymbol{y})$$

で表される．$t(\boldsymbol{y})$ は十分統計量の関数，η は自然母数，$a(\boldsymbol{y})$ は正規化項である．また，$E[t(\boldsymbol{y})]=\frac{\partial}{\partial\eta}M(\eta)$ である．このとき，共役事前密度は適当な $\delta\geq 0$ によって，

$$\pi(\eta;\eta_0,\delta)=\exp\{-\delta D(\eta_0,\eta)\}b(\eta)e^{-k(\eta_0,\delta)}$$

と定義される．ここで，η_0 は η の真値を想定した推測値である．δ はその想定に対する信念の度合いを表している．また，$D(\eta_0,\eta)=E\left[\log(p(\boldsymbol{y}|\eta_0)/p(\boldsymbol{y}|\eta));p(\boldsymbol{y}|\eta_0)\right]$ であり，$E(g;f)$ は密度 f に関する関数 g の期待値を意味する．この事前密度では η_0, δ, $b(\eta)$ を選ぶ必要がある．δ が小さくなると，事前分布として $b(\eta)$ を仮定した場合とほぼ同等である．通常は無情報な状態になる $\delta=0$ の場合を，この事前分布族の極限として含む．関数 $b(\eta)$ は台測度関数である．したがって，$b(\eta)$ は無情報事前分布と見なされる．

ワイブル分布からのサイズ n の標本を $\boldsymbol{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ と書く．前述の指数型分布族の表記では，固定した τ のもとで，$t(\boldsymbol{x})=-\sum_i x_i^\tau/n$, $\eta=1/\mu^\tau$, $M(\eta)=-\log\eta$ と対応する．また，$E[x_i^\tau]=\mu^\tau$ である．$\hat{\mu}_m^\tau=\sum x_i^\tau/n$ とする．$\hat{\mu}_m$ は μ の最尤推定量である．すると，$t(\boldsymbol{x})=-\hat{\mu}_m^\tau$ であるから，標本 $\boldsymbol{x}$ の幾何平均を $\tilde{x}=\prod_i x_i^{1/n}$ として，標本密度は次式になる．

$$p(\boldsymbol{x}|\eta,\tau)=\eta^n\tau^n\tilde{x}^{n(\tau-1)}e^{-n\eta\hat{\mu}_m^\tau}. \tag{2.1}$$

自然母数は $1/\mu^\tau$ であり，対応する十分統計量は $\sum x_i^\tau$ である．

次に，$\eta_0=1/m^\tau$ として，$E[\hat{\mu}_m^\tau;p(x|\eta_0)]=m^\tau$ より，$D(\eta_0,\eta)=m^\tau\eta-\log(m^\tau\eta)-1$ となるから，固定した τ のもとでの η の共役事前分布を次で定義する．$\delta_1>0$ に対して，

$$\pi(\eta|\tau;m,\delta_1)=e^{-\delta_1(m^\tau\eta-\log(m^\tau\eta)-1)}b(\eta)e^{-k(m^\tau,\delta_1)}$$

とする．ここで，m は μ の真値と想定した推測値，δ_1 はその想定に対する信念の度合いを表している．$k(m^\tau,\delta_1)$ は正規化定数である．$\delta_1=0$ のときは $b(\eta)$ に比例するとする．通常，$b(\eta)$ には一様分布が仮定される（Diaconis and Ylvisaker, 1979）が，不変性を担保した無情報事前分布としては Jeffreys 事前分布があり，1 母数の推論においては魅力的な事前分布である．よって，$b(\eta)$ に Jeffreys 事前分布 $\pi_J(\eta)=1/\eta$ を仮定する．

また，τ に対してはガンマ事前分布として，次で定義する．

$$\pi(\tau;t,\delta_2)=(t\delta_2)^{\delta_2}\tau^{\delta_2-1}e^{-t\delta_2\tau}/\Gamma(\delta_2)$$

ここで，t は $1/\tau$ の真値と想定した推測値，δ_2 は δ_1 と同様に想定した値に対する信念の度合いを表す．$\delta_2=0$ のときは $1/\tau$ に比例するとする．

以上から，(η,τ) の事前分布を $\pi(\eta,\tau)=\pi(\eta|\tau;m,\delta_1)\pi(\tau;t,\delta_2)$ と仮定する．$\delta_1=0$ の場合を考えると，$\pi(\eta|\tau;m,\delta_1)\propto 1/\eta$ であるから，(η,τ) の事前分布は，

$$\pi(\eta,\tau)\propto\eta^{-1}(t\delta_2)^{\delta_2}\tau^{\delta_2-1}e^{-t\delta_2\tau}/\Gamma(\delta_2) \tag{2.2}$$

となる．$\delta_1=\delta_2=0$ の場合，$\pi(\eta,\tau)\propto\eta^{-1}\tau^{-1}$ となる．

$\delta_1=0$ のとき，事後密度は次のように書ける．

$$\pi(\eta,\tau|\boldsymbol{x})=\eta^{n-1}\tilde{x}^{n\tau}\tau^{n+\delta_2-1}e^{-n\eta\hat{\mu}_m^\tau-t\delta_2\tau}/k(\boldsymbol{x},\delta_2), \tag{2.3}$$

