

# 相関した競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータのベイズ流解析

道前 洋史<sup>†</sup>

(受付 2024 年 9 月 28 日；改訂 12 月 20 日；採択 12 月 24 日)

## 要　　旨

生存時間解析は、ある基準となる時点から特定の事象(イベント)が発生するまでの時間を分析する手法であり、医学や疫学はもとより、経済学や社会科学など幅広い分野で活用されている。打ち切り、競合リスク、左側切断などは生存時間解析における古典的な話題である。本稿では、競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りの生存時間データに焦点を当て、その代表的な4つの解析モデルを紹介する(独立モデル、コピュラモデル、ベイズ流独立モデル、ベイズ流コピュラモデル)。特に、競合リスクにおけるコピュラを用いた潜在故障時間(周辺分布)の同時モデル化、同時モデルの条件付きによる左側切断のモデル化、尤度関数の構築、そしてベイズ推定量による周辺分布パラメータとコピュラパラメータの推定については詳細に説明する。シミュレーション実験では、現実的な条件設定(異なる周辺分布と左側切断割合の組み合わせ)で実施し、上記4つの解析モデルで各種パラメータを推定した。考察では、パラメータの推定性能を比較検討し、ベイズ流コピュラモデルにおける課題と今後の展望について述べる。

キーワード：コピュラ、事後平均、周辺生存関数、潜在故障時間、同時生存関数、ワイルブル分布。

## 1. はじめに

縦断研究や介入研究においては、研究者が注目しているイベント(リスク)が、他の先行するイベントの発生によって観察されないことがある。つまり、競合するイベントによって観察が打ち切られることがある。この現象を競合リスク問題と呼ぶ(西川, 2008; 斎藤・室谷, 2023, 2024)。競合リスク問題は生存時間解析における古典的な話題であり、主に3つのアプローチで対処されることが多い。医学や疫学分野では、原因別ハザードモデル(Prentice et al., 1978)や部分分布ハザードモデル(Fine and Gray, 1999)が伝統的に用いられているが、信頼性分野や保険数理分野では潜在故障時間モデル(Cox, 1959; Kaishev et al., 2007; 塚原, 2021)が広く活用されている。本稿では、潜在故障時間モデルに焦点を当てるとしているが、原因別ハザードモデルや部分分布ハザードモデルに興味のある読者は西川(2008)や斎藤・室谷(2023, 2024)を参考されたい。

競合リスクにおける潜在故障時間モデルについて、原爆被爆者疫学調査(Bockwoldt et al., 2021; Spusto et al., 2023)を例に挙げて説明する(図1)。原爆の投下は1945年、この疫学調査の観察開始は1958年、観察終了は2009年である。研究者の興味のある調査項目は、登録者に

<sup>†</sup> 北里大学 薬学部：〒175-0082 東京都港区白金 5-9-1; michimae@pharm.kitasato-u.ac.jp

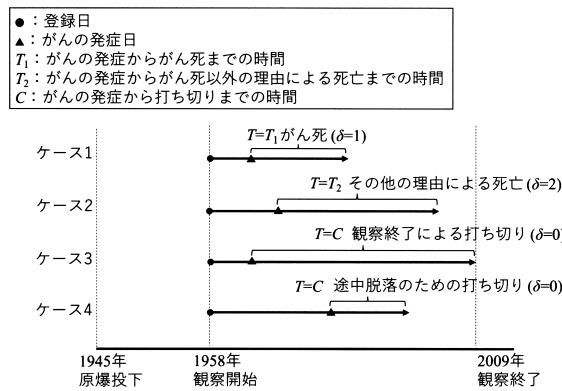


図 1. 競合リスクの模式図.

おけるがんの発症からがんによる死亡までであるとする。潜在故障時間モデルの仮定の下では、例えば、 $T_1$  をがんの発症からがん死までの時間、 $T_2$  をがんの発症からがん以外による死亡までの時間とした場合、観察時間は最小値  $T = \min(T_1, T_2)$  として記録される(図 1)。これは、がんの発症からそれぞれのイベント発生までの時間を潜在変数とみなし、実際に観察できるのは先に発生したイベントまでの観察時間であるという仮定に基づいている(Cox, 1959; 宮村, 1982)。また、通常縦断研究ではあらかじめ観察終了時点が設定されるため、その時点まで生存した対象は右側打ち切りとして扱われる(図 1 のケース 3)。観察期間中でも途中脱落のため観察打ち切りとなる対象も想定されるが、これも独立・無情報打ち切りの仮定の下、右側打ち切りとして扱うことが可能である(図 1 のケース 4)。結局、競合リスクの状況下では、 $C$  を右側打ち切り時間として、 $T = \min(T_1, T_2, C)$  とイベント指示変数  $\delta \in (0, 1, 2)$  が各対象について観察されることになる。 $\delta$  は  $T = T_1$  が観察された場合  $\delta = 1$ 、 $T = T_2$  が観察された場合  $\delta = 2$ 、 $T = C$  が観察された場合  $\delta = 0$  の値をとる指示変数である。古典的な潜在故障時間モデルでは、イベント間の独立性、すなわち確率変数  $T_1$  と  $T_2$  の独立性の仮定に加えて、右側打ち切り時間  $C$  との独立性も仮定されている(Cox, 1959; 宮村, 1982)。

左側切断も生存時間解析ではよく知られた概念である(Klein and Moeschberger, 2003; 江村・道前, 2021)。上述の原爆被爆者疫学調査を想定して左側切断データを説明する。ただし、研究者の興味のある調査項目はがんの発症から死因を問わない全ての死亡までの時間であるとする。左側切断データで解析上の取り扱いの注意を要する対象は、観察開始である 1958 年の時点で既にがんを発症している対象(図 2 のケース 2 とケース 4)と、既にがんを発症し死亡している対象(図 2 のケース 5)の 3 つである。1958 年の時点で死亡している対象は観察できないため、データとしては収集できず、切り捨てとして扱われる。問題とすべきは、1958 年の時点でがんを発症しており、観察期間中に死亡または右側打ち切りとなる対象である。これらの対象については、がんの発症日を情報として収集可能なのであれば、がんの発症から 1958 年までの時間を切断時間  $\tau$  として記録することで、切断時間をもつ、すなわち観察開始まで生存したという条件付きの対象として解釈する。図 2 は切断時間をもつ対象ともたない対象の混在データを示している。

信頼性分野であれば、電力変圧器の寿命データが良い左側切断の例である(Hong et al., 2009; Ranjan et al., 2021; Mitra et al., 2021; 江村・道前, 2021)。観察開始は 1980 年、観察終了は 2008 年である。電力変圧器は観察開始以前から設置され続け 2008 年まで設置が続いた。研究者の興味のある調査項目は電力変圧器の設置から故障までの期間である(上述の例における、が

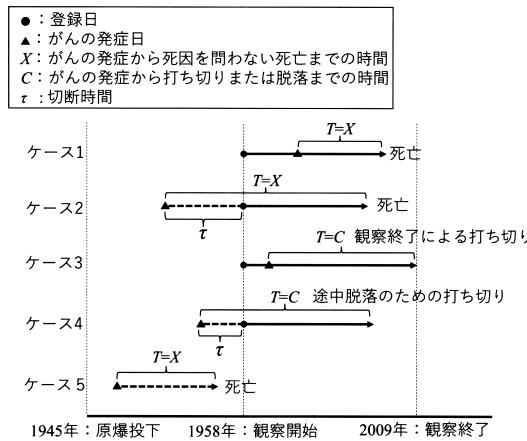


図 2. 左側切断・右側打ち切りデータの模式図.

んの発症日から死亡までの期間). 観察開始以前に設置され、かつ故障した電力変圧器はデータとして収集されないが(図 2 のケース 5 に相当)，故障しなかった電力変圧器は、設置から観察開始までの期間を切断時間としてもつデータとして収集される(図 2 のケース 2 とケース 4 に相当). また、観察開始以降に設置された電力変圧器は、追跡対象となり観察期間中に故障または打ち切りとなる(図 2 のケース 1 とケース 3 に相当). 江村・道前(2021)では電力変圧器の寿命データの解析において、複数のパラメトリック分布(例えばワイブル分布、ガンマ分布、対数正規分布等)に基づく尤度関数の構成やパラメータの推定方法等について詳しく紹介している. 左側切断・右側打ち切りデータについての詳細な解説は、江村・道前(2021)や Emura and Michimae(2022)を参照されたい.

現実のデータは複雑で複合的である. Kundu et al. (2017)は電力変圧器の寿命データを想定して競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータの解析のために新たなモデルを提案した. 先述の Hong et al. (2009)や Ranjan et al. (2021)では、注目しているイベントが電力変圧器の故障だけであった. しかし、競合リスク問題で説明したように、2つの故障原因を同時に考慮するのであれば、これは競合リスクを伴う左側切断である. この競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータに対して、Kundu et al. (2017)は、2つのイベントの潜在故障時間分布として、それぞれにワイブル分布を仮定し、かつ互いに独立であるという仮定下で、ワイブルパラメータ(すなわち生存時間分布)の推定法を提案した. 本稿では、Kundu et al. (2017)の提案手法を独立モデルと呼ぶ. しかし、道前(2023)は、独立モデルの仮定が成立しない場合、すなわちイベント間に相関がある場合、独立モデルではワイブルパラメータを正確に推定できないことを示した.

