

コピュラを用いた CDO 価格付けモデルの リスク計測モデルへの拡張

室町 幸雄[†]

(受付 2019 年 6 月 6 日；改訂 2020 年 1 月 22 日；採択 1 月 23 日)

要 旨

2007～08 年の世界金融危機以前から多くの金融リスク計測モデルが開発されてきたが、金融危機の予兆は捉えられなかった。それは既存モデルが過去データを分析する純粋な統計学的モデルであったためである。本稿では、もともと CDO の価格付けのために提案されたインプライドコピュラを用いたプライシングモデルのリスク計測への拡張を提案する。そのモデルではデフォルト時刻は条件付独立と仮定し、デフォルト強度の分布を CDO 価格から推定するが、既存の推定結果は僅かな確率で同時デフォルト確率が極端に高まることを示唆していた。そのような結果をリスク計測に活用するのが本稿のモデルで、過去データだけでなく現在の時価情報も活用することで市場参加者の将来の環境激変への畏怖をリスク量に反映できる。本稿では既存理論に沿って具体的なリスク計測モデルを構築していくが、測度変換の重要性とその取扱いは特に詳細に議論する。このモデルではデフォルト確率全体に影響するファクターの存在が重要で、その分布次第では既存モデルでは見られない結果が現れる。例えば CDO のリスク計測では、ほとんどのトランシェで小確率で大規模損失が発生しうること、大規模損失の内訳が実際のデフォルト損失ではなく CDO 価格の暴落であることを示した。これらは金融危機時に見られた現象と整合的である。

キーワード：金融リスク管理，統計学的モデル，インプライドコピュラ，条件付独立，観測確率，リスク中立確率。

1. はじめに

2007 年以降の米国のサブプライム問題に端を発した世界金融危機では、世界中の金融機関で巨大損失が発生し、幾つもの主要金融機関がデフォルトした。それまでも金融機関はリスクの計測と管理に注力し、RiskMetrics™ (Morgan Guaranty Trust Company and Reuters Ltd., 1996), CreditMetrics™ (Gupton et al., 1997) などのさまざまな金融リスク計測モデルを開発してきたが、金融危機の予兆を捉えることはできなかった。後日、それはどのモデルも過去データを分析して将来のリスクを評価する純粋に統計学的なモデルであったためだと批判され、フォワードルッキングなリスク評価の重要性が指摘され、過去データに依らないシナリオに基づくストレステストが注目されるようになった。しかし、過去データを全く用いずにシナリオを構築すると既存の統計学的モデルと組み合わせた議論ができないという問題がある。一方、金融商品の市場価格、特にデリバティブの価格にはフォワードルッキングな情報が含まれると

[†] 東京都立大学大学院 経営学研究科：〒192-0397 東京都八王子市南大沢 1-1

考えられており、例えば、金融危機前の CDO (Collateral Debt Obligations) のトランシェ価格には、Hull and White (2006) や Brigo et al. (2010) の分析結果に見られるように、将来の巨大損失の発生を示唆すると解釈できるデータも含まれていた。例えば、CDO の各トランシェ価格から逆算されたインプライドコリレーション、特にベースコリレーションは、値が高いほど CDO に含まれる多くの裏付資産が同時にデフォルトする確率が高いことを示唆するが、これらの論文の分析によると、トランシェの優先度が高くなるほどベース・コリレーションの値は高くなっている。また、後述する Hull and White (2006) のインプライドコピュラの論文のモデルによるトランシェ価格の分析結果は、非常に低い確率で、極端に裏付資産のデフォルト強度が同時に高まる事象の発生を明示している。

本稿では、デリバティブ価格に内在する将来の損失発生に関するフォワードルッキングな情報を読み出して活用できる統計学的リスク計測モデルを提案する。もとにする考え方は、Hull and White (2006) がインプライドコピュラを提案した論文で使われたモデルと、Kijima and Muromachi (2000) による将来価値ベースのリスク計測のフレームワークである。Kijima and Muromachi (2000) は、プライシング(価格付け)モデルと金融規制で扱われるリスク計測モデルの違いを明確にして、両者を整合的に行うモデルを構築するための理論的なフレームワークを提案した。一般に、変数間の相互依存関係をコピュラ(接合関数)で表現したとき、測度変換を行うとコピュラは変化するが、Kijima and Muromachi (2000) が論文で取り上げた例はシンプルで、提案したフレームワークに関してコピュラの視点からは特に言及されていなかった。本稿では、Hull and White (2006) で例示されたプライシングモデルを Kijima and Muromachi (2000) に沿ってリスク計測モデルへ拡張する。これは、ガウシアンコピュラモデルよりも巨大なテイルリスクを表現できる Hull and White (2006) のモデルをベースにすることで、既存のリスク計測モデルでは得られない新しい結果の導出を狙ったものである。また、リスク計測モデルへの拡張をコピュラの視点からも言及することで、Kijima and Muromachi (2000) のフレームワークの解釈の拡大も試みる。

論文の構成は以下である。2 節ではもとにする 2 つの理論を概説し、3 節でリスク計測モデルを提案する。4 節ではモデルによる数値例を紹介し、5 節でまとめる。

2. もとにする既存理論

2.1 1-ファクターガウシアンコピュラモデルとインプライドコピュラ

Hull and White (2006) のインプライドコピュラは、当時活発に取引されていた CDO トランシェ、特に CDS (Credit Default Swap) からなるポートフォリオを裏付資産とする合成 CDO (synthetic CDO) の市場価格を合理的に説明するためのモデルである。その説明の前に、標準的な CDO のプライシングモデルである 1-ファクターガウシアンコピュラモデル (one-factor Gaussian copula model, 本稿では OFGCM と略) から説明する。

n 個の異なる参照資産を考え、資産 j に対応する潜在変数を

$$(2.1) \quad X_j = \rho_j M + \sqrt{1 - \rho_j^2} Z_j, \quad j = 1, \dots, n$$

と表現する。ここで、定数 $\rho_j \in (-1, 1)$ はファクターローディング、 M と $Z_j, j = 1, \dots, n$ は互いに独立な標準正規分布に従う確率変数である。資産 i と資産 j のコリレーションは $\rho_i \rho_j$ と表現される。このとき X_j も標準正規分布に従うので、 F_j を τ_j の分布関数、 F_j^{-1} を F_j の逆関数、 Φ を標準正規分布の分布関数として、 j 番目の資産のデフォルト時刻 τ_j を

$$(2.2) \quad \tau_j = F_j^{-1}(\Phi(X_j)), \quad j = 1, \dots, n$$

で定義すると, (2.1) と (2.2) から,

$$(2.3) \quad F_j(t|M) \equiv P\{\tau_j \leq t|M\} = P\{X_j \leq \Phi^{-1}(F_j(t))|M\} = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(F_j(t)) - \rho_j M}{\sqrt{1 - \rho_j^2}}\right)$$

が得られる. このモデルは OFGCM と呼ばれ, 確率変数 M が具体的に与えられたとき, 個々の資産の時刻 t までのデフォルトは (2.3) で与えられる条件付デフォルト確率で独立に発生する.

しかし, OFGCM, 特にマーケットで広く使われた全資産の ρ_j を等しい ($\rho_j = \rho$) と仮定する OFGCM では, 同じ CDO に由来する複数のトランシェの市場価格を同時に説明することはできなかった. 代わりに, 各トランシェの市場価格を OFGCM で再現する ρ^2 がインプライドコリレーションと呼ばれ, デリバティブ市場におけるインプライドボラティリティと同様の役割を CDO 市場で果たしてきた. 一方, 全てのトランシェ価格を統一的に説明しようとして多くのモデルが提案されたが, その一つがインプライドコピュラである.

本稿では, インプライドコピュラによるデフォルトモデルを, 条件付デフォルト確率がノンパラメトリックな分布を持つ, デフォルト時刻が条件付独立なモデルと定義する. 条件となる確率変数の実現値が与えられたとき, 資産ごとに条件付デフォルト確率が決まり, その確率で互いに独立にデフォルトが発生すると考えて, その確率変数の分布を, CDO の全トランシェの理論価格が市場価格と整合的になるように決定する. Hull and White (2006) が具体例として示したのは, n 個の裏付資産すべてのデフォルト強度が等しく, かつ時間的に一定な場合である. 彼らは強度が λ_k となる確率を π_k , $k = 1, \dots, L$ として, L 個の組 $(\lambda_k, \pi_k)_{k=1, \dots, L}$ からなる λ の離散確率分布を複数のトランシェ価格から推定した. 得られたデフォルト強度は非常に裾の長い分布になり, 低確率だが非常に高い強度も現れた. 理論的にはインプライドコピュラをさらに拡張した形で定義することも可能であるが, 本稿では Hull and White (2006) のオリジナルの論文に沿って上記の定義を採用する.

2.2 リスク計測モデルへの拡張のフレームワークと本稿のモデル

Kijima and Muromachi (2000) は, ポートフォリオの金利リスクと信用リスクを統合評価するフレームワークを提案した. リスク計測モデルは, ある将来時点の価値の分布をもとにその時点における損益を扱う将来価値ベースのモデルと, ある将来時点までに発生しうる潜在的な損失額の分布を扱うモデルに分けられ, 市場リスク計測モデルは前者に, 多くの信用リスク計測モデルは後者に属する. Kijima and Muromachi (2000) は前者に属し, 金利やデフォルト強度などのリスクファクター (資産価格に影響を与える変数) を確率微分方程式などの確率モデルで表現し, 現在価値と将来価値には無裁定価格を使い, モンテカルロシミュレーションを用いてリスクホライズン (リスク計測期間の最終時点) T におけるポートフォリオの将来価値分布を構築し, VaR (Value at Risk) や ES (Expected Shortfall) などのリスク量を算出する.

