

Supplementary Information:  
 小サンプルサイズ下での認知診断モデルの推定精度の検討  
 —モデルの誤設定の影響と推定法の違いに着目して—

**A1：設定した Q 行列**

$(K, J) = (4, 20), (5, 20), (4, 40), (5, 40)$  の条件で設定した Q 行列を表 1, 2, 3, 4 にそれぞれ示す。ただし、空欄の要素は 0 を表す。

表 1:  $(K, J) = (4, 20)$  における Q 行列

項目番号	A1	A2	A3	A4
1	1			
2		1		
3			1	
4				1
5	1			
6		1		
7			1	
8				1
9	1	1		
10	1		1	
11	1			1
12		1	1	
13		1		1
14			1	1
15	1	1	1	
16	1	1		1
17	1		1	1
18		1	1	1
19		1		1
20	1		1	

表 2:  $(K, J) = (5, 20)$  における Q 行列

項目番号	A1	A2	A3	A4	A5
1	1				
2		1			
3			1		
4				1	
5					1
6	1				
7		1			
8			1		
9				1	
10					1
11	1				1
12	1			1	
13		1	1		
14		1			1
15			1		1
16		1	1	1	
17	1		1	1	
18	1	1		1	
19	1			1	1
20		1	1		1

表 3:  $(K, J) = (4, 40)$  における Q 行列

項目番号	A1	A2	A3	A4	項目番号	A1	A2	A3	A4
1	1				21	1			
2		1			22		1		
3			1		23			1	
4				1	24				1
5	1				25	1			
6		1			26		1		
7			1		27			1	
8				1	28				1
9	1	1			29	1	1		
10	1		1		30	1		1	
11	1			1	31	1			1
12		1	1		32		1	1	
13		1		1	33		1		1
14			1	1	34			1	1
15	1	1	1		35	1	1	1	
16	1	1		1	36	1	1		1
17	1		1	1	37	1		1	1
18		1	1	1	38		1	1	1
19		1		1	39		1		1
20	1		1		40	1		1	

表 4:  $(K, J) = (5, 40)$  における Q 行列

項目番号	A1	A2	A3	A4	A5	項目番号	A1	A2	A3	A4	A5
1	1					21	1				
2		1				22		1			
3			1			23			1		
4				1		24				1	
5					1	25					1
6	1					26	1				
7		1				27		1			
8			1			28			1		
9				1		29				1	
10					1	30					1
11	1				1	31	1				1
12	1			1		32	1			1	
13		1	1			33		1	1		
14		1			1	34		1			1
15			1		1	35			1		1
16		1	1	1		36		1	1	1	
17	1		1	1		37	1		1	1	
18	1	1		1		38	1	1		1	
19	1			1	1	39	1			1	1
20		1	1		1	40		1	1		1

## A2：ベイズ推定法における事前分布の詳細

本節では、本研究のシミュレーションで設定した事前分布を掲載する。本研究では、DINA モデル、DINO モデル、RRUM、CRUM のパラメタに関する事前分布は Zhan et al. (2019) および Oka and Okada (2021) を参考とし、LCDM のパラメタに関する事前分布は Yamaguchi and Templin (2022) を参考に設定した。DINA モデル、DINO モデルについては、

$$c_i \sim \text{Categorical}(\boldsymbol{\pi}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\pi} \sim \text{Dirichlet}(\mathbf{1}_L) \quad (2)$$

$$s_j \sim \text{Beta}(1, 1) \quad (3)$$

$$g_j \sim \text{Beta}(1, 1)_{T(0, 1-s_j)} \quad (4)$$

のように設定した。ここで、 $c_i$  は、学習者  $i$  のアトリビュート習得パタンのクラスであり、混合比率  $\boldsymbol{\pi}$  の事前分布には、無情報事前分布としてパラメタが  $\mathbf{1}_L$  (長さが  $L$  で要素が全て 1 のベクトル) のディリクレ分布を設定している。また、 $s_j$  の事前分布には無情報事前分布として  $\text{Beta}(1, 1)$  を設定し、 $g_j$  の事前分布には単調性制約を踏まえて  $[0, 1-s_j]$  の範囲で値域が切断された  $\text{Beta}(1, 1)$  である  $\text{Beta}(1, 1)_{T(0, 1-s_j)}$  を設定している。

RRUM については、

$$c_i \sim \text{Categorical}(\boldsymbol{\pi}) \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\pi} \sim \text{Dirichlet}(\mathbf{1}_L) \quad (6)$$

$$\tau_j \sim \text{Beta}(1, 1) \quad (7)$$

$$r_{jk} \sim \text{Beta}(1, 1) \quad (8)$$

と設定した。なお、ここで RRUM のパラメタである罰則パラメタ  $r_{jk}$  は定義上、 $[0, 1]$  の範囲を取りうるため、無情報事前分布として  $\text{Beta}(1, 1)$  と設定しており、それゆえ、単調性制約を満たしている。

CRUM については、

$$c_i \sim \text{Categorical}(\boldsymbol{\pi}) \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\pi} \sim \text{Dirichlet}(\mathbf{1}_L) \quad (10)$$

$$\lambda_{j0} \sim \text{Normal}(0, 10) \quad (11)$$

$$\lambda_{jk} \sim \text{Normal}(0, 10)_{T(0, )} \quad (12)$$

と設定した。ここで主効果パラメタ  $\lambda_{jk}$  に対して、 $[0, \infty]$  の範囲で値域が切断された平均 0・分散 10 の正規分布である  $\text{Normal}(0, 10)_{T(0, )}$  を設定することで、単調性制約を置いている。

