統計数理（2020）
第 68 巻 第 1 号 65–85

Realized Stochastic Volatility モデル
—拡張と日本の株価指数への応用—

高橋 慎[1]・大森 裕浩[2]・渡部 敏明[3]

（受付 2019 年 6 月 1 日；改訂 11 月 5 日；採択 11 月 6 日）

要　　旨

近年，資産価格のボラティリティの推定には日中の高頻度リターンから計算される Realized Volatility（RV）が用いられることが多い．しかし，RV にはマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズや夜間や昼休みなどの市場が閉まっている時間帯によってバイアスが生じることが知られている．こうした RV のバイアスを考慮して，日次リターンと日次 RV の同時モデル化が提案されている．このモデルは Stochastic Volatility モデルに RV を加えて拡張したものなので，Realized Stochastic Volatility モデルと呼ばれる．Stochastic Volatility モデル同様，Realized Stochastic Volatility モデルは尤度の解析的評価が難しいため，マルコフ連鎖モンテカルロ法（Markov chain Monte Carlo, MCMC）を用いたベイズ推定法が多く用いられる．本稿では，こうした Realized Stochastic Volatility モデルとその MCMC を用いたベイズ推定法について解説する．また，日次リターン分布やボラティリティの定式化の拡張についても解説する．さらに，日経 225 株価指数に応用し，推定結果を説明する．

キーワード：マルコフ連鎖モンテカルロ法，Realized Volatility，Stochastic Volatility モデル．

1. はじめに

金融資産のリターンを予測することは困難であることが知られているが，その分散を予測することはある程度可能であることが知られている．なぜならリターンの分散（ボラティリティ）は，ある時期には大きい値が続き，またある時期には小さい時期が続くからであり，この現象はボラティリティ・クラスタリングと呼ばれている．ボラティリティの予測を行うことはオプション価格や Value-at-Risk（VaR）の予測，ポートフォリオの最適化など金融リスク管理において重要な意味を持つ（Andersen et al., 2013）．ボラティリティ・クラスタリングという現象を説明する統計的モデルには一般化自己回帰不均一分散（Generalized Autoregressive Conditionbal Heteroskedasiticity, GARCH）モデル（Engle, 1982; Bollerslev, 1986）と確率的ボラティリティ変動（Stochastic Volatility, SV）モデル（Taylor, 1986）があり，多くの実証研究が行われてきた（初期研究について詳しくは，例えば Shephard, 1996 や渡部, 2000 を参照されたい）．それらの先行研究において，特に SV モデルは現実のデータへのあてはまりにおいて GARCH モデルより

[1] 法政大学 経営学部：〒 102–8160 東京都千代田区富士見 2–17–1
[2] 東京大学大学院 経済学研究科：〒 113–0033 東京都文京区本郷 7–3–1
[3] 一橋大学 経済研究所：〒 186–8603 東京都国立市中 2–1

優れていることが確認されている．しかし，SV モデルは日々のリターンの分散は観測できない潜在変数として表現しており，その推定精度や予測精度の改善には限界があった．

一方で，近年において利用可能になった資産価格の高頻度データを用いて，日中リターンの 2 乗和として計算される Realized Volatility（RV）は，ボラティリティの観測変数として，推定や予測の精度を改善できるのではないかと注目を集めるようになった（Andersen and Bollerslev, 1998; Barndorff-Nielsen and Shephard, 2002）．RV は，計量経済モデルには依存しないモデル・フリーのボラティリティ推定量として魅力的な推定量であるものの，さまざまな仮定を満たすことが前提となる．しかし，その仮定は現実には満たされておらず，RV はバイアスをもつ（RV の統計的性質について詳しくは，Andersen et al., 2001a; Andersen et al., 2001b, 2003; 渡部, 2007; Andersen et al., 2010 を参照されたい）．例えば，連続な値をとると仮定されている価格が現実には離散的な値をとっていることなどで生じるマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ（MMN）により，RV にバイアスが生じることが知られている．また，夜間や昼休みなど取引のない時間帯の高頻度のリターンを無視すると，そうした時間帯を含む 1 日のボラティリティを推定する場合には，過小評価してしまう（MMN については Campbell et al., 1997; O'Hara, 1995; Hasbrouck, 2007; O'Hara, 2015 を，MMN の RV への影響については Hansen and Lunde, 2006; Bandi and Russell, 2006, 2008; Ubukata and Watanabe, 2014 などを参照されたい）．

この問題を克服するために考えられたのが，リターンの SV モデルに RV の情報を追加した同時モデルである Realized SV（RSV）モデルである．Takahashi et al., 2009 によって最初に導入された RSV モデルは，SV モデルに対してさらに RV に関する観測方程式を加えたものであり，その際に RV のバイアス自体もモデル化する．RV のバイアスを補正する推定量は数多く存在するが，バイアスの補正をモデルの中で克服するというアプローチはそれまでになかった．Dobrev and Szerszen (2010)，Koopman and Scharth (2013) は RSV モデルを拡張しており，また，Hansen et al. (2012)，Hansen and Huang (2016) は，同様のアイデアを GARCH モデルに応用した Realized GARCH モデルを提案している．

RSV モデルは，ボラティリティ・クラスタリングと呼ばれる時系列構造と，ボラティリティの非対称性またはレバレッジ効果（後述）と呼ばれる日次リターンとボラティリティとの依存構造を，2 つの観測方程式と 1 つの状態方程式により記述するモデルである．本稿では，この RSV モデルの解説，推定法の紹介および日本の株価指数への応用を行う．特に推定法についてはマルコフ連鎖モンテカルロ法（MCMC）を用いたベイズ推定法について紹介する．SV モデルや RSV モデルにおいてはボラティリティを観測されない状態変数とするため，最尤法を行うには状態変数を積分して尤度を求めることが必要である．しかし実際には多重積分の計算は実行困難であり，積分を回避して問題を解くためにベイジアン・アプローチをとり，MCMC 法を用いたシミュレーションによる方法でベイズ推定を行うことが多いのである．

本稿の以下の構成は次の通りである．まず，次の第 2 節で，SV モデルおよび RSV モデルとそれらの MCMC を用いたベイズ推定法について解説する．続く第 3 節で，RSV モデルの拡張について紹介する．第 4 節では，RSV モデルの日本の株価指数への応用を行う．最後に，本稿のまとめを行う．

2. Realized Stochastic Volatility モデルとその推定法

2.1 Stochastic Volatility モデル

SV モデルは，被説明変数の分散変動を説明する代表的なモデルの一つであり，危険資産のリターンによくあてはまることが多くの実証分析において知られている．まず p_t を第 t 日の資産価格とし，第 t 日のリターンを $y_t = \log p_t - \log p_{t-1}$ と定義する．このとき SV モデルは，対

数ボラティリティ h_t を所与として以下のように表現される．

$$y_t = \epsilon_t \exp(h_t/2), \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.1}$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 1, \ldots, T-1, \quad |\phi| < 1, \tag{2.2}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix} \right).$$

ただし，$h_1 \sim N(\mu, \sigma_\eta^2/(1-\phi^2))$ とする．対数ボラティリティ h_t は観測できないので潜在変数とし，定常な 1 階の自己回帰過程 ($|\phi| < 1$) に従うと仮定する．これは，現実のデータにおいてボラティリティ・クラスタリングという，分散が大きい時期には暫く大きい時期が続き，分散が小さい時期には小さい時期が暫く続く現象を反映している．また，誤差項 $(\epsilon_t, \eta_t)'$ は 2 変量正規分布に従うと仮定し，h_t を所与とした時の y_t と h_{t+1} の相関係数 ρ は，非対称性またはレバレッジ効果と呼ばれる．株式リターンの実証分析においては，t 時点におけるリターン y_t が減少すると $t+1$ 時点における対数ボラティリティ h_{t+1} が増加することから，ρ は負の値をとることが知られている．

SV モデルでは観測方程式(2.1)は非線形ガウス型なので，パラメータ $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2, \rho)$ を所与とする尤度関数の計算を行うことは難しい．このため多くの研究において，シミュレーションを用いるマルコフ連鎖モンテカルロ法によるベイズ推定が行われており，本稿もこれに従う．基本的な SV モデルのベイズ推定の詳細については，紙幅の都合上割愛するが，大森・渡部 (2013)を参照されたい．

2.2 Realized Volatility

SV モデルでは h_t は潜在変数であり, したがってボラティリティ $\exp(h_t)$ も潜在変数であった．これに対して近年では，日中の高頻度データを用いて計算される RV がボラティリティの推定量として提案されている．以下では，その定義，有用性と問題点について見ていくこととする．

まず，真の日次ボラティリティの定義を行う．資産価格の対数値を $p(s)$ とし，それが連続時間の拡散過程

$$dp(s) = \mu(s)ds + \sigma(s)dW(s) \tag{2.3}$$

に従うとする．ここで $\mu(s)$，$\sigma^2(s)$，$W(s)$ をそれぞれ瞬時的なドリフト，ボラティリティ，ウイナー過程とする(ただし，ファイナンスの他の文献では $\sigma^2(s)$ ではなく $\sigma(s)$ をボラティリティと呼ぶことも多い)．このとき，第 t 日の真のボラティリティは,

$$IV_t = \int_t^{t+1} \sigma^2(s)ds \tag{2.4}$$

と定義され，Integrated Volatility (IV) とも呼ばれる．RV は，この IV_t の推定量で，次のように定義される．いま，第 t 日の日中の n 個のリターンデータ $\{r_t, r_{t+1/n}, \ldots, r_{t+(n-1)/n}\}$ が与えられているとする．このとき，それらを 2 乗して足し合わせた

$$RV_t = \sum_{i=0}^{n-1} r_{t+i/n}^2 \tag{2.5}$$

を第 t 日の RV という．式(2.5)で定義される RV_t は，$n \to \infty$ のとき IV_t に確率収束する．

ところが，実際の高頻度データは RV_t が IV_t に収束するための条件を必ずしも満たしておらず，バイアスが存在することが知られている．例えば，現実の高頻度の資産価格は MMN を含

