非対称な接合関数の性質と統計的推定方法

―資産価格変動への応用―

吉羽 要直1,2

(受付 2019 年 5 月 31 日;改訂 11 月 14 日;採択 11 月 15 日)

要 旨

非対称 t 接合関数 (skew-t copula) は,多変量非対称 t 分布に内在する接合関数である.多変量非対称 t 分布は非対称性の導入方法により,いくつかの異なる分布が提案されている.本稿では代表的な多変量非対称 t 分布に内在する非対称 t 接合関数の定義と性質をまとめ,非対称 t 接合関数の最尤推定に必要な手続きを整理する.また,非対称 t 接合関数の実証研究の結果を整理し,本邦の株価変動を推定した実証結果を示す.こうした実証結果から,裾依存性の度合いと上下での依存性の違いを調整できる非対称 t 接合関数が資産価格変動の表現に有効であることを指摘し,今後の課題を述べる.

キーワード:接合関数、多変量非対称t分布、裾依存係数、

1. はじめに

金融ポートフォリオのリスク量の把握などに際して、リスクファクター間の依存構造は一般 的に接合関数(copula)で表現される(接合関数の基本的な理論と応用手法は塚原, 2008 などを参 照).特に金融リスク管理実務においては、順位相関の程度を相関行列パラメータで柔軟に表 現できる正規接合関数(Gaussian/Normal copula)か t 接合関数(Student-t copula)で表現される ことが多い。正規接合関数は、線形相関行列を用いたリスクファクター間の依存性について、 個々のリスクファクターの変動(周辺分布)に関しては正規分布以外の分布も許容した拡張表現 となっており、推定等は容易である. しかしながら、ファクターとなる資産価格変動の裾での 依存性は低くなるという特徴を有しているため、デフォルトなどを含めストレス状況での資産 変動の記述には向かず、証券化商品の価格が暴落したリーマンショック時には批判の対象と なった. 一方、t 接合関数は、ファクターとなる資産価格変動の裾での強い依存性を表現でき るため、ストレス状況を考慮した金融リスクの把握に実務上広く用いられている。しかしなが ら、ファクターとなる資産価格変動の依存性が上下対称になるという制約があり、非現実的な 設定となってしまう. Yoshiba (2018)では、こうした背景から非対称な裾依存性を表現できる 非対称 t 接合関数(skew-t copula)を利用するためにその最尤推定法を具体的に実装し、日米欧 の株価収益率に適用した実証結果を示した.本稿ではまず代表的な多変量非対称 t 分布に内在 する非対称 t 接合関数の定義と性質をまとめる. そのうえで、非対称 t 接合関数の推定法の概 要を整理し、資産価格変動等に応用した実証結果を整理する.

¹ 東京都立大学大学院 経営学研究科: 〒 100-0005 東京都千代田区丸の内 1-4-1

² 統計数理研究所 客員: 〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3

非対称 t 接合関数は、正規接合関数や t 接合関数と同様に、多変量の非対称 t 分布に内包さ れる陰な接合関数(implicit copula)である. Kotz and Nadarajah (2004)で示されているように 多変量の非対称 t 分布には様々な提案があることから、様々な非対称 t 接合関数を定義できる. 先行研究ではこれまで非対称 t 接合関数として 3 つの提案がなされている. 1 つ目は、Demarta and McNeil (2005) によって提案されたもので、Blaesild and Jensen (1981)が提案した多変量 の一般化双曲型(generalized hyperbolic, GH)の非対称 t 分布に内包される接合関数である.本 稿では、この多変量非対称 t 分布を GH 非対称 t 分布と呼び、内包される接合関数を GH 非 対称 t 接合関数(GH skew-t copula)と呼ぶ. 2 つ目は, Smith et al. (2012)が提案し電力市場価 格のモデリング等に応用したもので、Sahu et al. (2003) による多変量非対称 t 分布に内包さ れる接合関数である. 3つ目は、Joe (2006)がその利用を提唱しているもので、Azzalini and Capitanio (2003) による多変量の非対称 t 分布に内包される接合関数である。本稿では、この 多変量非対称 t 分布を AC 非対称 t 分布と呼び,内包される接合関数を AC 非対称 t 接合関数 (AC skew-t copula)と呼ぶ. Joe (2006)は AC 非対称 t 接合関数の表現について言及し応用上 の可能性を述べているものの、具体的な推定法については論じていない。AC非対称 t 分布は、 統計学上は最も利用されている多変量非対称 t 分布であるが、その接合関数の推定方法や実証 分析についてはあまり研究が進んでいなかったことから Yoshiba (2018)では AC 非対称 t 接合 関数に焦点を当ててその推定法を論じている.