近年、競合リスク問題における独立性の仮定を緩めるため、イベント間の依存性をマーシャルオルキン分布やコピュラでモデリングする解析手法が提案されている(Wang et al., 2022; Michimae and Emura, 2022). Wang et al. (2022)は周辺分布をワイブル分布とした2変量マーシャルオルキン・ワイブル分布でイベント間の依存構造をモデリングし、潜在故障時間の同時分布を構成、最尤法によるパラメータ推定法を提案した. しかし、このモデリングでは依存構造と周辺分布は固定されており、柔軟性という点で問題がある. 一方、Michimae and Emura (2022)は潜在故障時間の同時分布をコピュラで構成したコピュラモデルを提案した. コピュラを用いる大きな利点は周辺分布とは独立に依存関係を柔軟にモデリングできることであり(Nelsen, 2006)，言い換えれば周辺分布の選択が自由である. Michimae and Emura (2022)は、

相関した競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータにおいて、ワイブル分布を周辺分布としたコピュラ同時モデルに基づき尤度関数を構築し、最尤法で分布パラメータやコピュラパラメータを推定した。しかし、依存性のパラメータであるコピュラパラメータの推定は不安定で最尤法による推定の限界が示された。この問題に対して、近年 Michimae et al. (2024) は、より安定したパラメータの推定法として、ベイズ流コピュラモデルによる推定法を提案した。

本稿では、競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータにおいて、4つの解析モデルである独立モデル、コピュラモデル、ベイズ流独立モデル、そしてベイズ流コピュラモデルに基づくパラメータの推定性能を比較した研究結果を紹介する。特に、Michimae et al. (2024) で検討されていなかった競合リスクにおける各イベント発生割合の違いが、パラメータ推定性能にどの程度影響するのかを、モンテカルロ・シミュレーション実験を通じて4つの解析モデルで比較した。本稿の構成は次の通りである。2節では、競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータにおける、Kundu et al. (2017) の独立モデル、Michimae and Emura (2022) のコピュラモデル、Michimae et al. (2024) のベイズ流独立モデルとベイズ流コピュラモデルを紹介する。3節では、2節で紹介した4つのモデルのパラメータ推定性能を検証するためのシミュレーション方法とその結果について説明する。最後の4節では、考察として、今後の展望について意見を述べる。

## 2. 方法

第2節では、初めに、競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータの構造について、記法と共に説明する。続いて、2つの潜在故障時間の分布をパラメトリックなワイブル分布とする仮定下で、独立モデルとコピュラモデルにおける同時分布と尤度関数の構築方法について説明し、最後に最尤法とベイズ法を用いたワイブルパラメータ(形状と尺度パラメータ)とコピュラパラメータの推定法について説明する。

### 2.1 標本データ

1節で取り上げた競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータについて、上述の原爆被爆者疫学調査を例に挙げて説明する(図3)。研究者は対象  $i(1, \dots, n)$  について、がんの発症からがん死(イベント 1;  $\delta_i = 1$ )までの生存時間に興味があるが、がん以外の理由による死亡(イベント 2;  $\delta_i = 2$ )や打ち切り( $\delta_i = 0$ )等の理由のため、必ずしもがん死を観察できない。つまり、 $T_{ji}$  を対象  $i$  がイベント  $j$  で死亡する潜在故障時間 ( $i = 1, \dots, n; j = 1, 2$ )、 $C_i$  を対象  $i$  の観察終了による右側打ち切り時間(本稿では途中脱落を想定しない)とすると、研究者が対象  $i$  について実際に観察できる時間  $t_i$  は  $t_i = \min(T_{1i}, T_{2i}, C_i)$  となる。また、観察開始である 1958 年の時点で既にがんを発症している対象(図3のケース 2, 4, 7)のうち、死亡している対象(ケース 7)は切り捨てとして扱われるが、ケース 2 と 4 は、がんの発症から 1958 年までの切斷時間をもつ対象となる。以上、対象  $i$  について左側切断時間  $\tau_i(\geq 0)$  の有無を示す指示変数を  $\nu_i$ (左側切断;  $\nu_i = 0$ , 非切断;  $\nu_i = 1$ )とすると、競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りでの標本データは  $\{(t_i, \tau_i, \delta_i, \nu_i); i = 1, \dots, n\}$  として記録される。

2.1節では、原爆被爆者疫学調査を想定し、“死亡”という事象の生起で説明したが、以降の節では“故障”という事象の生起で説明することとする。

### 2.2 独立モデル

Kundu et al. (2017) は、2つの潜在故障時間  $T_1$  と  $T_2$  について、それぞれ独立にワイブル分布に従うと仮定し、各イベントにおけるワイブル分布の密度関数を  $f_j(t) = \alpha_j \lambda_j t^{\alpha_j - 1} \exp(-\lambda_j t^{\alpha_j})$ ,

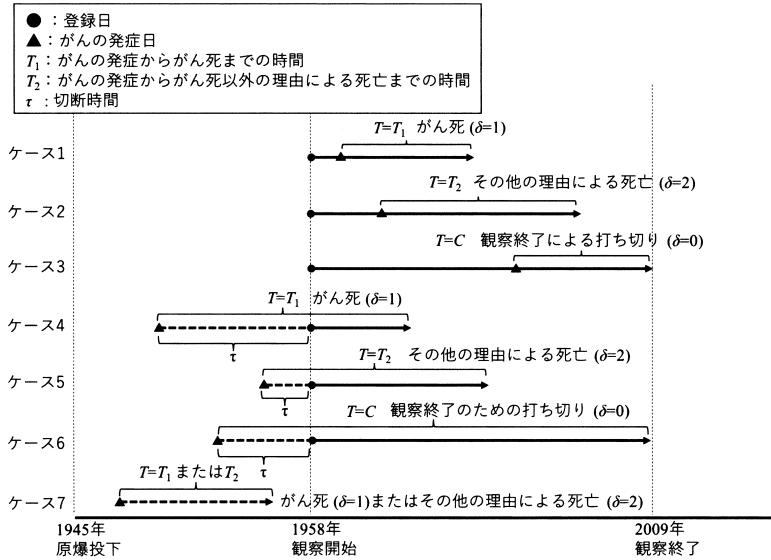


図 3. 競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータの模式図。

累積分布関数を  $F_j(t) = 1 - \exp(-\lambda_j t^{\alpha_j})$ , 生存関数を  $S_j(t) = \exp(-\lambda_j t^{\alpha_j})$ とした。ただし,  $t \geq 0$ ,  $\alpha_j (> 0)$  と  $\lambda_j (> 0)$  はそれぞれ形状パラメータと尺度パラメータである。これらパラメトリック分布の仮定の下, 独立モデルにおける尤度関数の構築方法を以下に説明する。

競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りの状況下において(図 3), 標本が得られるパターンとその尤度関数への貢献は次のケース 1 からケース 6 としてまとめられる (Kundu et al., 2017)。

- ケース 1 (イベント 1 で故障;  $\delta_i = 1$ , 切断時間なし;  $\nu_i = 1$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} = t_i, T_{2i} > t_i) &= f_1(t_i) S_2(t_i) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}), i \in I_1 \end{aligned}$$

- ケース 2 (イベント 2 で故障;  $\delta_i = 2$ , 切断時間なし;  $\nu_i = 1$ )

$$\begin{aligned} P(T_{2i} = t_i, T_{1i} > t_i) &= f_2(t_i) S_1(t_i) \\ &= \alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}) \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}), i \in I_2 \end{aligned}$$

- ケース 3 (打ち切り;  $\delta_i = 0$ , 切断時間なし;  $\nu_i = 1$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} > t_i, T_{2i} > t_i) &= S_1(t_i) S_2(t_i) \\ &= \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}), i \in I_0 \end{aligned}$$

- ケース 4 (イベント 1 で故障;  $\delta_i = 1$ , 切断時間あり;  $\nu_i = 0$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} = t_i, T_{2i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) &= f_1(t_i | T_i > \tau_i) S_2(t_i | T_i > \tau_i) \\ &= \frac{f_1(t_i)}{S_1(\tau_i)} \frac{S_2(t_i)}{S_2(\tau_i)} \\ &= \frac{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})}, i \in I_1 \end{aligned}$$

- ケース 5 (イベント 2 で故障 ;  $\delta_i = 2$ , 切断時間あり ;  $\nu_i = 0$ )

$$\begin{aligned} P(T_{2i} = t_i, T_{1i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) &= f_2(t_i | T_i > \tau_i) S_1(t_i | T_i > \tau_i) \\ &= \frac{f_2(t_i)}{S_2(\tau_i)} \frac{S_1(t_i)}{S_1(\tau_i)} \\ &= \frac{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}) \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})}, i \in I_2 \end{aligned}$$

- ケース 6 (打ち切り ;  $\delta_i = 0$ , 切断時間あり ;  $\nu_i = 0$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} > t_i, T_{2i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) &= S_1(t_i | T_i > \tau_i) S_2(t_i | T_i > \tau_i) \\ &= \frac{S_1(t_i)}{S_1(\tau_i)} \frac{S_2(t_i)}{S_2(\tau_i)} \\ &= \frac{\exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})}, i \in I_0 \end{aligned}$$

ただし,  $I_1 = \{i; T_{1i} \leq T_{2i}, T_{1i} \leq C_i\}$  をイベント 1 で故障した対象の集合,  $I_2 = \{i; T_{2i} \leq T_{1i}, T_{2i} \leq C_i\}$  をイベント 2 で故障した対象の集合,  $I_0 = \{i; C_i \leq T_{1i}, C_i \leq T_{2i}\}$  を右側打ち切りされた対象の集合とする。切断時間をもつ対象 ( $\nu_i = 0$ ) は、観察開始まで生存したという条件の下で  $t_i = \min(T_{1i}, T_{2i}, C_i)$  が観察される(図 3)。すなわち、条件付きの生存確率を求めていくことになる。上述全てのケースについて考慮した尤度関数は以下の通りである。

$$(2.1) \quad L_{indep}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) = \prod_{i \in I_1} \{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})\}^{\nu_i} \\ \times \left\{ \frac{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})} \right\}^{1-\nu_i} \\ \times \prod_{i \in I_2} \{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}) \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1})\}^{\nu_i} \\ \times \left\{ \frac{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2}) \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})} \right\}^{1-\nu_i} \\ \times \prod_{i \in I_0} \{\exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})\}^{\nu_i} \\ \times \left\{ \frac{\exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})}{\exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1}) \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})} \right\}^{1-\nu_i}.$$