ここで，$k(\boldsymbol{x},\delta_2)$ は正規化定数である．

3. 提案推定量

本節では，前節で定義した $\delta_1=0$ のときの事後密度 $\pi(\eta,\tau|\boldsymbol{x})$ のもとで，ワイブル分布の母数 (μ,τ) に対するベイズ推定量を提案する．ベイズ推定理論では，適当な関数 g_1, g_2 について $(g_1(\mu,\tau)$, $g_2(\mu,\tau))$ を求め，その事後平均により推定する．前述したように，指数型分布族においては自然母数が g_1, g_2 の候補になる．自然母数の事後平均による推定量をプラグインした予測子は，二乗損失，およびカルバック・ライブラー損失の事後平均をそれぞれ最小にするという 2 つの最適性を満たす．これらの 2 つの最適性から，自然母数の事後平均の良好な性能を期待できる．

そこで，まず τ を固定したときの自然母数 η の事後平均 $\check{\eta}(\tau)$ を考えると，式(2.3)より，$k(x,\delta_2)=\tilde{x}^{n\tau}\tau^{n+\delta_2-1}e^{-t\delta_2\tau}\int\eta^{n-1}e^{-n\eta\hat{\mu}_m^\tau}d\eta$ であるから，

$$\check{\eta}(\tau)=\int\eta^n e^{-n\eta\hat{\mu}_m^\tau}d\eta\Big/\int\eta^{n-1}e^{-n\eta\hat{\mu}_m^\tau}d\eta$$

を得る．ここで，$n\eta\hat{\mu}_m^\tau = r$ とおいて，ガンマ関数を利用することで，右辺の分子は $(n\hat{\mu}_m^\tau)^{-n-1}\Gamma(n+1)$ となる．同様に，右辺の分母は $(n\hat{\mu}_m^\tau)^{-(n-1)-1}\Gamma(n)$ となるから，

$$\check{\eta}(\tau) = 1/\hat{\mu}_m^\tau$$

が得られる．この推定量は好ましい性質を持つことが期待できる．一方，τ の推定量 $\hat{\tau}$ は $\pi(\eta,\tau)$ のもとでの τ の事後平均として求める．

$\delta_1 = 0$ のとき，周辺事後密度 $\int \pi(\eta,\tau|\boldsymbol{x})d\eta$ は，$\tau^{n+\delta_2-1}\tilde{x}^{n\tau}\hat{\mu}_m^{-n\tau}e^{-t\delta_2\tau}$ に比例するから，τ の事後平均は次式で得られる．

$$\hat{\tau} = \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{x}^\tau}{\hat{\mu}_m^\tau}\tau\right)^n \tau^{\delta_2}e^{-t\delta_2\tau}d\tau \Bigg/ \int_0^\infty \left(\frac{\tilde{x}^\tau}{\hat{\mu}_m^\tau}\tau\right)^n \tau^{\delta_2-1}e^{-t\delta_2\tau}d\tau. \tag{3.1}$$

この推定量を $\check{\eta}(\tau)$ にプラグインして $\hat{\eta} = \check{\eta}(\hat{\tau})$ を得る．対応する μ の推定量は

$$\hat{\mu} = 1/\hat{\eta}^{1/\hat{\tau}} \tag{3.2}$$

として求める．本研究では，$(\hat{\mu},\hat{\tau})$ を母数 (μ,τ) の提案推定量とする．推定量 $(\hat{\mu},\hat{\tau})$ による予測分布と $(\hat{\eta},\hat{\tau})$ による予測分布は共通になる．

4. リスク比較

推定量 $\check{\theta}$ は推定目標 θ に対する損失 $L(\check{\theta},\theta)$ を用いて，そのリスク $E[L(\check{\theta},\theta)]$ で比較される．比較対象の推定量としては MLE を採用する．(μ,τ) を母数の真値，$(\check{\mu},\check{\tau})$ をその任意の推定量とする．また，母数 (μ,τ) の各要素 μ と τ についても個別に比較する．真値 (μ,τ) のもとで，ワイブル分布から標本サイズ n のデータを生成し，推定値を計算する．すべての数値実験において，繰り返し数は 10,000 とし，損失関数の算術平均によってリスクの推定値とする．また，$\mu = 1$ と設定しても μ に関しての一般性を失わない．事前分布 (2.2) における想定値 t については，一般性を失うが $t = 1$ とする場合を扱う．この設定は $\tau = 1$ の場合は適切な仮定となる．