以下、2節では上記の3つの非対称 t 接合関数を中心にその性質をまとめる。Yoshiba (2018)で取り上げた AC 非対称 t, GH 非対称 t の接合関数のほか、Sahu et al. (2003)の多変量非対称 t 分布に内包される接合関数についても、その性質を比較してまとめる。また、多変量非対称 t 分布については、Jones (2002)、Ferreira and Steel (2007)、Rosco et al. (2011)の提案にも言及 する。3節では最尤推定法の実装について必要な接合密度の表現と推定手法を整理する。4節では非対称 t 接合関数を利用した実証研究の結果を整理するとともに、本邦の 12 年間の株価 日次収益率に対して推定した実証結果を示す。5節では本稿で解説した研究をまとめ、今後の 発展の可能性について述べる。

2. 非対称 t 接合関数の性質

2.1 3種類の d変量標準非対称 t 分布

まず、変量数を d として、1 節で示した 3 種類の非対称 t 接合関数の基となっている d 変量非対称 t 分布に従う確率ベクトル $X \in \mathbb{R}^d$ の表現と密度関数を示す.この際、導出される接合関数は基となる分布の位置パラメータ $\mathbf{l}^\top = (l_1,\ldots,l_d)$ や尺度パラメータ $\mathbf{s}^\top = (s_1,\ldots,s_d)$ に依らないため、ここでは $\mathbf{l}^\top = (0,\ldots,0), \mathbf{s}^\top = (1,\ldots,1)$ という標準分布を考える.

2.1.1 GH 非対称 t 分布

d変量の標準 GH 非対称 t 分布に従う確率ベクトル X は

$$(2.1) X = \gamma V^{-1} + \frac{Z}{\sqrt{V}}$$

で与えられる。ただし、 $\gamma \in \mathbb{R}^d$ で、V はガンマ分布 $G(\nu/2,\nu/2)$ に従い、Z は V とは独立に d 変量の正規分布 $N_d(\mathbf{0},\Psi)$ に従う。ここで、 γ は歪みを表すパラメータベクトルである。この分布は、Barndorff-Nielsen(1977)が提案した一般化双曲型分布の多変量版 (Blaesild and Jensen, 1981)になっており、Demarta and McNeil(2005)で示されているように密度関数は次式で与えられる。

(2.2)
$$f(x; \Psi, \gamma, \nu) = \frac{2^{\frac{2 - (\nu + d)}{2}} K_{\frac{\nu + d}{2}}(\eta(x; \Psi, \gamma, \nu)) \exp(x^{\top} \Psi^{-1} \gamma)}{(\pi \nu)^{d/2} \Gamma(\nu/2) \sqrt{|\Psi|} (\eta(x; \Psi, \gamma, \nu))^{-\frac{\nu + d}{2}} \left(1 + \frac{x^{\top} \Psi^{-1} x}{\nu}\right)^{\frac{\nu + d}{2}}}.$$

ただし、 $\eta(x; \Psi, \gamma, \nu) = \sqrt{(\nu + x^\top \Psi^{-1} x) \gamma^\top \Psi^{-1} \gamma}$ であり、 $K_{\lambda}(\cdot)$ は第3種の修正ベッセル関数である。確率ベクトル(2.1)の期待値と分散共分散行列は

(2.3)
$$E[X] = \frac{\nu}{\nu - 2} \gamma, \text{ cov}[X] = \frac{\nu}{\nu - 2} \Psi + \frac{2\nu^2}{(\nu - 2)^2 (\nu - 4)} \gamma \gamma^{\top}$$

で与えられ、 ν < 4 では分散や共分散は発散する.

GH 非対称 t 分布の性質については、単変量が中心ではあるものの Aas and Haff(2006)で詳しく記述されているほか、増田(2002)ではより広く GH 分布の性質について纏めている。 $\nu \to \infty$ では d 変量の (標準) 正規分布に収束し、 $\gamma = \mathbf{0}$ ならば (対称な) d 変量の t 分布に帰着する。 $\gamma = \mathbf{0}$ ならば $\eta(x; \Psi, \mathbf{0}, \nu) = 0$ であり、増田(2002)の (A.8) に示されているように、第 3 種の修正ベッセル関数は $\eta \to 0$ で $K_{\lambda}(\eta) \sim \Gamma(\lambda)2^{\lambda-1}\eta^{-\lambda}$ となることから、密度関数(2.2) は次式のように尺度行列を Ψ とする自由度 ν の d 変量 t 密度関数 $t_{d,\nu}(x; \Psi)$ に帰着する。

(2.4)
$$t_{d,\nu}(x;\Psi) = \frac{\Gamma((\nu+d)/2)}{(\pi\nu)^{d/2}\Gamma(\nu/2)\sqrt{|\Psi|}} \left[1 + \frac{x^{\top}\Psi^{-1}x}{\nu} \right]^{-\frac{\nu+d}{2}}.$$

2.1.2 Sahu et al. (2003)の非対称 t 分布

Sahu et al. (2003) の非対称 t 分布に従う確率ベクトル X は,

$$X = \frac{D|W| + Z}{\sqrt{V}}$$

で与えられる。ただし, $D=\mathrm{diag}(\tilde{\delta}_1,\dots,\tilde{\delta}_d)$ は歪みパラメータの行列,V はガンマ分布 $G(\nu/2,\nu/2)$ に従う確率変数,Z は V とは独立に d 変量正規分布 $N_d(0,\Sigma)$ に従う確率ベクトル, $\mathbf{W}=(W_1,\dots,W_d)^{\mathsf{T}}$ は V および Z とは独立に d 変量正規分布 $N_d(0,I)$ に従う確率ベクトルである。また, Σ は Z の相関行列,I は $d\times d$ の単位行列である。GH 非対称 t 分布に従う確率ベクトルが (2.1) のように t 分布に従う確率変数 Z/\sqrt{V} を生成してから,そこで用いたガンマ確率変数 V を用いて歪みのファクター γV^{-1} を加えて生成されているのに対し,Sahu et al. (2003) の非対称 t 分布に従う確率ベクトル X は,まず Z に歪みファクター $D|\mathbf{W}|$ を加えて非対称正規確率変数を生成した後に, \sqrt{V} で除することによって生成されているのが特徴である。確率ベクトル (2.5) の密度関数は,Sahu et al. (2003) の (11) 式で与えられているように,尺度行列を $I-D(\Sigma+D^2)^{-1}D$ とする自由度 $\nu+d$ の d 変量 t 分布に従う確率ベクトル U を用いて,