LCDM については、Yamaguchi and Templin (2022) の定式化をもとに、

$$c_i \sim \text{Categorical}(\boldsymbol{\pi}) \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\pi} \sim \text{Dirichlet}(\mathbf{1}_L) \quad (14)$$

$$\theta_{jh} \sim \text{Beta}(1, 1) \quad (15)$$

という無情報事前分布を設定した。ここで、 $\theta_{jh}$  は、項目  $j$  の正答に関わるアトリビュートに関するアトリビュート習得パターン  $h (= 1, 2, \dots, 2^{\sum_{k=1}^K a_{jk}})$  に属する学習者が項目  $j$  に正答する確率を表している。具体的な定式化および推定方法の詳細については、Yamaguchi and Templin (2022) を参照されたい。

### A3：マルコフ連鎖の収束状況とシミュレーション条件ごとのパラメタ数

本節では、マルコフ連鎖の収束状況を確認するために利用した Gelman-Rubin 統計量  $\hat{R}$  の値について、基準として 1.05, 1.1 および 1.2 の 3 つを用い、これらの値より大きい値を示したパラメタの数をそれぞれ掲載する。具体的には、表 5, 表 6 および表 7 はそれぞれ、シミュレーション全体 (i.e., 100 個の生成データセット) において  $\hat{R}$  が 1.05, 1.1, もしくは 1.2 より大きい値を示したパラメタの総数である。また、表 8 はシミュレーション条件ごとに、各モデルにおいて推定対象となるパラメタ数を表している。たとえば、表 5 の「DINO  $s_j$ 」行・「N80J40K4」列の要素である 3 は、 $(N, J, K) = (80, 40, 4)$  の条件において DINO モデルを分析モデルとした場合に、生成データセットごとに推定される 40 個の  $s_j$  (表 8 参照) について、100 個の生成データセット全体の個数  $40 \times 100 = 4000$  個のうち 3 個が  $\hat{R} > 1.05$  であったことを表す。

表 5:  $\hat{R} > 1.05$  を満たすパラメタ数

モデル	パラメタ	シミュレーション条件														
		N20J20K4	N20J20K5	N20J40K4	N20J40K5	N40J20K4	N40J20K5	N40J40K4	N40J40K5	N80J20K4	N80J20K5	N80J40K4	N80J40K5			
DINA	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DINO	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0
RRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
	$\tau_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0
	$r_{jk}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	2	1	0	0	0	9	0	0	0	0	0
	$\lambda_j$	0	0	0	0	1	0	0	0	0	18	0	0	0	0	0
LCDM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\theta_{jh}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 6:  $\hat{R} > 1.1$  を満たすパラメタ数

モデル	パラメタ	シミュレーション条件															
		N20J20K4	N20J20K5	N20J40K4	N20J40K5	N40J20K4	N40J20K5	N40J40K4	N40J40K5	N80J20K4	N80J20K5	N80J40K4	N80J40K5				
DINA	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
DINO	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	
RRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\tau_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$r_{jk}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
CRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	
	$\lambda_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
LCDM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$\theta_{jh}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

表 7:  $\hat{R} > 1.2$  を満たすパラメタ数

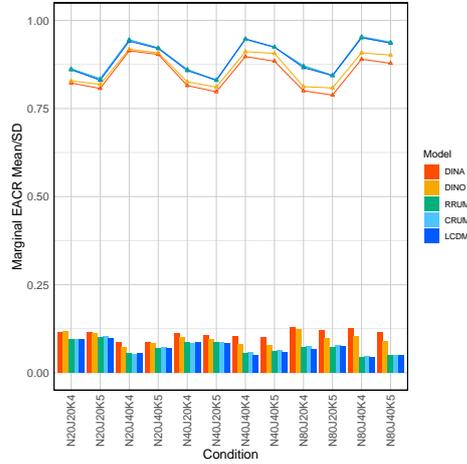
モデル	パラメタ	シミュレーション条件														
		N20J20K4	N20J20K5	N20J40K4	N20J40K5	N40J20K4	N40J20K5	N40J40K4	N40J40K5	N80J20K4	N80J20K5	N80J40K4	N80J40K5			
DINA	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DINO	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$s_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$g_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\tau_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$r_{jk}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
CRUM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\lambda_j$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
LCDM	$\pi_l$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$\theta_{jh}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 8: シミュレーション条件ごとのパラメタ数

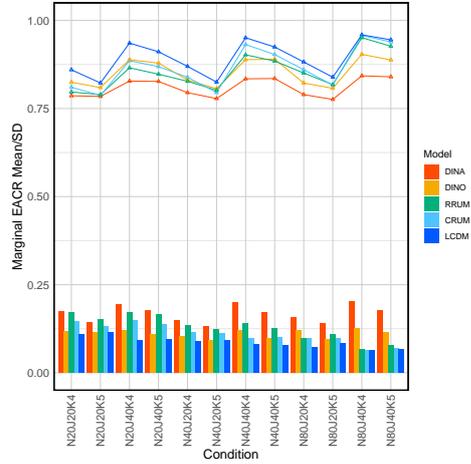
モデル	パラメタ	シミュレーション条件														
		N20J20K4	N20J20K5	N20J40K4	N20J40K5	N40J20K4	N40J20K5	N40J40K4	N40J40K5	N80J20K4	N80J20K5	N80J40K4	N80J40K5			
DINA	$\pi_l$	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	
	$s_j$	20	20	40	40	20	20	40	40	20	20	40	40	20	40	
	$g_j$	20	20	40	40	20	20	40	40	20	20	40	40	20	40	
DINO	$\pi_l$	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	
	$s_j$	20	20	40	40	20	20	40	40	20	20	40	40	20	40	
	$g_j$	20	20	40	40	20	20	40	40	20	20	40	40	20	40	
RRUM	$\pi_l$	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	
	$\tau_j$	20	20	40	40	20	20	40	40	20	20	40	40	20	40	
	$r_{jk}$	36	35	72	70	36	35	72	70	36	35	72	70	36	70	
CRUM	$\pi_l$	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	
	$\lambda_j$	56	55	112	110	56	55	112	110	56	55	112	110	56	110	
LCDM	$\pi_l$	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	16	32	
	$\theta_{jh}$	80	80	160	160	80	80	160	160	80	80	160	160	80	160	