4.1 二乗損失

まず，τ についての二乗損失 $L_s(\check{\tau},\tau) = (\check{\tau}-\tau)^2$ を考える．数値実験により推定されたリスクが表 1 である．δ_2 の値が少しでも大きくなると，リスクが小さくなっていることが観察される．特に，標本サイズが小さいときにその傾向は顕著である．$\delta_2 = 0$ の提案推定量のケースに注目すると，選択されたすべての n と τ に対して，その推定されたリスクは MLE のそれよりも小さい．標本サイズが大きくなると，すべてのリスクは近づく傾向にある．特に，$\delta_2 = 0$ の提案推定量と MLE のリスクは $n = 20$ のときに近い．事前分布において $\delta_2 \neq 0$ のときに $t = 1$ と設定しているにも関わらず，$\tau \neq 1$ であっても性能が良くなることは好ましい結果である．これはグンベル分布の母数推定にも直接的に関連している．

次に，μ についての二乗損失 $L_s(\check{\mu},\mu) = (\check{\mu}-\mu)^2$ を考える．推定されたリスクの結果を表 2 に示す．τ が小さいところでは，MLE よりも提案推定量の推定リスクが小さい．τ が大きくなると，両者の推定リスクに大きな差はなくなる．これはどの標本サイズ n でも同じ傾向である．$\tau = 0.5, 5, 10$ において，δ_2 が大きくなると $\delta_2 = 0$ のときに比べて提案推定量の性能が悪くなる．これは，δ_2 が大きくなるにつれて $\hat{\tau}$ は $\tau = 1$ の近傍に集まるため，性能が低下していると考えられる．ただし，その推定リスクに大きな差は見受けられない．δ_2 は $t = 1$ に対する信念の度合いであり，μ の推定には直接的な影響が少ないことに依る．

次に，$\log\mu$ の二乗損失の場合を表 3 に示す．MLE に比べて，提案推定量の推定リスクが大きいが，その差は小さい．また，μ の場合と同様に，標本サイズに依らず τ が大きくなると差

表 1. 二乗損失のもとでの τ の推定リスク.

n	τ	Proposed $\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	11.87	1.828	1.311	18.67
	1	47.47	4.936	3.195	74.67
	2	189.88	11.97	6.473	298.68
	5	1186.74	28.34	9.644	1866.73
	10	4746.96	35.16	8.491	7466.93
5	0.5	0.1874	0.1814	0.1761	0.1970
	1	0.7497	0.6742	0.6124	0.7879
	2	2.999	2.342	1.883	3.152
	5	18.74	9.890	5.788	19.70
	10	74.97	22.01	9.249	78.79
10	0.5	0.03580	0.03585	0.03590	0.03756
	1	0.1432	0.1398	0.1365	0.1502
	2	0.5729	0.5313	0.4934	0.6009
	5	3.580	2.857	2.309	3.756
	10	14.32	9.012	6.190	15.02
20	0.5	0.01114	0.01118	0.01122	0.01153
	1	0.04456	0.04419	0.04383	0.04611
	2	0.1783	0.1726	0.1672	0.1844
	5	1.114	1.006	0.914	1.153
	10	4.456	3.612	3.059	4.611

表 2. 二乗損失のもとでの μ の推定リスク.

n	τ	Proposed $\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	3.491	3.508	3.525	3.568
	1	0.377	0.374	0.371	0.381
	2	0.0865	0.0857	0.0850	0.0867
	5	0.01520	0.01531	0.01548	0.01516
	10	0.00403	0.00420	0.00438	0.00401
5	0.5	1.554	1.563	1.572	1.593
	1	0.223	0.222	0.221	0.225
	2	0.0531	0.0528	0.0525	0.0532
	5	0.00902	0.00906	0.00913	0.00899
	10	0.00234	0.00240	0.00249	0.00233
10	0.5	0.627	0.629	0.632	0.639
	1	0.1131	0.1129	0.1128	0.1140
	2	0.02737	0.02728	0.02721	0.02741
	5	0.004499	0.004504	0.004519	0.004486
	10	0.001144	0.001159	0.001183	0.001139
20	0.5	0.2537	0.2543	0.2549	0.2569
	1	0.05442	0.05438	0.05435	0.05469
	2	0.01347	0.01345	0.01343	0.01348
	5	0.002192	0.002193	0.002196	0.002188
	10	0.000553	0.000557	0.000563	0.000552

表 3．二乗損失のもとでの $\log\mu$ の推定リスク．

		Proposed			
n	τ	$\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	1.731	1.724	1.717	1.721
	1	0.4328	0.4324	0.4320	0.4303
	2	0.1082	0.1088	0.1093	0.1076
	5	0.0173	0.0177	0.0182	0.0172
	10	0.00433	0.00458	0.00483	0.00430
5	0.5	0.9777	0.9744	0.9713	0.9707
	1	0.2444	0.2441	0.2438	0.2427
	2	0.0611	0.0613	0.0614	0.0607
	5	0.0098	0.0099	0.0101	0.0097
	10	0.00244	0.00254	0.00266	0.00243
10	0.5	0.4673	0.4664	0.4656	0.4648
	1	0.1168	0.1167	0.1166	0.1162
	2	0.02921	0.02923	0.02926	0.02905
	5	0.00467	0.00471	0.00475	0.00465
	10	0.00117	0.00119	0.00122	0.00116
20	0.5	0.2238	0.2236	0.2234	0.2231
	1	0.05596	0.05593	0.05590	0.05577
	2	0.013989	0.013995	0.014002	0.013944
	5	0.00224	0.00225	0.00226	0.00223
	10	0.000560	0.000565	0.000573	0.000558