(2.6)
$$g(\boldsymbol{x}; \Sigma, D, \nu) = 2^{d} t_{d,\nu}(\boldsymbol{x}; \Sigma + D^{2}) \Pr[\boldsymbol{U} \le D(\Sigma + D^{2})^{-1} \boldsymbol{x}]$$

で与えられる. 確率ベクトル (2.5) の期待値と分散共分散行列は, $\tilde{\delta} = (\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_d)^{\mathsf{T}}$ として,

(2.7)
$$E[\mathbf{X}] = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \tilde{\delta}$$

(2.8)
$$\operatorname{cov}[\mathbf{X}] = \frac{\nu}{\nu - 2} (\Sigma + D^2) - \frac{\nu}{\pi} \left\{ \frac{\Gamma((\nu - 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \right\}^2 D^2$$

で与えられ、 $\nu \leq 2$ では分散や共分散は発散する。 $\nu \to \infty$ では d 変量の非対称正規分布に収束し、 $\mathrm{diag}D = \mathbf{0}$ ならば密度関数 (2.6) で $\mathrm{Pr}[\mathbf{U} \leq \mathbf{0}] = 1/2^d$ となり (対称な) d 変量の t 分布に帰着する。 $\mathrm{diag}D = \mathbf{0}$ でかつ $\nu \to \infty$ ならば d 変量の標準正規分布に帰着する。

2.1.3 AC 非対称 *t* 分布

AC 非対称 t 分布に従う確率ベクトル X は、Sahu et al. (2003) と同様に、非対称正規確率ベクトル $Y=(Y_1,\ldots,Y_d)^\top$ を生成した後に、Y とは独立にガンマ分布 $G(\nu/2,\nu/2)$ に従う V の平方根で除することによって、次式のように与えられる.

$$X = \frac{Y}{\sqrt{V}}.$$

 $\zeta \zeta \zeta$, Y_i (i = 1, ..., d) $i\sharp$

$$(2.10) Y_j = \delta_j |Z_0| + \sqrt{1 - \delta_j^2} Z_j, \ Z_0 \sim N(0, 1), \ \boldsymbol{Z} = (Z_1, \dots, Z_d)^\top \sim N_d(0, \Psi)$$

で与えられる。 Z_0 , Z, V は互いに独立である。Sahu et al. (2003) の確率ベクトルを与えた (2.5)式において,右辺の分子を Y で書き表すと $Y_j = \delta_j |W_j| + Z_j$ となっており,非対称性を与えるファクターが $|Z_0|$ と共通しているか, $|W_j|$ と独立に与えているかの違いがあることが わかる。非対称性を与える 1 つの共通ファクター $|Z_0|/\sqrt{V}$ は 1 変量 t 分布に従うことから,d 変量の標準 AC 非対称 t 分布の密度関数は,

(2.11)
$$g(\boldsymbol{x}; \Omega, \boldsymbol{\alpha}, \nu) = 2t_{d,\nu}(\boldsymbol{x}; \Omega)T_{1,\nu+d}\left(\boldsymbol{\alpha}^{\top}\boldsymbol{x}\sqrt{\frac{\nu+d}{\boldsymbol{x}^{\top}\Omega^{-1}\boldsymbol{x}+\nu}}\right)$$

と表せる。ただし, $\alpha\in\mathbb{R}^d$ は歪みを表すパラメータであり, $T_{1,\nu}(\cdot)$ は自由度 ν の 1 変量 t (累積) 分布関数である。尺度行列 Ω は,(2.10) で用いた相関行列 Ψ を用いて,次式のように表される。

(2.12)
$$\Omega = \Delta(\Psi + \zeta \zeta^{\top}) \Delta, \ \Delta \equiv \operatorname{diag}(\sqrt{1 - \delta_1^2}, \dots, \sqrt{1 - \delta_d^2}).$$

ここで、 $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_1, \dots, \zeta_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ は元々の歪みパラメータ $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_d)^\top$ と各成分が 1 対 1 に対応する別表現の歪みパラメータで

(2.13)
$$\zeta_j = \frac{\delta_j}{\sqrt{1 - \delta_j^2}}, \ j = 1, \dots, d$$

で定義される. また、(2.11)での歪みを表すパラメータ α は、次式のように表される.