## A4：結果に関する図表のカラー版

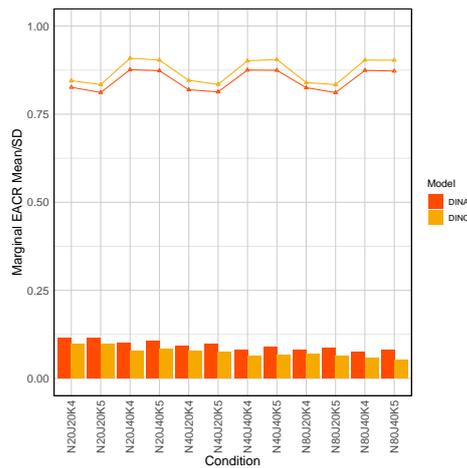
本節では、本文中の図1~5のカラー版を掲載する。以下の図の番号は、本文の図の番号とそれぞれ対応している。



(a) 最尤推定法における EACR

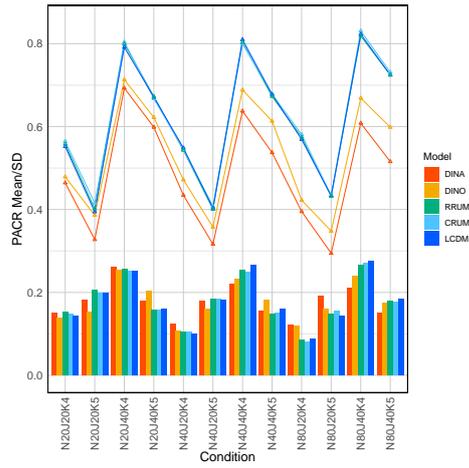


(b) ベイズ推定法における EACR

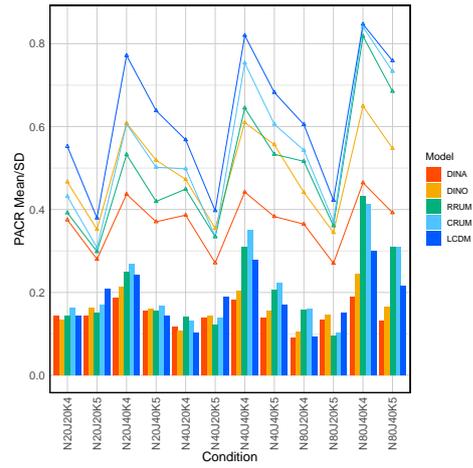


(c) ノンパラメトリック推定法における EACR

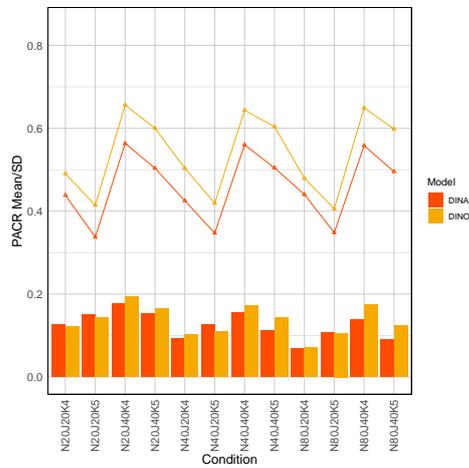
図 1: 推定法ごとの各条件における EACR (棒グラフ：標準偏差, 折れ線グラフ：平均値)