が小さくなり，δ_2 の値による影響が小さい．このリスクはグンベル分布に関係する．$\log\mu$ の性能は MLE よりもわずかに劣るがほぼ同等であることと，先の τ の二乗損失の結果を踏まえれば，グンベル分布においても本アプローチは有効であることが期待される．

ここで，μ と τ を含む $\eta=\mu^{-\tau}$ の二乗損失の場合を検討する．表 4 に結果を示す．標本サイズが小さいとき，MLE と $\delta_2=0$ のときの提案推定量が大きく，$\delta_2>0$ では τ が大きくなると急激に推定リスクが小さくなる．$n=10$ ではそれぞれの推定リスクの差は小さくなるが，提案推定量はすべて MLE よりも小さい．$n=20$ でその差はほぼ無くなる．その逆数 η^{-1} の二乗損失は表 5 に示される．計算不能のケースが $n=3$ で含まれている．これは τ の推定値が極端に大きい場合が含まれていたためである．全体的な傾向は表 4 と類似しており，提案推定量は MLE よりも推定リスクが小さいことが観察される．

4.2 カルバック・ライブラー損失

プラグイン予測子 $p(\boldsymbol{x}|\check{\mu},\check{\tau})$ を $\check{p}$ とする．真の分布を p とする．カルバック・ライブラー損失を $L_e\left[(\check{\mu},\check{\tau}),(\mu,\tau)\right]$ と書く．ここで，$L_e\left[(\check{\mu},\check{\tau}),(\mu,\tau)\right]=D(\check{p},p)$ である．すると，$L_e\left[(\check{\mu},\check{\tau}),(\mu,\tau)\right]$ は

$$n\left[\log\frac{\check{\tau}}{\tau}-\tau\log\frac{\check{\mu}}{\mu}+\left(1-\frac{\tau}{\check{\tau}}\right)\psi(1)-1+\frac{\check{\mu}^{\tau}}{\mu^{\tau}}\Gamma\left(1+\frac{\tau}{\check{\tau}}\right)\right].$$

となる．$L_e\left[(\check{\mu},\check{\tau}),(\mu,\tau)\right]$ における推定リスクを表 6 にまとめる．ここでも，MLE のリスクよりも提案推定量のリスクのほうが全体的に小さい傾向が見受けられる．δ_2 を大きくするとリスクは小さくなる．特に，τ が大きくなるとその傾向は顕著になる．逆に，$\tau=0.5$ のときの δ_2 の大きさによる影響は小さい．また，標本サイズの違いによるリスクの変化は，二乗損失の場合と比べると小さい．

表 4. 二乗損失のもとでの $\eta = \mu^{-\tau}$ の推定リスク.

		Proposed			
n	τ	$\delta_2 = 0$	$\delta_2 = 0.1$	$\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	1.01×10^{32}	1.39×10^{22}	4.11×10^{17}	6.71×10^{31}
	1	1.01×10^{32}	1.22×10^{17}	6.91×10^{11}	6.71×10^{31}
	2	1.01×10^{32}	2.68×10^{11}	2.34×10^{6}	6.71×10^{31}
	5	1.01×10^{32}	5.07×10^{4}	57.79	6.71×10^{31}
	10	1.01×10^{32}	44.30	2.54	6.71×10^{31}
5	0.5	1.06×10^{4}	5.96×10^{3}	3.54×10^{3}	1.40×10^{4}
	1	1.06×10^{4}	2.81×10^{3}	936.56	1.40×10^{4}
	2	1.06×10^{4}	756.66	116.66	1.40×10^{4}
	5	1.06×10^{4}	43.23	3.91	1.40×10^{4}
	10	1.06×10^{4}	3.51	0.83	1.40×10^{4}
10	0.5	0.2620	0.2625	0.2630	0.2673
	1	0.2620	0.2597	0.2575	0.2673
	2	0.2620	0.2543	0.2474	0.2673
	5	0.2620	0.2398	0.2223	0.2673
	10	0.2620	0.2198	0.1918	0.2673
20	0.5	0.07348	0.07357	0.07365	0.07394
	1	0.07348	0.07343	0.07338	0.07394
	2	0.07348	0.07315	0.07284	0.07394
	5	0.07348	0.07235	0.07129	0.07394
	10	0.07348	0.07109	0.06897	0.07394

表 5. 二乗損失のもとでの $\eta^{-1} = \mu^{\tau}$ の推定リスク.