### 2.3 コピュラモデル

Michimae and Emura (2022) は、 $T_1$  と  $T_2$  の独立性の仮定を緩めるため、これら 2 つの潜在故障時間の依存性をコピュラでモデル化し、それに基づいて同時分布と尤度関数を構築した。

Michimae and Emura (2022) は、 $T_1$  と  $T_2$  の 2 変量同時生存関数をコピュラ  $C$  で以下のように定義した。

$$(2.2) \quad P(T_1 > t_i, T_2 > t_i) = C(S_1(t_i), S_2(t_i)).$$

実際のモデリングでは、以下のクレイトンコピュラで実施したが、他のコピュラでもモデリングは可能である。

$$(2.3) \quad C_\phi(u, v | \phi) = (u^{-\phi} + v^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}, \phi \geq 0.$$

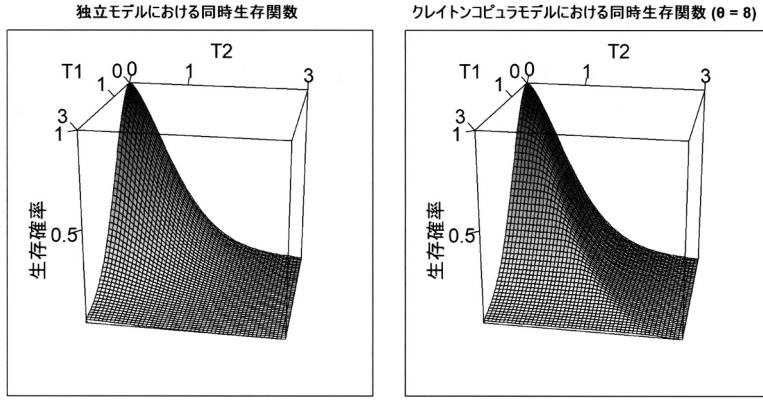


図 4. 独立モデルとコピュラモデルにおける同時生存関数.

ここに,  $\phi$  はコピュラパラメータである. 参考までに, 周辺生存関数を  $S_1(t) = \exp(-1.5t^{2.0})$  と  $S_2(t) = \exp(-t^{1.5})$  とした場合の独立モデルとクレイトンコピュラモデル(コピュラパラメータ = 8)における同時生存関数を図 4 に示した. 図 4 では同時生存確率  $P(T_1 > t_1, T_2 > t_2)$  が曲面として示されている. 競合リスク下では, 先に起こったイベントだけが観察されるため, 同時生存確率は,  $t_1 = t_2 = t$  を結ぶ尾根にあたる曲線上の確率  $P(T_1 > t, T_2 > t)$  となる.  $T_1$  と  $T_2$  の間に依存性があると, 独立な場合と比較して, 周辺生存関数は等しいが, 同時生存確率が高くなっている.

相関する競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りの状況下において, 標本が得られるパターンと周辺分布をワイブル分布としたときの尤度関数への貢献は, 次のケース 1 からケース 6 としてまとめられる.

- ケース 1 (イベント 1 で故障 ;  $\delta_i = 1$ , 切断時間なし ;  $\nu_i = 1$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} = t_i, T_{2i} > t_i) &= -\frac{\partial(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt_i} \\ &= \{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} u_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}\} \end{aligned}$$

- ケース 2 (イベント 2 で故障 ;  $\delta_i = 2$ , 切断時間なし ;  $\nu_i = 1$ )

$$\begin{aligned} P(T_{2i} = t_i, T_{1i} > t_i) &= -\frac{\partial(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt_i} \\ &= \{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} v_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}\} \end{aligned}$$

- ケース 3 (打ち切り ;  $\delta_i = 0$ , 切断時間なし ;  $\nu_i = 1$ )

$$P(T_{1i} > t_i, T_{2i} > t_i) = (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}$$

- ケース 4 (イベント 1 で故障 ;  $\delta_i = 1$ , 切断時間あり ;  $\nu_i = 0$ )

$$\begin{aligned} P(T_{1i} = t_i, T_{2i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) &= -\frac{1}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \frac{\partial(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{\partial u_i} \frac{du_i}{dt_i} \\ &= \frac{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} u_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \end{aligned}$$

- ケース 5 (イベント 2 で故障 ;  $\delta_i = 2$ , 切断時間あり ;  $\nu_i = 0$ )

$$\begin{aligned} P(T_{2i} = t_i, T_{1i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) &= -\frac{1}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \frac{\partial(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt_i} \\ &= \frac{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} v_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \end{aligned}$$

- ケース 6 (打ち切り ;  $\delta_i = 0$ , 切断時間あり ;  $\nu_i = 0$ )

$$P(T_{1i} > t_i, T_{2i} > t_i | T_{1i} > \tau_i, T_{2i} > \tau_i) = \frac{(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}$$

ここに,  $u_i = \exp(-\lambda_1 t_i^{\alpha_1})$ ,  $v_i = \exp(-\lambda_2 t_i^{\alpha_2})$ ,  $x_i = \exp(-\lambda_1 \tau_i^{\alpha_1})$ ,  $y_i = \exp(-\lambda_2 \tau_i^{\alpha_2})$  である.

上述全てのケースについて考慮した尤度関数は以下の通りである.

$$\begin{aligned} (2.4) \quad L_{copula}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi) &= \prod_{i \in I_1} \left\{ \alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} u_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})} \right\}^{\nu_i} \\ &\times \left\{ \frac{\alpha_1 \lambda_1 t_i^{\alpha_1-1} u_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \right\}^{1-\nu_i} \\ &\times \prod_{i \in I_2} \left\{ \alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} v_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})} \right\}^{\nu_i} \\ &\times \left\{ \frac{\alpha_2 \lambda_2 t_i^{\alpha_2-1} v_i^{-\phi} (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-(1+\frac{1}{\phi})}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \right\}^{1-\nu_i} \\ &\times \prod_{i \in I_0} \left\{ (u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}} \right\}^{\nu_i} \left\{ \frac{(u_i^{-\phi} + v_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}}{(x_i^{-\phi} + y_i^{-\phi} - 1)^{-\frac{1}{\phi}}} \right\}^{1-\nu_i}. \end{aligned}$$

## 2.4 ベイズモデル

Michimae et al. (2024)ではコピュラモデル (Michimae and Emura, 2022)をベイズ流コピュラモデルへと発展させた。ベイズ流コピュラモデルによるパラメータ推定には、尤度関数  $L_{copula}$  に加え、ワイルパラメータとコピュラパラメータの事前分布の設定が必要である。本稿では、ワイルパラメータとコピュラパラメータの事前分布について弱情報の半コーシー分布  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi \sim Cauchy(0, 5)$  と弱情報の逆ガンマ分布  $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi \sim Inv-Gamma(0.001, 0.001)$  を設定した(図 5)。半コーシー分布の密度関数は、 $\mu$  を位置パラメータ、 $\gamma (> 0)$  を尺度パラメータとして、

$$Cauchy(\mu, \gamma): f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x - \mu)^2 + \gamma^2}, & x \geq \mu \\ 0, & \text{それ以外} \end{cases}$$

として与えられる。また逆ガンマ分布の密度関数は、 $a (> 0)$  を形状パラメータ、 $b (> 0)$  を尺度パラメータとして、

$$Inv-Gamma(a, b): f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} \exp\left(-\frac{b}{x}\right)$$

で与えられる。ただし、 $\Gamma(\cdot)$  はガンマ関数である。

その他の事前分布の詳細な設定については、Michimae et al. (2024)を参照されたい。ベイズ

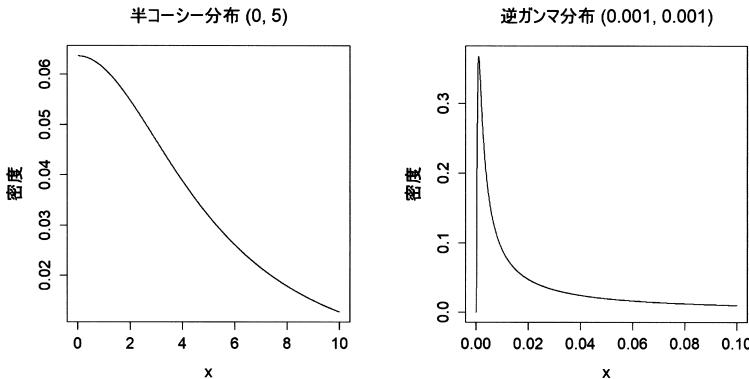


図 5. 本稿の事前分布として用いた半コーシー分布と逆ガンマ分布.