(a) 最尤推定法における PACR

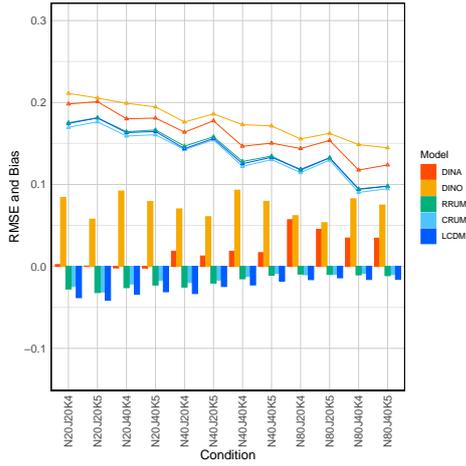


(b) ベイズ推定法における PACR

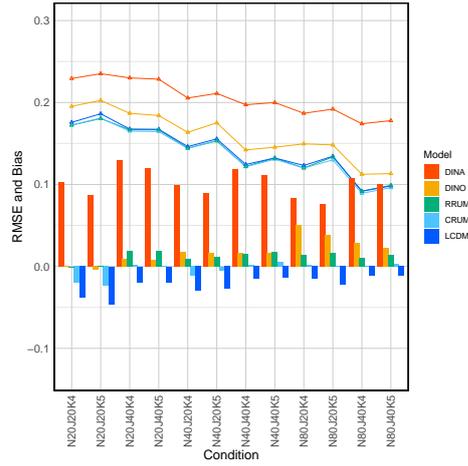


(c) ノンパラメトリック推定法における PACR

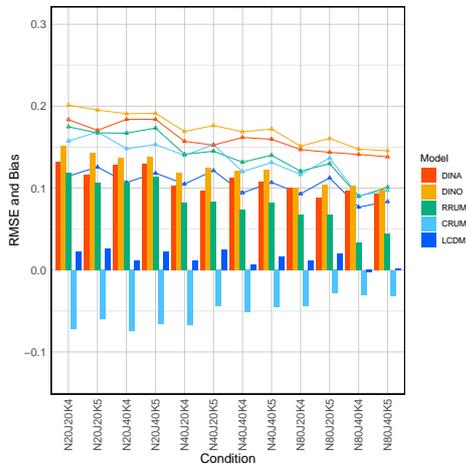
図 2: 推定法ごとの各条件における PACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)



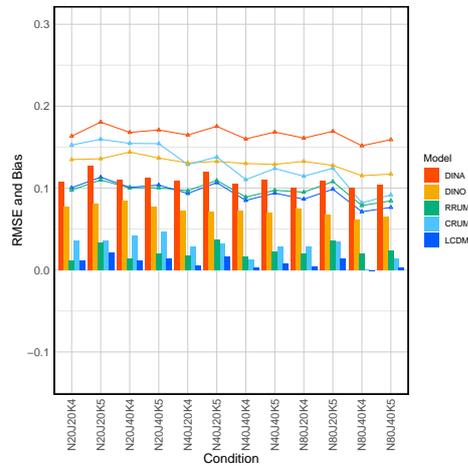
(a) 最尤推定法における slip パラメタ



(b) 最尤推定法における guessing パラメタ



(c) ベイズ推定法における slip パラメタ



(d) ベイズ推定法における guessing パラメタ

図 3: slip パラメタと guessing パラメタの Bias と RMSE (棒グラフ: Bias, 折れ線グラフ: RMSE)