		Proposed			
n	τ	$\delta_2 = 0$	$\delta_2 = 0.1$	$\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	–	3.69×10^{36}	1.17×10^{17}	–
	1	–	2.58×10^{16}	7.99×10^{6}	–
	2	–	3.97×10^{6}	687.78	–
	5	–	52.90	1.59	–
	10	–	1.39	0.33	–
5	0.5	3.40×10^{3}	1.60×10^{3}	807.85	5.09×10^{3}
	1	3.40×10^{3}	639.74	163.08	5.09×10^{3}
	2	3.40×10^{3}	131.72	14.75	5.09×10^{3}
	5	3.40×10^{3}	5.27	0.70	5.09×10^{3}
	10	3.40×10^{3}	0.65	0.25	5.09×10^{3}
10	0.5	0.2493	0.2498	0.2504	0.2620
	1	0.2493	0.2440	0.2391	0.2620
	2	0.2493	0.2332	0.2193	0.2620
	5	0.2493	0.2054	0.1748	0.2620
	10	0.2493	0.1708	0.1296	0.2620
20	0.5	0.0716	0.0719	0.0722	0.0733
	1	0.0716	0.0715	0.0713	0.0733
	2	0.0716	0.0705	0.0694	0.0733
	5	0.0716	0.0679	0.0645	0.0733
	10	0.0716	0.0638	0.0576	0.0733

'–' は計算不能のケースが含まれていたことを表す.

表 6．カルバック・ライブラー損失 $L_e\left[(\breve{\mu},\breve{\tau}),(\mu,\tau)\right]$ のもとでの推定リスク．

		Proposed			
n	τ	$\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	1.494	1.464	1.439	1.510
	1	1.494	1.417	1.353	1.510
	2	1.494	1.334	1.213	1.510
	5	1.494	1.142	0.958	1.510
	10	1.494	0.958	0.904	1.510
5	0.5	1.236	1.229	1.223	1.251
	1	1.236	1.212	1.189	1.251
	2	1.236	1.178	1.127	1.251
	5	1.236	1.094	1.000	1.251
	10	1.236	1.001	0.952	1.251
10	0.5	1.107	1.105	1.103	1.116
	1	1.107	1.098	1.090	1.116
	2	1.107	1.085	1.066	1.116
	5	1.107	1.052	1.013	1.116
	10	1.107	1.014	0.989	1.116
20	0.5	1.035	1.034	1.033	1.040
	1	1.035	1.031	1.028	1.040
	2	1.035	1.025	1.017	1.040
	5	1.035	1.011	0.993	1.040
	10	1.035	0.994	0.981	1.040

また，双対なカルバック・ライブラー損失 $L_m\left[(\breve{\mu},\breve{\tau}),(\mu,\tau)\right]=L_e\left[(\mu,\tau),(\breve{\mu},\breve{\tau})\right]$ を考えることもできる．損失 $L_m\left[(\breve{\mu},\breve{\tau}),(\mu,\tau)\right]$ の場合の結果を表 7 に示す．得られたリスクは，総じて提案推定量のほうが MLE よりも小さい．また，δ_2 が大きくなると，リスクは小さくなる傾向であり，標本サイズが小さいほどその傾向は顕著である．標本サイズが $n=3$ のとき，計算不能になるケースが含まれている．これは推定された τ の値が大きくなるケースであり，損失関数のガンマ関数が計算できなくなる．一方，$\delta_2>0$ の場合は $n=3$ においても計算値が得られている．

4.3 偏り

次に，推定量の期待値と真値の差である偏りを調べる．まずは，τ の推定値の平均を表 8 に示す．n が小さいとき，いずれも真の τ から離れている．MLE の偏りの絶対値が最も大きい．$\delta_2=0.2$ のときは比較的偏りの絶対値が小さい．n が大きくなると提案推定量の偏りの絶対値は小さくなる．また，選択した n と τ のいずれにおいても MLE より提案推定量の偏りの絶対値のほうが小さい．δ_2 を大きくすれば，偏りの絶対値もまた小さくなる．

次に，μ の推定値の平均を表 9 に与える．n と τ がともに小さい場合を除けば，真の $\mu=1$ に対して，明らかに偏りの絶対値が小さいことが見受けられる．特に $n=3$ であっても $\tau\geq 1$ においてその偏りの絶対値は小さい．$\tau=0.5$ のとき，相対的に偏りの絶対値が大きくなるが，提案推定量は MLE よりも偏りの絶対値が小さい．一方で，τ が大きくなると，$\delta_2>0$ の提案推定量が MLE よりも偏りの絶対値が大きくなる．これは $t=1$ と設定していることに起因する．

表 10 に $\log\mu$ の推定結果を示す．同様に，τ が大きい場合には標本サイズが小さくても偏りの絶対値が小さいことが見受けられる．また，ほとんどのケースで負になる．$\tau=0.5$ のケースを除けば，いずれの推定法においても顕著な差はない．$\tau=0.5$ の場合は MLE の偏りの絶対

表 7. 双対なカルバック・ライブラー損失 $L_m[(\check{\mu},\check{\tau}),(\mu,\tau)]$ のもとでの推定リスク.