流コピュラモデルにおけるパラメータの同時事後分布は、上記密度関数で与えられる事前分布の下、以下の通りである。

$$(2.5) \quad f(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi) \propto L_{copula}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi) f(\alpha_1) f(\alpha_2) f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\phi).$$

また、ベイズ流独立モデルにおけるパラメータの同時事後分布は以下の通りである。

$$(2.6) \quad f(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) \propto L_{indep}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) f(\alpha_1) f(\alpha_2) f(\lambda_1) f(\lambda_2).$$

### 3. シミュレーション実験

競合リスクにおける各イベント発生割合の違いが、パラメータ推定性能にどの程度影響するのかを調べるため、潜在故障時間  $T_1$  と  $T_2$  の相関、周辺分布(ワイブル分布)のパラメータ、切断時間をもつ対象の割合を細かく設定したシミュレーションデータを用いた。シミュレーション実験では、これらシミュレーションデータにおいて、独立モデル、コピュラモデル、ベイズ流独立モデル、そしてベイズ流コピュラモデルのパラメータ推定性能を比較する。

#### 3.1 シミュレーション設定

サンプルサイズを  $n = 100$  と  $n = 500$  の 2 パターン設定した。各サンプルサイズについて、ワイブルパラメータの真値の組み合わせについて 3 パターン、 $T_1$  と  $T_2$  の相関について 2 パターン、切断時間をもつ対象( $\nu = 0$ )と、もたない対象( $\nu = 1$ )の割合の組み合わせを 4 パターン、合計 24 (=  $3 \times 2 \times 4$ ) パターンを設定した(表 1)。シミュレーションのデータ生成は、縦断研究を参考に観察開始日を  $s$ 、観察終了日を  $e$  として(図 3)、シミュレーションパターンごとに、以下の 3 ステップで実施した。

##### • ステップ 1

$\nu_i = 0$  のときデータ発生点  $B_i$ (例えば発症日)を一様分布  $B_i \sim Uniform(0, s)$  で発生させ、 $\nu_i = 1$  のとき  $B_i \sim Uniform(s, e)$  で発生させた。 $\nu_i = 0$  のとき切断時間  $\tau_i = s - B_i$ 、 $\nu_i = 1$  のとき  $\tau_i = 0$  とした。また、 $C_i = e - B_i$  である。この打ち切りは観察終了による打ち切り例であり、本稿のシミュレーションでは途中脱落例を想定していない。

##### • ステップ 2

独立した潜在故障時間を生成する場合(ケンドール順位相関係数 0 に対応)は、一様乱数  $u_{1i} \sim Uniform(0, 1)$ 、 $u_{2i} \sim Uniform(0, 1)$  をそれぞれ独立に  $n$  例発生させ、ステップ 3 に進ん

表 1. シミュレーションの詳細設定。

ワイブルパラメータの真値	観察開始時間 $s$ 観察打ち切り時間 $e$	コピュラパラメータ の真値 (相関係数)	切断割合
			0.2
		$\phi = 0 (0)$	0.4
			0.6
設定1			0.8
$\alpha_1 = 1.5, \lambda_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \lambda_2 = 1.0$	$s = 3, e = 4$		0.2
		$\phi = 2 (0.5)$	0.4
			0.6
			0.8
			0.2
		$\phi = 0 (0)$	0.4
			0.6
設定2			0.8
$\alpha_1 = 0.5, \lambda_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \lambda_2 = 1.0$	$s = 6, e = 7$		0.2
		$\phi = 2 (0.5)$	0.4
			0.6
			0.8
			0.2
		$\phi = 0 (0)$	0.4
			0.6
設定3			0.8
$\alpha_1 = 1.5, \lambda_1 = 1.0, \alpha_2 = 0.5, \lambda_2 = 1.0$	$s = 3, e = 4$		0.2
		$\phi = 2 (0.5)$	0.4
			0.6
			0.8

だ。相関した潜在故障時間を生成する場合は 2 変量クレイトンコピュラを用いた。コピュラパラメータ  $\phi = 2$  (ケンドール順位相関係数 0.5 に対応) の設定下で、相関のある乱数の組  $(u_{1i}, u_{2i})$  を  $n$  例発生させ、ステップ 3 へ進んだ。コピュラやコピュラを用いた乱数生成についての解説は本稿の目的ではないので、興味のある読者は、次の参考文献を参照されたい (戸坂・吉羽, 2005; Nelsen, 2006; 塚原, 2012; 江村・道前, 2020)。

#### • ステップ 3

逆関数法で  $T_{1i}$  を  $T_{1i} \sim S_1^{-1}(u_{1i})$ ,  $T_{2i}$  を  $T_{2i} \sim S_2^{-1}(u_{2i})$  として潜在故障時間を生成した。すなわち,  $T_{1i} = (-\frac{\log(u_{1i})}{\lambda_1})^{\frac{1}{\alpha_1}}$  または  $T_{2i} = (-\frac{\log(u_{2i})}{\lambda_2})^{\frac{1}{\alpha_2}}$  として生成される。ワイブル分布のハザード関数では、 $\alpha_1 = 0.5, \lambda_1 = 1.0$  の場合は減少ハザード,  $\alpha_1 = 1.0, \lambda_1 = 1.0$  の場合は一定ハザード,  $\alpha_1 = 1.5, \lambda_1 = 1.0$  の場合は増加ハザードに対応している。ステップ 1 で計算された  $C_i$  及び潜在故障時間  $T_{1i}$  と  $T_{2i}$  から  $t_i = \min(T_{1i}, T_{2i}, C_i)$  を観察時間とした。 $t_i = T_{1i}$  なら  $\delta_i = 1$ ,  $t_i = T_{2i}$  なら  $\delta_i = 2$ ,  $t_i = C_i$  なら  $\delta_i = 0$  である。

以上、3 つのステップから目的のシミュレーションデータ  $\{(t_i, \tau_i, \delta_i, \nu_i); i = 1, \dots, n\}$  が生成される。本稿では、 $T_{1i}$  と  $T_{2i}$  が互いに異なるワイブル分布に従う場合を想定したが、同一の分布に従う場合の結果については、Michimae et al. (2024) を参照されたい。

### 3.2 パラメータ推定と評価

シミュレーションパターン(表 1)ごとに、シミュレーションデータの生成からパラメータ推定までの作業を 1000 回繰り返した。パラメータは、最尤法とベイズ法で推定した。独立モデルにおける最尤推定量  $\hat{\theta}_{indep, MLE} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)$  は、式(2.1)から、

$$(3.1) \quad \hat{\theta}_{indep, MLE} = \operatorname{argmax}_{(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2)} \{ \log L_{indep}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2) \}$$

であり、同様に、コピュラモデルにおける最尤推定量  $\hat{\theta}_{copula, MLE} = (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\phi})$  は、式(2.4)から、

$$(3.2) \quad \hat{\theta}_{copula, MLE} = \operatorname{argmax}_{(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi)} \{ \log L_{copula}(\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \phi) \}$$

となる。これらパラメータの推定等には optim 関数(パラメータの初期値は全て 0)で実施した。ただし、ワイルパラメータとコピュラパラメータは正であるため、例えば  $\alpha_1 = \exp(\cdot)$  とすることにより、正の制約の条件下でパラメータを推定した。また、パラメータの 95% 信頼区間は、 $\alpha_1$  であれば、

$$\hat{\alpha}_1 \pm 1.96 \times \text{SE}(\hat{\alpha}_1)$$

として構成される。ここに、 $\text{SE}(\hat{\alpha}_1)$  は  $\hat{\alpha}_1$  の標準誤差である。95% 信頼区間の被覆確率は 1000 個のシミュレーションデータに基づき算出した。

一方で、ベイズ流独立モデルにおけるベイズ推定量  $\hat{\theta}_{indep, Bayes}$  とベイズ流コピュラモデルにおけるベイズ推定量  $\hat{\theta}_{copula, Bayes}$  は、それぞれ式(2.5)と(2.6)で与えられる同時事後分布から得られる周辺事後平均となる。最尤推定と同様に、95% 信頼区間とその被覆確率も算出した。パラメータの推定には RStan (Stan Development Team, 2017; 2018) を用いた。Stan は MCMC (マルコフ連鎖モンテカルロ法) アルゴリズムの改良型である No-U-Turn サンプラー (Hoffman and Gelman, 2014) を使用しており、複雑な事後分布から効率的にサンプリングすることが可能である。同時事後分布の推定では、マルコフ連鎖の数を 4、各連鎖の反復回数を 4000、各連鎖のワームアップ反復回数を 2000 に設定した。MCMC アルゴリズムが収束したかどうかについては、Rhat 基準 (Gelman and Rubin, 1992) で判定した(1.10 以下で収束)。

独立モデル、コピュラモデル、ベイズ流独立モデル、ベイズ流コピュラモデルのパラメータ推定性能を評価するため、平均二乗誤差(MSE : Mean Squared Error)をパラメータごとに以下の式で算出した。例えば  $\alpha_1$  を真値として、 $\alpha_1$  の MSE であれば、

$$\text{MSE}(\alpha_1) = \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} (\hat{\alpha}_{1r} - \alpha_1)^2$$

である。ここで  $\hat{\alpha}_{1r}$  は  $r$  回目の推定値である。他のパラメータについても同様に MSE を算出した。さらに、時点 0.5, 1, および 2 における平均生存確率を以下の式を用いて推定した。例えば、各シミュレーションパターンにおけるイベント 1 と 2 の時点 0.5 の生存確率は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \hat{S}_1(0.5) &= \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \exp(-\hat{\lambda}_{1r} 0.5^{\hat{\alpha}_{1r}}) \\ \hat{S}_2(0.5) &= \frac{1}{1000} \sum_{r=1}^{1000} \exp(-\hat{\lambda}_{2r} 0.5^{\hat{\alpha}_{2r}}) \end{aligned}$$

として推定される。

### 3.3 シミュレーション結果

#### 3.3.1 イベントが独立の場合( $\phi = 0$ )

最尤推定, ベイズ推定(逆ガンマ分布と半コーシー分布)にかかわらず, 独立モデルのワイルパラメータに関する MSE はコピュラモデルと比較して小さい値を示した(表 2-4). この結果は, 独立データ( $\phi = 0$ )の場合は, 独立モデルの推定性能がコピュラモデルと比較して優れていることを示している. また, 小標本サイズ( $n = 100$ )と比較して大標本サイズ( $n = 500$ )では, 推定方法にかかわらず, MSE は小さい値を示し(表 2-4), ワイルパラメータ(コピュラモデルであればとコピュラパラメータも含め)の推定精度が改善することも示された.