(2.14)
$$\alpha = \frac{\Omega^{-1} \delta}{\sqrt{1 - \delta^{\top} \Omega^{-1} \delta}} = \frac{\Delta^{-1} \Psi^{-1} \zeta}{\sqrt{1 + \zeta^{\top} \Psi^{-1} \zeta}}.$$

確率ベクトルXは(2.9), (2.10)に従って構成可能であるが、より簡便な方法として、

$$(2.15) R = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{\delta}^{\top} \\ \boldsymbol{\delta} & \Omega \end{pmatrix}$$

という $(d+1)\times(d+1)$ の相関行列 R を持つ d+1 変量正規分布ベクトル \tilde{Z} を \tilde{Z} とは独立な $V\sim G(\nu/2,\nu/2)$ の平方根で除して自由度 ν の t 分布に従う確率ベクトル $(\tilde{X_0},\tilde{X_1},\ldots,\tilde{X_d})^{\top}$ を 生成し,

(2.16)
$$\boldsymbol{X} = \begin{cases} (\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d)^\top & \text{if } \tilde{X}_0 \ge 0 \\ -(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_d)^\top & \text{if } \tilde{X}_0 < 0 \end{cases}$$

で X を定める方法もある. 本稿でも 3 節の分析では(2.16)の表現を用いる. 確率ベクトル (2.9) の期待値と分散共分散行列は

(2.17)
$$E[X] = \left(\frac{\nu}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\Gamma((\nu-1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \boldsymbol{\delta}$$

(2.18)
$$\operatorname{cov}[\boldsymbol{X}] = \frac{\nu}{\nu - 2} \Omega - \frac{\nu}{\pi} \left\{ \frac{\Gamma((\nu - 1)/2)}{\Gamma(\nu/2)} \right\}^2 \delta \delta^{\top}$$

で与えられ、2.1.2 節の (2.8) と同様に、 $\nu \leq 2$ では分散や共分散は発散する。 $\nu \to \infty$ では d 変量の非対称正規分布に収束し、 $\delta = \mathbf{0}$ ならば $\alpha = \mathbf{0}$ で、密度関数 (2.11) で $T_{1,\nu+d}(0) = 1/2$ となり、(対称な) d 変量の t 分布に収束する。 $\delta = \mathbf{0}$ でかつ $\nu \to \infty$ ならば d 変量の標準正規分布に収束する。

Sahu et al. (2003) と Azzalini and Capitanio (2003) の非対称 t 分布に従う確率変数の構成のように潜在変数の正負に応じて分布を歪ませる方法は、非対称分布の構成方法としては最も一般的なものであり、どちらも Branco and Dey (2001) で提案された多変量非対称楕円分布の一般的な構成方法に準じている。

フィッシャー情報行列について、Arellano-Valle (2010) は、多変量 AC 非対称 t 分布が多変量非対称正規分布と違い、 $\alpha=0$ で特異にならないということを指摘している。すなわち、多変量 AC 非対称 t 分布は多変量非対称正規分布よりも推定精度が高まりやすいことを示唆している。多変量 AC 非対称 t 分布や関連する分布については Azzalini (2013) に詳しく記述されている。

2.2 導出される接合関数

一般に、 θ をパラメータとする d 変量の分布関数 $G(x;\theta)$ に内包される接合関数 $C_G(u_1,\ldots,u_d;\theta_C)$ は、各 j $(j=1,\ldots,d)$ 変量の周辺分布の分位点関数(分布関数の逆関数)を $G_j^{-1}(x_j;\theta_j)$ として、

(2.19)
$$C_G(u_1, \dots, u_d; \boldsymbol{\theta}_C) = G(G_1^{-1}(u_1; \boldsymbol{\theta}_1), \dots, G_d^{-1}(u_d; \boldsymbol{\theta}_d); \boldsymbol{\theta})$$

と定義される。すなわち,接合関数の特定には,基となる d 変量の分布を特定するとともに,その周辺分布を特定する必要がある。そこで,ここでは 2.1 節で導入した 3 種類の d 変量標準非対称 t 分布の周辺分布を特定することで, θ , θ_j $(j=1,\ldots,d)$, θ_C を定めて,導出される接合関数を特定する。

2.2.1 GH 非対称 t 分布の周辺分布

(2.1)より第 i 成分の周辺分布は,

$$(2.20) X_j = \gamma_j V^{-1} + \frac{Z_j}{\sqrt{V}}$$

で与えられるため、密度関数は(2.2)で d=1を与えたものに相当し、

(2.21)
$$f_j(x; \gamma_j, \nu) = \frac{2^{\frac{1-\nu}{2}} K_{\frac{\nu+1}{2}} (\sqrt{\gamma_j^2 (\nu + x^2)}) \exp(\gamma_j x)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi \nu} (\sqrt{\gamma_j^2 (\nu + x^2)})^{-\frac{\nu+1}{2}} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{\frac{\nu+1}{2}}}$$

で与えられる. したがって、導出される接合関数は、 $\theta_C = \theta = (\gamma, \Psi, \nu)$ 、 $\theta_j = (\gamma_j, \nu)$ (j = 1, ..., d) で特定される.

2.2.2 Sahu et al. (2003)の非対称 t 分布の周辺分布

(2.5)より第j成分の周辺分布は、

$$(2.22) X_j = \frac{\tilde{\delta}_j |W_j| + Z_j}{\sqrt{V}}$$

で与えられ, 密度関数は

(2.23)
$$g_j(x;\zeta_j,\nu) = 2t_{1,\nu}(x;1+\tilde{\delta}_j^2)T_{1,\nu+1}\left(\frac{\tilde{\delta}_j}{\sqrt{1+\tilde{\delta}_j^2}}x\sqrt{\frac{(\nu+1)(1+\tilde{\delta}_j^2)}{x^2+\nu(1+\tilde{\delta}_j^2)}}\right)$$

で与えられる. $t_{1,\nu}(x;\sigma^2)$ は(2.4)を用いて定義される尺度パラメータが σ で自由度 ν の 1 変量 t 分布の密度関数である. したがって、導出される接合関数は、 $\theta_C = \theta = (\tilde{\delta}, \Sigma, \nu)$ 、 $\theta_j = (\tilde{\delta}_j, \nu)$ $(j = 1, \dots, d)$ で特定される.