んでいるので，その結果としてリターンに自己相関が生じる問題や，夜間や昼休みなど取引がない時間帯が存在するという問題がある．

MMN については，取引間隔が短くなればなるほどノイズの占める相対的な割合が多くなるので，RV を計算する際の時間間隔をどのようにとればよいかということが問題となり，多くの提案がなされている（Aït-Sahalia et al., 2005; Bandi and Russell, 2006, 2008）．あるいは他の推定量として，Two-Scale または Multi-Scale 推定量（Zhang et al., 2005; Zhang, 2006）や，カーネル関数を使って対数価格差の 2 乗累積値をスムージングした Realized Kernel（RK）（Barndorff-Nielsen et al., 2008; Barndorff-Nielsen et al., 2009）などが提案されている．これらの方法について詳しくは，Aït-Sahalia and Mykland（2009），Ubukata and Watanabe（2014）などを参照されたい．一方，取引がない時間帯の取り扱いについては，最初に昼休みと夜間を除いて計算した $RV_t^{(o)}$ に，日次リターン y_t の標本分散と $RV_t^{(o)}$ の標本平均の比を乗じる方法がある（Hansen and Lunde, 2005）．

高頻度データから計算される RV や RK などのボラティリティの推定量を，まとめて Realized Measure（RM）と呼ぶ．上記のどのような方法も決定的な解決方法となるわけではなく，また提案された推定量の良い性質が得られるための仮定が現実に成り立つとは限らない．このため，第 2.3 節の Realized SV（RSV）モデルでは RM におけるバイアスをモデル・パラメータとすることにより，バイアスの存在に統計的モデルの枠組みの中で対処していくこととする．RM について詳しくは，渡部（2007），Andersen and Benzoni（2009），McAleer and Medeiros（2008）などを参照されたい．

2.3 Realized SV モデル

Takahashi et al.（2009）では，日次リターンの SV モデルに RM の観測方程式を追加し，バイアスを考慮に入れた同時モデルを提案した．このモデルは Realized SV（RSV）モデルと呼ばれており，以下では RSV モデルとそのモデル・パラメータの MCMC による推定方法について述べる．

第 2.1 節の式（2.1），（2.2）のように y_t を第 t 日の日次リターン，h_t を真のボラティリティの対数値とし，さらに x_t を RM の対数値とすると，RSV モデルは以下のように表される．

$$y_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.6}$$

$$h_{t+1} = \mu + \phi(h_t - \mu) + \eta_t, \quad t = 1, \ldots, T-1, \quad |\phi| < 1, \tag{2.7}$$

$$x_t = \xi + h_t + u_t, \quad t = 1, \ldots, T, \tag{2.8}$$

$$\begin{pmatrix} \epsilon_t \\ \eta_t \\ u_t \end{pmatrix} \sim N\left(\mathbf{0}, \begin{pmatrix} 1 & \rho\sigma_\eta & 0 \\ \rho\sigma_\eta & \sigma_\eta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_u^2 \end{pmatrix}\right). \tag{2.9}$$

式（2.8）における $\xi + u_t$ は，MMN 等によって生じる，RM の対数値 $x_t = \log RM_t$ と真のボラティリティの対数値 h_t との乖離を表す．ξ は，$\log RM_t$ に含まれるバイアスを表し，$\xi = 0$ はバイアスがないことを意味する．MMN によって RV_t が IV_t を過大評価するなら（Hansen and Lunde, 2006 は RV_t が IV_t を過小評価する可能性もあることを示している），RM として RV_t を用いたとき $\xi > 0$ となることが予想される．一方，夜間や昼休みなど取引のない時間帯を無視して RM を計算すると，そうした時間帯を含む 1 日のボラティリティを過小評価するので，$\xi < 0$ となることが予想される．したがって MMN による正のバイアスよりも，夜間や昼休みなど取引のない時間帯を無視したことによる負のバイアスが大きい時に，ξ は負の値になると考えられる．また，u_t は ξ では捉えることのできない MMN 等によって生じる観測誤差

である．日次リターンの符号と MMN に相関があるとは考えにくいため，u_t と η_t は無相関と仮定する．一般に，u_t と ϵ_t は独立ではない（Hansen and Lunde, 2006; Koopman and Scharth, 2013）が，ここでは簡単化のためそれらは無相関と仮定する．なお，式(2.8)は，より一般的に $x_t = \xi + \psi h_t + u_t$ とすることもできるが，ボラティリティの予測精度が必ずしも改善しないことなどが実証分析において知られているので，本稿においては $\psi = 1$ であると仮定する．

2.4　RSV モデルの MCMC を用いたベイズ推定

RSV モデルのパラメータは $\boldsymbol{\theta} = (\mu, \phi, \sigma_\eta^2, \rho, \xi, \sigma_u^2)$ で，観測値を $\boldsymbol{y} = \{y_t, x_t\}_{t=1}^T$，また潜在変数を $\boldsymbol{h} = \{h_t\}_{t=1}^T$ で表すこととする．モデルのパラメータに関する事前分布については，μ, ξ には正規分布，ϕ には確率密度関数が $\pi_\phi(\phi)$ であるような確率分布，ρ には確率密度関数が $\pi_\rho(\rho)$ であるような確率分布，σ_η^2, σ_u^2 には逆ガンマ分布を仮定する．

$$\begin{aligned} &\mu \sim N(\mu_0, \sigma_0^2), \quad \phi \sim \pi_\phi(\phi), \quad \rho \sim \pi_\rho(\rho), \quad \sigma_\eta^2 \sim IG(n_0/2, S_0/2). \\ &\xi \sim N(m_\xi, s_\xi^2), \quad \sigma_u^2 \sim IG(n_u/2, S_u/2). \end{aligned}$$

$(\mu_0, \sigma_0^2, n_0, S_0, m_\xi, s_\xi^2, n_u, S_u)$ はハイパーパラメータで，分析者によって与えられる定数である．これらの同時事前確率密度関数を $\pi(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}$ を所与としたときの $\boldsymbol{y}$ と $\boldsymbol{h}$ の同時確率密度関数を $f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{\theta})$ で表せば，$\boldsymbol{\theta}$ と $\boldsymbol{h}$ の同時事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{y})$ は

$$\begin{aligned} &\pi(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{y}) \\ &\propto f(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{h}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta}) \\ &\propto \frac{1}{\sigma_u^T} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T \left[h_t + \bar{y}_t^2 + \frac{(x_t - \xi - h_t)^2}{\sigma_u^2}\right]\right\} \\ &\quad \times \frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sigma_\eta^T (1-\rho^2)^{\frac{T-1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\left[(1-\phi^2)\bar{h}_1^2 + \frac{1}{1-\rho^2}\sum_{t=1}^{T-1}(\bar{h}_{t+1} - \phi\bar{h}_t - \rho\sigma_\eta\bar{y}_t)^2\right]\right\} \\ &\quad \times \frac{1}{\sigma_\eta^{n_0+2}\sigma_u^{n_u+2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2} + \frac{S_0}{\sigma_\eta^2} + \frac{(\xi - m_\xi)^2}{s_\xi^2} + \frac{S_u}{\sigma_u^2}\right]\right\} \pi_\phi(\phi)\pi_\rho(\rho) \end{aligned}$$

となる．ただし，$\bar{h}_t = h_t - \mu$, $\bar{y}_t = \exp(-h_t/2)y_t$ である．Takahashi et al.（2009）では，まずモデル・パラメータと潜在変数の初期値を設定し，以下のように MCMC によるベイズ推定を行う．

(1) $\mu|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \xi, \sigma_u^2, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(2) $\phi|\sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \sigma_u^2, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(3) $(\sigma_\eta^2, \rho)|\phi, \mu, \xi, \sigma_u^2, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(4) $\xi|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \sigma_u^2, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(5) $\sigma_u^2|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(6) $\boldsymbol{h}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．