独立モデルにおける最尤推定とベイズ推定の比較において, 小標本サイズでは, ベイズ推定(逆ガンマ分布もしくは半コーシー分布)による MSE が小さい値を示したが, 大標本サイズではほぼ同じ値を示し, 最尤推定とベイズ推定は同様の推定性能であることが示された. 一方, コピュラモデルでは, 小標本サイズと大標本サイズの両方において, 最尤推定と比較してベイズ推定のワイルパラメータに関する MSE は小さい値を示し, 特に逆ガンマ分布による MSE 値が小さく, その推定性能の高さを示した. この傾向はコピュラパラメータの推定においても同様であった.

独立モデルまたはコピュラモデルにかかわらず, おおよその傾向として, 切断割合の増加に伴ってワイルパラメータの MSE 値は増加し, パラメータの推定性能が低下する傾向にあった(表 2-4). 一方, コピュラパラメータの推定については, そのような傾向はなかった.

サンプルサイズにかかわらず, シミュレーション設定 1 では切断割合が増加するにつれ, イベント 1 の割合が増加し, イベント 2 の割合はほとんど変化せず, 打ち切り割合が減少した(表 2). 設定 2 では切断割合が増加するにつれ, イベント 1 の割合が減少し, イベント 2 の割合が増加する一方で, 打ち切り割合の変化は小さかった(表 3). 設定 3 では切断割合が増加するにつれ, イベント 1 の割合が増加し, イベント 2 の割合が減少するとともに, 打ち切り割合も減少した(表 3).

#### 3.3.2 イベントが相關している場合( $\phi = 2$ )

独立モデルと比較してコピュラモデルのワイルパラメータに関する MSE は小さい値を示した(表 2-4). この結果は, 最尤推定, ベイズ推定にかかわらず, 相関データ( $\phi = 2$ )の場合は, コピュラモデルの推定性能が優れていることを示している. また, 独立モデルでは, 最尤推定, ベイズ推定にかかわらず, 標本サイズが大きくなても MSE 値はほとんど差を示さなかつたが, コピュラモデルでは MSE 値は小さい値を示し, パラメータの推定性能の改善が示された.

独立モデルでは, 標本サイズにかかわらず, 最尤推定と比較してベイズ推定のワイルパラメータに関する MSE 値は小さく, ベイズ推定が推定性能の点で優れていることが示された. 同様の傾向はコピュラモデルにおいても示された. コピュラモデルにおけるコピュラパラメータの推定においても, ベイズ推定, 特に逆ガンマ分布の優位性が示された. しかし, 小標本サイズと比較して大標本サイズでは, 最尤推定とベイズ推定の MSE 値の差は小さくなり, パラメータの推定性能の差は縮まった.

切断割合と各種パラメータの MSE 値との関係は, イベントが独立している場合と同様の傾向を示した(表 2-4). さらに, 切断割合と各イベントの発生割合の関係についても, 同様の傾向が見られた.

#### 3.3.3 パラメータと生存確率の推定値

パラメータ推定値とその被覆確率の結果を Supplementary Information 表 S1-S3 に示した. イベントが独立であれば, 独立モデルは最尤推定やベイズ推定にかかわらず, 真値に近い推定値を与え, 大標本サイズでは, さらに真値に近くなる傾向があった. また, 被覆確率もほぼ

表 2. ワイブルパラメータの真値の設定 1 における MSE の比較結果。表の数値は 1000 回のモンテカルロ・シミュレーションの平均値。

$n$	切断割合	コピュラパラメータ (相関係数)	モデル	MSE					打ち切り割合	イベント1割合	イベント2割合
				$\lambda_1 = 1.0$	$\alpha_1 = 1.5$	$\lambda_2 = 1.0$	$\alpha_2 = 1.0$	$\phi$			
0.2	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0375	0.0277	0.0371	0.0171				
			逆ガンマ	0.0369	0.0273	0.0363	0.0166				
		半コーシー	0.0383	0.0270	0.0391	0.0171			0.39	0.29	0.32
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1297	0.0313	0.1647	0.0427	10.2013			
			逆ガンマ	0.0471	0.0280	0.0492	0.0202	0.1048			
		半コーシー	0.1546	0.0260	0.1956	0.0534	1.6800				
0.4	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.1103	0.0481	0.1233	0.0486				
			逆ガンマ	0.1135	0.0471	0.1274	0.0511				
		半コーシー	0.0995	0.0461	0.1080	0.0423			0.48	0.26	0.26
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0584	0.0391	0.0569	0.0233	163.9347			
			逆ガンマ	0.0502	0.0388	0.0574	0.0248	8.5221			
		半コーシー	0.0432	0.0263	0.0354	0.0166	7.4765				
100	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0354	0.0250	0.0319	0.0154				
			逆ガンマ	0.0349	0.0250	0.0317	0.0152				
		半コーシー	0.0354	0.0241	0.0324	0.0152			0.31	0.37	0.32
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1297	0.0301	0.1311	0.0457	1.9243			
			逆ガンマ	0.0430	0.0270	0.0408	0.0202	0.0595			
		半コーシー	0.1477	0.0252	0.1711	0.0610	1.2453				
0.6	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.1172	0.0601	0.1645	0.0796				
			逆ガンマ	0.1166	0.0609	0.1689	0.0827				
		半コーシー	0.1040	0.0557	0.1492	0.0728			0.40	0.37	0.23
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0561	0.0401	0.0600	0.0239	78.4922			
			逆ガンマ	0.0484	0.0432	0.0643	0.0286	3.5651			
		半コーシー	0.0584	0.0266	0.0367	0.0160	4.0288				
0.8	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0435	0.0289	0.0345	0.0162				
			逆ガンマ	0.0427	0.0292	0.0340	0.0162				
		半コーシー	0.0430	0.0272	0.0351	0.0158			0.22	0.45	0.33
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1182	0.0355	0.1253	0.0531	8.7483			
			逆ガンマ	0.0519	0.0321	0.0442	0.0221	0.0266			
		半コーシー	0.1745	0.0290	0.1794	0.0718	1.2248				

表 2. (つづき)

		独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0076 0.0075 0.0076	0.0052 0.0052 0.0052	0.0072 0.0072 0.0073	0.0035 0.0035 0.0035			
0.2	$\phi=0$ (0)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0377 0.0098 0.0276	0.0131 0.0059 0.0077	0.0297 0.0105 0.0366	0.0102 0.0047 0.0129	0.1626	0.39	0.29
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0098 0.0097 0.0095	0.0059 0.0073 0.0063	0.0105 0.0118 0.0100	0.0047 0.0049 0.0044	0.0071 0.8844 1.0392		0.32
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0920 0.0926 0.0898	0.0109 0.0107 0.0108	0.1143 0.1151 0.1110	0.0441 0.0447 0.0427		0.48	0.26
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0106 0.0097 0.0095	0.0074 0.0073 0.0063	0.0123 0.0118 0.0100	0.0051 0.0049 0.0044	1.3426 0.8844 1.0392		0.26
0.4	$\phi=0$ (0)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0069 0.0069 0.0069	0.0045 0.0045 0.0045	0.0064 0.0064 0.0064	0.0029 0.0029 0.0029		0.31	0.37
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0190 0.0090 0.0255	0.0073 0.0054 0.0075	0.0259 0.0095 0.0335	0.0098 0.0043 0.0134	0.2351 0.0063 0.1337		0.32
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0983 0.0983 0.0957	0.0206 0.0206 0.0202	0.1538 0.1547 0.1507	0.0763 0.0769 0.0749		0.40	0.37
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0118 0.0105 0.0103	0.0079 0.0077 0.0065	0.0132 0.0123 0.0107	0.0055 0.0052 0.0046	1.6119 0.7758 0.9240		0.23
500	$\phi=0$ (0)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0077 0.0077 0.0077	0.0047 0.0047 0.0046	0.0070 0.0070 0.0070	0.0032 0.0032 0.0032		0.22	0.45
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0203 0.0102 0.0317	0.0075 0.0056 0.0076	0.0243 0.0104 0.0359	0.0119 0.0054 0.0180	0.0603 0.0061 0.1751		0.32
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.1243 0.1235 0.1203	0.0396 0.0398 0.0385	0.1775 0.1781 0.1740	0.1085 0.1090 0.1069		0.32	0.48
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0136 0.0126 0.0114	0.0097 0.0097 0.0077	0.0140 0.0134 0.0111	0.0066 0.0063 0.0055	1.0558 0.8365 0.8393		0.20
0.6	$\phi=0$ (0)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0107 0.0107 0.0108	0.0062 0.0062 0.0061	0.0100 0.0099 0.0100	0.0045 0.0045 0.0044		0.14	0.53
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0418 0.0142 0.0664	0.0099 0.0073 0.0093	0.0368 0.0131 0.0543	0.0257 0.0085 0.0349	0.4157 0.0232 0.5085		0.33
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.1729 0.1704 0.1658	0.0792 0.0792 0.0760	0.1734 0.1730 0.1688	0.1536 0.1537 0.1518		0.24	0.59
		コピュラモデル	最尤推定 逆ガンマ 半コーシー	0.0155 0.0149 0.0126	0.0107 0.0117 0.0086	0.0156 0.0151 0.0126	0.0105 0.0097 0.0085	2.5819 0.7558 0.9076		0.18

95% 程度となった(最尤推定で一部 80% 程度). しかし, コピュラモデルでは, 推定値は過大推定される傾向にあり, 大標本サイズでは, やや真値に近くはなるが過大推定の傾向であった. また, 被覆確率については逆ガンマでは 95% 程度であったが, 最尤推定と半コーシー分布のベイズ推定では, 95% を下回ることが多かった. コピュラパラメータについては, 逆ガンマによ