		Proposed			
n	τ	$\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	–	5.62×10^{69}	1.96×10^{32}	–
	1	–	7.12×10^{30}	2.13×10^{12}	–
	2	–	6.09×10^{11}	1.85×10^{5}	–
	5	–	2.79×10^{3}	9.37	–
	10	–	7.89	1.30	–
5	0.5	9.67×10^{10}	4.39×10^{9}	3.18×10^{8}	2.75×10^{11}
	1	9.67×10^{10}	1.94×10^{8}	2.03×10^{6}	2.75×10^{11}
	2	9.67×10^{10}	1.32×10^{6}	2.48×10^{3}	2.75×10^{11}
	5	9.67×10^{10}	216.71	4.96	2.75×10^{11}
	10	9.67×10^{10}	4.54	1.42	2.75×10^{11}
10	0.5	2.399	2.396	2.394	2.501
	1	2.399	2.339	2.285	2.501
	2	2.399	2.233	2.091	2.501
	5	2.399	1.963	1.661	2.501
	10	2.399	1.629	1.244	2.501
20	0.5	1.368	1.372	1.376	1.398
	1	1.368	1.362	1.355	1.398
	2	1.368	1.342	1.317	1.398
	5	1.368	1.287	1.216	1.398
	10	1.368	1.206	1.092	1.398

‘-’ は計算不能のケースが含まれていたことを表す.

表 8. τ の推定値の平均.

		Proposed			
n	τ	$\delta_2=0$	$\delta_2=0.1$	$\delta_2=0.2$	MLE
3	0.5	1.146	1.070	1.038	1.175
	1	2.291	2.028	1.908	2.350
	2	4.583	3.724	3.345	4.699
	5	11.457	7.718	6.333	11.748
	10	22.913	12.345	9.238	23.497
5	0.5	0.703	0.704	0.705	0.715
	1	1.405	1.390	1.377	1.430
	2	2.811	2.716	2.633	2.859
	5	7.027	6.353	5.832	7.148
	10	14.053	11.499	9.830	14.296
10	0.5	0.575	0.577	0.578	0.582
	1	1.150	1.148	1.147	1.164
	2	2.300	2.278	2.257	2.328
	5	5.751	5.562	5.387	5.819
	10	11.502	10.702	10.009	11.638
20	0.5	0.533	0.534	0.535	0.537
	1	1.066	1.066	1.065	1.073
	2	2.132	2.124	2.116	2.147
	5	5.331	5.256	5.184	5.367
	10	10.661	10.334	10.026	10.734

表 9. μ の推定値の平均.

n	τ	Proposed $\delta_2 = 0$	Proposed $\delta_2 = 0.1$	Proposed $\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	1.4560	1.4609	1.4657	1.4712
	1	1.0395	1.0369	1.0346	1.0452
	2	0.9765	0.9711	0.9664	0.9792
	5	0.9794	0.9725	0.9672	0.9805
	10	0.9877	0.9808	0.9762	0.9882
5	0.5	1.2676	1.2718	1.2759	1.2825
	1	1.0224	1.0215	1.0207	1.0286
	2	0.9846	0.9817	0.9789	0.9877
	5	0.9872	0.9830	0.9793	0.9884
	10	0.9924	0.9880	0.9844	0.9930
10	0.5	1.1425	1.1449	1.1473	1.1526
	1	1.0147	1.0145	1.0143	1.0193
	2	0.9937	0.9923	0.9910	0.9960
	5	0.9941	0.9920	0.9901	0.9950
	10	0.9965	0.9942	0.9921	0.9969
20	0.5	1.0689	1.0702	1.0714	1.0748
	1	1.0072	1.0072	1.0072	1.0100
	2	0.9969	0.9962	0.9956	0.9983
	5	0.9971	0.9961	0.9951	0.9977
	10	0.9983	0.9971	0.9960	0.9986

表 10. $\log\mu$ の推定値の平均.

n	τ	Proposed $\delta_2 = 0$	Proposed $\delta_2 = 0.1$	Proposed $\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	−0.2888	−0.2839	−0.2791	−0.2772
	1	−0.1444	−0.1465	−0.1483	−0.1386
	2	−0.0722	−0.0776	−0.0824	−0.0693
	5	−0.0289	−0.0359	−0.0414	−0.0277
	10	−0.0144	−0.0214	−0.0261	−0.0139
5	0.5	−0.1759	−0.1719	−0.1680	−0.1632
	1	−0.0880	−0.0886	−0.0892	−0.0816
	2	−0.0440	−0.0469	−0.0497	−0.0408
	5	−0.0176	−0.0218	−0.0256	−0.0163
	10	−0.0088	−0.0132	−0.0169	−0.0082
10	0.5	−0.0820	−0.0796	−0.0773	−0.0726
	1	−0.0410	−0.0411	−0.0413	−0.0363
	2	−0.0205	−0.0219	−0.0232	−0.0182
	5	−0.0082	−0.0103	−0.0123	−0.0073
	10	−0.0041	−0.0064	−0.0085	−0.0036
20	0.5	−0.0399	−0.0387	−0.0375	−0.0343
	1	−0.0200	−0.0200	−0.0200	−0.0172
	2	−0.0100	−0.0106	−0.0113	−0.0086
	5	−0.0040	−0.0050	−0.0060	−0.0034
	10	−0.0020	−0.0031	−0.0043	−0.0017

表 11. η の推定値の平均.