各ステップの具体的なサンプリングについては，Takahashi et al.（2009）および大森・渡部（2013）を参照されたい．

3.　Realized Stochastic Volatility モデルの拡張

3.1　日次リターン分布の拡張

SV モデルや RSV モデルを用いて Value-at-Risk（VaR）や期待ショートフォールなど分布の裾

のリスクを計測する場合，日次リターンの誤差項 ϵ_t の分布も重要である．金融資産の日次リターンは通常，尖度が有意に 3 を超え，正規分布よりも裾が厚いことが知られている．第 2.1 節の SV モデルや第 2.3 節の RSV モデルでは，日次リターンの誤差項 ϵ_t の分布として正規分布を仮定しているが，ϵ_t の分布が正規分布であっても，ボラティリティが変動するのであれば，日次リターン y_t の尖度は 3 を超える（証明については渡部, 2000 の 1.4 節を参照されたい）．しかし，多くの場合，日次リターンの裾の厚さはボラティリティの変動だけでは十分に捉えられないので，渡部（2005），Omori et al.（2007）では，SV モデルの ϵ_t の分布に t 分布を用いている．正規分布や t 分布は左右対称であるが，近年では非対称な分布も用いられている．非対称な分布にはいくつかあるが，SV モデルでは，中島・大森（2011），Nakajima and Omori（2012）が Aas and Haff（2006）が提案した一般化双曲非対称 t 分布（generalized hyperbolic skew Student's t distribution），Abanto-Valle et al.（2015）が Azzalini and Capitanio（2003）が提案した非対称 t 分布を用いている．RSV モデルでは，Takahashi et al.（2016）が一般化双曲非対称 t 分布を用いているので，以下このモデルについて説明する（一般化双曲非対称 t 分布を含むより一般的な分布に，Barndorff-Nielsen（1977）が導入した一般化双曲分布があるが，Prause, 1999; Aas and Haff, 2006; Nakajima and Omori, 2012 では一般化双曲分布はパラメータの推定が難しいことが指摘されており，本稿では一般化双曲非対称 t 分布を説明する）．

一般化双曲非対称 t 分布は以下のように定義される．まず，ϵ_t が標準正規分布に従い，z_t が以下の逆ガンマ分布に従うとする．

$$z_t \sim IG\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right), \quad \mu_z = \mathrm{E}[z_t] = \frac{\nu}{\nu - 2}, \quad \sigma_z^2 = \mathrm{Var}[z_t] = \frac{2\nu^2}{(\nu-2)^2(\nu-4)}. \tag{3.1}$$

このとき，$\beta(z_t - \mu_z) + \sqrt{z_t}\epsilon_t$ の分布を一般化双曲非対称 t 分布と呼ぶ．

一般化双曲非対称 t 分布は，2 つのパラメータ (β, ν) によって，左右非対称かつ裾の厚い分布を表現できる．図 1 には，いくつかのパラメータの値に対する一般化双曲非対称 t 分布の密度関数が描かれている．図 1(i) は，$\nu = 10$ と固定したときの $\beta = 0, -1, -2$ に対する密度関数である．β の値が負の場合，その絶対値が大きくなるにつれて，分布の歪みと裾の厚さのどちらも大きくなっている．一方，図 1(ii) は，$\beta = -2$ と固定したときの $\nu = 15, 10, 5$ に対する密度

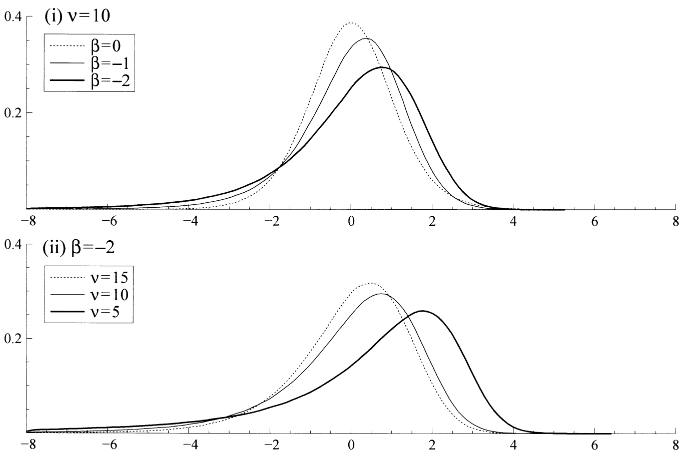

図 1．一般化双曲非対称 t 分布の密度関数．(i) $\nu = 10$ と固定し $\beta = 0, -1, -2$ の場合．(ii) $\beta = -2$ と固定し $\nu = 15, 10, 5$ の場合．

関数である．ν の値が小さくなるほど，裾の厚さが大きくなり，歪み具合も大きくなっている．一般化双曲非対称 t 分布は，$\beta=0$ の場合，自由度 ν のスチューデントの t 分布となる．また，$\nu\to\infty$ の場合，$z_t=\mu_z$ となるので，β の値によらず正規分布となる．以上から，ν は裾の厚さ (または尖度) を，β は左右の非対称性 (または歪度) を，それぞれ表すパラメータと考えられるが，分布の非対称性と裾の厚さは，2 つのパラメータの値の組によって決まることに注意が必要である．

Takahashi et al. (2016) では，式(2.6) の ϵ_t を，分散を 1 に基準化した $\frac{\beta(z_t-\mu_z)+\sqrt{z_t}\epsilon_t}{\sqrt{\beta^2\sigma_z^2+\mu_z}}$ に置き換えることにより，以下のモデルに拡張している．

$$y_t=\frac{\beta(z_t-\mu_z)+\sqrt{z_t}\epsilon_t}{\sqrt{\beta^2\sigma_z^2+\mu_z}}\exp(h_t/2),\quad t=1,\dots,T, \tag{3.2}$$

$$x_t=\xi+h_t+u_t,\quad t=1,\dots,T, \tag{3.3}$$

$$h_{t+1}=\mu+\phi(h_t-\mu)+\eta_t,\quad t=0,\dots,T-1. \tag{3.4}$$

ここで，誤差項 (ϵ_t,u_t,η_t) の分布は式(2.9) と同じである．

Takahashi et al. (2016) は，このモデルの MCMC を用いたベイズ推定法を提案しており，以下この方法を簡単に説明する．このモデルのパラメータは第 2.3 節の RSV モデルのパラメータに一般化双曲非対称 t 分布のパラメータ (β,ν) が加わり，$\boldsymbol{\theta}=(\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\rho,\xi,\sigma_u^2,\beta,\nu)$ となる．また潜在変数は $\boldsymbol{h}=\{h_t\}_{t=1}^T$ に一般化双曲非対称 t 分布の $\boldsymbol{z}=\{z_t\}_{t=1}^T$ が加わる．パラメータ $(\mu,\phi,\sigma_\eta^2,\rho,\xi,\sigma_u^2)$ については第 2.3 節の RSV モデルと同じ事前分布を仮定する．新たなパラメータについては，ν の事前分布を $\pi_\nu(\nu)$, β の事前分布に以下の正規分布を仮定する．

$$\beta\sim N(m_\beta,s_\beta^2). \tag{3.5}$$

これらの同時事前確率密度関数を $\pi(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}$ を所与としたときの $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{z}$ の同時確率密度関数を $f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})$ で表せば，$\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{h}$, $\boldsymbol{z}$ の同時事後確率密度関数 $\pi(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})$ は

$$\begin{aligned}
&\pi(\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{y})\\
&\propto f(\boldsymbol{y},\boldsymbol{h},\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta})\pi(\boldsymbol{\theta})\\
&\propto \frac{(\beta^2\sigma_z^2+\mu_z)^{\frac{T}{2}}}{\sigma_u^T}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T\left[\log z_t+h_t+\tilde{y}_t^2+\frac{(x_t-\xi-h_t)^2}{\sigma_u^2}\right]\right\}\\
&\quad\times\frac{\sqrt{1-\phi^2}}{\sigma_\eta^T(1-\rho^2)^{\frac{T-1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\eta^2}\left[(1-\phi^2)\bar{h}_1^2+\frac{1}{1-\rho^2}\sum_{t=1}^{T-1}(\bar{h}_{t+1}-\phi\bar{h}_t-\rho\sigma_\eta\tilde{y}_t)^2\right]\right\}\\
&\quad\times\frac{(\nu/2)^{\frac{T\nu}{2}}}{\Gamma(\nu/2)^T}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^T\left[(\nu-2)\log z_t+\frac{\nu}{z_t}\right]\right\}\\
&\quad\times\frac{1}{\sigma_\eta^{n_0+2}\sigma_u^{n_u+2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mu-\mu_0)^2}{\sigma_0^2}+\frac{S_0}{\sigma_\eta^2}+\frac{(\xi-m_\xi)^2}{s_\xi^2}+\frac{S_u}{\sigma_u^2}\right]\right\}\pi_\phi(\phi)\pi_\rho(\rho)\pi_\nu(\nu)
\end{aligned}$$

となる．ただし，

$$\tilde{y}_t=\frac{\sqrt{\beta^2\sigma_z^2+\mu_z}\bar{y}_t-\beta(z_t-\mu_z)}{\sqrt{z_t}}$$

である．Takahashi et al. (2016) では，まずモデル・パラメータと潜在変数の初期値を設定し，以下のように MCMC によるベイズ推定を行う．

(1) $\mu|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \xi, \sigma_u^2, \beta, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(2) $\phi|\sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \sigma_u^2, \beta, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(3) $(\sigma_\eta^2, \rho)|\phi, \mu, \xi, \sigma_u^2, \beta, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(4) $\xi|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \sigma_u^2, \beta, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(5) $\sigma_u^2|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \beta, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(6) $\boldsymbol{h}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(7) $\beta|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \sigma_u^2, \nu, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(8) $\nu|\phi, \sigma_\eta^2, \rho, \mu, \xi, \sigma_u^2, \beta, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．
(9) $\boldsymbol{z}|\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{y}$ からサンプリングする．

ステップ(1)–(6)は RSV モデルと同様にサンプリングできる．ステップ(7)–(9)の具体的なサンプリングについては，Takahashi et al. (2016)を参照されたい．