表 3. ワイブルパラメータの真値の設定 2 における MSE の比較結果。表の数値は 1000 回のモンテカルロ・シミュレーションの平均値。

$n$	切断割合	コピュラパラメータ (相関係数)	モデル	MSE					打ち切り割合	イベント1割合	イベント2割合
				$\lambda_1 = 1.0$	$\alpha_1 = 0.5$	$\lambda_2 = 1.0$	$\alpha_2 = 1.0$	$\phi$			
0.2	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0313	0.0046	0.0376	0.0118				
			逆ガンマ	0.0308	0.0044	0.0370	0.0117				
		半コーシー	0.0331	0.0048	0.0384	0.0115					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.5779	0.0097	286.7544	0.0132	4.8704	0.34	0.36	0.30
			逆ガンマ	0.0401	0.0055	0.0501	0.0115	0.4962			
		半コーシー	0.1175	0.0134	0.1201	0.0105	1.4928				
0.4	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0679	0.0079	0.1451	0.0330				
			逆ガンマ	0.0694	0.0081	0.1496	0.0318				
		半コーシー	0.0565	0.0066	0.1320	0.0316					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0423	0.0067	0.0666	0.0195	49.6640	0.44	0.33	0.23
			逆ガンマ	0.0377	0.0056	0.0565	0.0202	4.6454			
		半コーシー	0.0337	0.0058	0.0502	0.0117	6.0326				
100	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0302	0.0045	0.0359	0.0108				
			逆ガンマ	0.0297	0.0044	0.0354	0.0109				
		半コーシー	0.0317	0.0045	0.0356	0.0104					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0936	0.0115	0.0761	0.0120	2.3475	0.32	0.32	0.36
			逆ガンマ	0.0397	0.0057	0.0424	0.0112	0.1828			
		半コーシー	0.1349	0.0164	0.1043	0.0101	0.7445				
0.6	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0972	0.0134	0.1458	0.0406				
			逆ガンマ	0.0998	0.0140	0.1458	0.0411				
		半コーシー	0.0832	0.0116	0.1299	0.0378					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0553	0.0074	0.0731	0.0199	41.7721	0.43	0.26	0.31
			逆ガンマ	0.0459	0.0063	0.0569	0.0215	5.1855			
		半コーシー	0.0411	0.0057	0.0573	0.0126	6.1253				
0.8	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0395	0.0052	0.0481	0.0120				
			逆ガンマ	0.0392	0.0051	0.0473	0.0123				
		半コーシー	0.0402	0.0051	0.0481	0.0114					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1114	0.0164	0.1023	0.0131	1.1302	0.30	0.27	0.43
			逆ガンマ	0.0501	0.0072	0.0586	0.0126	0.0860			
		半コーシー	0.1582	0.0234	0.1428	0.0109	0.6192				
1000	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.1478	0.0210	0.1653	0.0553				
			逆ガンマ	0.1514	0.0219	0.1606	0.0571				
		半コーシー	0.1290	0.0184	0.1415	0.0494					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0654	0.0106	0.0753	0.0204	72.9473	0.42	0.19	0.39
			逆ガンマ	0.0624	0.0082	0.0628	0.0254	6.5301			
		半コーシー	0.0462	0.0074	0.0582	0.0135	6.7793				
10000	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.0611	0.0090	0.0663	0.0171				
			逆ガンマ	0.0600	0.0090	0.0650	0.0174				
		半コーシー	0.0610	0.0088	0.0659	0.0153					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1655	0.0403	0.1834	0.0193	12.4432	0.29	0.22	0.49
			逆ガンマ	0.0728	0.0129	0.0767	0.0178	0.0186			
		半コーシー	0.2046	0.0422	0.2133	0.0140	0.7279				
100000	$\phi=0(0)$	独立モデル	最尤推定	0.2005	0.0345	0.2060	0.0853				
			逆ガンマ	0.2031	0.0354	0.1913	0.0868				
		半コーシー	0.1717	0.0304	0.1636	0.0702					
	$\phi=2(0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0913	0.0194	0.0964	0.0261	141.5546	0.40	0.12	0.48
			逆ガンマ	0.0929	0.0134	0.0825	0.0377	10.4212			
		半コーシー	0.0606	0.0117	0.0704	0.0169	8.2485				

る推定値が真値に近かった。

イベントが相関している場合、独立モデルでは最尤推定やベイズ推定にかかわらず、推定値は過小評価または過大評価され、大標本サイズでは被覆確率が 0% 近くまで低下した。しかし、

表 3. (つづき)

		最尤推定	0.0064	0.0009	0.0069	0.0022				
0.2	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0064	0.0009	0.0068	0.0022	0.34	0.36	0.30
		半コーシー	0.0064	0.0009	0.0069	0.0022				
		最尤推定	0.0110	0.0014	0.0124	0.0026	0.0150			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0079	0.0011	0.0089	0.0023	0.0059		
		半コーシー	0.0142	0.0018	0.0156	0.0025	0.0276			
		最尤推定	0.0559	0.0059	0.1292	0.0123				
0.4	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0561	0.0059	0.1303	0.0120	0.44	0.33	0.23
		半コーシー	0.0533	0.0056	0.1267	0.0122				
		最尤推定	0.0090	0.0012	0.0122	0.0037	0.8400			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0090	0.0012	0.0115	0.0037	0.6887		
		半コーシー	0.0086	0.0012	0.0113	0.0031	0.8018			
		最尤推定	0.0065	0.0009	0.0070	0.0020				
500	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0065	0.0009	0.0070	0.0020	0.32	0.32	0.36
		半コーシー	0.0066	0.0009	0.0070	0.0020				
		最尤推定	0.0138	0.0020	2.8552	0.0026	0.0107			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0086	0.0012	0.0084	0.0022	0.0030		
		半コーシー	0.0176	0.0025	0.0139	0.0025	0.0162			
		最尤推定	0.0889	0.0120	0.1244	0.0194				
0.6	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0894	0.0121	0.1246	0.0194	0.43	0.26	0.31
		半コーシー	0.0858	0.0116	0.1214	0.0191				
		最尤推定	0.0097	0.0014	0.0117	0.0037	0.6679			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0094	0.0014	0.0109	0.0037	0.5576		
		半コーシー	0.0092	0.0014	0.0114	0.0033	0.6778			
		最尤推定	0.0072	0.0010	0.0084	0.0022				
0.8	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0072	0.0010	0.0084	0.0022	0.31	0.27	0.43
		半コーシー	0.0073	0.0010	0.0084	0.0022				
		最尤推定	0.0153	0.0022	0.0147	0.0026	0.0072			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0095	0.0014	0.0101	0.0023	0.0021		
		半コーシー	0.0203	0.0030	0.0166	0.0026	0.0135			
		最尤推定	0.1300	0.0205	0.1368	0.0279				
0.0	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.1307	0.0207	0.1361	0.0282	0.42	0.19	0.39
		半コーシー	0.1260	0.0200	0.1321	0.0274				
		最尤推定	0.0130	0.0018	0.0133	0.0038	0.6365			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0128	0.0018	0.0128	0.0041	0.5451		
		半コーシー	0.0119	0.0017	0.0129	0.0035	0.6312			
		最尤推定	0.0116	0.0015	0.0124	0.0029				
0.2	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.0116	0.0015	0.0123	0.0029	0.29	0.22	0.49
		半コーシー	0.0116	0.0015	0.0125	0.0028				
		最尤推定	0.0357	0.0087	0.4281	0.0042	0.1669			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0149	0.0023	0.0154	0.0030	0.0027		
		半コーシー	0.0315	0.0057	0.0294	0.0033	0.0443			
		最尤推定	0.1776	0.0337	0.1722	0.0450				
0.4	$\phi=0(0)$	独立モデル	逆ガンマ	0.1782	0.0339	0.1692	0.0453	0.40	0.12	0.48
		半コーシー	0.1716	0.0329	0.1631	0.0432				
		最尤推定	0.0187	0.0034	0.0191	0.0046	0.7163			
	$\phi=2(0.5)$	コピュラモデル	逆ガンマ	0.0186	0.0031	0.0183	0.0051	0.5780		
		半コーシー	0.0170	0.0032	0.0182	0.0042	0.7296			
		最尤推定	0.1716	0.0337	0.1722	0.0450				

コピュラモデルでは、大標本サイズにおける推定値は真値に近くなり、被覆確率もほぼ 95% 程度となった。ただし、最尤推定によるコピュラパラメータについては、大標本サイズでも被覆確率は改善されなかった。

時点ごとの生存確率の推定値を Supplementary Information 表 S4–S6 に示した。イベントが独立の場合、シミュレーション設定、サンプルサイズ、さらにはモデルにも関係なく、真の生