		Proposed			
n	τ	$\delta_2 = 0$	$\delta_2 = 0.1$	$\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	1.01×10^{14}	1.58×10^{9}	8.39×10^{6}	8.28×10^{13}
	1	1.01×10^{14}	4.56×10^{6}	1.19×10^{4}	8.28×10^{13}
	2	1.01×10^{14}	7.47×10^{3}	37.93	8.28×10^{13}
	5	1.01×10^{14}	8.98	2.22	8.28×10^{13}
	10	1.01×10^{14}	2.13	1.53	8.28×10^{13}
5	0.5	3.1510	2.7170	2.4266	3.3979
	1	3.1510	2.3217	1.9500	3.3979
	2	3.1510	1.8950	1.5957	3.3979
	5	3.1510	1.5051	1.3772	3.3979
	10	3.1510	1.3715	1.3040	3.3979
10	0.5	1.1059	1.1051	1.1044	1.1028
	1	1.1059	1.1060	1.1061	1.1028
	2	1.1059	1.1077	1.1094	1.1028
	5	1.1059	1.1126	1.1186	1.1028
	10	1.1059	1.1200	1.1315	1.1028
20	0.5	1.0414	1.0409	1.0404	1.0389
	1	1.0414	1.0415	1.0416	1.0389
	2	1.0414	1.0427	1.0439	1.0389
	5	1.0414	1.0462	1.0508	1.0389
	10	1.0414	1.0518	1.0613	1.0389

値が小さい傾向にあるが，その差はわずかである．

次に，η, η^{-1} の推定値の平均を表 11，表 12 に示す．表 11 から，$n = 3$ のとき，提案推定量の $\delta_2 = 0$ と MLE はともに近い値をとっており，どちらも真値から大きく離れている．$n = 5$ では提案推定量の偏りの絶対値が小さい．$n = 10$ では MLE の偏りの絶対値が小さいが，提案推定量との差はわずかである．n が大きくなると，どの推定値も真値に近い．$\delta_2 > 0$ において $t = 1$ とおいた影響が $n = 10, 20$ における $\tau = 5, 10$ のケースで見受けられる．表 12 では $n = 10$ で提案推定量における $\delta_2 = 0$ と MLE が同等で，それ以外のすべてのケースで提案推定量のほうが偏りの絶対値が小さい．

5. 実データへの適用

本節では，推定量の選択の必要性を確認するために，実データに適用し推定値の違いを比較する．ある材料の 10 個の軸受の時間単位の疲労寿命データ `152.7`，`172.0`，`172.5`，`173.3`，`193.0`，`204.7`，`216.5`，`234.9`，`262.6`，`422.6` を利用する．このデータは McCool (1974) が提供しており，Cohen and Whitten (1988) でも分析されている．提案推定量の設定において，第 4 節の数値実験と同様に $t = 1$ とする．推定した結果を表 13 に記載する．まず，提案推定量は，$\delta_2 = 0$ から $\delta_2 = 0.2$ まで連続的に推定値が変化している．次に，提案推定量と MLE を比較すると，$\delta_2 = 0$ のときでも両者の推定値に違いがある．δ_2 が大きくなると，τ の推定値が小さくなり，MLE との違いが大きくなる．これは $t = 1$ の設定に起因すると考えられる．事前情報が無ければ，$\delta_2 = 0$ とすることが推奨される．

この推定値の違いは，適切な推定量の選択の必要性を示すものである．第 4 節の数値実験の結果は，提案推定量の選択を支持する．この計算についての R コードはウェブ上の補足資料に

表 12. η^{-1} の推定値の平均.

n	τ	Proposed $\delta_2 = 0$	$\delta_2 = 0.1$	$\delta_2 = 0.2$	MLE
3	0.5	2.17×10^{189}	1.92×10^{16}	3.43×10^{6}	8.14×10^{253}
	1	2.19×10^{189}	1.61×10^{6}	52.85	8.14×10^{253}
	2	2.18×10^{189}	38.46	2.23	8.14×10^{253}
	5	2.17×10^{189}	1.58	1.14	8.14×10^{253}
	10	2.17×10^{189}	1.12	0.96	8.14×10^{253}
5	0.5	1.9994	1.7574	1.6063	2.1626
	1	1.9994	1.5518	1.3736	2.1626
	2	1.9994	1.3432	1.2050	2.1626
	5	1.9994	1.1515	1.0638	2.1626
	10	1.9994	1.0553	0.9775	2.1626
10	0.5	1.0653	1.0666	1.0679	1.0725
	1	1.0653	1.0640	1.0628	1.0725
	2	1.0653	1.0591	1.0532	1.0725
	5	1.0653	1.0451	1.0278	1.0725
	10	1.0653	1.0246	0.9945	1.0725
20	0.5	1.0236	1.0243	1.0250	1.0270
	1	1.0236	1.0234	1.0233	1.0270
	2	1.0236	1.0218	1.0200	1.0270
	5	1.0236	1.0169	1.0105	1.0270
	10	1.0236	1.0091	0.9962	1.0270

表 13. McCool (1974)のデータに対する推定値.