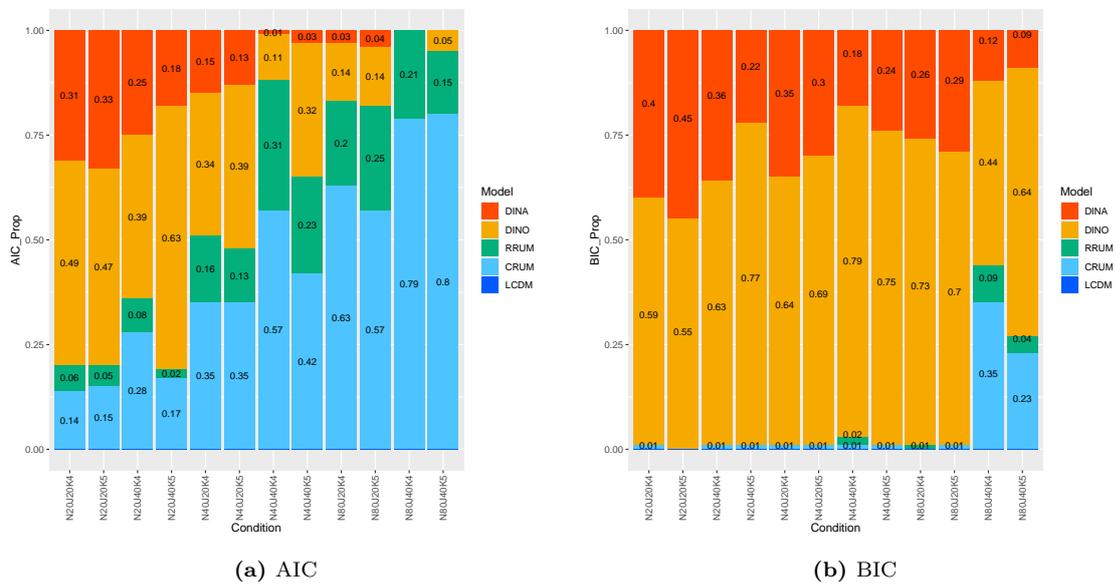


図 4: AIC・BIC が最小となったモデルの割合

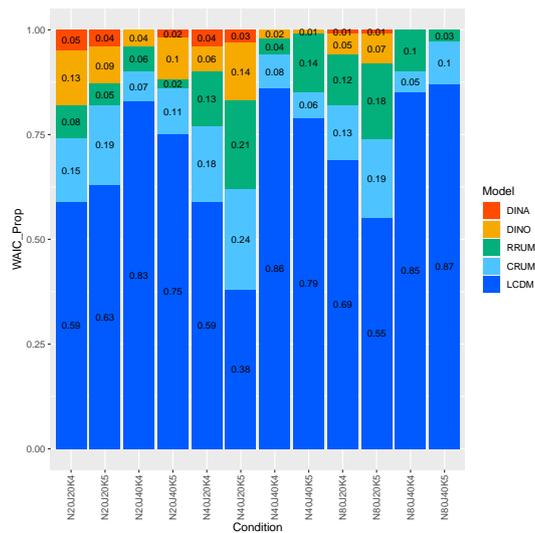


図 5: WAIC が最小となったモデルの割合

## A5：アトリビュートごとの EACR について

本節では、アトリビュートごとの EACR を掲載する。

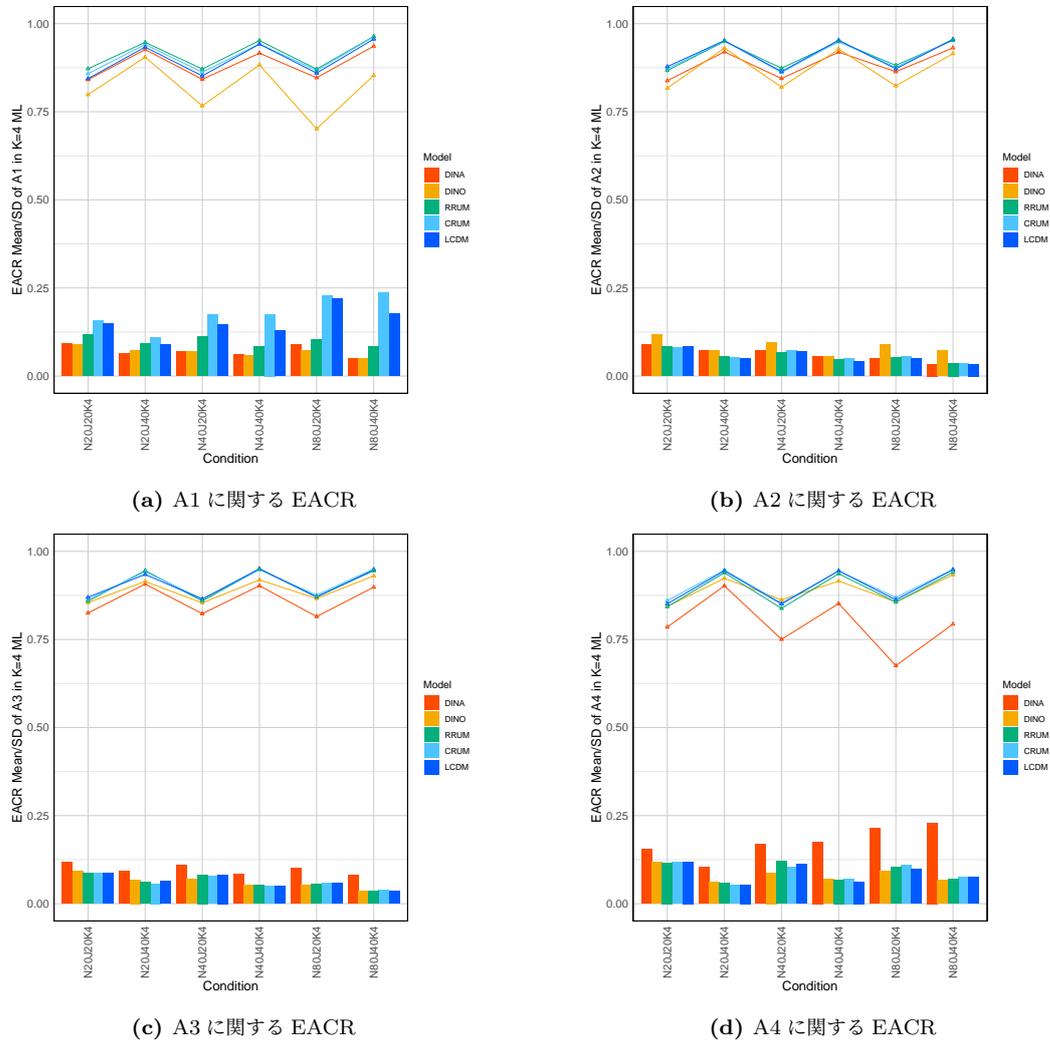
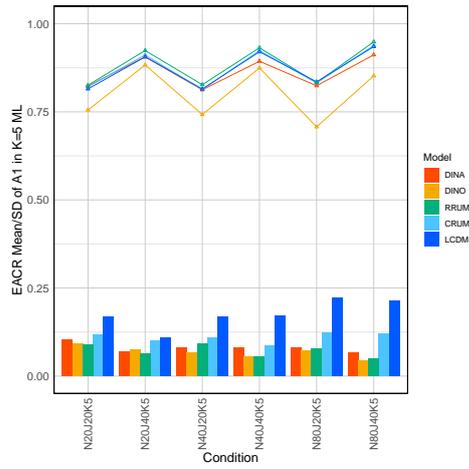
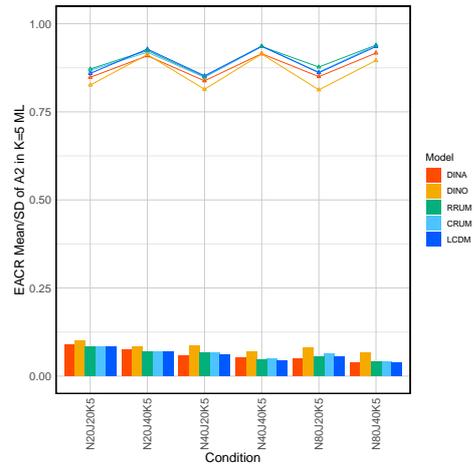