このフレームワークの顕著な特徴は 2 つの確率測度, 観測確率 (実確率, 統計的確率ともいう) と価格付けのための確率 (リスク中立確率など) の両方を用いる点である. リスク計測では, 将来シナリオは現実には発生しうるシナリオを扱うので, シナリオ生成には観測確率を使用する. 一方, 現在の状況から現在価値を, 将来時点の状況からその時点の将来価値を算出する際は, リスク中立確率のような価格付けのための確率を使用して無裁定価格を算出する. そのため, ポートフォリオのリスク計測の実行手順は以下になる.

(1) 現時点 $t = 0$ におけるリスクファクター値を初期値として, リスクホライズン $t = T$ までのリスクファクターの将来シナリオを, 与えられた確率モデルをもとにモンテカルロシミュレーションで多数発生させる. ここでは観測確率を使用する.

(2) 各シナリオごとに、時刻 T におけるリスクファクター値をもとに全資産の無裁定価格を算出し、ポートフォリオの将来価値を算出する。価格評価にモンテカルロ法を使う場合、時刻 T 以降の将来シナリオをリスク中立確率などの価格付けのための確率下で生成して、時刻 T 以降のキャッシュフロー列を算出し、その時刻 T における割引価値の期待値を無裁定価格とする。

(3) 手順(1)–(2)を多数回繰り返し、全シナリオのポートフォリオの将来価値から将来価値分布を作成してリスク量を算出する。得られたリスク量は観測確率下の値である。

プライシングモデルでは価格付けのための確率、例えばリスク中立確率下のリスクファクターの確率過程のみ与えればよい。なぜならば、無裁定価格はリスク中立確率における将来キャッシュフローの割引現在価値の期待値で与えられるからである。一方、プライシングモデルに多少の変更を行い、例えば将来キャッシュフローの割引現在価値の確率分布を求め、VaR などのリスク量を求めたとしても、それらは市場参加者によるリスク調整が加味されたリスク中立確率下でみたリスク量に過ぎないので、金融リスク管理で必要とされる観測確率下のリスク量にはならない。例えば、社債価格などから求めたインプライドデフォルト確率から直接 VaR を計算できたとしても、その値はリスク中立確率下の VaR になり、リスク管理実務で求められる観測確率下の VaR ではない。インプライドデフォルト確率を既存のリスク計測モデルにデフォルト確率として入力して VaR を算出しても同様である。CDO のトランシェ価格から推定されるインプライドコリレーションを用いる場合も同様だが、さらに、インプライドコリレーションにはスマイル、すなわち、ポートフォリオ全体のどの部分(どのトランシェ)を扱うかによって値が変わるという現象が見られるので、インプライドコリレーションを用いてリスクを評価しても、選択したトランシェ部分のみにバイアスをかけた評価しか行うことができないので、やはりリスク管理の場で使える適切なリスク量は得られない。

将来価値ベースのリスク計測で観測確率下のリスク量を算出するには、観測確率下とリスク中立確率下の確率過程、あるいは観測確率下(またはリスク中立確率下)の確率過程と測度変換、を与えて上記の手順(1)–(3)を踏む必要がある。そのため、既存のプライシングモデルと整合的なリスク計測を行うためには、Kijima and Muromachi (2000) のフレームワークに沿ってプライシングモデルをリスク計測モデルへと拡張することが必要となる。

3. 提案モデル

本節では、Hull and White (2006) のモデルに Kijima and Muromachi (2000) のフレームワークを適用してリスク計測モデルを構築する。どちらもデフォルト時刻の条件付独立性を前提にしているため、モデルとしての相性は非常に良い。ただし、Bielecki and Rutkowski (2002) や Bielecki et al. (2009) によると、一般に、確率変数の条件付独立性は測度変換に対して保存されとは限らない。そこで、条件付独立性が保存される条件とその意味を示すとともに、Kijima and Muromachi (2000) では議論されなかったコンピュータの観点からのリスク計測モデルへの拡張についても記述する。まずは一般論から始め、固有の設定や仮定を段階的に導入して提案モデルを説明し、数値例で使用する金融商品の評価方法を示す。

3.1 設定

時刻を $t \geq 0$ で表し、現時点を $t = 0$ 、リスクホライズンを $T > 0$ とする。観測確率を P とし、フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ を考える。ポートフォリオは相異なる n 個の資産からなり、各資産の保有量は $t \in [0, T]$ で変わらないものとする。以下では、十分に先の時点(ポートフォリオ中の資産から生じる最も先のキャッシュフローの発生時点より先の時点)

$T^* > T$ までリスク中立確率 $\tilde{P}$ が唯一存在すると仮定する.

資産 j のデフォルト時刻 τ_j , $j = 1, \dots, n$ を正值確率変数, 1_A を定義関数 (事象 A が真のとき $1_A = 1$, 偽のとき $1_A = 0$) として, デフォルト過程を $H_j(t) \equiv 1_{\{\tau_j \leq t\}}$, $j = 1, \dots, n$ で定義し, デフォルト過程により生成されるフィルトレーションを $\mathcal{H}_t^j = \sigma(H_j(s), 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}_t^1 \vee \dots \vee \mathcal{H}_t^n$ とする. 詳細は後述するが, 金利とデフォルト確率を決定する確率過程から生成されるフィルトレーションを $\mathcal{G}_t$ とし, $\mathcal{F} = \mathcal{G} \vee \mathcal{H}$, すなわち任意の $t \in [0, T^*]$ に対して $\mathcal{F}_t = \mathcal{G}_t \vee \mathcal{H}_t$ が成り立つとしてサブフィルトレーション・アプローチを用いる.

観測確率 P の下で, 時刻 t における瞬間的なデフォルトフリーな短期金利 $r(t)$ は

$$(3.1) \quad dr(t) = \mu_0(t)dt + \sigma_0(t)dz_0(t), \quad t \geq 0$$

に従うと仮定する. ただし, $\mu_0(t)$ と $\sigma_0(t)$ は $\mathcal{F}_t$ -適合過程で, $z_0(t)$ は P 下における標準ブラウン運動である. デフォルトリスクに関しては誘導型モデルを用いることにして,

$$(3.2) \quad M_j(t) \equiv H_j(t) - \int_0^t (1 - H_j(s-))h_j(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad j = 1, \dots, n$$

を観測確率 P 下で $\mathcal{F}$ -マルチンゲールにする非負の $\mathcal{F}_t$ -可予測過程 $h_j(t)$ を資産 j のデフォルト強度とする. 一般に $h_j(t)$ は $\mathcal{F}_t$ -可予測過程で,

$$(3.3) \quad dh_j(t) = \mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dz_j(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

に従うと仮定する. ただし, $\mu_j(t)$ と $\sigma_j(t)$ は $\mathcal{F}_t$ -適合過程, $z_j(t)$ は P 下の標準ブラウン運動で, $dz_j(t)dz_k(t) = c_{jk}dt$, $j, k = 0, \dots, n$, ただし, $k \neq j$ で, c_{ij} は相関係数とする.

ラドンニコディム微分 $d\tilde{P}/dP$ を $\mathcal{F}_{T^*}$ -可測な確率変数とし, 密度過程を

$$\rho(t) \equiv E \left[\frac{d\tilde{P}}{dP} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad 0 \leq t \leq T^*$$

で定義すると, 適当な技術的条件のもとで, $\mathcal{F}_t$ -可予測な確率過程 $\beta_j(t)$, $j = 0, \dots, n$ と $\kappa_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ を用いて,

$$(3.4) \quad \rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s-) \left(- \sum_{j=0}^n \beta_j(s)dz_j(s) + \sum_{j=1}^n \kappa_j(s)dM_j(s) \right), \quad 0 \leq t \leq T^*$$

と一意に表現できる. このとき,

$$(3.5) \quad d\tilde{z}_j(t) = dz_j(t) + \beta_j(t)dt, \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad \tilde{z}_j(0) = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

で定義される $\tilde{z}_j(t)$ は $\tilde{P}$ 下における標準ブラウン運動,

$$(3.6) \quad \tilde{M}_j(t) \equiv H_j(t) - \int_0^t (1 - H_j(s-))(1 + \kappa_j(s))h_j(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad j = 1, \dots, n$$

は $\tilde{P}$ 下における $\mathcal{F}$ -マルチンゲールになる. (3.5) の $\beta_j(t)$ は $z_j(t)$ に対するリスクの市場価格で, (3.6) は $\tilde{h}_j(t) \equiv (1 + \kappa_j(t))h_j(t)$ が $\tilde{P}$ 下のデフォルト強度であることを意味している.

以下では, 本稿固有の設定や仮定を順次導入しながらモデルを説明する. $z_{n+1}(t) \equiv (z_0(t), \dots, z_n(t))$, $\mathcal{G}'_t \equiv \sigma(z_{n+1}(s) : 0 \leq s \leq t)$ を定義し, 経済環境の信用リスク全般への影響を表す変数として新たな正值確率変数 ν (multiplier と呼ぶ) を導入して, $\mathcal{G} \equiv \mathcal{G}' \vee \sigma(\nu)$, すなわち任意の $t \in [0, T^*]$ に対して $\mathcal{G}_t \equiv \mathcal{G}'_t \vee \sigma(\nu)$ が成り立つとする.