表 4. ワイブルパラメータの真値の設定 3 における MSE の比較結果。表の数値は 1000 回のモンテカルロ・シミュレーションの平均値。

$n$	切断割合	コピュラパラメータ (相関係数)	モデル	MSE					打ち切り割合	イベント1割合	イベント2割合
				$\lambda_1 = 1.0$	$\alpha_1 = 1.5$	$\lambda_2 = 1.0$	$\alpha_2 = 0.5$	$\phi$			
0.2	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0450	0.0282	0.0333	0.0054				
			逆ガンマ	0.0440	0.0280	0.0329	0.0053				
		半コーシー	0.0461	0.0275	0.0363	0.0059					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1065	0.0291	0.0538	0.0077	0.7369	0.33	0.28	0.38
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0665	0.0270	0.0397	0.0063	0.2431			
		半コーシー	0.1512	0.0247	0.0811	0.0118	1.1009				
0.4	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.2028	0.1673	0.0429	0.0057				
		逆ガンマ	0.2048	0.1669	0.0437	0.0058					
		半コーシー	0.1822	0.1542	0.0363	0.0049					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0796	0.0662	0.0374	0.0063	9.8568	0.41	0.22	0.36
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0785	0.0888	0.0340	0.0054	7.5370			
		半コーシー	0.0607	0.0397	0.0370	0.0064	5.6235				
100	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0364	0.0244	0.0352	0.0055				
		逆ガンマ	0.0357	0.0246	0.0347	0.0054					
		半コーシー	0.0366	0.0231	0.0371	0.0058					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0673	0.0251	0.0603	0.0089	0.1550	0.27	0.40	0.33
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0478	0.0245	0.0429	0.0067	0.0655			
		半コーシー	0.1002	0.0222	0.0925	0.0143	0.3651				
0.6	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.2127	0.1959	0.0636	0.0087				
		逆ガンマ	0.2087	0.1995	0.0652	0.0090					
		半コーシー	0.1872	0.1748	0.0538	0.0073					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0663	0.0555	0.0437	0.0074	7.5950	0.35	0.35	0.29
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0683	0.0792	0.0405	0.0062	4.2102			
		半コーシー	0.0552	0.0363	0.0414	0.0074	4.0709				
0.8	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0410	0.0280	0.0386	0.0059				
		逆ガンマ	0.0403	0.0283	0.0383	0.0058					
		半コーシー	0.0408	0.0260	0.0395	0.0062					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0667	0.0280	0.0657	0.0118	0.1340	0.21	0.51	0.28
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0485	0.0275	0.0446	0.0081	0.0386			
		半コーシー	0.1056	0.0239	0.1031	0.0211	0.2758				
0.8	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.2362	0.2348	0.0904	0.0146				
		逆ガンマ	0.2268	0.2369	0.0927	0.0150					
		半コーシー	0.2034	0.2039	0.0771	0.0125					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0640	0.0508	0.0460	0.0104	20.2983	0.29	0.48	0.23
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0690	0.0799	0.0448	0.0086	5.5181			
		半コーシー	0.0553	0.0352	0.0422	0.0100	4.7468				
100	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.0551	0.0334	0.0510	0.0112				
		逆ガンマ	0.0552	0.0332	0.0503	0.0111					
		半コーシー	0.0579	0.0305	0.0527	0.0114					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.1006	0.0326	0.0920	0.0277	0.2350	0.15	0.62	0.23
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0723	0.0324	0.0632	0.0162	0.0264			
		半コーシー	0.1879	0.0304	0.1564	0.0489	0.3506				
100	$\phi=0 (0)$	独立モデル	最尤推定	0.2687	0.2905	0.1311	0.0245				
		逆ガンマ	0.2519	0.2871	0.1316	0.0246					
		半コーシー	0.2254	0.2441	0.1110	0.0208					
	$\phi=2 (0.5)$	独立モデル	最尤推定	0.0723	0.0530	0.0628	0.0201	22.3929	0.23	0.61	0.15
		コピュラモデル	逆ガンマ	0.0810	0.0917	0.0661	0.0148	6.9486			
		半コーシー	0.0645	0.0377	0.0566	0.0192	5.2917				

存確率に近い確率を示した(ただし、コピュラモデルの半コーシー分布ではやや過小評価)。しかし、イベントが相関している場合は、コピュラモデルが真の生存確率に近い確率を示す一方、独立モデルでは全て過大評価されていた。

表 4. (つづき)

		最尤推定	0.0075	0.0051	0.0061	0.0010				
0.2	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.0074	0.0051	0.0060	0.0010	0.33	0.28	0.38
		半コーン	0.0075	0.0051	0.0062	0.0010				
		最尤推定	0.0200	0.0070	2.9763	0.0021	0.0162			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0096	0.0052	0.0071	0.0011	0.0063		
		半コーン	0.0178	0.0053	0.0108	0.0015	0.0295			
		最尤推定	0.1841	0.0840	0.0267	0.0034				
0.4	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.1846	0.0836	0.0269	0.0034	0.42	0.22	0.36
		半コーン	0.1801	0.0828	0.0250	0.0032				
		最尤推定	0.0158	0.0137	0.0070	0.0012	0.6915			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0163	0.0152	0.0070	0.0012	0.6145		
		半コーン	0.0143	0.0118	0.0071	0.0012	0.6404			
		最尤推定	0.0075	0.0046	0.0066	0.0010				
500	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.0075	0.0046	0.0066	0.0010	0.27	0.40	0.33
		半コーン	0.0076	0.0045	0.0067	0.0011				
		最尤推定	0.0143	0.0052	0.0106	0.0016	0.0115			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0094	0.0047	0.0076	0.0012	0.0027		
		半コーン	0.0157	0.0048	0.0122	0.0018	0.0137			
		最尤推定	0.1929	0.1144	0.0511	0.0074				
0.6	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.1922	0.1148	0.0515	0.0074	0.35	0.35	0.29
		半コーン	0.1878	0.1120	0.0488	0.0070				
		最尤推定	0.0124	0.0101	0.0080	0.0014	0.4175			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0126	0.0115	0.0079	0.0013	0.3738		
		半コーン	0.0115	0.0092	0.0077	0.0014	0.3855			
		最尤推定	0.0087	0.0048	0.0075	0.0012				
0.8	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.0087	0.0048	0.0075	0.0012	0.21	0.51	0.28
		半コーン	0.0088	0.0048	0.0075	0.0013				
		最尤推定	220.9184	0.0070	0.1126	0.0023	0.0057			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0105	0.0049	0.0089	0.0016	0.0021		
		半コーン	0.0168	0.0050	0.0146	0.0027	0.0107			
		最尤推定	0.2147	0.1467	0.0823	0.0136				
1.0	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.2127	0.1470	0.0828	0.0137	0.30	0.48	0.22
		半コーン	0.2079	0.1426	0.0793	0.0131				
		最尤推定	0.0117	0.0092	0.0095	0.0019	0.3525			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0122	0.0105	0.0097	0.0018	0.3271		
		半コーン	0.0113	0.0086	0.0091	0.0019	0.3379			
		最尤推定	0.0107	0.0060	0.0093	0.0018				
1.2	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.0107	0.0060	0.0093	0.0018	0.15	0.62	0.23
		半コーン	0.0109	0.0059	0.0094	0.0018				
		最尤推定	0.0186	0.0066	0.0159	0.0040	0.0084			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0131	0.0060	0.0109	0.0025	0.0022		
		半コーン	0.0211	0.0059	0.0181	0.0046	0.0107			
		最尤推定	0.2502	0.1975	0.1121	0.0239				
1.4	$\phi=0$ (0)	独立モデル	逆ガンマ	0.2467	0.1970	0.1122	0.0239	0.23	0.61	0.15
		半コーン	0.2411	0.1903	0.1078	0.0231				
		最尤推定	0.0142	0.0100	0.0130	0.0034	0.3346			
	$\phi=2$ (0.5)	独立モデル	逆ガンマ	0.0145	0.0115	0.0133	0.0033	0.3116		
		半コーン	0.0137	0.0094	0.0125	0.0035	0.3358			
		最尤推定	0.2411	0.1903	0.1078	0.0231				

## 4. 考察

本稿では、相関した競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータにおけるワイルパラメータとコピュラパラメータの推定について検討した。本稿で得られた結果から重要な点として、初めに、最尤推定よりベイズ推定のこれらパラメータの推定性能が、特に小標本サイズで

高かったことがあげられる。ただし、ベイズ推定では事前分布の違いによりパラメータの推定性能が異なり、最尤推定より推定性能が劣る事前分布も存在する。この点を踏まえると、実データ解析においては、複数の事前分布を設定して解析結果の頑健性を確認することが望ましい。

次に、独立データでは、独立モデルのパラメータ推定性能がコピュラモデルと比較して高く、大標本サイズではその推定性能も高くなつた。しかし、相関データでは、独立モデルのパラメータの推定性能がコピュラモデルより低く、大標本サイズでもパラメータの推定性能が改善されないことがあげられる。競合リスクが存在する状況下において、リスク(イベント)間の相関から生じる問題については以前から指摘されてきた(宮村, 1982; 西川, 2008; 道前, 2023)。独立モデルを実データに適用する場合には、そのパラメータ推定性能が独立データにのみ担保されている点に注意する必要がある。

相関データでは、コピュラモデル、特にベイズ流コピュラモデルがパラメータの推定において優れていた。ただし、注意点として、コピュラモデルは全てのシミュレーション条件でパラメータの推定性能が優れているわけではなく、独立データの場合は、上述したように独立モデルの推定性能が優れている。実データ解析においては、2つのイベントのうちどちらか1つのイベントしか観察されないことから、実際の観察時間からイベント間に相関があるのかどうか判断し難いが、イベントが独立であると推測できる場合はベイズ流独立モデル、相関が疑われる場合は複数の事前分布を設定したベイズ流コピュラモデルで解析を行い、その結果を比較検討することが勧められる。

切断割合のパラメータ推定性能への影響は、推定に用いたモデルにかかわらず、特にワイブルパラメータで大きかった(表2-4)。全てのシミュレーション設定で、切断割合の増加に伴って、パラメータの推定性能が下がる傾向にあり、実データの解析では、観察された各イベントの発生割合も考慮に入れた結果の解釈が必要であることを示している。しかし、このパラメータ推定性能の低下はイベントの発生割合とは無関係であると推測される。例えば、シミュレーション設定1と3では切断割合の増加と共にイベント1の発生割合は増加、イベント2の発生割合は減少したが、 $\alpha_1$ と $\lambda_1$ および $\alpha_2$ と $\lambda_2$ のMSE値は大きくなる傾向があった。一方、シミュレーション設定2では切断割合の増加と共にイベント1の発生割合は減少、イベント2の発生割合は増加したが、 $\alpha_1$ と $\lambda_1$ および $\alpha_2$ と $\lambda_2$ のMSE値は大きくなる傾向があった。このような切断割合の増加によるパラメータの推定性能の低下の原因として、切断割合の増加に伴う両イベント発生割合の乖離の増大が考えられる。いずれのシミュレーション設定においても、切断割合の増加に伴って、イベント発生割合の乖離が増大しており、その増大に伴いパラメータの推定性能が低下している。したがって、実データの解析では、観察された各イベントの発生割合ではなく、発生割合の乖離を考慮に入れた結果の解釈が必要である。