一般化双曲非対称 t 分布では，分布の裾の厚さと非対称性の双方が，モデルのデータへの適合度や予測精度の改善に貢献すると考えられる．非対称性が貢献しているかどうかはパラメータ β が 0 と異なるかどうかにより判断することが可能であり，裾の厚さについては自由度 ν の大きさによりある程度は貢献度を測ることができる．Takahashi et al. (2016)は，日経 225 と S&P500 のデータについて，一般化双曲非対称 t 分布を用いることにより，モデルのデータへの適合度が改善されることを示していることに加えて，ボラティリティと VaR および期待ショートフォールの予測精度が改善されることを示している．また，Nugroho and Morimoto (2014)は TOPIX のデータについて，Nugroho and Morimoto (2016)は 6 つの株価指数(日経 225, S&P500, FTSE, Nasdaq100, DAZ, DJIA)について，それぞれ一般化双曲非対称 t 分布を用いることによりモデルの適合度が改善されることを示している．これらの実証結果では，パラメータ β が負となる事後確率が非常に高くなる一方，自由度 ν の事後平均は 22 から 32 と比較的大きく，日次リターン分布の非対称性を考慮することの重要性が示唆されている．

3.2 ボラティリティの定式化の拡張

3.2.1 長期記憶性

これまで多くの実証分析において，高頻度データを用いて計算される RV には長期記憶性が存在すると指摘されている(例えば，Andersen et al., 2001a)．定常な確率過程 z_t の自己相関関数 $\rho(s) = \mathrm{Corr}(z_t, z_{t-s})$ が $\sum_{s=0}^{\infty} |\rho(s)| = \infty$ であるとき，z_t は長期記憶定常過程と呼ばれる．その長期記憶性をもつ代表的な確率過程に，自己回帰実数和分移動平均(Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average, ARFIMA)過程があり，h_t の ARFIMA(p, d, q) 過程は次のように定義される．

$$(1-L)^d \Phi(L)(h_{t+1} - \mu) = \Theta(L)\eta_t, \qquad t = 0, 1, \ldots, T. \tag{3.6}$$

ただし，η_t は誤差項でホワイトノイズ，L は $L^i h_t = h_{t-i}$ となるようなラグ・オペレータ，$\Phi(L) = 1 - \phi_1 L - \cdots - \phi_p L^p$, $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \cdots - \theta_q L^q$ である．$d = 1$ であるときには，ARIMA$(p, 1, q)$ 過程となり，非定常である．一般に

$$(1-L)^d = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d(d-1)\cdots(d-j+1)}{j!}(-L)^j = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j L^j, \tag{3.7}$$

$$\gamma_0 = 1, \quad \gamma_{j+1} = \frac{j-d}{j+1}\gamma_j, \quad j \geq 0, \tag{3.8}$$

であり，パラメータ d が長期記憶性を説明するパラメータ節約的なモデルとなっている．

ARFIMA モデルは $|d| < 0.5$ の場合に定常になるが，RV に ARFIMA モデルを適用した実証分析では，多くの場合，d の推定値は $0 < d < 0.5$ であることが知られている（Andersen et al., 2003; Giot and Laurent, 2004; 渡部・佐々木, 2006）．そこで，$0 < d < 0.5$ もしくは $|d| < 0.5$ という制約を加えて推定することも多い（Koopman et al., 2005; Nishino and Kakamu, 2013）が，そうした制約を課さないと d の推定値が 0.5 を超えることもある（Ubukata and Watanabe, 2014; Shirota et al., 2014）．

SV モデルにおいても，潜在変数 h_t に ARFIMA モデルを用いた研究が複数ある（Breidt et al., 1998; So, 2002; Ruiz and Veiga, 2008）が，特に Shirota et al.（2014）は RV の情報を観測方程式として以下のように明示的にとりいれている．

$$y_t = \exp(h_t/2)\epsilon_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3.9}$$

$$x_t = \xi + h_t + u_t, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3.10}$$

$$(1 - L)^d \Phi(L)(h_{t+1} - \mu) = \Theta(L)\eta_t, \quad t = 0, 1, \ldots, T - 1. \tag{3.11}$$

ここで，誤差項 $(\epsilon_t, u_t, \eta_t)$ の分布は式(2.9)と同じである．Shirota et al.（2014）は，モデル・パラメータの推定を行うために，まず Chan and Palma（1998）と同様に ARFIMA 過程を十分な数の有限次元の MA(q^*) 過程で近似し ($q^* > \sqrt{T}$)，状態空間モデルのためのベイズ推定を効率的な MCMC アルゴリズムで行っている．提案されたモデルは，1996 年から 2009 年の日次 S&P500 株価指数リターンとその RV に適用され，RSV モデルや superposition モデル（第 3.2.2 節）よりも，あてはまりもボラティリティ予測精度も良いことが示されている．ただし，RV の長期記憶性は構造変化による見せかけの長期記憶性の可能性がある．長期記憶モデルではないが，構造変化を捉えるモデルとして，高橋（2014）では，RSV モデルにおいて式(2.7)の μ を平滑推移(smooth transition)関数によって時変にした平滑推移 RSV モデルを提案している．

3.2.2 Superposition モデル

ARFIMA モデルのほかに，対数ボラティリティの長期記憶性を表現する方法としてしばしば用いられるのが superposition モデルである．superposition モデルでは，対数ボラティリティが K 個の独立な ARMA 過程に従う対数ボラティリティの和として表現される．SV モデルにおいては superposition モデルのあてはまりが良いことが先行研究において知られている（Omori et al., 2007）が，Dobrev and Szerszen（2010）はこれを RSV モデルに拡張して，対数ボラティリティが 2 個の独立な AR(1) 過程に従う対数ボラティリティの和として表現されるモデルとし，また日次リターンにジャンプを表現する項も追加した．さらに Koopman and Scharth（2013）は，対数ボラティリティが K 個の独立な AR(1) 過程に従う対数ボラティリティの和として表現される，より一般的な以下のようなモデルを提案した．

$$y_t = \exp\left(\frac{\mu + \sum_{j=1}^{K} \alpha_{jt}}{2}\right)\epsilon_t, \qquad t = 1, 2, \ldots, T, \tag{3.12}$$

$$x_{it} = \xi_i + \sum_{j=1}^{K} \alpha_{jt} + u_{it}, \quad t = 1, 2, \ldots, T, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{3.13}$$

$$\alpha_{j,t+1} = \phi_j \alpha_{jt} + \eta_{jt}, \quad \eta_{jt} \sim N(0, \sigma^2_{\eta_j}/(1 - \phi_j^2)) \quad j = 1, \ldots, K, \quad t = 1, \ldots, T - 1. \tag{3.14}$$

Koopman and Scharth（2013）は高頻度データから計算される複数の RM ($RM_{i,t}$) を導入し，さらにリターンの誤差項 ϵ_t と観測誤差 u_{it} の相関を考慮するなどの拡張を行い，パラメータの推定法として 2 段階推定法を提案した．superposition モデルは，比較的少ないパラメータ数で長期記憶性を表現することができるが，K の値や α_{jt} の ARMA 過程の次数をどのように決める

かは明らかではない．さらに RM の観測方程式の個数 p を増やしすぎると，そのバイアスを補正するべき日次リターンの観測方程式の相対的なウェイトが小さくなってしまうので，K の値を変えることで予測の評価が改善できるかどうかを精査していく必要がある．提案手法は 1993 年から 2010 年までの，9 つの米国の株式収益率のデータに，RK などの 3 つの RM ($p=3$) とともに適用され，RK の予測において他のモデルよりも精度が良いことを示している．石原 (2015) は，Koopman and Scharth (2013) のモデルの式(3.13)，(3.14) に曜日，月，休日前と後のダミーを加えて推定を行い，日経 225 のボラティリティと複数の RM の暦効果について分析を行っている．

3.2.3 Box-Cox 変換

RM の観測方程式では，非負制約をはずすために $x_{it}=\log RM_{it}$ のように RM_{it} の対数変換を行った．その際，観測方程式では ξ というパラメータを導入することでバイアス補正を行った．これに対してより広いクラスの変換を考えてバイアスの補正を行う拡張が，Nugroho and Morimoto (2014), Nugroho and Morimoto (2016), Zheng and Song (2014) により行われている．Zheng and Song (2014) は，Koopman and Scharth (2013) の superposition モデルにおいて，式(3.13) の $x_{it}=\log RM_{it}$ を拡張して下記のような Box-Cox 変換を考えた．

$$x_{it}=\begin{cases}(RM_{it}^{\lambda_i}-1)/\lambda_i, & \text{if } \lambda_i\neq 0,\\ \log RM_{it}, & \text{if } \lambda_i=0.\end{cases} \tag{3.15}$$

提案モデルは，2003 年から 2012 年までの，5 つの日次株価指数リターンについて，RV と RK の 2 つの実現尺度を用いて適用されているが，ボラティリティの予測精度については株価指数やボラティリティの代理変数に何を選ぶかに依存している．Nugroho and Morimoto (2014) では，RSV モデルのリターンの分布を一般化双曲 t 分布や非心 t 分布に拡張し，RV に指数変換，Yeo-Johnson 変換，modulous 変換を適用し，また Nugroho and Morimoto (2016) では Box-Cox 変換を適用している．