本稿では取り扱い易さを考えて, デフォルト時刻 τ_j が P 下でも $\tilde{P}$ 下でも $\mathcal{G}$ -条件付独立とな

るようにモデルを構築する．また， G_t が与えられたとき，まずは (i) G'_t に含まれる情報から， ν に関して平均化された G' -条件付デフォルト確率を確定し，(ii) その確率と ν の実現値から (最も詳細に条件付けされた) G -条件付デフォルト確率を確定する，という二段階構造をとる．この構造をとることで，第一段階の部分のモデルパラメータは既知の手法で推定できるので，推定上の課題は第二段階のみに限定できる．

3.1.1 第一段階のモデリング

第一段階はフィルトレーション $G' \equiv (G'_t)_{t \geq 0}$ 下のモデリングで，まずは以下を仮定する．

仮定 1. $r(t)$, $h_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は G'_t -可予測過程とする．

仮定 2. $d\tilde{P}/dP$ は ν に依存しない．また， $\beta_j(t)$, $j = 0, \dots, n$, $\kappa_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は G'_t -可予測過程とする．

一般に $h_j(t)$ は $\mathcal{F}_t$ -可予測過程であり，Davis and Lo (2001) などでは扱われているデフォルト伝播モデルでは， $h_j(t)$ が他資産のデフォルト時刻 τ_k , $k \neq j$ に依存する形で表現される．一方，仮定 1 では，観測確率 P 下のデフォルト確率は経済状況などには依存するが他資産の状態には依存しないので，本稿のモデルは Davis and Lo (2001) のようなデフォルト伝播モデルと異なる．また，一般にラドンニコディム微分 $d\tilde{P}/dP$ は ν にも依存するので，密度過程 $\rho(t)$ は (3.4) と異なる表現になるが，仮定 2 の前半より， $\rho(t)$ は (3.4) で与えられる．さらに，仮定 2 の後半で $\kappa_j(t)$ を G'_t -可予測としたので， $\tilde{h}_j(t)$ も G'_t -可予測となり， $\tilde{P}$ 下のデフォルト確率も経済状況などに依存するが他資産の状態には依存しない．

これらの仮定より， G'_t -可予測過程 $h_j(t)$, $\tilde{h}_j(t)$ に対して (3.2) と (3.6) が成立し， $h_j(t)$ と $\tilde{h}_j(t)$ はそれぞれ P 下と $\tilde{P}$ 下で ν に関して平均化されたデフォルト強度とみなすことができ， G'_u , $0 \leq u$ を与えたときの P 下の条件付デフォルト確率が得られる．具体的には，時刻 t までの G' -条件付デフォルト確率を $F_j(t|G'_u) \equiv P\{\tau_j \leq t|G'_u\}$ で定義すると， G'_u , $0 \leq t \leq u$ が与えられたとき，

$$(3.7) \quad F_j(t|G'_u) = 1 - P\{\tau_j > t|G'_u\} = 1 - \exp \left\{ - \int_0^t h_j(w) dw \right\}$$

となり， $\{\tau_j > s\}$ の下で G'_u が与えられたときの時刻 s における時刻 t までの G' -条件付フォワードデフォルト確率を $F_j(s, t|G'_u) \equiv P\{\tau_j \leq t | \tau_j > s, G'_u\}$, $0 \leq s \leq t \leq u$ で定義すると，

$$(3.8) \quad F_j(s, t|G'_u) = \frac{P\{s < \tau_j \leq t|G'_u\}}{P\{\tau_j > s|G'_u\}} = 1 - \exp \left\{ - \int_s^t h_j(w) dw \right\}$$

となる．一方， G'_u , $0 \leq u \leq t$ が与えられたときは，条件付期待値の連鎖公式より，

$$(3.9) \quad \begin{aligned} F_j(t|G'_u) &= P\{\tau_j \leq t|G'_u\} = E[P\{\tau_j \leq t|G'_t\}|G'_u] \\ &= 1 - \exp \left\{ - \int_0^u h_j(w) dw \right\} E \left[\exp \left\{ - \int_u^t h_j(w) dw \right\} \middle| G'_u \right] \end{aligned}$$

が得られる．同様に， $\{\tau > s\}$ の下で G'_u , $0 \leq u \leq s \leq t$ が与えられたとき，

$$(3.10) \quad \begin{aligned} F_j(s, t|G'_u) &= \frac{P\{s < \tau_j \leq t|G'_u\}}{P\{\tau_j > s|G'_u\}} = \frac{E[P\{s < \tau_j \leq t|G'_t\}|G'_u]}{E[P\{\tau_j > s|G'_t\}|G'_u]} \\ &= 1 - \frac{E \left[\exp \left\{ - \int_u^t h_j(w) dw \right\} \middle| G'_u \right]}{E \left[\exp \left\{ - \int_u^s h_j(w) dw \right\} \middle| G'_u \right]} \end{aligned}$$

が得られる．リスク中立確率 $\tilde{P}$ 下でも， $\tilde{F}_j(t|\mathcal{G}'_u)$ ， $\tilde{F}_j(s, t|\mathcal{G}'_u)$ を同様に定義すると (3.7)–(3.11) に対応する式が得られる．

もう少し具体的にモデルを考える．観測確率 P 下で， $r(t)$ は Hull-White モデル (Hull and White, 1990)

$$(3.11) \quad dr(t) = (b_0(t) - a_0 r(t))dt + \sigma_0 dz_0(t), \quad t \geq 0$$

に従うと仮定する．ここで， a_0, σ_0 は正定数， $b_0(t)$ は時刻 t の確定関数である．また， $h_j(t)$ も Hull-White モデル

$$(3.12) \quad dh_j(t) = (b_j(t) - a_j h_j(t))dt + \sigma_j dz_j(t), \quad t \geq 0, \quad j = 1, \dots, n$$

に従い， a_j, σ_j は正定数， $b_j(t)$ は時刻 t の確定関数とする．(3.12)は，将来の $h_j(t)$ が正の確率で負値になるので本来は強度モデルとして不適切であるが，解析的取り扱いが容易なため，また， σ_j が小さければモデルの問題点が目立たないので，理論や実務でしばしば使われる．さらに， $\ell_j(t) \equiv \kappa_j(t)h_j(t)$ をリスクプレミアム調整率と呼び，

$$(3.13) \quad \tilde{h}_j(t) = h_j(t) + \ell_j(t), \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad j = 1, \dots, n$$

と表現する．一般に $\ell_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は $\mathcal{F}_t$ -可予測過程，仮定 1 と仮定 2 を適用するならば $\mathcal{G}'_t$ -可予測過程になるが，カリブレーションを容易にするため，Kijima and Muromachi (2000) で使われた次の仮定を用いる．

仮定 3. $\beta_0(t)$, $\ell_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は時刻 t の確定関数で， $\beta_j(t) = 0$, $j = 1, \dots, n$ とする．さらに， $\ell_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は t で微分可能とする．

信用リスクの理論では $\tilde{h}_j(t) = (1 + \kappa_j(t))h_j(t)$ を使う方が標準的であるが，実務では強度の差 $\tilde{h}_j(t) - h_j(t)$ を利回り格差 (スプレッド) と同形式で表現する方が馴染みやすい．それが (3.13) の表現である．このとき， $r(t)$ は $\tilde{P}$ 下で Hull-White モデル

$$(3.14) \quad dr(t) = (\phi_0(t) - a_0 r(t))dt + \sigma_0 d\tilde{z}_0(t), \quad 0 \leq t \leq T^*$$

に従い， $\tilde{h}_j(t)$ も Hull-White モデル

$$d\tilde{h}_j(t) = (\phi_j(t) - a_j \tilde{h}_j(t))dt + \sigma_j d\tilde{z}_j(t), \quad 0 \leq t \leq T^*, \quad j = 1, \dots, n$$

に従う．仮定 3 の後半より， $\phi_0(t) = b_0(t) - \beta_0(t)\sigma_0$ と $\phi_j(t) = b_j(t) + a_j \ell_j(t) + d\ell_j(t)/dt$ は時刻 t の確定的な関数である．(3.14) より，時刻 t における満期 τ , $\tau > t$ の割引債価格は，

$$(3.15) \quad v_0(t, \tau) = \tilde{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^\tau r(s) ds \right\} \middle| \mathcal{G}'_t \right] = A_0(t, \tau) e^{-B(a_0, \tau-t)r(t)}$$

で与えられ，また， $\mathcal{G}'_t$ が与えられたときの条件付生存確率は， $\{\tau_j > t\}$ の下で，

$$(3.16) \quad \tilde{P}\{\tau_j > \tau | \mathcal{G}'_t\} = \tilde{E} \left[\exp \left\{ - \int_t^\tau \tilde{h}_j(s) ds \right\} \middle| \mathcal{G}'_t \right] = A_j(t, \tau) e^{-B(a_j, \tau-t)\tilde{h}_j(t)}$$

で与えられる．ただし， $\tilde{E}[\cdot]$ は $\tilde{P}$ 下の条件付期待値演算子で， $j = 0, \dots, n$ に対して，

$$A_j(t, \tau) \equiv \exp \left\{ \frac{\sigma_j^2(\tau - t - 2B(a_j, \tau - t) + B(2a_j, \tau - t))}{2a_j^2} - \int_t^\tau \phi_j(u) B(a_j, \tau - u) du \right\},$$

$$B(a, t) \equiv \frac{1 - e^{-at}}{a}$$

である．観測確率 P 下でも (3.16) に対応する式が成り立つ．

3.1.2 第二段階のモデリング

第二段階はフィルトレーション $\mathcal{G} \equiv (\mathcal{G}_t)_{t \geq 0}$ 下のモデリングである．まず， $\mathcal{G}$ -条件付デフォルト確率に関しても， $\mathcal{G}'$ -条件付デフォルト確率と同様の式が成り立つ． $\mathcal{G}$ -条件付デフォルト確率は $F_j(t|\mathcal{G}_u) \equiv P\{\tau_j \leq t|\mathcal{G}_u\}$, $0 \leq t \leq u$, $\{\tau_j > s\}$ の下で $\mathcal{G}_u$ が与えられたときの時刻 s における時刻 t までの $\mathcal{G}$ -条件付フォワードデフォルト確率は

$$(3.17) \quad F_j(s, t|\mathcal{G}_u) \equiv P\{\tau_j \leq t|\tau_j > s, \mathcal{G}_u\} = \frac{P\{s < \tau_j \leq t|\mathcal{G}_u\}}{P\{\tau_j > s|\mathcal{G}_u\}}, \quad 0 \leq s \leq t \leq u,$$

である．一方， $\mathcal{G}_u$, $0 \leq u \leq t$ が与えられたときは，条件付期待値の連鎖公式より，

$$(3.18) \quad F_j(t|\mathcal{G}_u) = P\{\tau_j \leq t|\mathcal{G}_u\} = E[P\{\tau_j \leq t|\mathcal{G}_t\}|\mathcal{G}_u],$$