2.2.3 AC 非対称 t 分布の周辺分布

(2.9), (2.10)より第 i 成分の周辺分布は,

$$(2.24) X_j = \frac{\delta_j |Z_0| + \sqrt{1 - \delta_j^2} Z_j}{\sqrt{V}}$$

で与えられ, 密度関数は

(2.25)
$$g_j(x;\zeta_j,\nu) = 2t_{1,\nu}(x)T_{1,\nu+1}\left(\zeta_j x \sqrt{\frac{\nu+1}{x^2+\nu}}\right)$$

で与えられる。ここで, $t_{1,\nu}(\cdot)$ は自由度 ν の 1 変量 t 分布の密度関数で,(2.4)を用いて $t_{1,\nu}(x)=t_{1,\nu}(x;1)$ と定義される。 ζ_j は(2.13)で定義される。(2.11)より $\theta=(\alpha,\Omega,\nu)$,(2.25) より $\theta_j=(\zeta_j,\nu)$ ($j=1,\ldots,d$) と与えられる。 θ_C については, α が(2.14), ζ_j が(2.13)で定義されていることを踏まえると, $\theta_C=(\delta,\Omega,\nu)$ で導出される接合関数を特定できるため,Yoshiba (2018) では導出される接合関数をそのように特定している。

なお、Kollo and Pettere (2010) は早い段階で AC 非対称 t 接合関数の推定を行ったと主張している。しかし、Kollo and Pettere (2010) では、(2.25) の ζ_j を α_j とし、周辺分布の特定を誤っているため、その後の議論が誤った方向に進んでいる点に留意されたい。

2.3 裾依存係数

2 変量の累積分布関数 $F(x_1,x_2)$ に対し、各変量の周辺分布関数を $F_j(\cdot)$ (j=1,2) とするとき、下側・上側裾依存係数 λ_L 、 λ_U は

(2.26)
$$\lambda_{L} = \lim_{u \to 0+} \Pr[X_{1} \le F_{1}^{-1}(u) | X_{2} \le F_{2}^{-1}(u)],$$

$$\lambda_{U} = \lim_{u \to 1-} \Pr[X_{1} \ge F_{1}^{-1}(u) | X_{2} \ge F_{2}^{-1}(u)]$$

で定義され、接合関数 $C(u_1, u_2)$ を用いると

(2.27)
$$\lambda_L = \lim_{u \to 0+} \frac{C(u, u)}{u}, \ \lambda_U = \lim_{u \to 1-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

と表せる. (2.26) から明らかなように裾依存係数は極値での 2 変量 $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ の依存関係を示すもので、 \mathbf{X} を多変量で考えると金融ポートフォリオのリスク管理などではシステミックリスクを捉える重要な概念に相当している. Fung and Seneta (2010) は, \mathbf{X} を価格変動とすると,下側裾依存係数は極端な価格急落は市場クラッシュを捉えるものであり,価格,収益率,信用リスクのモデリングで重要な概念であるとして, \mathbf{GH} 非対称 t 分布と \mathbf{AC} 非対称 t 分布の下側裾依存係数 λ_L を整理している. ここではそれらの裾依存係数について上側裾依存係数も含めて確認する.

2.3.1 GH 非対称 *t* 分布の場合

GH 非対称 t 分布については,Banachewicz and van der Vaart (2008) が Theorem 2.1 で示した特殊ケースの場合として,Fung and Seneta (2010) が Theorem 1 で下側裾依存係数 λ_L を次のように整理している.

 $(1)\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ の場合,

$$\lambda_L = 2 T_{1,\nu+1} \left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$$

- $(2)\gamma_1 > 0$ で $\gamma_2 > 0$ の場合, $\lambda_L = 0$
- $(3)\gamma_1 < 0$ で $\gamma_2 < 0$ の場合、 $\lambda_L = 1$
- $(4)\gamma_1 > 0$ で $\gamma_2 < 0$ の場合、 $\lambda_L = 0$
- $(5)\gamma_1 = 0$ で $\gamma_2 > 0$ の場合、 $\lambda_L = 0$
- $(6)\gamma_1 = 0$ で $\gamma_2 < 0$ の場合,

$$\lambda_L = \int_0^1 \left(1 - \Phi\left(\left(\frac{2^{\nu/2} \Gamma((\nu+1)/2)}{2\sqrt{\pi}} \right)^{1/\nu} u^{1/\nu} \right) \right) du.$$

上記の結果から、 $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ とすると、 $\gamma < 0$ であれば $\lambda_L = 0$ 、 $\gamma > 0$ であれば $\lambda_L = 1$ と γ の正負で上下双方向の裾依存係数が極端に変化することがわかる。 λ_L は γ_1, γ_2 に応じて変化するため、必要に応じて $\lambda_L(\gamma_1, \gamma_2)$ と記述することにする。