4. 日経 225 株価指数への応用

4.1 データと基本統計量

本節では，SV モデルと RSV モデルを日経 225 株価指数に応用する．サンプル期間は 2007 年 1 月 4 日から 2016 年 12 月 30 日までの 10 年間で，サンプルサイズは 2,449 である．日次リターン(%)は各営業日の終値の対数階差により算出した．また，日経 225 株価指数の 1 分ごとの価格の対数階差として日中リターン(%)を計算し，バイアスを考慮した RK を算出した(詳しくは大森・渡部, 2013 および Ubukata and Watanabe, 2014 を参照されたい)．大森・渡部 (2013) では，通常の RV を用いた RSV モデルの場合，MMN によるバイアスを完全には捉えきれないことが示されている．そこで，本稿では，式(2.8)，(3.3) の x_t としてバイアスを考慮した RK の対数値を用いて，RSV モデルを推定する．

図 2 には日次リターンと RK の対数値($\log RK$)の推移が，図 3 にはヒストグラムが描かれている．また，表 1 にはこれらの基本統計量が計算されている．まず，日次リターンを見ると，平均は 0 から有意に乖離していない．また，LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung and Box (1978) 統計量の p 値であり，Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している(詳しくは渡部, 2000, 1.5.1 節を参照されたい)．この統計量の p 値によると，日次リターンに自己相関がないという帰無仮説は有意水準 10% でも棄却されない．したがって，日次リターンは平均も自己相関も有意でないので，SV モデルの式(2.1) や RSV モデルの式(2.6) の y_t として，日次リターンをそのまま用いることがで

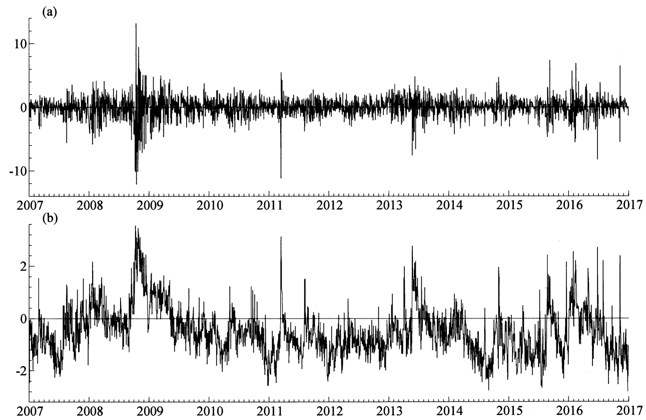

図 2. (a) 日次リターン (%) と (b) RK の対数値の推移.

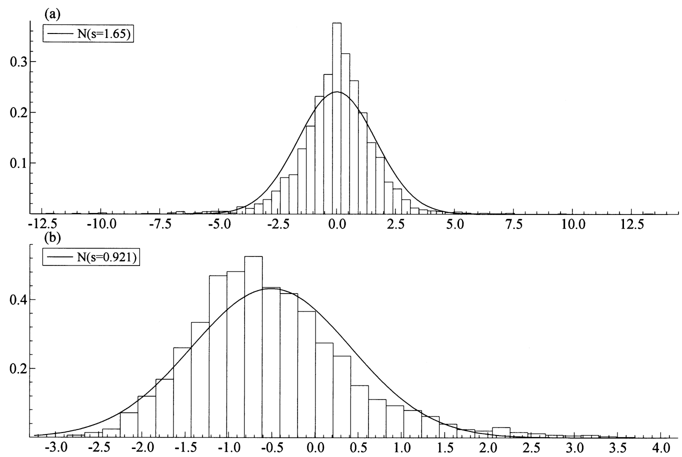

図 3. (a) 日次リターン (%) と (b) RK の対数値のヒストグラム．実線は，それぞれの平均値と標準偏差に対応した正規分布の確率密度関数.

きる．さらに，歪度は有意に負となっており，尖度は正規分布の 3 よりも有意に大きい．JB は分布が正規分布に従うという帰無仮説を検定するための Jarque and Bera (1987) の p 値であり，日次リターンが正規分布に従うという帰無仮説は有意水準 1% でも棄却される．図 3(a) のヒストグラムからも，日次リターンが正規分布から乖離していることは明らかである．第 3.1 節で述べたように，日次リターンの裾の厚さはボラティリティの変動だけでは十分に捉えられない場合があり，有意な非対称性も観測されている．以下では，日次リターンの分布として，正規分布だけでなく一般化双曲非対称 t 分布を用いた SV モデルおよび RSV モデルを推定する．

次に，RK の対数値を見ると，LB(10) から自己相関がないという帰無仮説は有意水準 1% で棄却される．これはボラティリティ・クラスタリングと整合的である．また，歪度は有意に正となっており，尖度は正規分布の 3 よりも有意に大きい．JB の値からも，RK の対数値が正規分布に従うという帰無仮説は有意水準 1% で棄却される．図 3(b) のヒストグラムからも，RK の対数値が正規分布から乖離していることがわかる．したがって，RK の対数値の分布につい

表 1. 日次リターン(%)と RK の対数値の基本統計量．サンプル期間は 2007 年 1 月 4 日〜2016 年 12 月 30 日．サンプルサイズは 2,449．括弧内の数値は平均の標準誤差を表し，歪度と尖度の標準誤差はそれぞれ 0.049 と 0.099 である．JB は分布が正規分布に従うという帰無仮説を検定するための Jarque and Bera (1987) 統計量の p 値を表す．LB(10) は 1 次から 10 次までの自己相関がすべて 0 であるという帰無仮説を検定するための Ljung and Box (1978) 統計量の p 値で，Diebold (1988) の方法により分散不均一性を調整している．

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値	JB	LB(10)
日次リターン	0.004 (0.033)	1.652	−0.492	10.360	−12.111	13.235	0.00	0.95
RK の対数値	−0.508 (0.019)	0.921	0.833	4.339	−2.809	3.560	0.00	0.00

ても正規分布からの拡張も考えられるが．このような拡張は今後の課題として，RK の対数値には正規分布を用いた RSV モデルを推定する．

4.2 各モデルの推定結果

まず，日次リターンに正規分布を用いた SV モデルの各パラメータの事前分布は以下のように設定した．

$$\mu \sim N(0,10), \quad \frac{\phi+1}{2} \sim B(20,1.5), \quad \sigma_\eta^2 \sim IG(2.5,0.025), \quad \frac{\rho+1}{2} \sim B(1,2).$$

ここで，$B(a,b)$ はパラメータ (a,b) のベータ分布を表す．これらのパラメータについては，RSV モデルでも同じ事前分布を用いた．また，RSV モデル固有のパラメータについては，以下の事前分布を設定した．

$$\xi \sim N(0,1), \quad \sigma_u^2 \sim IG(2.5,0.1).$$

さらに，日次リターンの誤差項の分布に用いる一般化双曲非対称 t 分布のパラメータの事前分布については，以下のように設定した．

$$\beta \sim N(0,1), \quad \nu \sim G(5,0.5)I(\nu > 4).$$

ここで，$I(\cdot)$ は指示関数であり，$\nu > 4$ は式(3.1)の σ_z^2 を有限にするため，すなわち，日次リターンの 4 次モーメントを有限にするためである．また，t 分布を用いる場合は，$\beta = 0$ と固定した．

表 2 と表 3 には，日次リターンの誤差項に正規分布，t 分布，一般化双曲非対称 t 分布を用いた SV モデル(それぞれ SV-N，SV-T，SV-GH-ST とする)と RSV モデル(それぞれ RSV-N，RSV-T，RSV-GH-ST とする)の推定結果がまとめられている．表には，5,000 回のサンプルを burn-in として捨て，それ以降の 20,000 回のサンプルを使って計算した各パラメータの事後平均，事後標準偏差，95% 信用区間，CD 統計量の p 値，IF(非効率性因子)の値を掲載している．平均と標準偏差は，それぞれ各パラメータの burn-in 以降の 20,000 個のサンプルの標本平均と標準偏差として計算した．95% 信用区間は，サンプルを大きさの順に並べ替え，上 2.5% と下 2.5% の値として求めた．CD 統計量は，サンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke (1992) によって提案された収束診断(Convergence Diagnostic，CD)統計量である．IF は，標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングと同じにするためにランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行う必要があるかを表す非効率性因子(Inefficiency Factor，IF)である(CD 統計量と IF の具体的な計算については，例えば大森・渡部, 2013 を参照されたい)．なお，以下の実証分析の結果については，σ_η や σ_u をパラメータとして結果を

表 2. SV モデルのパラメータの推定結果．サンプル期間とサイズは表 1 と同様．MCMC により 25,000 回サンプリングを行い，最初の 5,000 回を burn-in として捨て，残りの 20,000 回のサンプルを使って推定した．平均と標準偏差はサンプルの標本平均と標本標準偏差として計算した．95% 信用区間は，サンプルを大きさの順に並べ替え，上 2.5% と下 2.5% の値として求めた．CD は，burn-in 以降の 20,000 個のサンプルの分布が事後分布に収束しているかどうかを検定する Geweke (1992) の CD(convergence diagnostic) 統計量の p 値である．IF は，標本平均の標準誤差をランダム・サンプリングと同じにするためにランダム・サンプリングの何倍の回数サンプリングを行う必要があるかを表す非効率性因子 (inefficiency factor) である．