$\{\tau > s\}$ の下で $\mathcal{G}_u$, $0 \leq u \leq s \leq t$ が与えられたとき，

$$(3.19) \quad F_j(s, t|\mathcal{G}_u) = \frac{P\{s < \tau_j \leq t|\mathcal{G}_u\}}{P\{\tau_j > s|\mathcal{G}_u\}} = \frac{E[P\{s < \tau_j \leq t|\mathcal{G}_t\}|\mathcal{G}_u]}{E[P\{\tau_j > s|\mathcal{G}_t\}|\mathcal{G}_u]}$$

となる．リスク中立確率 $\tilde{P}$ の下でも (3.17)–(3.19) と同様の式が成り立つ．

確率変数 ν に関しては以下を仮定する．

仮定 4. ν は $\mathcal{G}'$ および $\mathcal{H}$ と独立な確率変数で， ν の分布は確率測度 P や $\tilde{P}$ に依存しない．

仮定 5. $\{\tau_j > t\}$ の下で， $\mathcal{G}$ -条件付フォワードデフォルト確率は，

$$(3.20) \quad F_j(t, \tau|\mathcal{G}_u) = F_j(t, \tau|\mathcal{G}'_u \vee \sigma(\nu)) = \nu F_j(t, \tau|\mathcal{G}'_u), \quad 0 \leq t < \tau \leq u, \quad j = 1, \dots, n$$

$$(3.21) \quad \tilde{F}_j(t, \tau|\mathcal{G}_u) = \tilde{F}_j(t, \tau|\mathcal{G}'_u \vee \sigma(\nu)) = \nu \tilde{F}_j(t, \tau|\mathcal{G}'_u), \quad 0 \leq t \leq \tau \leq u \leq T^*, \quad j = 1, \dots, n$$

で与えられる．

P 下および $\tilde{P}$ 下の $\mathcal{G}$ -条件付フォワードデフォルト確率は ν の実現値に応じて一律に ν 倍になるので， ν は経済状態の悪化具合と解釈できる．上述の ν に関する仮定には観測や理論による裏付けはないが，もしもこれらの仮定を認めれば， $\tilde{P}$ 下の分布は CDO などの市場価格から推定可能であり，本稿のようにリスク計測の議論へと繋げることができる．もしも仮定 4 が成り立てば， $d\tilde{P}/dP$ は ν に依存しないので仮定 2 の前半は不要である．仮定 4 の前半部の ν と $\mathcal{G}'$ の独立性，特に ν が金利と独立という仮定の緩和や，仮定 4 を外した一般的な場合における ν の分布の推定方法の確立は今後の課題である．なお，確率変数 ν を資産 j ごとに ν_j ，あるいは確率過程 $\nu(t)$ または $\nu_j(t)$ としなかったのは，観測データからの推定をますます困難にすると考えたからである．

以下では， ν は離散分布に従うものとして，その確率関数を $\eta_i \equiv P\{\nu = \nu_i\}$, $i = 1, \dots, K$ と書く． ν とその分布は， $\eta_i > 0$, $i = 1, \dots, K$ ，及び

$$(3.22) \quad \sum_{i=1}^K \eta_i = 1, \quad E[\nu] = \sum_{i=1}^K \nu_i \eta_i = 1,$$

$$0 \leq \nu \leq \frac{1}{\max_{\mathcal{G}'_\tau, j} F_j(0, \tau|\mathcal{G}'_\tau)},$$

を満たさなければならない．

3.1.3 同時分布のモデリング

3.1.2 節まででデフォルト時刻 τ_j の周辺分布をモデル化した。 $\mathcal{G}$ が与えられたときの τ_j の条件付周辺分布は具体的に与えられるので、 $\mathcal{G}$ に関してその期待値をとることで τ_j の無条件周辺分布が得られる。残るは τ_j の同時分布である。Sklar の定理によると、同時分布は周辺分布関数とコピュラで表現できる。本稿のようにサブフィルトレーション・アプローチをとる場合は、 $\mathcal{G}$ が与えられたときの $\tau_j, j = 1, \dots, n$ の条件付同時分布の依存関係を示す条件付コピュラを用いるのが適している。Kijima and Muromachi (2000) ではデフォルト時刻は条件付独立であったが、これはデフォルト時刻の条件付コピュラを積コピュラ (独立コピュラともいう) としたことに相当する。理論上は任意のコピュラを条件付コピュラとして使用できるので、彼らのフレームワークには条件付コピュラの選択という拡張が可能である。例えば、条件付コピュラに共単調コピュラを選択すれば $\tau_j, j = 1, \dots, n$ の依存関係は最も強くなることが期待できる。また、 $\mathcal{G}$ に関する期待値計算を行って得られる $\tau_j, j = 1, \dots, n$ の同時分布の依存関係を表すのが通常のコピュラ (無条件コピュラ) なので、条件付コピュラと無条件コピュラは一致するとは限らない。例えば Kijima and Muromachi (2000) では、条件付コピュラとして積コピュラを選択しているが、無条件同時分布には依存性が生じているので無条件コピュラは積コピュラではない。

さらに、測度変換を定めるラドンニコディム微分は $d\tilde{P}/dP = \rho(T^*)$ で、密度過程 $\rho(t)$ は一般に $\mathcal{F}_t$ -適合過程であるので、 P 下ではデフォルト伝播を考慮しないモデルであっても、 $\tilde{P}$ 下ではデフォルト伝播を考慮するモデルになることもあり (Kusuoka, 1999 を参照)、また、その逆もありえる。このようなことは、 $\mathcal{G}$ に含まれない確率過程・確率変数が密度過程 $\rho(t)$ に含まれる場合に発生しうる。そしてこれらのことは、一般に、 P 下の条件付コピュラと $\tilde{P}$ 下の条件付コピュラが一致するとは限らないことを示している。

このような視点からみると、 P 下でも $\tilde{P}$ 下でも条件付独立な Kijima and Muromachi (2000) のモデルはどちらの確率下でも条件付コピュラに積コピュラを用いた例である。これは実務的な取り扱い易さ、パラメータの推定し易さの点からも支持できる提案だが、それがどのようなモデルであるかは明言されていなかった。本稿では、測度変換で条件付独立性が保存されるための条件を具体的に挙げ、その意味を説明し、3.1.2 節までで述べてきたモデルに適用してリスク計測モデルへと拡張する。

仮定 6. 観測確率 P の下でデフォルト時刻は $\mathcal{G}$ -条件付独立である。

このとき、 $\mathcal{G}_T$ が与えられたときのデフォルト時刻の条件付同時分布は、

$$(3.23) \quad P\{\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n | \mathcal{G}_T\} = \prod_{j=1}^n P\{\tau_j \leq t_j | \mathcal{G}_T\}, \quad 0 \leq \max_j t_j \leq T,$$

与えられ、(3.23) に条件付期待値の連鎖公式を用いると、

$$(3.24) \quad P\{\tau_1 \leq t_1, \dots, \tau_n \leq t_n\} = E \left[\prod_{j=1}^n P\{\tau_j \leq t_j | \mathcal{G}_T\} \right], \quad 0 \leq \max_j t_j \leq T,$$

が得られる。ここで、 $P\{\tau_j \leq t_j | \mathcal{G}_T\} = F_j(0, t_j | \mathcal{G}_T)$ である。

定理 3.1. 仮定 1, 仮定 2, 仮定 6 が成り立つとき、デフォルト時刻はリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下で $\mathcal{G}$ -条件付独立である。

証明は付録 5 を参照されたい。定理 3.1 より、 $\tilde{P}$ の下でも (3.23)–(3.24) と同様の式が成り立つので、 $\tilde{P}$ 下のデフォルト時刻の同時分布は P 下と同様に構築できる。

定理 3.1 は測度変換で条件付独立性が保存されるための十分条件である．この条件はデフォルト強度と測度変換がデフォルト時刻に依存しないことを意味するので，大雑把に言えば，この条件を満たすのはどちらの確率下でもデフォルト伝播のような事象を考慮しないモデルである．なお，本稿の証明では ν の存在を無視する形で示したが，その理由は容易に計算可能なモデルを提供するためである．ラドンニコディム微分が ν に依存しても， $\sigma(\nu)$ が $\mathcal{G}$ に含まれていれば測度変換しても条件付独立性は保存される．しかし，測度変換前後の ν の分布に依存することになるので，本稿よりも複雑なモデルになる．

2 節の最後でも述べたように，プライシングモデルである Hull and White (2006) のモデルと，リスク計測モデルである本稿のモデルは，前者のデフォルト強度 λ と後者の multiplier ν がともにデフォルト確率を変動させる確率変数であるという点では似ているが，前者は $\tilde{P}$ 下のみのモデルであるのに対し，後者は二つの確率測度 P と $\tilde{P}$ にまたがるモデルであり，モデルの構成は全く異なる．また，デフォルト確率の表現の柔軟性も大きく異なる．Hull and White (2006) は全資産でデフォルト強度と分布 $(\lambda_k, \pi_k)_{k=1, \dots, L}$ を共通としたが，実際には個々に異なるはずである．一方，本稿のモデルでは $\mathcal{G}'$ -条件付デフォルト確率と multiplier ν を使うことで資産によるデフォルト強度の違いに対応できる．しかし，その代償は 2 つ生じる．一つは条件 (3.22) の右側の不等号の追加だが，実務的には $\nu F_j(0, T | \mathcal{G}_T^-)$ の代わりに $\min(\nu F_j(0, T | \mathcal{G}_T^-), 1)$ を使えばよいのであまり問題はない．もう一つは信用リスクの標準的な数式との関係である．multiplier ν を (3.20) や (3.21) のようにデフォルト確率に掛ける形でなく，デフォルト強度に掛ける形で導入すれば，信用リスクの標準理論でデフォルト強度 $h_j(t)$ を $\nu h_j(t)$ に置換するだけなので数理的には理解し易い．しかしその場合， $\nu h_j(t)$ の ν に関する平均は $h_j(t)$ とは一致せず，また，デフォルト確率は ν に指数関数的に依存するようになるので，強度が資産ごとに異なる場合， ν の分布と $h_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ の同時推定が必要になるかもしれない等，パラメータ推定が困難になることが懸念される．しかし，どちらが推定しやすいか，もっともらしいモデルになるかは実際に比較してみなければわからない．なお，Hull and White (2010) は強度が資産により異なる場合のモデルも提案しているが，パラメトリックで制約が強く，期間構造も表現しづらいので，本稿では採用しなかった．