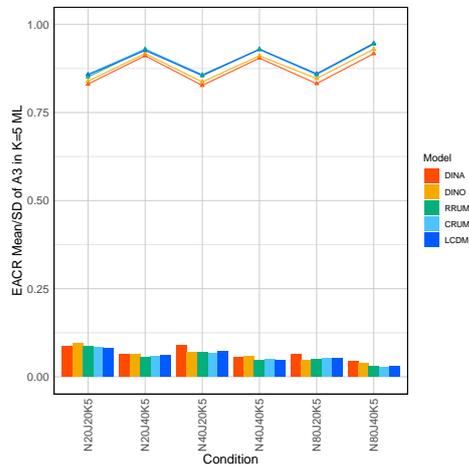
図 6: 最尤推定法における  $K = 4$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ：標準偏差, 折れ線グラフ：平均値)



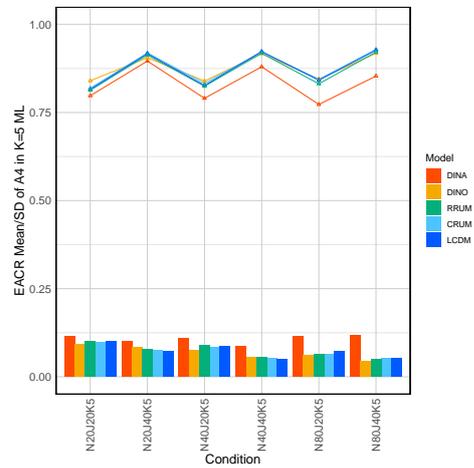
(a) A1 に関する EACR



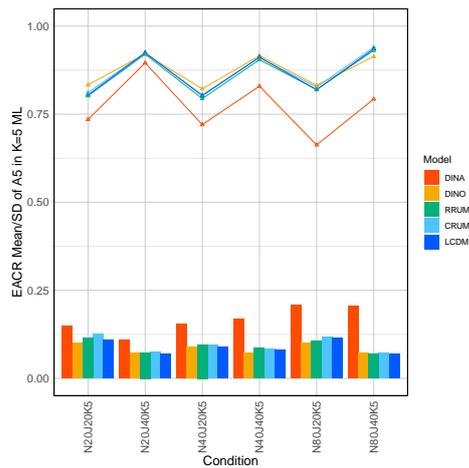
(b) A2 に関する EACR



(c) A3 に関する EACR

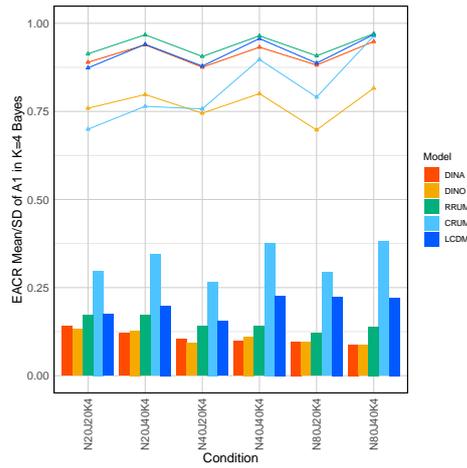


(d) A4 に関する EACR

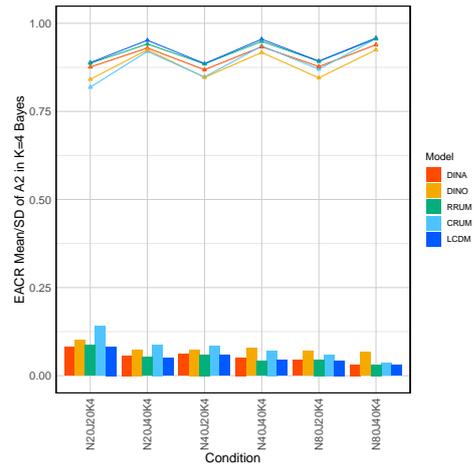


(e) A5 に関する EACR

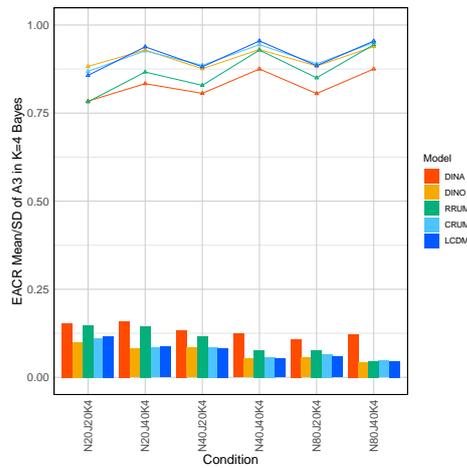
図 7: 最尤推定法における  $K = 5$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)