パラメータ	平均	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
			SV-N		
ϕ	0.9479	0.0088	[0.9293, 0.9639]	0.105	28.40
σ_η	0.2754	0.0248	[0.2356, 0.3312]	0.135	214.07
ρ	−0.5284	0.0546	[−0.6222, −0.4086]	0.305	135.90
μ	0.5991	0.1045	[0.4041, 0.8150]	0.397	51.87
			SV-T		
ϕ	0.9597	0.0081	[0.9420, 0.9739]	0.744	111.69
σ_η	0.2361	0.0251	[0.1906, 0.2910]	0.621	188.69
ρ	−0.6723	0.0515	[−0.7637, −0.5613]	0.311	77.78
μ	0.6285	0.0995	[0.4334, 0.8247]	0.051	5.77
ν	16.5857	3.7422	[11.0953, 26.2200]	0.285	232.80
			SV-GH-ST		
ϕ	0.9623	0.0070	[0.9474, 0.9748]	0.518	112.62
σ_η	0.2404	0.0219	[0.2010, 0.2860]	0.550	202.78
ρ	−0.7528	0.0491	[−0.8450, −0.6495]	0.637	130.89
μ	0.5533	0.0983	[0.3597, 0.7476]	0.954	5.09
ν	19.1282	3.8742	[12.6679, 28.2960]	0.408	296.93
β	−0.9512	0.2794	[−1.6743, −0.5149]	0.936	226.57

表示する．

CD 統計量の p 値は，RSV-T モデルの σ_η と σ_u がそれぞれ 10% と 5% をわずかに下回るが，それ以外のすべてのパラメータについて 10% を上回っており，推定に使った burn-in 以降の 20,000 回のサンプルが事後分布に収束しているという帰無仮説は，少なくとも有意水準 1% で受容される．また，非効率性因子の値は SV モデルよりも RSV モデルが低くなっており，SV-N モデルと RSV-N モデルに共通するパラメータ $(\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho)$ すべてで，SV モデルよりも RSV モデルの方が標準偏差が小さくなっている．これらの結果から，RV をデータとして加えることによりサンプリングがより効率的になると考えられる．

すべてのモデルに共通するパラメータ $(\mu, \phi, \sigma_\eta, \rho)$ の推定結果を見ると，μ については，すべてのモデルで同様の推定値が得られている．ϕ については，SV モデルよりも RSV モデルの事後平均が若干低いものの，すべてのモデルで同様の推定値が得られている．すなわち，ϕ の事後平均と 95% 信用区間はいずれも 1 に近く，日経 225 株価指数のボラティリティにも高い持続性があることを示している．ρ については，SV モデルよりも RSV モデルの推定値が 0 に近くなっているが，すべてのモデルについて事後平均は負で，95% 信用区間も 0 を下回っている．この結果から，日経 225 株価指数のボラティリティも，株価が上がった翌日より下がった翌日の方がより上昇する傾向があることがわかる．

表 3. RSV モデルのパラメータの推定結果．サンプル期間とサイズおよび推定の方法は表 2 と同様.

パラメータ	平均	標準偏差	95% 信用区間	CD	IF
			RSV-N		
ϕ	0.9337	0.0085	[0.9164, 0.9497]	0.865	15.60
σ_η	0.2800	0.0139	[0.2542, 0.3080]	0.787	36.45
ρ	−0.3204	0.0389	[−0.3985, −0.2454]	0.385	20.76
μ	0.5633	0.0893	[0.3891, 0.7407]	0.540	3.94
ξ	−1.0290	0.0362	[−1.1011, −0.9577]	0.954	19.51
σ_u	0.4127	0.0110	[0.3910, 0.4345]	0.469	25.27
			RSV-T		
ϕ	0.9356	0.0082	[0.9187, 0.9511]	0.281	11.90
σ_η	0.2757	0.0135	[0.2506, 0.3039]	0.096	31.57
ρ	−0.3321	0.0399	[−0.4107, −0.2548]	0.169	18.60
μ	0.5907	0.0913	[0.4094, 0.7719]	0.370	12.44
ν	26.3082	5.8274	[17.6581, 40.6667]	0.933	142.63
ξ	−1.0533	0.0381	[−1.1293, −0.9788]	0.266	65.67
σ_u	0.4158	0.0109	[0.3942, 0.4374]	0.042	20.36
			RSV-GH-ST		
ϕ	0.9379	0.0081	[0.9214, 0.9531]	0.663	14.12
σ_η	0.2701	0.0133	[0.2460, 0.2973]	0.515	25.77
ρ	−0.3572	0.0421	[−0.4397, −0.2758]	0.312	18.60
μ	0.5857	0.0897	[0.4122, 0.7637]	0.162	4.26
ν	27.2934	5.3025	[18.5698, 39.0077]	0.900	124.10
β	−0.6027	0.2975	[−1.2752, −0.0845]	0.256	33.63
ξ	−1.0550	0.0382	[−1.1318, −0.9813]	0.353	25.53
σ_u	0.4198	0.0110	[0.3984, 0.4417]	0.659	13.69

また，RSV モデルに固有のパラメータ (ξ, σ_u) の推定結果を見ると，RM のバイアスを表すパラメー タ ξ の事後平均は，すべての RSV モデルでおおよそ -1 と負の値で，95% 信用区間も 0 を下回っている．RK でマイクロストラクチャー・ノイズによるバイアスがほぼ除去されているとすると，ξ の事後平均が負となっているのは，夜間と昼休みを無視したために 1 日のボラティリティを過小評価していることによるものと考えられる．σ_η については，すべての RSV モデルで同様の推定値が得られている.

さらに，t 分布および一般化双極非対称 t 分布のパラメータ (ν, β) の推定結果を見ると，裾の厚さを表す ν については，SV モデルよりも RSV モデルの推定値が大きくなっている．一方，非対称性を表す β については，SV モデルよりも RSV モデルの推定値が 0 に近くなっているが，どちらのモデルでも事後平均は負で，95% 信用区間も 0 を下回っている．したがって，RM を加えることにより，日次リターンの誤差項の分布について裾の厚さと非対称性の程度がどちらも小さくなっていると考えられる．この結果の解釈については，以下の周辺尤度によるモデル比較でより詳しく述べる.

4.3 周辺尤度によるモデル比較

各モデルのデータへの適合度を比較するため，Chib (1995) の方法に従い，対数周辺尤度とそ

表 4. SV モデルと RSV モデルの対数周辺尤度．サンプル期間とサイズは表 1 と同様．括弧内の数値は標準誤差を表す．尤度関数部分については，3,000 個の粒子を用いた補助粒子フィルタによる推定を 10 回行い，その平均値と標準誤差を求めた．事後確率密度関数部分については，Chib and Greenberg (1995) と Chib and Jeliazkov (2001) に従い，3,000 回の追加サンプリングにより求めた．

モデル	尤度		事前密度	事後密度		対数周辺尤度	
SV-N	−4252.15	(0.46)	−1.55	10.46	(0.18)	−4264.16	(0.50)
SV-T	−4248.85	(0.80)	−4.17	7.57	(0.14)	−4260.59	(0.82)
SV-GH-ST	−4232.52	(1.02)	−6.31	6.11	(0.37)	−4244.94	(1.09)
RSV-N	−6113.08	(0.83)	−3.70	18.86	(0.08)	−6135.64	(0.83)
RSV-T	−6121.38	(0.27)	−10.33	14.23	(0.12)	−6145.93	(0.30)
RSV-GH-ST	−6118.44	(0.86)	−11.68	13.56	(0.20)	−6143.68	(0.88)

表 5. SV モデルと RSV モデルのボラティリティ ($\exp(h/2)$) の推定値で基準化した日次リターンの基本統計量．サンプル期間とサイズおよび各基本統計量の計算方法は表 1 と同様．

	平均	標準偏差	歪度	尖度	最小値	最大値	JB	LB(10)
SV-N	0.014 (0.019)	0.922	−0.210	2.711	−3.168	2.619	0.00	0.40
SV-T	0.009 (0.019)	0.939	−0.291	3.082	−4.008	3.312	0.00	0.35
SV-GH-ST	0.001 (0.019)	0.941	−0.368	3.188	−4.353	3.186	0.00	0.23
RSV-N	0.038 (0.019)	0.963	−0.094	2.606	−3.068	2.534	0.00	0.26
RSV-T	0.036 (0.019)	0.953	−0.098	2.632	−3.140	2.532	0.00	0.25
RSV-GH-ST	0.034 (0.019)	0.952	−0.115	2.643	−3.228	2.478	0.00	0.25

の標準誤差を計算した結果が，表 4 にまとめられている．尤度関数部分については，3,000 個の粒子を用いた補助粒子フィルタ (Pitt and Shephard, 1999; Omori et al., 2007) による推定を 10 回行い，その平均値と標準誤差を求めた．また，事後確率密度関数部分については，Chib and Greenberg (1995) と Chib and Jeliazkov (2001) に従い，3,000 回の追加サンプリングにより求めた．なお，周辺尤度の計算方法には他にも Geweke (1999) の修正調和平均 (modified harmonic mean) がよく用いられるが，この方法では，完全な尤度ではなく潜在変数を条件とする条件付き尤度を用いると，周辺尤度の推定値にバイアスが生じることを Chan and Grant (2015) が示しているので，注意が必要である．