3.2 デフォルトリスクのある債券の評価

企業 j が発行した満期 τ , $t < \tau < T^*$ の割引社債に関しては Jarrow and Turnbull (1995) の設定，すなわち，企業 j が τ までにデフォルトしないときは満期 τ に 1 円，デフォルトした時は満期 τ に δ_j 円 (δ_j は一定) を受け取るとし，さらに簡単化のために次を仮定する．

仮定 7. $c_{0j} = 0$, $j = 1, \dots, n$ ，すなわち $r(t)$ と $h_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は互いに独立である．

T をリスクホライズンとする． $\mathcal{F}_T = \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_T$, $0 \leq T \leq T^*$ が与えられたとき，資産 j を満期 τ のデフォルトリスクのある割引社債とすると，その時刻 T における価格は

$$(3.25) \quad v_j(T, \tau) = v_0(T, \tau) [\delta_j + 1_{\{\tau_j > T\}} (1 - \delta_j) \tilde{P}\{\tau_j > \tau | \mathcal{G}_T\}]$$

で与えられる．ここで $v_0(T, \tau)$ には (3.15) を使い， $\{\tau_j > T\}$ の下で

$$(3.26) \quad \tilde{P}\{\tau_j > \tau | \mathcal{G}_T\} = 1 - \tilde{F}_j(T, \tau | \mathcal{G}_T) = 1 - \nu \left(1 - \tilde{E} \left[\exp \left\{ - \int_T^\tau \tilde{h}_j(s) ds \right\} \middle| \mathcal{G}_T' \right] \right)$$

は (3.16) と同様に算出できて， $\tilde{h}_j(T) = h_j(T) + \ell_j(T)$ の関数となる．

リスク計測には観測確率 P 下における時刻 T までのデフォルト損失額の評価も必要である．上記の仮定の下で $\mathcal{G}_T$ が与えられたとき，資産 j のデフォルトは確率

$$(3.27) \quad F_j(0, T|G_T) = \nu F_j(0, T|G'_T) = \nu \left(1 - \exp \left\{ - \int_0^T h_j(s) ds \right\} \right)$$

で互いに独立に発生する。この確率は ν とサンプルパス $(h_j(s))_{0 \leq s \leq T}$ に依存する。

クーポン債は、同じ企業が発行した割引社債のポートフォリオとみなして同様に考える。ただし、 T 時点の将来価値で考えるので、 T までに受け取ったクーポンも時刻 T の将来価値に換算する必要があるが、その評価方法の一例を 3.3 節で述べる。

3.3 CDO トランシェの評価

CDO トランシェの無裁定価格は Hull and White (2006) の方法を参考に算出する。CDO の仕組みやトランシェの無裁定価格の導出などに関しては室町 (2007) を参照されたい。

想定元本が定数 g 、回収率が定数 δ の相異なる n 個の負債を参照債務とする CDS (Credit Default Swap) からなるポートフォリオをアセットプールとする満期 T_M の CDO を考える。アセットプール全体を 1 としたとき、アタッチメントポイント a_L 、デタッチメントポイント a_H ($0 \leq a_L < a_H \leq 1$) の損失をカバーするトランシェを考える。アセットプールに j 番目のクレジットイベントが発生したときの残存想定元本 $A_j(a_L, a_H)$ は、

$$A_j(a_L, a_H) = \begin{cases} (a_H - a_L)ng, & j < m(n_L) \\ a_Hng - j(1 - \delta)g, & m(n_L) \leq j < m(n_H) \\ 0, & m(n_H) \leq j \end{cases}$$

と書ける。ここで、 $n_L = a_Ln/(1 - \delta)$ 、 $n_H = a_Hn/(1 - \delta)$ 、 $m(x)$ は x を越える最小の自然数である。当該トランシェの無裁定価格はリスク中立確率 $\tilde{P}$ の下における将来キャッシュフローの割引現在価値の期待値の総和で与えられ、将来キャッシュフローは (1) プレミアムレグ、(2) デフォルトレグ、(3) 経過利息からなる。 $A(t)$ を時刻 t における当該トランシェの残存想定元本、 s をプレミアム (またはスプレッド)、 $t_i, i = 1, \dots, I$ を定期的な利払日、 $t_I = T_M$ を満期とし、 $t_0 = 0$ とする。簡単化のため、クレジットイベントは利払日間の中央の日 (期央と呼ぶ) のみ発生し、デフォルトレグも経過利息も即日支払われると仮定する。このとき、現時点 $t = 0$ におけるトランシェ価格は、

$$V = s \sum_{i=1}^I (t_i - t_{i-1}) v_0(0, t_i) \tilde{E}[A(t_i)] + \sum_{i=1}^I \left[\frac{s(t_i - t_{i-1})}{2} - 1 \right] v_0\left(0, \frac{t_i + t_{i-1}}{2}\right) (\tilde{E}[A(t_{i-1})] - \tilde{E}[A(t_i)])$$

で与えられる。詳細は室町 (2007) を参照されたい。トランシェ価格は利払日の残存想定元本の期待値 $\tilde{E}[A(t_i)]$ 、 $i = 1, \dots, I$ で表現され、 $\tilde{E}[A(t_i)]$ は時刻 t_i におけるアセットプールの損失額分布から算出できる。損失額分布に関しては、例えば Hull and White (2004) が提案したバケツ法 (bucketing method) を用いれば、十分な精度の分布が容易に算出できる。

トランシェの現在価値と時点 T における将来価値の計算には相違点が 3 つある。第一はアセットプールの損失額分布の計算法である。現在価格では将来の ν の分布を考慮して計算を行う。具体的には、 $\nu = \nu_i$ により与えられるフォワードデフォルト確率に応じて算出されるアセットプールの条件付損失額分布が確率 η_i で発生するとして、 η_i による加重平均として得られる無条件損失額分布から価格を計算する。将来価値では、ある ν_i が実現したときの条件付損失額分布が価格付けに使われる。第二はアセットプールである CDS ポートフォリオの構成である。現在価格の計算では当初設定した CDS ポートフォリオそのものを使用するが、将来価値の計算では既にデフォルトした CDS を除外した CDS ポートフォリオを使用する。第三は、将来価値では時刻 T までにやり取りするキャッシュフローの価値も含める点である。具体

的には、(a)時刻 T までのデフォルトレグ、(b)時刻 T までのプレミアムレグ、(c)時刻 T までの経過利息で、受取時点から時刻 T までデフォルトフリー金利で運用されれば、それらの時刻 T における価値は、それぞれ

$$\sum_{0 < \frac{t_{i-1}+t_i}{2} \leq T} \frac{A(t_{i-1})-A(t_i)}{v_0\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, T\right)}, \quad \sum_{0 < t_i \leq T} \frac{s(t_i-t_{i-1})A(t_i)}{v_0(t_i, T)}, \quad \sum_{0 < \frac{t_{i-1}+t_i}{2} \leq T} \frac{s(t_i-t_{i-1})(A(t_{i-1})-A(t_i))}{2v_0\left(\frac{t_{i-1}+t_i}{2}, T\right)}$$

で与えられる。本稿では、時刻 T におけるトランシェの価値に、時刻 T までに受け取るキャッシュフローの T 時点の価値を加え、時刻 T までのデフォルトレグの T 時点の価値を引いた値を、 T 時点のトランシェの将来累積価値(Future Cumulative Value)と定義する。なお、金融危機前の取引慣行にあわせてエクイティのみアップフロント払いとする。

3.4 モンテカルロシミュレーションによるリスク計測の手順

上述した確率モデルをもとに、リスクホライズン T におけるリスク量(VaR や ES など)をモンテカルロシミュレーションで推定する手順は以下である。

(1) 観測確率 P 下で、(3.1)と(3.3)から乱数を用いて $(r(s), h_j(s), j = 1, \dots, n)_{0 \leq s \leq T}$ のサンプルパスを、確率関数 η から ν を生成する。

(2) サンプルパスごとに時刻 T までのデフォルトを評価する。時刻 T の情報のみわかればよい場合は、資産 j ごとに(3.27)から $F_j(0, T|\mathcal{G}_T)$ を算出し、乱数を使ってデフォルトか否かを独立に判定する。デフォルト時刻の情報が欲しい場合は、この判定を短い時間区間ごとに時刻 T まで行い、おおよそのデフォルト時刻を算出する。

(3) 各資産の時刻 T における将来価値を算出する。

(a) 割引社債ポートフォリオの場合、(3.25)–(3.26)を用いて時刻 T の将来価値を算出する。将来価値は $(r(T), h_j(T), \nu, \text{時刻 } T \text{ でデフォルトか否か})$ に依存する。

(b) CDO トランシェの場合、3.3 節で述べた方法で将来累積価値を算出する。

(4) 時刻 T における全資産の将来価値を合算し、ポートフォリオの将来価値を算出する。

(5) 十分な数のシナリオが得られたら、この手順を終了して統計処理に移り、リスク量を算出する。シナリオ数が不十分なときは手順(1)に戻る。

4. 数値例

本節では、CDO および割引社債ポートフォリオのリスク計測の事例を示す。なお、計算の単純化のため、本節では $\mathcal{G}'$ -条件付デフォルト強度 $h_j(t)$, $j = 1, \dots, n$ は時刻 t の確定的な関数と仮定する。この仮定は信用リスク評価の実務では標準的で、(3.12)で $\sigma_j = 0$ とおくことに相当する。このとき、 $F_j(t, \tau|\mathcal{G}'_t)$, $\tilde{F}_j(t, \tau|\mathcal{G}'_t)$ などの確率は確定関数となり、

$$F_j(t, \tau|\mathcal{G}_t) = \nu \frac{F_j(\tau) - F_j(t)}{1 - \nu F_j(t)} \quad \text{under } P, \quad \tilde{F}_j(t, \tau|\mathcal{G}_t) = \nu \frac{\tilde{F}_j(\tau) - \tilde{F}_j(t)}{1 - \nu \tilde{F}_j(t)} \quad \text{under } \tilde{P}.$$

のように簡単に計算できる。

4.1 合成 CDO のリスク計測事例

4.1.1 設定

以下で述べるパラメータは、モデルの特徴が明確に現れやすい金融危機前の数値を参考に設定した。執筆時(2019年)のような超低金利環境にはそぐわないことに注意されたい。

表 1. multiplier ν の分布.