以上は全てパラメータの推定性能に関する考察であったが、生存確率の推定でも、独立イベントが想定される場合は独立モデル、相関イベントが想定される場合はコピュラモデルでの推定が推奨される。

今後の展望として、次の3点があげられる。初めに、周辺分布の選択である。本稿では、同時潜在故障時間分布の周辺分布としてワイブル分布を用いたが、実データへの適用拡大を考えると、ガンマ分布や対数正規分布など他のパラメトリック分布(武富・山本, 2023)も検討する必要がある。この場合、周辺分布の実データへの適合度の検討が必要である(Bakker et al., 2023)。次に、コピュラモデルにおけるコピュラの選択である。本稿では、クレイトンコピュラを用いたが、コピュラを用いる大きな利点は周辺分布とは独立に依存関係を柔軟にモデリングできることである(Nelsen, 2006)。したがって、コピュラの選択が可能になれば多様な同時潜在故障時間分布の構成が可能となり、実データへの適用範囲も広がることが期待できる。課

題として、周辺分布だけでなく依存性の実データへの適合度の検討が必要である (Escarela et al., 2023)。最後に、共変量についてのモデル化である。特に医療データ等の実データ解析では、研究目的の観点から、分布パラメータやコピュラパラメータの推定より共変量の効果を推定することが重要である。この場合、基準ハザード関数にパラメトリック分布(指数分布やワイブル分布等)を仮定し、共変量の効果を乗法的に作用させたパラメトリックモデルの回帰係数として、共変量の効果を推定する方法が有望である。

### 謝 辞

江村剛志先生及び太田修平先生には、本稿の執筆の機会を頂いたことに心より感謝申し上げます。また、本稿の改稿にあたり、有益なコメントを頂いた4名の査読者に感謝申し上げます。本研究は科研費(JP21K12127)からの助成金を受けて実施されました。

### 参 考 文 献

- Bakker, L. J., Thielen, F. W., Redekop, W. K., Uyl-de Groot, C. A. and Blommestein, H. M. (2023). Extrapolating empirical long-term survival data: The impact of updated follow-up data and parametric extrapolation methods on survival estimates in multiple myeloma, *BMC Medical Research Methodology*, **23**, 132, <https://doi.org/10.1186/s12874-023-01952-2>.
- Bockwoldt, B., Sugiyama, H., Tsai, K., Bhatti, P., Brenner, V. A., Hu, A., Kerr, F. K., Morenz, E., French, B. and Phipps, I. A. (2021). Gastrointestinal cancer survival and radiation exposure among atomic bomb survivors: The life span study, *Cancer Epidemiology, Biomarkers & Prevention*, **30**, 412–418.
- Cox, D. R. (1959). The analysis of exponentially distributed lifetimes with two types of failures, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology)*, **21**, 411–421.
- 江村剛志, 道前洋史 (2020). コピュラを用いた生存時間解析, 統計数理, **68**(1), 147–274.
- 江村剛志, 道前洋史 (2021). 左切断・右側打ち切りのあるフィールド寿命データ解析～パラメトリックモデルに基づく統計的推論と信頼性の予測～, 信学技報, **121**, 7–12.
- Emura, T. and Michimae, H. (2022). Left-truncated and right-censored field failure data: Review of parametric analysis for reliability, *Quality and Reliability Engineering International*, **38**, 3919–3934.
- Escarela, G., Vásquez, A. R., González-Farías, G. and Márquez-Urbina, J. U. (2023). Copula modeling for the estimation of measures of marker classification and predictiveness performance with survival outcomes, *Statistical Methods in Medical Research*, **32**, 1203–1216.
- Fine, J. P. and Gray, R. J. (1999). A proportional hazards model for the subdistribution of a competing risk, *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 496–509.
- Gelman, A. and Rubin, D. B. (1992). Inference from iterative simulation using multiple sequences, *Statistical Science*, **7**, 457–511.
- Hoffman, M. D. and Gelman, A. (2014). The No-U-Turn Sampler: Adaptively setting path lengths in Hamiltonian Monte Carlo, *Journal of Machine Learning Research*, **15**, 1593–1623.
- Hong, Y., Meeker, W. Q. and McCalley, J. D. (2009). Prediction of remaining life of power transformers based on left truncated and right censored lifetime data, *Annals of Applied Statistics*, **3**, 857–879.
- Kaishev, K. V., Dimitrova, S. D. and Haberman, S. (2007). Modelling the joint distribution of competing risks survival times using copula functions, *Insurance: Mathematics and Economics*, **41**, 339–361.

- Klein, J. P. and Moeschberger, M. L. (2003). *Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data*, Springer, New York.
- Kundu, D., Mitra, D. and Ganguly, A. (2017). Analysis of left truncated and right censored competing risks data, *Computational Statistics & Data Analysis*, **108**, 12–26.
- 道前洋史 (2023). 競合リスクを伴う左側切断・右側打ち切りデータの解析～現状と今後の展望について～, 日本統計学会誌, **52**, 203–220.
- Michimae, H. and Emura, T. (2022). Likelihood inference for copula models based on left-truncated and competing risks data from field studies, *Mathematics*, **10**, 2163, <https://doi.org/10.3390/math10132163>.
- Michimae, H., Emura, T., Miyamoto, A. and Kishi, K. (2024). Bayesian parametric estimation based on left-truncated competing risks data under bivariate Clayton copula models, *Journal of Applied Statistics*, **51**, 2690–2708.
- Mitra, D., Kundu, D., and Balakrishnan, N. (2021). Likelihood analysis and stochastic EM algorithm for left truncated right censored data and associated model selection from the Lehmann family of life distributions, *Japanese Journal of Statistics and Data Science*, **4**, 1019–1048.
- 宮村鍛夫 (1982). 競合モデルに関する統計的手法, オペレーションズ・リサーチ, **27**, 871–876.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*, 2nd ed., Springer, New York.
- 西川正子 (2008). 生存時間解析における競合リスクモデル, 計量生物学, **29**, 141–170.
- Prentice, R. L., Kalbfleisch, J. D., Peterson Jr., A. V., Flurnoy, N., Farewell, V. T. and Breslow, N. E. (1978). The analysis of failure times in presence of competing risks, *Biometrics*, **34**, 541–554.
- Ranjan, R., Sen, R. and Upadhyay, S. K. (2021). Bayes analysis of some important lifetime models using MCMC based approaches when the observations are left truncated and right censored, *Reliability Engineering & System Safety*, **214**, <https://doi.org/10.1016/j.ress.2021.107747>.
- 齋藤哲雄, 室谷健太 (2023). マルチステートモデルの理論とがん臨床研究への応用, 日本統計学会誌, **52**, 221–267.
- 齋藤哲雄, 室谷健太 (2024). がん臨床試験と競合リスク・マルチステートモデル, 計量生物学, **45**, 37–65.
- Sposto, R., Sugiyama, H., Tsuruyama, T. and Brenner, A. V. (2023). Effect of radiation exposure on survival after first solid cancer diagnosis in A-bomb survivors, *Cancer Epidemiology*, **83**, <https://doi.org/10.1016/j.canep.2023.102341>.
- Stan Development Team (2017). Stan Modeling Language Users Guide and Reference Manual, <https://mc-stan.org> (最終アクセス日 2024年12月16日).
- Stan Development Team (2018). RStan: The R interface to Stan. R package version 2.32.6, <http://mc-stan.org> (最終アクセス日 2024年12月16日).
- 武富奈菜美, 山本和嬉 (2023). 生存時間解析・信頼性解析のための統計モデル, 日本統計学会誌, **52**, 69–112.
- 戸坂凡展, 吉羽要直 (2005). コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 金融研究, **24**, 115–162.
- 塚原英敦 (2012). 接合分布関数(コピュラ)の理論と応用, 『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』, 増補 HP版, 1–140, 東京大学出版会, 東京.
- 塚原英敦 (2021). リスク解析における接合関数, 日本統計学会誌, **51**, 101–121.
- Wang, L. Lio, Y. Tripathi, Y. M. Dey, S. and Zhang, F. (2022). Inference of dependent left-truncated and right-censored competing risks data from a general bivariate class of inverse exponentiated distributions, *Statistics*, **56**, 347–374.

## Bayesian Analysis of Left-truncated Dependent Competing Risks Data

Hirofumi Michimae

School of Pharmacy, Kitasato University

Survival analysis examines the time from a reference point to the occurrence of a specific event and is widely applied in fields such as medicine, epidemiology, economics, and the social sciences. Key topics in survival analysis include censoring, left truncation, and competing risks. Thus, this study focuses on left-truncated and right-censored competing risks data and introduces four representative analytical models (independent, copula, Bayesian independent, and Bayesian copula models). In particular, the study provides a detailed exploration of the following: the joint modeling of latent failure times (marginal distributions) using copulas in competing risks; the modeling of left truncation conditional on joint models; the construction of likelihood functions; and the estimation of marginal distribution parameters and copula parameters using Bayesian estimators. Simulation experiments were conducted under realistic conditions (different combinations of marginal distributions and left-truncation proportions), and the parameters were estimated using the above four analytical models. Furthermore, our discussion compares the parameter estimation performance of the models and discusses the challenges and future prospects of the Bayesian copula model.