上側裾依存係数 $\lambda_U(\gamma_1,\gamma_2)$ については、Banachewicz and van der Vaart (2008) で示されているが、下側裾依存係数 $\lambda_L(\gamma_1,\gamma_2)$ からも導出可能である。(2.1) において、Z は d 変量標準正規分布であることから、 $\Pr[Z/\sqrt{V}<-x]=\Pr[Z/\sqrt{V}>x]$ が成立する。したがって

(2.28)
$$\Pr[\gamma V^{-1} + \mathbf{Z}/\sqrt{V} \ge x] = \Pr[-\gamma V^{-1} + \mathbf{Z}/\sqrt{V} \le -x]$$

となり、周辺分布についても同様の関係が成立するため、

$$(2.29) \lambda_U(\gamma_1, \gamma_2) = \lambda_L(-\gamma_1, -\gamma_2)$$

となる.

2.3.2 AC 非対称 t 分布の場合

Fung and Seneta (2010) と Padoan (2011) は独立に 2 変量 AC 非対称 t 分布の裾依存係数を与えている。特に Padoan (2011) は,下側裾依存係数 λ_L だけでなく上側裾依存係数 λ_U についても

(2.30)
$$\lambda_L = F_{EST}(-a_{2,1}; \alpha_2 \sqrt{1 - \rho^2}, -\tau_1, \nu + 1) + F_{EST}(-a_{1,2}; \alpha_1 \sqrt{1 - \rho^2}, -\tau_2, \nu + 1)$$

(2.31)
$$\lambda_U = 2 - F_{EST}(a_{2,1}; \alpha_2 \sqrt{1 - \rho^2}, \tau_1, \nu + 1) - F_{EST}(a_{1,2}; \alpha_1 \sqrt{1 - \rho^2}, \tau_2, \nu + 1)$$

であることを示している.ここで, $F_{EST}(\cdot)$ は 1 変量の拡張 (標準) 非対称 t 分布の累積分布関数で

$$F_{EST}(x;\alpha,\tau,\nu) = \int_{-\infty}^{x} t_{1,\nu}(z) \frac{T_{1,\nu+1}\left((\alpha z + \tau)\sqrt{\frac{\nu+1}{\nu+z^2}}\right)}{T_{1,\nu}(\tau/\sqrt{1+\alpha^2})} dz$$

と定義され、(2.30)に含まれる $a_{2,1}, a_{1,2}, \tau_1, \tau_2$ は

$$a_{2,1} = \left\{ \left(\frac{T_{1,\nu+1}(-\zeta_2\sqrt{\nu+1})}{T_{1,\nu+1}(-\zeta_1\sqrt{\nu+1})} \right)^{1/\nu} - \rho \right\} \sqrt{\frac{\nu+1}{1-\rho^2}}$$

$$a_{1,2} = \left\{ \left(\frac{T_{1,\nu+1}(-\zeta_1\sqrt{\nu+1})}{T_{1,\nu+1}(-\zeta_2\sqrt{\nu+1})} \right)^{1/\nu} - \rho \right\} \sqrt{\frac{\nu+1}{1-\rho^2}}$$

$$\tau_1 = \sqrt{\nu+1}(\alpha_1 + \rho\alpha_2), \ \tau_2 = \sqrt{\nu+1}(\alpha_2 + \rho\alpha_1)$$

で定義される.

2.3.3 AC 非対称 t 接合関数と GH 非対称 t 接合関数

図 1 は,周辺分布を標準正規分布,接合関数を AC および GH の非対称 t 接合関数としたときの 2 変量密度関数の等高線を描いたものである.自由度パラメータは $\nu=3$,相関パラメータは $\rho=0.5$ とし,歪みパラメータは AC 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$,GH 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$,GH 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$,GH 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$ 。 GH 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$ 。 GH 非対称 t 接合関数では $\delta_1=\delta_2=\delta$ 。 GH 非対称 t 接合関数 $\delta_2=\delta$ 。 GH 非対称 $\delta_3=\delta$ 。 AC 非対称 $\delta_3=\delta$ 。 AC 非対称 $\delta_3=\delta$ 。 AC 非対称 $\delta_4=\delta$ 。 GH 非対称 $\delta_5=\delta$ 。 GH 非対称 $\delta_5=\delta$ 。 GH 非対称 $\delta_5=\delta$ 。 The standard for $\delta_5=\delta$

図 2 は, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ とし, $\rho = 0.5$ で AC 非対称 t 分布の下側および上側裾依存係数をプロットした図である.歪みパラメータ δ が小さくなると,下側裾依存係数が大きくなることがわかる.下側と上側の裾依存係数の差は,自由度 ν が小さくなるほど大きくなることがわかる.

2.4 その他の多変量非対称 t 分布

R の rugarch パッケージなど、ファイナンスの時系列データ分析では単変量の非対称 t 分布 として Fernández and Steel (1998)の分布が用いられることが多い。これは、歪みパラメータ ξ

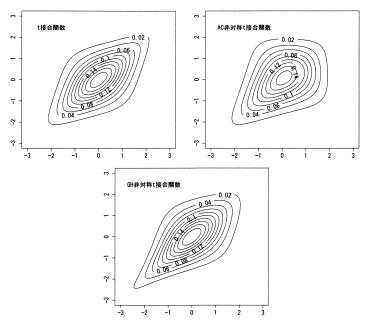
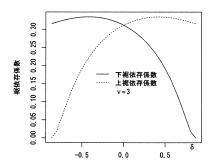


図 1. 周辺分布を標準正規分布,接合関数を t, AC 非対称 $t(\delta=-0.7)$, GH 非対称 t $(\gamma=-0.2)$ の各接合関数としたときの 2 変量密度関数の等高線 $(\rho=0.5, \nu=3)$.