表 4 の対数周辺尤度によると，SV モデルでは一般化双曲非対称 t 分布，RSV モデルでは正規分布が選択される．表 2 と表 3 を比べると，一般化双曲非対称 t 分布では，裾の厚さを表す ν の推定値は RSV モデルの方が高く，分布の非対称性を表す β の推定値は SV，RSV ともに負の値になっているが，RSV の方がより 0 に近い値になっており，周辺尤度の結果と整合的である．これは，リターンが極端な値になった時に RK が大きな値になるので，RSV モデルでは真のボラティリティも大きくなり，真のボラティリティで割って基準化したリターンの分布の裾が薄くなるものと解釈できる．また，特にリターンが極端な負の値になった時に RK が大きな値になるので，RSV モデルでは基準化したリターンの分布の非対称性が小さくなるものと解釈できる．

表 5 は，各モデルの真のボラティリティ $\exp(h_t/2)$ の事後平均で基準化した日次リターンの基本統計量であり，図 4 はそれらのヒストグラムである．ヒストグラムからは，すべてのモデルについて正規分布との乖離に差はないように見える．基本統計量を見ると，すべての SV モ

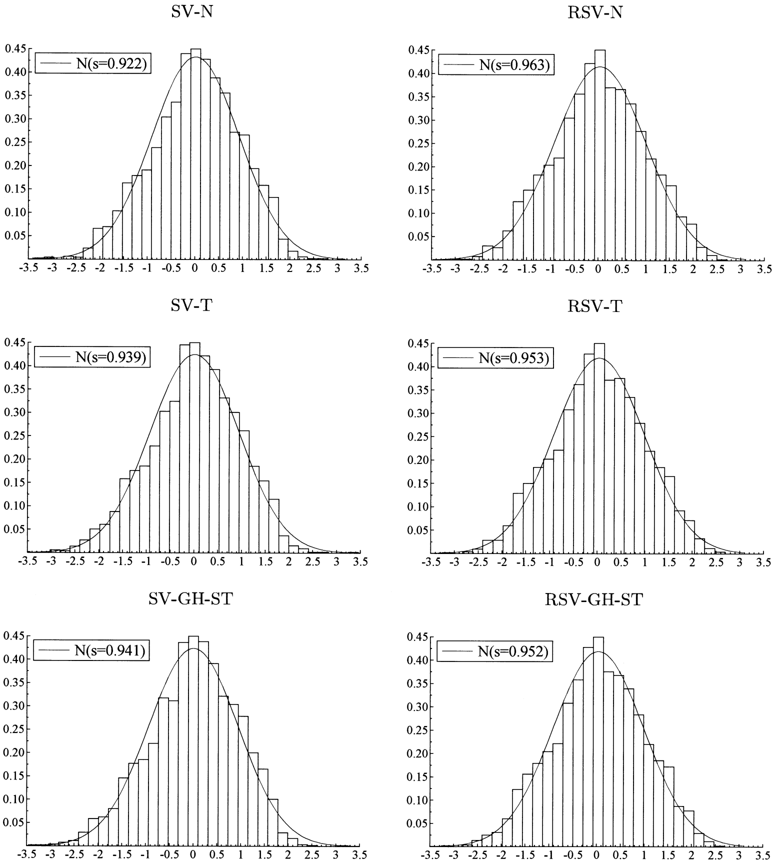

図 4. SV モデルと RSV モデルのボラティリティ $(\exp(h/2))$ の推定値で基準化した日次リターンのヒストグラム．実線は，それぞれの平均値と標準偏差に対応した正規分布の確率密度関数．横軸の範囲は $[-3.5, 3.5]$，縦軸の範囲は $[0, 0.45]$.

デルについて歪度は有意に負で，SV-GH-ST モデルについては尖度も有意に 3 より高くなっている．JB の値から基準化したリターンが正規分布に従うという帰無仮説は有意水準 1% で棄却される．したがって，誤差項には一般化双曲非対称 t 分布が適していることがわかる．一方，RSV モデルについては，正規分布を用いた場合に，歪度は最も 0 に近く有意に乖離していない．また，すべての RSV モデルについて尖度は有意に 3 より小さくなっている．JB の値からは基準化したリターンが正規分布に従うという帰無仮説は有意水準 1% で棄却されるが，SV モデルと比べると基準化したリターンの歪度は 0 に近く，正規分布に近い．これらの結果は，上記の周辺尤度の結果と整合的である．ただし，これは本稿で用いたデータでの結果であり，一般的に RSV モデルにすると誤差項の分布は正規分布で良いということではないので，注意されたい.

5. おわりに

本稿では，RSV モデルおよびその拡張モデルとそれらの MCMC を用いたベイズ推定につい

て解説した．また，日経 225 株価指数の日次リターンと RK を用いて，リターンの誤差項の分布を一般化双極非対称 t 分布に拡張した SV モデルと RSV モデルを推定し，周辺尤度によるモデル比較を行った．その結果，SV モデルについては，リターンの裾の厚さと非対称性を捉えるために一般化双極非対称 t 分布が有効である一方，RSV モデルについては分布の拡張は必ずしも必要ではないということが明らかになった．ただし，これは本稿で用いたデータでの結果であり，一般的に RSV モデルにすると誤差項の分布は正規分布で良いということではない．

RSV モデルは，本稿で解説したモデル以外にも様々な拡張が提案されている．例えば，日次リターン分布の裾の厚さと非対称性を捉えるために，一般化双極非対称 t 分布の他にも Azzalini and Capitanio (2003) や Fernández and Steel (1998) が提案した非対称 t 分布を用いることも考えられる．また，本稿では 1 変量モデルを考えたが，RSV モデルの多変量モデルへの拡張も重要であり，盛んに研究が行われている (Shirota et al., 2017; Kurose and Omori, 2020; Yamauchi and Omori, 2019)．RSV モデルにはまだまだ改良の余地があり，上記の拡張も含めて今後も発展が期待される．

謝　辞

本稿は科学研究費補助金基盤研究 (A) 17H00985，19H00588 と一橋大学社会科学高等研究院を通じて文部科学省から助成を受けている．本稿の作成にあたり，編集委員と匿名の査読者から貴重なコメントを頂いた．また，本稿で用いた日経 225 株価指数の RK のデータは，Ubukata and Watanabe (2014) に基づいて生方雅人氏 (明治学院大学) に計算して頂いた．ここに記して深く感謝の意を表したい．

参 考 文 献

Aas, K. and Haff, I. H. (2006). The generalized hyperbolic skew Student's t-distribution, *Journal of Financial Econometrics*, **4**(2), 275–309.

Abanto-Valle, C. A., Lachos, V. H. and Dey, D. K. (2015). Bayesian estimation of a skew-Student-t stochastic volatility model, *Methodology and Computing in Applied Probability*, **17**(3), 721–738.

Aït-Sahalia, Y. and Mykland, P. A. (2009). Estimating volatility in the presence of market microstructure noise: A review of the theory and practical considerations, *Handbook of Financial Time Series* (eds. T. G. Andersen, R. A. Davis, J.-P. Kreiß and T. Mikosch), 577–598, Springer-Verlag, Berlin.

Aït-Sahalia, Y., Mykland, P. A. and Zhang, L. (2005). How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise, *Review of Financial Studies*, **18**(2), 351–416.

Andersen, T. G. and Benzoni, L. (2009). Realized volatility, *Handbook of Financial Time Series* (eds. T. G. Andersen, R. A. Davis, J.-P. Kreiß and T. Mikosch), 555–575, Springer-Verlag, Berlin.

Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1998). Answering the skeptics: Yes, standard volatility models do provide accurate forecasts, *International Economic Review*, **39**(4), 885–905.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001a). The distribution of realized stock return volatility, *Journal of Financial Economics*, **61**(1), 43–76.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2001b). The distribution of realized exchange rate volatility, *Journal of the American Statistical Association*, **96**(453), 42–55.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, **71**(2), 579–625.

Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2010). Parametric and nonparametric volatility measurement, *Handbook of Financial Econometrics* (eds. Y. Aït-Sahalia and L. P. Hansen), Chapter 2, 67–138, North Holland, Amsterdam.

Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. F. and Diebold, F. X. (2013). Financial risk measurement for financial risk management, *Handbook of the Economics of Finance* (eds. G. M. Constantinides, M. Harris and R. M. Stulz), Vol.2, Part B, Chapter 17, 1127–1220, North Holland, Amsterdam.

Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution, *Journal of the Royal Statistical Society B*, **65**(2), 367–389.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2006). Separating microstructure noise from volatility, *Journal of Financial Economics*, **79**(3), 367–389.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008). Microstructure noise, realized volatility, and optimal sampling, *Review of Economic Studies*, **75**(2), 655–692.

Barndorff-Nielsen, O. E. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society A*, **1674**(353), 401–419.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *Journal of Royal Statistical Society B*, **64**(2), 253–280.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008). Realized kernels in practice: Trades and quotes, *Econometrica*, **76**(6), 1482–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2009). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrics Journal*, **12**(3), C1–C32.

Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **31**(3), 307–327.

Breidt, F. J., Crato, N. and Lima, P. D. (1998). The detection and estimation of long memory in stochastic volatility, *Journal of Econometrics*, **83**(1-2), 325–348.

Campbell, J. Y., Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, Princeton.

Chan, J. C. C. and Grant, A. L. (2015). Pitfalls of estimating the marginal likelihood using the modified harmonic mean, *Economics Letters*, **131**, 29–33.

Chan, N. H. and Palma, W. (1998). State space modeling of long-memory processes, *Annals of Statistics*, **26**(2), 719–740.