	Proposed $\delta_2 = 0$	$\delta_2 = 0.1$	$\delta_2 = 0.2$	MLE
μ	245.446	245.049	244.661	246.409
τ	2.874	2.848	2.823	2.936

記載されている.

6. 考察

ワイブル分布の母数推定に対して提案したベイズ推定量の性能は，リスク比較の結果，既存推定量としての MLE の性能を上回る．特に，母数 (μ, τ) の同時推定の性能は有望な結果である．今回の比較では $\delta_1 = 0$ という限定的なものを扱い，δ_2 を変化させて検証を行った．δ_2 は τ の推定に影響を与えるものであるため，μ の推定には大きな影響がなかった．また，$\hat{\mu}$ や $\log \hat{\mu}$ の偏りは小さいことが観察された．自然母数の事後平均による推定量の偏りが小さくなることを Sakumura and Yanagimoto (2024) が報告している．本研究の提案推定量も自然母数に着想を得たものであり，これらの設定でも近似的な不偏性が観察されたことは興味深い．

打切りや切断が含まれるデータに対して，Kundu and Mitra (2016) は共役な事前分布を仮定した例を紹介している．一方で，無情報事前分布については特に言及はない．このような打切りや切断を含むデータにおいても，本研究における事前分布の設定については特段の変更はなく，形式的には提案手法を適用できる．ただし，その性能については検証が必要である．

参 考 文 献

Bernardo, J. M. (1979). Reference posterior distributions for Bayesian inference, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, **41**(2), 113–128, https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1979.tb01066.x.

Cohen, A. C. and Whitten, B. J. (1988). *Parameter Estimation in Reliability and Life Span Models*, 1st ed., CRC Press, Boca Raton, Florida, https://doi.org/10.1201/9781003066064.

Diaconis, P. and Ylvisaker, D. (1979). Conjugate priors for exponential families, *The Annals of Statistics*, **7**(2), 269–281, http://www.jstor.org/stable/2958808.

Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distribution*, Volume 1, 2nd ed., Wiley & Sons, New York.

Kundu, D. and Mitra, D. (2016). Bayesian inference of Weibull distribution based on left truncated and right censored data, *Computational Statistics & Data Analysis*, **99**, 38–50, https://doi.org/10.1016/j.csda.2016.01.001.

McCool, J. I. (1974). *Inferential Techniques for Weibull Populations*, Aerospace Research Laboratories Report ARL, TR 74-0180, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio.

Nelson, W. (1990). *Accelerated Testing: Statistical Models, Test Plans, and Data Analyses*, John Wiley & Sons, New York, https://doi.org/10.1002/9780470316795.

Sakumura, T. and Yanagimoto, T. (2024). Very small bias observed in Bayesian estimators even for small sample sizes, *Communications in Statistics — Simulation and Computation*, **53**(11), 5594–5604, https://doi.org/10.1080/03610918.2023.2196380.

Sun, D. (1997). A note on noninformative priors for Weibull distributions, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **61**(2), 319–338, https://doi.org/10.1016/S0378-3758(96)00155-3.

Xu, A., Fu, J., Tang, Y. and Guan, Q. (2015). Bayesian analysis of constant-stress accelerated life test for the Weibull distribution using noninformative priors, *Applied Mathematical Modelling*, **39**(20), 6183–6195, https://doi.org/10.1016/j.apm.2015.01.066.

Yanagimoto, T. and Ohnishi, T. (2009). Bayesian prediction of a density function in terms of e-mixture, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **139**(9), 3064–3075, https://doi.org/10.1016/j.jspi.2009.02.005.

Bayesian Estimation under the Conjugate-gamma Prior for the Weibull Distribution

Takenori Sakumura[1] and Takemi Yanagimoto[2]

[1]Faculty of Science and Engineering, Hosei University
[2]The Institute of Statistical Mathematics

Bayesian inference contains two important issues; the choice of the parameters to be estimated and that of prior density. In the former issue, a canonical parameter is a candidate in an exponential family. In the latter issue, when only weak information is available, a conjugate prior is often assumed. A non-informative prior is assumed, when an objective assumption is preferred. The latter prior is regarded as the limit of the former one. Applying the optimality properties of Bayesian estimators in the exponential family, we construct a Bayesian estimator when the sampling density follows the Weibull distribution. A conjugate-gamma prior is employed, which is an extension of a non-informative prior. The performance of the proposed estimator is evaluated favorably in terms of the squared and the Kullback-Leibler losses. Risk comparison studies are conducted, which support the desirable performance of the proposed estimator. The approximate unbiasedness of the proposed estimator is also observed. We also apply the proposed estimator to a real dataset, which indicates the need for selecting a suitable estimator. We conclude that the proposed estimator is promising.

Key words: Canonical parameter, conjugate prior, non-informative prior, posterior mean, risk comparison.