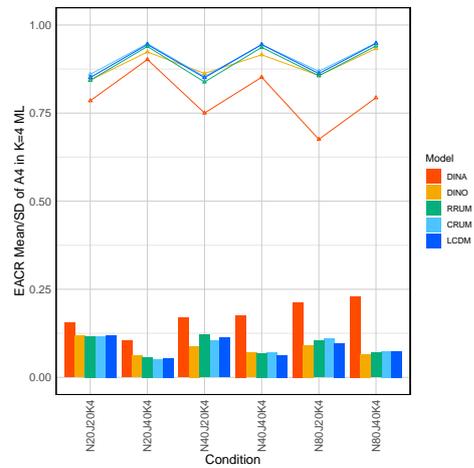
(a) A1 に関する EACR



(b) A2 に関する EACR

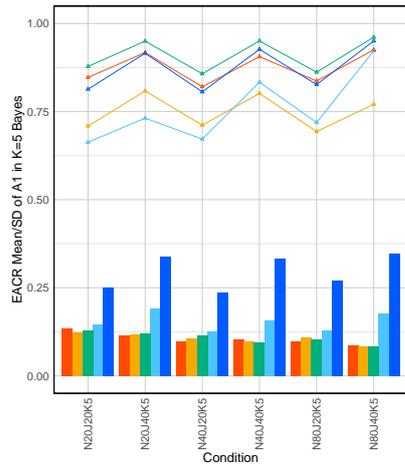


(c) A3 に関する EACR

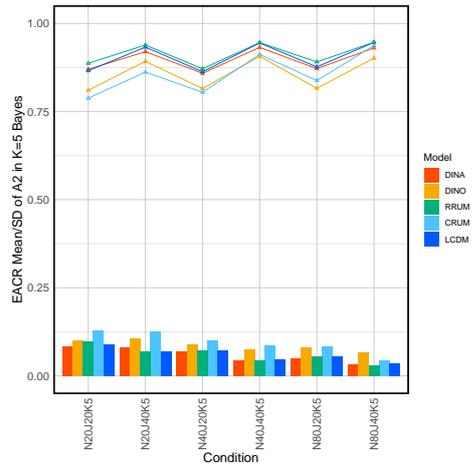


(d) A4 に関する EACR

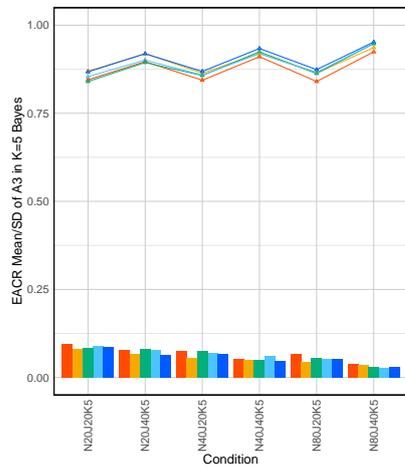
図 8: ベイズ推定法における  $K = 4$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)



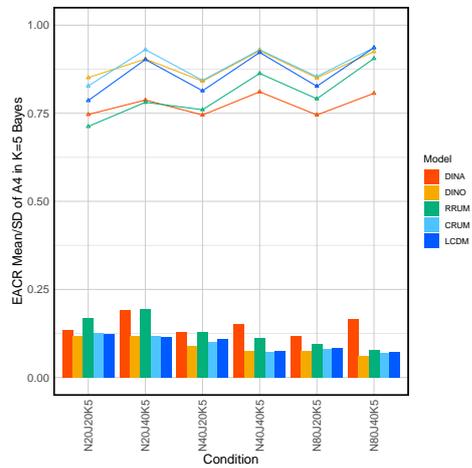
(a) A1 に関する EACR



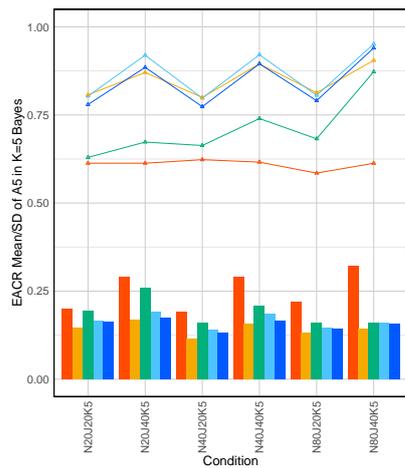
(b) A2 に関する EACR



(c) A3 に関する EACR

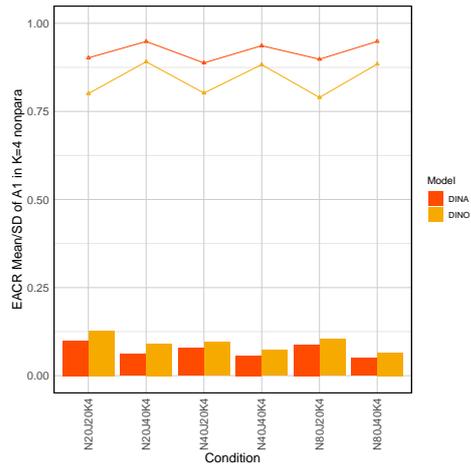


(d) A4 に関する EACR

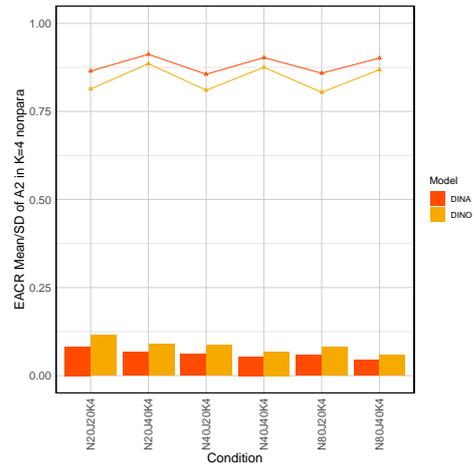


(e) A5 に関する EACR

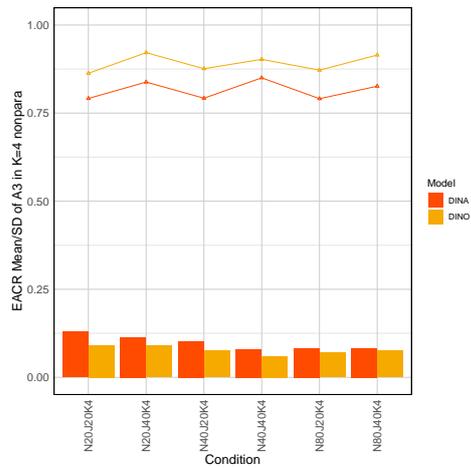
図 9: ベイズ推定法における  $K = 5$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)