Chib, S. (1995). Marginal likelihood from the Gibbs output, *Journal of the American Statistical Association*, **90**(432), 1313–1321.

Chib, S. and Greenberg, E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm, *American Statistician*, **49**(4), 327–335.

Chib, S. and Jeliazkov, I. (2001). Marginal likelihood from the Metropolis-Hastings output, *Journal of the American Statistical Association*, **96**(453), 270–281.

Diebold, F. X. (1988). *Empirical Modeling of Exchange Rate Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin.

Dobrev, D. P. and Szerszen, P. J. (2010). The information content of high-frequency data for estimating equity return models and forecasting risk, FEDS Working Papers, No.2010-45.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation, *Econometrica*, **50**(4), 987–1008.

Fernández, C. and Steel, M. F. J. (1998). On Bayesian modeling of fat tails and skewness, *Journal of the American Statistical Association*, **93**(441), 359–371.

Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics 4* (eds. J. M. Bernardo, J. O. Berger, A. Dawid and A. Smith), 169–193, Oxford University Press, Oxford.

Geweke, J. (1999). Using simulation methods for Bayesian econometric models: Inference, development, and communication, *Econometric Reviews*, **18**(1), 1–73.

Giot, P. and Laurent, S. (2004). Modeling daily value-at-risk using realized volatility and ARCH type models, *Journal of Empirical Finance*, **11**(3), 379–398.

Hansen, P. R. and Huang, Z. (2016). Exponential GARCH modeling with realized measures of volatility, *Journal of Business & Economic Statistics*, **34**(2), 269–287.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A forecast comparison of volatility models: Does anything beat a GARCH(1,1)?, *Journal of Applied Econometrics*, **20**(7), 873–889.

Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006). Realized variance and market microstructure noise, *Journal of Business & Economic Statistics*, **24**(2), 127–161.

Hansen, P. R., Huang, Z. and Shek, H. (2012). Realized GARCH: A joint model of returns and realized measures of volatility, *Journal of Applied Econometrics*, **27**(6), 877–906.

Hasbrouck, J. (2007). *Empirical Market Microstructure*, Oxford University Press, New York.

石原庸博 (2015). 一般化した Realized Stochastic Volatility モデルの推定—日経 225 収益率・実現ボラティリティの暦効果への応用—, 経済研究, **66**(1), 1–18.

Jarque, C. M. and Bera, A. K. (1987). A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review*, **55**(2), 163–172.

Koopman, S. J. and Scharth, M. (2013). The analysis of stochastic volatility in the presence of daily realized measures, *Journal of Financial Econometrics*, **11**(1), 76–115.

Koopman, S. J., Jungbacker, B. and Hol, E. (2005). Forecasting daily variability of the S&P 100 stock index using historical, realised and implied volatility measurements, *Journal of Empirical Finance*, **12**(3), 445–475.

Kurose, Y. and Omori, Y. (2020). Multiple-block dynamic equicorrelations with realized measures, leverage and endogeneity, *Econometrics and Statistics*, **13**, 46–68.

Ljung, G. M. and Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series analysis, *Biometrika*, **65**(2), 297–303.

McAleer, M. and Medeiros, M. C. (2008). Realized volatility: A review, *Econometric Reviews*, **27**(1–3), 10–45.

中島上智, 大森裕浩 (2011). 一般化双曲非対称 t 分布を用いた確率的ボラティリティ変動モデルの推定と株価収益率データへの応用, 日本統計学会誌, **40**(2), 61–88.

Nakajima, J. and Omori, Y. (2012). Stochastic volatility model with leverage and asymmetrically heavy-tailed error using GH skew Student's t-distribution, *Computational Statistics & Data Analysis*, **56**(11), 3690–3704.

Nishino, H. and Kakamu, K. (2013). Bayesian Whittle estimation of ARFIMA model, *Advances and Applications in Statistics*, **37**(2), 149–170.

Nugroho, D. B. and Morimoto, T. (2014). Realized non-linear stochastic volatility models with asymmetric effects and generalized Student's t-distributions, *Journal of Japan Statistical Society*, **44**(1), 83–118.

Nugroho, D. B. and Morimoto, T. (2016). Box-Cox realized asymmetric stochastic volatility models with generalized Student's t-error distributions, *Journal of Applied Statistics*, **43**(10), 1906–1927.

O'Hara, M. (1995). *Market Microstructure Theory*, Blackwell, Oxford.

O'Hara, M. (2015). High frequency market microstructure, *Journal of Financial Economics*, **116**(2), 257–270.

大森裕浩, 渡部敏明 (2013). Realized Stochastic Volatility モデル—マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定—, 日本統計学会誌, **42**(2), 273–303.

Omori, Y., Chib, S., Shephard, N. and Nakajima, J. (2007). Stochastic volatility with leverage: Fast likelihood inference, *Journal of Econometrics*, **140**(2), 425–229.

Pitt, M. K. and Shephard, N. (1999). Filtering via simulation: Auxiliary particle filters, *Journal of the American Statistical Association*, **94**(446), 590–599.

Prause, K. (1999). The generalized hyperbolic model: Estimation, financial derivatives and risk measures, PhD Dissertation, University of Freiburg, Freiburg.

Ruiz, E. and Veiga, H. (2008). Modeling long-memory volatilities with leverage effect: A-LMSV versus

FIEGARCH, *Computational Statistics & Data Analysis*, **52**(6), 2846–2862.

Shephard, N. (1996). Statistical aspects of ARCH and stochastic volatility, *Time Series Models in Econometrics, Fiannce and Other Fields* (eds. D. R. Cox, D. V. Hinkley and O. E. Barndorff-Nielsen), 1–67, Chapman & Hall, New York.

Shirota, S., Hizu, T. and Omori, Y. (2014). Realized stochastic volatility with leverage and long memory, *Computational Statistics & Data Analysis*, **76**(C), 618–641.

Shirota, S., Omori, Y., Lopes, H. F. and Piao, H. (2017). Cholesky realized stochastic volatility model, *Econometrics and Statistics*, **3**(1), 34–59.

So, M. K. P. (2002). Bayesian analysis of long memory stochastic volatility models, *Sankhyā*: *The Indian Journal of Statistics, Series B*, **64**(1), 1–10.

高橋 慎 (2014). Smooth transition Realized Stochastic Volatility モデル, 日本統計学会誌, **44**(1), 41–60.

Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009). Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Computational Statistics & Data Analysis*, **53**(6), 2404–2426.

Takahashi, M., Watanabe, T. and Omori, Y. (2016). Volatility and quantile forecasts by Realized Stochastic Volatility models with generalized hyperbolic distribution, *International Journal of Forecasting*, **32**(2), 437–457.

Taylor, S. J. (1986). *Modelling Financial Time Series*, Wiley, New York.

Ubukata, M. and Watanabe, T. (2014). Pricing Nikkei 225 options using Realized Volatility, *Japanese Economic Review*, **65**(4), 431–467.

渡部敏明 (2000).『ボラティリティ変動モデル』, 朝倉書店, 東京.

渡部敏明 (2005). マルチ・ムーブ・サンプラーを用いた確率的ボラティリティ変動モデルのベイズ推定,『ベイズ計量経済分析 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその応用』(和合肇 編), 第 9 章, 259–294, 東洋経済新報社, 東京.

渡部敏明 (2007). Realized Volatility—サーベイと日本の株式市場への応用, 経済研究, **58**(4), 352–373.

渡部敏明, 佐々木浩二 (2006). ARCH 型モデルと “Realized Volatility” によるボラティリティ予測とバリュー・アット・リスク, 金融研究, **25**(2), 39–74.

Yamauchi, Y. and Omori, Y. (2019). Multivariate stochastic volatility model with realized volatilities and pairwise realized correlations, *Journal of Business and Economic Statistics* (in press).

Zhang, L. (2006). Efficient estimation of stochastic volatility using noisy observations: A multi-scale approach, *Bernoulli*, **12**(6), 1019–1043.

Zhang, L., Mykland, P. A. and Aït-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data, *Journal of the American Statistical Association*, **100**(472), 1394–1411.

Zheng, T. and Song, T. (2014). A Realized Stochastic Volatility model with Box-Cox transformation, *Journal of Business and Economic Statistics*, **32**(4), 593–605.

Realized Stochastic Volatility Model
—Extensions and Application to Japanese Stock Index—

Makoto Takahashi[1], Yasuhiro Omori[2] and Toshiaki Watanabe[3]

[1]Faculty of Business Administration, Hosei University
[2]Graduate School of Economics, University of Tokyo
[3]Institute of Economic Research, Hitotsubashi University

Realized volatility (RV), which is the sum of squared intraday returns over a certain interval (such as a day), has widely been used as an estimator of the financial volatility. In the real market, however, the presence of non-trading hours and market microstructure noise in transaction prices may create bias in the RV. Taking account of this bias, several studies propose modeling daily returns and RV simultaneously. The resultant model, based on the stochastic volatility (SV) model, is called the realized stochastic volatility (RSV) model. Because the likelihood of the RSV model, as well as the SV model, is difficult to evaluate analytically, the Bayesian estimation method via the Markov chain Monte Carlo (MCMC) is often used. In this article, we explain the RSV model, its Bayesian estimation method via MCMC, and several extensions of the RSV model. Further, we apply the models to the Nikkei 225 stock index and explain the estimation results.

Key words: Markov chain Monte Carlo, realized volatility, stochastic volatility model.