ν	0.1	0.2	0.3	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
η (%)	0.01	0.015	0.04	0.055	0.08	0.13	0.15	0.175	0.12	0.09	0.04	0.01	0.005	0.001

ν	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	
η (%)	0.002	0.004	0.007	0.01	0.008	0.004	0.003	0.001	0.003	0.008	0.013	0.011	0.005	

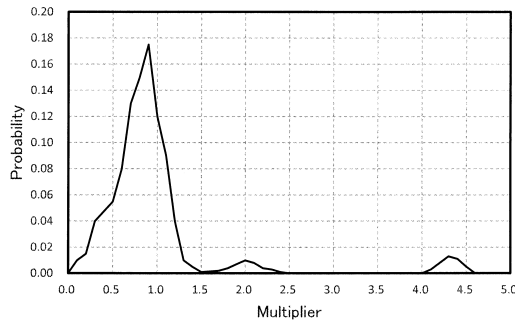


図 1. multiplier ν の分布.

金利モデル(3.11)に関しては, $b_0(t)$ を定数とし, $b_0(t)/a_0 = 0.03$ (平均回帰水準 3.0%), $a_0 = 0.1$, $\sigma_0 = 0.01$ (年率 1%) とする. CDO の満期は $\tau = 5$ 年とし, 想定元本 10, 回収率 40% の 125 個の CDS をアセットプールとする. CDS の格付けは A1, A2, B, C1, C2, C3 の 6 段階で, 観測確率 P 下のデフォルト確率はそれぞれ年率で 0.1%, 0.2%, 0.5%, 1.0%, 2.0%, 3.0% とし, A1 格が 40 資産, A2 格が 40 資産, B 格が 30 資産で, C1, C2, C3 はそれぞれ 5 資産ずつとする. 現時点の格付別フォワードレートカーブはすべてフラットで, デフォルトフリー金利は 3.0% とし, 上記格付けの順にそれぞれ 3.1%, 3.2%, 3.5%, 4.0%, 5.0%, 6.0% とする. 格付別のデフォルト確率の期間構造はフォワードレートカーブと回収率から算出する. トランシェは 6 つで, デタッチメントポイントをそれぞれ 3%, 6%, 9%, 12%, 22%, 100% とする. CDO の総想定元本は $125 \times 10 = 1250$ で, 1% は 12.5 に相当し, 例えばエクイティトランシェ $[0, 3\%]$ (トランシェをアタッチメントポイント a_p とデタッチメントポイント d_p で $[a_p, d_p]$ と表現する) の想定元本は 37.5 に相当する.

表 1 と図 1 に, 本稿で使用する multiplier ν の分布を示す. 図 1 の横軸は ν , 縦軸は発生確率である. モデルの特徴を明確に示すため, 右裾を長く設定し, 例えば $P\{\nu > 3\} = 4.0\%$ とした. この分布は実際の CDO 価格からの推定値ではないが, Hull and White (2006) や Brigo et al. (2010) による推定結果も同様に裾の長い, 多峰形の分布であった. 各トランシェのスプレッドは現時点 ($t = 0$) での契約価値がゼロになるフェアスプレッドに設定した. 具体的には, エクイティから順に, 40.7%, 169.0bp, 69.9bp, 21.6bp, 0.3bp である. なお, エクイティ $[0, 3\%]$ はアップフロント払い (ランニングスプレッドは年率 5%) とした.

リスクホライズンは $T = 1$ 年, シミュレーションは 50 万回とし, 各トランシェの $T = 1$ での将来価値には将来累積価値を用いた. なお, モンテカルロシミュレーションによるサンプルパスでは各利払日 (四半期毎) にシナリオを生成し, ある CDS がある時間区間でデフォルトが発生した場合, 期央でデフォルトしたものとして評価した.

4.1.2 将来累積価値の分布とリスク量

図 2 と図 3 に、 $T = 1$ における各トランシェの将来累積価値の分布関数を示す。横軸は将来累積価値、縦軸は分布関数である。将来累積価値はトランシェ購入者側からみた価値で、デフォルト発生件数が多いほど低くなり、 ν の値が高いほど将来のトランシェ価格が低下するので低くなる。これらの図より、多くのトランシェの分布関数は左裾が長く、10% 以下の部分で左裾が長く伸び始め、特に 5.0% 以下で一段と伸びる。これらの結果は ν の分布を明確に反映し、大規模損失が低確率で発生することを示唆している。

各トランシェのリスク量を表 2 にまとめる。ここで、 $100\alpha\%$ -VaR ($0 < \alpha < 1$) は将来累積価値の平均値と $100(1 - \alpha)$ パーセント点の差、 $100\alpha\%$ -ES ($0 < \alpha < 1$) は将来累積価値の平均値と $100(1 - \alpha)$ パーセント点以下の部分の条件付期待値の差である。表 2 によると、 $[0, 3\%]$ と $[3, 6\%]$ (ジュニアメザニン) では 95%-VaR が標準偏差の 2 倍以上と正規分布に比べて高い値をとる。一方、 $[6, 9\%]$ (シニアメザニン)、 $[9, 12\%]$ (シニア)、 $[12, 22\%]$ (ファーストスーパーシニア) の 95%-VaR は標準偏差以下あるいは同程度であるが、97.5%-VaR と 99%-VaR は急上昇し、それ以上の信頼水準ではあまり上昇しない。また、99% 以上の VaR は $[0, 3\%]$ トランシェよりも $[3, 6\%]$ と $[6, 9\%]$ のトランシェの方が高く、大損失リスクがより高いことになるが、これは $[0, 3\%]$ トランシェのアップフロント払いがリスクを低減させるためである。金融危機以降、実

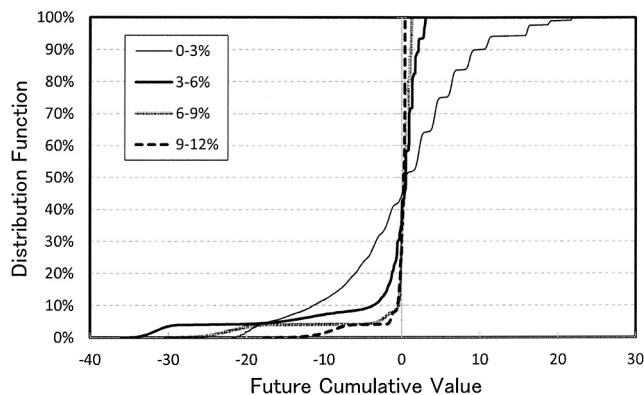


図 2. 各トランシェの将来累積価値の分布関数(1)。

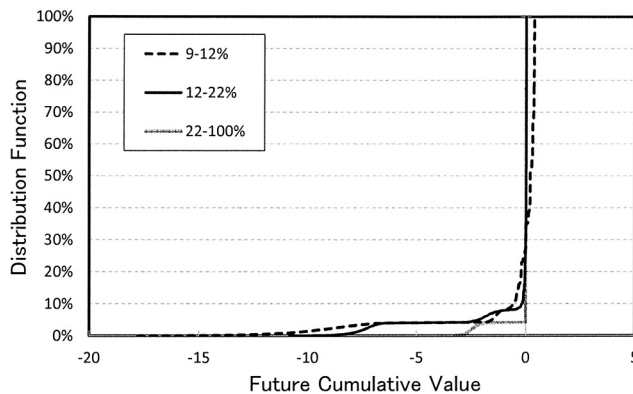


図 3. 各トランシェの将来累積価値の分布関数(2)。

表 2. 各トランシェの主なリスク量の推定値.

[attachment, detachment]		[0%, 3%]	[3%, 6%]	[6%, 9%]	[9%, 12%]	[12%, 22%]
Initial Face Value		37.5	37.5	37.5	37.5	125
Average		0.135	-1.468	-0.621	-0.302	-0.381
Standard Deviation		8.507	6.970	4.584	1.995	1.523
VaR	95.0%	17.224	14.181	2.433	1.232	1.796
	97.5%	19.611	29.772	20.894	8.386	6.848
	99.0%	20.550	31.268	23.551	10.448	7.493
	99.5%	21.013	31.961	24.891	11.708	7.939
	99.9%	21.877	33.157	27.364	14.398	8.996
ES	95.0%	19.578	27.731	18.319	7.787	6.186
	97.5%	20.554	31.450	23.699	10.464	7.540
	99.0%	21.210	32.144	25.272	12.170	8.143
	99.5%	21.511	32.696	26.378	13.335	8.595
	99.9%	21.935	33.721	28.415	15.792	9.668

表 3. 各トランシェの実際のデフォルト損失額の分布.