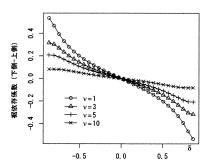


図 2. 2 変量 AC 非対称 t 分布 $(\delta_1 = \delta_2 = \delta, \rho = 0.5)$ の下側・上側裾依存係数 (左図は $\nu = 3$ での下側依存係数と上側依存係数の値について、右図は $\nu = 1, 3, 5, 10$ で下側依存係数 から上側依存係数を差し引いた値について、横軸を δ としてブロットしたもの).

と自由度 ν の 1 変量 t 密度関数 $t_{1,\nu}(x)$ を用いて、密度関数 $f(x|\xi)$ を

$$(2.32) f(x|\xi) = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} \{ t_{1,\nu}(x/\xi) \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x) + t_{1,\nu}(\xi x) \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(x) \} = \frac{2\xi}{\xi^2 + 1} t_{1,\nu}(x\xi^{-\operatorname{sign}(x)})$$

と定義した非対称 t 分布である。Bauwens and Laurent(2005)は、周辺密度を(2.32)とする多変量非対称 t 分布を構築し、GARCH モデルと組み合わせてポートフォリオのリスク計測への利用を提唱し、3 変量の為替ポートフォリオ,株式ポートフォリオでの実証分析を行っている。Bauwens and Laurent(2005)は、成分間で独立な $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^{\mathsf{T}}$ を用いているが、Ferreira and Steel(2007)ではさらに、非特異行列 $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 、 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ を用いて、

$$(2.33) y = A^{\top} x + \mu$$

という線形変換を施すことにより、相関のある d 変量非対称 t 分布を構成している。確率ベクトル (2.33) の同時密度は、

(2.34)
$$f(\mathbf{y}|\mathbf{\xi}) = |A|^{-1} \prod_{i=1}^{d} f((\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^{\top} A_{\cdot j}^{-1} | \xi_{j})$$

で与えられる.ここで, $A_{\cdot j}^{-1}$ は A^{-1} の第 j 列ベクトルであり,|A| は A の行列式の絶対値である.

Jones (2002) は,Jones and Faddy (2003) で提案された単変量非対称 t 分布を d 変量に拡張した非対称 t 分布を提案している.Rosco et al. (2011) は,対称な分布に対して非対称性と裾の重さを与える sinh-arcsinh 変換の一部を用いて,対称な t 分布に非対称性を与えている.単変量の議論が中心であるが,d 変量 t 分布に従う確率ベクトル $T_{\nu} = (T_{\nu,1}, \ldots, T_{\nu,d})^{\top}$ に対して,非対称性 $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)^{\top}$ を与え,

$$(2.35) T_{\nu,j} = S_{\epsilon_j}(T_{\epsilon_j,\nu,j}) = \sinh(\sinh^{-1}(T_{\epsilon_j,\nu,j} - \epsilon_j)), \quad j = 1,\dots,d$$

として d 変量非対称 t 分布に従う確率ベクトル $T_{\epsilon,\nu}=(T_{\epsilon_1,\nu,1},\ldots,T_{\epsilon_d,\nu,d})^{\top}$ を構成することを提案している。本小節で取り上げた d 変量非対称 t 分布について,応用可能性を踏まえて内在する接合関数の性質や推定法を考察することは今後の課題である。

3. 非対称 t 接合関数の統計的推定方法

3.1 導出される接合密度と最尤推定法

一般に、d変量確率分布 G に内在する接合関数(2.19)の密度 $c_G(u_1,\ldots,u_d;\boldsymbol{\theta}_C)$ は、

(3.1)
$$c_G(u_1, \dots, u_d; \boldsymbol{\theta}_C) = \frac{\partial^d C_G(u_d, \dots, u_d; \boldsymbol{\theta}_C)}{\partial u_1 \dots \partial u_d} = \frac{g(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\theta})}{\prod_{i=1}^d g_j(x_j; \boldsymbol{\theta}_j)}$$

ただし、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^{\mathsf{T}}$ で

(3.2)
$$x_j = G_j^{-1}(u_j; \boldsymbol{\theta}_j), \ j = 1, \dots, d$$

と定義されることになる.