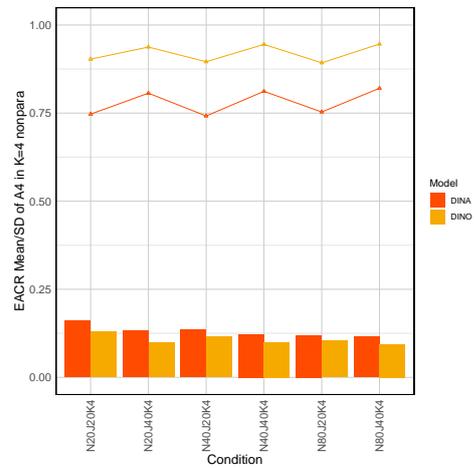
(a) A1に関するEACR



(b) A2に関するEACR

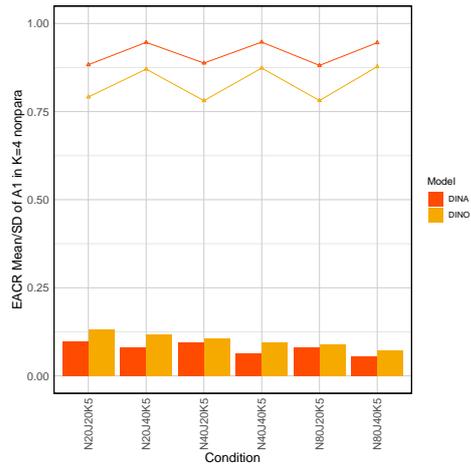


(c) A3に関するEACR

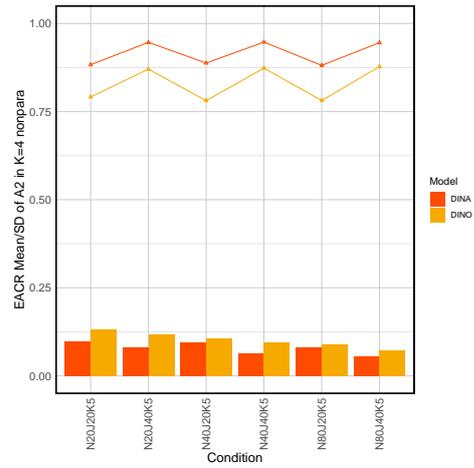


(d) A4に関するEACR

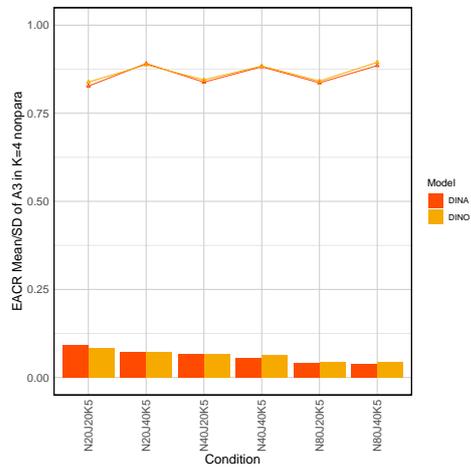
図 10: ノンパラメトリック推定法における  $K = 4$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)



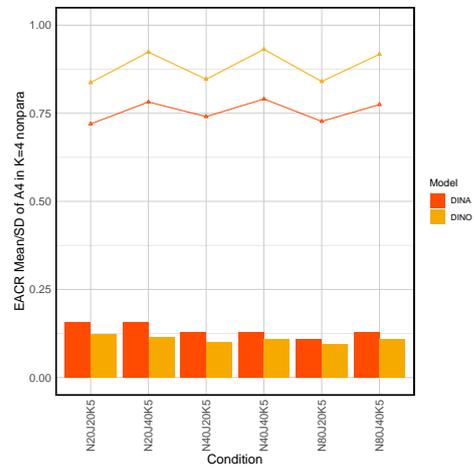
(a) A1に関するEACR



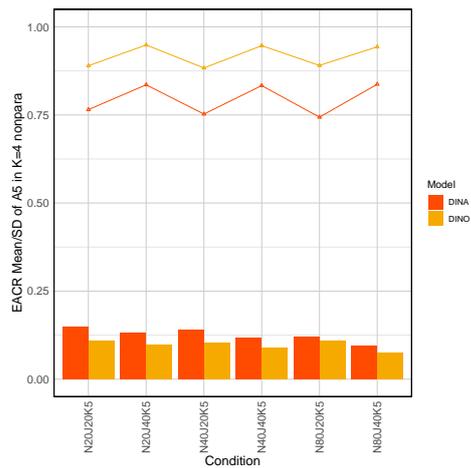
(b) A2に関するEACR



(c) A3に関するEACR



(d) A4に関するEACR



(e) A5に関するEACR

図 11: ノンパラメトリック推定法における  $K = 5$  の条件下での各アトリビュートの EACR (棒グラフ: 標準偏差, 折れ線グラフ: 平均値)

## 参考文献

- Oka, M. and Okada, K. (2021). Assessing the performance of diagnostic classification models in small sample contexts with different estimation methods, *arXiv preprint arXiv:2104.10975*.
- Yamaguchi, K. and Templin, J. (2022). A Gibbs sampling algorithm with monotonicity constraints for diagnostic classification models, *Journal of Classification*, **39**(1), 24–54.
- Zhan, P., Jiao, H., Man, K. and Wang, L. (2019). Using JAGS for Bayesian cognitive diagnosis modeling: A tutorial, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, **44**(4), 473–503.