Loss	[0, 3%]	[3, 6%]	[6, 9%]
0	299,159	499,778	500,000
4.5	0	162	0
6	142,437	0	0
10.5	0	45	0
12	41,153	0	0
16.5	0	13	0
18	11,202	0	0
22.5	0	2	0
24	3,864	0	0
30	1,460	0	0
36	493	0	0
37.5	222	0	0

際の市場ではエクイティ以外のトランシェもアップフロント払いに変更されたが、それがリスクの低減に奏功したことがこの結果から推測される。

表 3 は、最も劣後する 3 トランシェの実際のデフォルトによる損失額のみの分布である。表 3 より、実際のデフォルト損失の分布の形状は将来累積価値の分布と全く異なり、実際のデフォルト損失はそれほど多くない。つまり、将来累積価値に見られる損失の大半はトランシェ価格の下落によるもので、それは特に [3, 6%] と [6, 9%] のメザニンで顕著である。このような傾向は金融危機時に CDO 市場で見られた現象と整合的である。

巨大損失発生事象は CDO の価格付けではアルマゲドンファクターと呼ばれてきた。本稿のモデルを用いれば、価格付けの世界のアルマゲドンファクターをリスク管理の世界の事象として議論できる。ただし、発生確率や損失額の規模はモデル構築上のさまざまな仮定に依存することに注意されたい。

4.2 割引社債ポートフォリオのリスク計測事例

4.2.1 設定

異なる企業が発行した 1,000 銘柄の割引社債を考える。すべて満期は 5 年、額面は 10、回収率は 40% で、1,000 銘柄のうち 400 銘柄が A2 格、300 銘柄が B 格、200 銘柄が C1 格、100 銘柄が C2 格とし、各格付けの特性は 4.1 節と同じとする。一方、本節では特に信用リスクを顕著に示すため σ_0 を 4.1 節の 1/10 にする。すなわち、(3.11) のパラメータは $b_0(t)/a_0 = 0.03$, $a_0 = 0.1$, $\sigma_0 = 0.001$ とおく。また、リスクホライズンは $T = 1$ 年とし、シミュレーションは 100 万回とする。

4.2.2 将来価値の分布とリスク量

図 4 はリスクホライズン $T = 1$ 年後の割引社債ポートフォリオの将来価値の分布(ヒストグラム)で、図 5 は分布関数で縦軸が確率、横軸が将来価値である。また、表 4 に標準偏差、VaR, ES などの主なリスク量をまとめる。ここでは $100\alpha\%$ -VaR ($0 < \alpha < 1$) は将来価値の平均値と $100(1 - \alpha)$ パーセント点の差、 $100\alpha\%$ -ES ($0 < \alpha < 1$) は将来価値の平均値と $100(1 - \alpha)$ パーセント点以下の部分の条件付期待値の差である。 $\sigma_0 = 0.001$ なのでこの数値例の金利リスクは小さく、幅広い分布が得られるのは専ら信用リスクの効果である。

図 4 は ν の分布(図 1)を反転させた形によく似ている。図 5 では、分布関数の左裾が 10% 以下で左に伸び、特に 4% 付近で更に伸びるが、これらはそれぞれ図 1 の 2.0 付近と 4.0 付近のピークに対応する。表 4 のリスク量もこれらを反映し、95% から 99% に見られる VaR の上昇

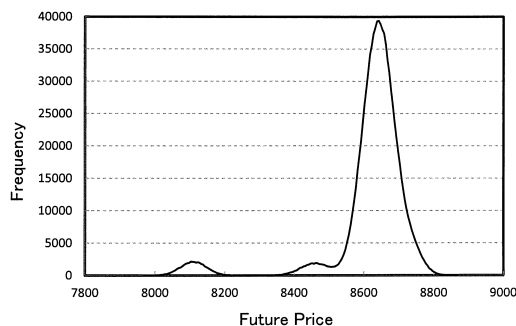


図 4. 割引社債ポートフォリオの将来価値の分布(ヒストグラム)。

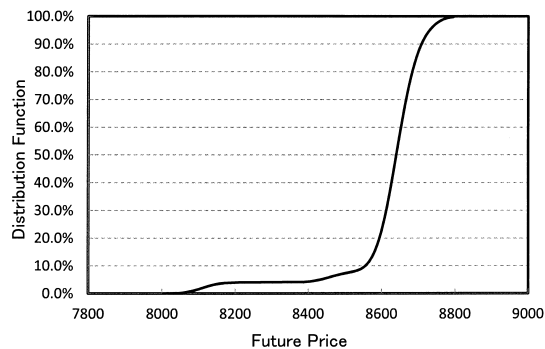


図 5. 割引社債ポートフォリオの将来価値の分布関数。

表 4. 割引社債ポートフォリオの主なリスク量の推定値.

Average		8,618.4
Standard Deviation		120.1
VaR	95.0%	186.5
	97.5%	496.5
	99.0%	533.7
	99.5%	552.0
	99.9%	581.9
ES	95.0%	450.0
	97.5%	531.3
	99.0%	556.3
	99.5%	570.3
	99.9%	596.7

は ν の 4.0 付近のピークの存在に対応する.

5. おわりに

本稿では, Hull and White (2006) のインプライドコピュラの論文の中で提示された, ノンパラメトリックな分布を持つデフォルト強度とデフォルト時刻の条件付独立性を用いた CDO のプライシングモデルを, Kijima and Muromachi (2000) の将来価値ベースのリスク計測のフレームワークに沿って拡張した新しいリスク計測モデルを提案した. 純粋な統計学的モデルである既存のリスク計測モデルはヒストリカルデータしか使用しないが, このモデルではデリバティブの市場価格から抽出される情報も活用することで, 市場参加者の将来の環境激変への畏怖をリスク計測に定量的に反映できる. 具体的には, デフォルト確率が multiplier ν というノンパラメトリックな分布を持つ確率変数に依存すると考えて, その分布を CDO などの市場価格から推定することで, 市場参加者のテイルリスクへの評価を ν の分布を通してリスク計測に反映できるようにしたところ, 既存のリスク計測モデルでは把握しきれないテイルリスクを表現できることを示した. 例えば, 提案モデルで CDO のリスクを計測したところ, 優先度の高いトランシェでも大規模損失が小さな確率で発生することが示唆された. また, 大規模損失の内訳が実際のデフォルトによる損失ではなくトランシェ価格の暴落であるという, 金融危機時の現実と整合的な結果が得られた.

しかし, モデルで用いる仮定には問題も残されている. 特に, 仮定 4 は P 下の ν の分布の推定が現状では難しいと考えて課しただけに過ぎない. また, CDO 価格から推定された ν の分布を別の市場, 例えば社債ポートフォリオに対して適用することにも疑問は残る. CDO 市場と社債市場でテイルリスクの評価が共通であるという確証はないからである.

提案モデルの結果は多くの仮定, 特に ν の分布に強く依存するものの, 通常の統計学的モデルの結果に, 市場価格からインプライされる極端に大きな損失発生事象を組み込んだ結果を出力可能である. 価格に内在する情報をフォワードルッキングと考えれば, 提案モデルはフォワードルッキングなリスク評価を行えるモデルであり, さらに, 大損失事象を価格からインプライされるフォワードルッキングなストレスシナリオと解釈すれば, 統計学的モデルにストレステストを組み込んだものと見做せるだろう. 多くの課題は残るが, この種のリスク計測モデルの検討もリスク管理の高度化に向けた一つの方向性であろう.

謝 辞

本研究は JSPS 科研費基盤研究 (B) No.16H03123 の助成を受けたものである。本稿の最終版の作成にあたり、匿名の査読者と編集委員から多くの有益かつ好意的なコメントをいただいたことに厚く感謝する。

付録 A：定理 3.1 の証明

簡単化のため資産数 $n = 2$ とする。観測確率 P 下でデフォルトフリーな短期金利 $r(t)$ は (3.1) に、デフォルト強度 $h_i(t)$, $i = 1, 2$ は (3.3) に従うとして、 $\mathbf{z}_3(t) = (z_0(s), z_1(s), z_2(s))^\top$ とし、仮定 1, 仮定 2, 仮定 6 の下で考える。まず、

$$M_i(t) = H_i(t) - \int_0^t (1 - H_i(s-))h_i(s)ds, \quad i = 1, 2,$$

は P 下の $\mathcal{F}$ -マルチンゲールである。ラドンニコディム微分 $d\tilde{P}/dP$ は $\mathcal{F}_{T^*}$ -可測な正値確率変数で、密度過程 $\rho(t)$ を局所有界な左極限右連続な確率過程とすると、 $\rho(t)$ は P -局所マルチンゲールであり、ある $\mathcal{G}_t$ -可予測過程 $\beta_3(t) = (\beta_0(t), \beta_1(t), \beta_2(t))^\top$ と $\kappa_i(t)$, $i = 1, 2$ を用いて、

$$(A.1) \quad \rho(t) = 1 + \int_0^t \rho(s-) \left(-\beta_3^\top(s)dz_3(s) + \sum_{i=1}^2 \kappa_i(s)dM_i(s) \right), \quad 0 \leq t \leq T^*,$$

と一意に表現できるとする。このとき (A.1) の解は、 $\varepsilon(\cdot)$ を Doléans-Dade の指数として、

$$(A.2) \quad \rho(t) = \rho_0(t)\rho_1(t)\rho_2(t),$$

$$(A.3) \quad \rho_0(t) \equiv \varepsilon \left(- \int_0^t \beta_3^\top(s)dz_3(s) \right) = \exp \left\{ - \int_0^t \beta_3^\top(s)dz_3(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \beta_3^\top(s)\beta_3(s)ds \right\},$$

$$(A.4) \quad \rho_i(t) \equiv \varepsilon \left(\int_0^t \kappa_i(s)dM_i(s) \right)$$

で与えられる。ここで、 $\rho_i(t)$ は $\mathcal{F}^i$ -マルチンゲールである。

$0 < T \leq T^*$ として、フィルトレーション $\mathcal{F}_t^i \equiv \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^i$, $i = 1, 2$ と $\bar{\mathcal{F}}_t \equiv \mathcal{G}_T \vee \mathcal{H}_t^1 \vee \mathcal{H}_t^2$ を定義する。まず、 $\mathcal{G}_T$ が与えられたとき、ベイズの定理と (A.2)–(A.4) より、

$$(A.5) \quad \tilde{P}\{\tau_1 > t | \mathcal{G}_T\} = \frac{E^P[1_{\{\tau_1 > t\}} \frac{d\tilde{P}}{dP} | \mathcal{G}_T]}{E^P[\frac{d\tilde{P}}{dP} | \mathcal{G}_T]} = \frac{E^P[1_{\{\tau_1 > t\}} \rho_1(T)\rho_2(T) | \mathcal{G}_T]}{E^P[\rho_1(T)\rho_2(T) | \mathcal{G}_T]}$$

となる。 τ_1 と τ_2 は $\mathcal{G}$ -条件付独立なので、 $\rho_1(t)$ と $\rho_2(t)$ も $\mathcal{G}$ -条件付独立である。さらに、 $\rho_i(t)$ は $\mathcal{F}^i$ -マルチンゲールで $E^P[\rho_i(T) | \mathcal{G}_T] = E^P[\rho_i(T) | \mathcal{F}_0^i] = \rho_i(0) = 1$ となることから、

$$(A.6) \quad E^P[\rho_1(T)\rho_2(T) | \mathcal{G}_T] = E^P[\rho_1(T) | \mathcal{G}_T]E^P[\rho_2(T) | \mathcal{G}_T] = 1$$

である。また、 $\bar{\mathcal{F}}_t$ が与えられたとき、 τ_1 と τ_2 の $\mathcal{G}$ -条件付独立性から、

$$(A.7) \quad E^P[\rho_1(T)\rho_2(T) | \bar{\mathcal{F}}_t] = E^P[\rho_1(T) | \bar{\mathcal{F}}_t]E^P[\rho_2(T) | \bar{\mathcal{F}}_t] = \rho_1(t \wedge \tau_1)\rho_2(t \wedge \tau_2)$$

が成立するので、

$$(A.8) \quad \begin{aligned} E^P[\rho_1(T)\rho_2(T) | \mathcal{F}_t^1] &= E^P[E^P[\rho_1(T)\rho_2(T) | \bar{\mathcal{F}}_t] | \mathcal{F}_t^1] = \rho_1(t \wedge \tau_1)E^P[\rho_2(t \wedge \tau_2) | \mathcal{F}_t^1] \\ &= \rho_1(t \wedge \tau_1)E^P[\rho_2(t \wedge \tau_2) | \mathcal{G}_T] = \rho_1(t \wedge \tau_1) \end{aligned}$$

が得られ, 同様に $E^P[\rho_1(T)\rho_2(T)|\mathcal{F}_t^2] = \rho_2(t \wedge \tau_2)$ も得られる. (A.5), (A.6), (A.8) より,

$$(A.9) \quad \begin{aligned} \tilde{P}\{\tau_1 > t|\mathcal{G}_T\} &= E^P[E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}\rho_1(T)\rho_2(T)|\mathcal{F}_t^1]|\mathcal{G}_T] = E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}\rho_1(t)|\mathcal{G}_T] \\ &= \bar{\rho}_1(t)E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}|\mathcal{G}_T] = \bar{\rho}_1(t)P\{\tau_1 > t|\mathcal{G}_T\} \end{aligned}$$

と表現できる. ここで, $\bar{\rho}_i(t)$, $i = 1, 2$ は $t \in [0, T]$ で $1_{\{\tau_i > t\}}\bar{\rho}_i(t) = 1_{\{\tau_i > t\}}\rho_i(t)$ を満たす $\mathcal{G}_t$ -適合過程である. 同様にして, $\tilde{P}\{\tau_2 > t|\mathcal{G}_T\} = \bar{\rho}_2(t)P\{\tau_2 > t|\mathcal{G}_T\}$ も得られる.

一方, ベイズの定理, (A.2)–(A.4), (A.6)–(A.7), P 下でのデフォルト時刻の $\mathcal{G}$ -条件付独立性より, $0 \leq u \leq t \leq T$ に対して,

$$(A.10) \quad \begin{aligned} \tilde{P}\{\tau_1 > t, \tau_2 > u|\mathcal{G}_T\} &= \frac{E^P[1_{\{\tau_1 > t, \tau_2 > u\}}\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{G}_T]}{E^P[\frac{d\tilde{P}}{dP}|\mathcal{G}_T]} = E^P[1_{\{\tau_1 > t, \tau_2 > u\}}\rho_1(T)\rho_2(T)|\mathcal{G}_T] \\ &= E^P[E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_1(T)\rho_2(T)|\bar{\mathcal{F}}_t]|\mathcal{G}_T] \\ &= E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_1(t)\rho_2(t \wedge \tau_2)|\mathcal{G}_T] \\ &= E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}\rho_1(t)|\mathcal{G}_T]E^P[1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_2(t \wedge \tau_2)|\mathcal{G}_T] \end{aligned}$$

となる. $\rho_i(t)$ の $\mathcal{F}^i$ -マルチンゲール性と $\bar{\rho}_i(t)$ を用いると,

$$\begin{aligned} E^P[1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_2(t \wedge \tau_2)|\mathcal{G}_T] &= E^P[E^P[1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_2(t \wedge \tau_2)|\mathcal{F}_u^2]|\mathcal{G}_T] = E^P[1_{\{\tau_2 > u\}}\rho_2(u)|\mathcal{G}_T] \\ &= \bar{\rho}_2(u)E^P[1_{\{\tau_2 > u\}}|\mathcal{G}_T] = \bar{\rho}_2(u)P\{\tau_2 > u|\mathcal{G}_T\} \end{aligned}$$

となる. $E^P[1_{\{\tau_1 > t\}}\rho_1(t)|\mathcal{G}_T]$ も同様に扱うと, (A.10) は,

$$(A.11) \quad \tilde{P}\{\tau_1 > t, \tau_2 > u|\mathcal{G}_T\} = \bar{\rho}_1(t)\bar{\rho}_2(u)P\{\tau_1 > t|\mathcal{G}_T\}P\{\tau_2 > u|\mathcal{G}_T\}$$

となるので, (A.9) と (A.11) より,

$$(A.12) \quad \tilde{P}\{\tau_1 > t, \tau_2 > u|\mathcal{G}_T\} = \tilde{P}\{\tau_1 > t|\mathcal{G}_T\}Q\{\tau_2 > u|\mathcal{G}_T\}$$

が得られる. 同様にして $0 \leq t \leq u \leq T$ の場合も (A.12) が得られるので, τ_1 と τ_2 は確率測度 $\tilde{P}$ の下でも $\mathcal{G}$ -条件付独立である. $\square$

参考文献

- Bielecki, T. R. and Rutkowski, M. (2002). *Credit Risk: Modelling, Valuation and Hedging*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Bielecki, T. R., Jeanblanc, M. and Rutkowski, M. (2009). *Credit Risk Modelling*, Osaka University CSFI Lecture Note Series 2, Osaka University Press, Osaka.
- Brigo, D., Pallavicini, A. and Torresetti, R. (2010). *Credit Models and the Crisis: A Journey into CDOs, Copulas, Correlations and Dynamic Models*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Davis, M. and Lo, V. (2001). Infectious defaults, *Quantitative Finance*, **1**, 382–387.
- Gupton, G. M., Finger, C. C. and Bhatia, M. (1997). CreditMetrics™—Technical Document, RiskMetrics Group, New York, <http://www.riskmetrics.com/research.html>.
- Hull, J. and White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities, *Review of Financial Studies*, **3**, 573–592.
- Hull, J. and White, A. (2004). Valuation of a CDO and n-th to default CDS without Monte Carlo simulation, *Journal of Derivatives*, **12**(2), 8–23.
- Hull, J. and White, A. (2006). Valuing credit derivatives using an implied copula approach, *Journal of Derivatives*, **14**(2), 8–28.

- Hull, J. and White, A. (2010). An improved implied copula model and its application to the valuation of bespoke CDO tranches, *Journal of Investment Management*, **8**(3), 11-31.
- Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**, 53-86.
- Kijima, M. and Muromachi, Y. (2000). Evaluation of credit risk of a portfolio with stochastic interest rate and default processes, *Journal of Risk*, **3**(1), 5-36.
- Kusuoka, S. (1999). A remark on default risk models, *Advances in Mathematical Economics*, **1**, 69-82.
- Morgan Guaranty Trust Company and Reuters Ltd. (1996). RiskMetrics™—Technical Document, Morgan Guaranty Trust Company of New York, New York, <https://www.msci.com/documents/10199/5915b101-4206-4ba0-ae2-3449d5c7e95a>.
- 室町幸雄 (2007). 『信用リスク計測と CDO の価格付け』, 朝倉書店, 東京.

An Extension of a CDO Pricing Model Using a Copula toward a Risk Evaluation Model

Yukio Muromachi

Graduate School of Management, Tokyo Metropolitan University

Many financial risk evaluation models were developed before the worldwide financial crisis, but none of them could predict the crisis. This is because all of these models are purely statistical, meaning that they are based on analyses of historical data and therefore cannot predict crises that have never happened. In this article, we consider the CDO pricing model used in the paper that proposed the implied copula, and propose extending it to a risk evaluation model. In the pricing model, assuming that the default times are conditionally independent, the non-parametric distribution of conditional default probabilities are estimated from the market prices of CDO tranches, and the estimated distributions in previous studies show that the default probabilities will increase dramatically with some small probabilities. It is our model that will apply such estimated results to evaluating the risk of a portfolio. By using not only the historical data but also the market prices of CDOs and derivatives, market participants' potential fears of future catastrophic loss can be reflected in the risk evaluation. In this article, we show how to extend the pricing model toward a risk evaluation model according to some known theoretical results, and in particular, discuss in detail the importance of the change of measure and its mathematical description. The important tool of our model is the factor that has a large influence on conditional default probabilities for all entities. We show some numerical results that can hardly be obtained from the existing models, and that are consistent with the remarkable features seen in the financial crisis.