したがって、周辺分布について一旦推定した後、その分布関数を用いて N 個の観測データ $\{u_1,\ldots,u_N\},\ u_i\in[0,1]^d,\ i=1,\ldots,N$ が得られたとすると、この標本に対する対数尤度 $\ell(\theta_C;u_1,\ldots,u_N)$ は、(3.1)の接合密度を用いて

(3.3)
$$\ell(\boldsymbol{\theta}_C; \boldsymbol{u}_1, \dots, \boldsymbol{u}_N) = \sum_{i=1}^N \ln c_G(\boldsymbol{u}_i; \boldsymbol{\theta}_C)$$

で定義されることになる。このように周辺分布のパラメータを推定してから接合関数のパラメータを推定する方法は 2 段階推定と呼ばれる (詳細と漸近効率性については Joe, 2005 を参照)。 すなわち,最尤推定法を適用するのに必要な点は,(a) 想定する d 変量非対称 t 分布の密度,(b) その周辺分布の密度および (c) 周辺分布の分位点関数 (3.2) の 3 点である。

3.1.1 GH 非対称 t 分布

想定する d 変量非対称 t 分布の密度は(2.2),周辺分布の密度は(2.21)で与えられる。最尤推定法の適用に必要な残る分位点関数(3.2) は,周辺密度(2.21)を数値積分して累積分布関数G(x)に直し,求めたい水準 $q \in (0,1)$ に対し, $G(x_q) = q$ を満たすような x_q を Newton 法などで探索するのが,正統的な方法である。ただし,この手法は[0,1] の観測データが $\{u_{1j},\ldots,u_{Nj}\}$ と観測数 N が大きいときには計算に時間を要してしまうため,何らかの近似を行うのが実務上は現実的である。

Christoffersen et al. (2012) は,(2.20) に従って 10 万個の乱数を発生させ,その経験分位点を求めることで分位点関数 (3.2) の近似を行った.これに対し,Yoshiba (2018) は,まず, $\gamma_j=\gamma$ とみなす成分の集合を J とし, $j\in J$ について,

$$u_{\min} = \min_{i=1,\dots,N, j \in J} u_{ij}, \ u_{\max} = \max_{i=1,\dots,N, j \in J} u_{ij}$$

と定義したうえで、想定される区間 $[x_{\min},x_{\max}]$ を上記の正統的な方法で $x_{\min}=G^{-1}(u_{\min})$, $x_{\max}=G^{-1}(u_{\max})$ で定めている。次に、区間 $[x_{\min},x_{\max}]$ を $m=100\sim150$ 分割し $(x_{\max}=x_0< x_1<\cdots< x_m< x_{m+1}=x_{\max})$,累積分布関数の値 p_1,\ldots,p_m を数値積分で求めている。このとき、 $p_0=u_{\min},p_{m+1}=u_{\max}$ となる。最後に、 $\{(x_0,p_0),(x_1,p_1),\ldots,(x_m,p_m),(x_{m+1},p_{m+1})\}$ の表から、分割点以外の値は単調補間して、分位点 $x=G^{-1}(p)$ の値を求めることを提案している。これにより、Christoffersen et al. (2012) の方法よりも精度良く、かつ、高速に評価できることを確認している。

3.1.2 Sahu et al. (2003)の非対称 t 分布

最尤法で必要な d 変量非対称 t 分布の密度 (2.6) には $\Pr[U \leq D(\Sigma + D^2)^{-1}x]$ が含まれており、d 変量の t 分布の累積分布関数を評価することになるため、密度を解析的に計算することは困難である。すなわち、Sahu et al. (2003) の非対称 t 分布から導出される接合関数について、最尤法を適用することは難しい。Smith et al. (2012) は、V や W を条件付けることによって d 変量正規分布の表現にすることで、導出される接合関数について、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いてベイズ更新でパラメータ推定を行う手法を提示している。Sahu et al. (2003) でもマ

ルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた分布の推定法が提案されている.

Smith et al. (2012)のアルゴリズムは,最尤法によるパラメータ推定ではないものの,密度比を利用しながらパラメータ更新を行うため,更新されたパラメータ θ_j $(j=1,\ldots,d)$ に対して(3.2)で与えられる周辺分布の分位点評価が必要となる.この点に関し,Smith et al. (2012) は $3\sim 4$ 回の反復の Newton 法によって十分な精度が得られると記述している.Newton 法は,反復回数を予め定めずに,解の更新幅が収束してきたときに G(x)=p の解x が得られたとすることが多い.Smith et al. (2012) の方法は,上述の Yoshiba (2018) の手法のように観測データ全体 $\{u_{1j},\ldots,u_{Nj}\},\ j\in J$ に対して精度の良い近似分位点を求めるのではなく,各観測点 u_{ij} に対する妥当な近似分位点を求めるものと考えられる.

3.1.3 AC 非対称 t 分布

想定する d 変量非対称 t 分布の密度は(2.11),周辺分布の密度は(2.25)で与えられる.最尤推定法の適用に必要な残る分位点関数(3.2) は,3.1.1 節で論じた GH 非対称 t 分布の分位点関数と同様である.Yoshiba (2018) は, δ_j を共通とする変量 $j \in J$ のデータ $\{u_{1j},\ldots,u_{Nj};j\in J\}$ に対し,想定される区間 $[x_{\min},x_{\max}]$ を $100\sim150$ 分割し,高速かつ精度良く設定したパラメータでの AC 非対称 t 分布の分位点を求めるアルゴリズムを提案している.

3.2 相関行列パラメータの更新

最尤法は、尤度を最大化するようにパラメータを推定する方法であるが、尤度の最大化の過程では設定できないパラメータの領域に更新しないように工夫を施す必要がある。多変量非対称 t 接合関数で留意すべきパラメータは、相関行列のパラメータである。具体的には、GH 非対称 t 接合関数では(2.1)の Z に想定している相関行列 Ψ である。AC 非対称 t 接合関数では(2.15) で定義された拡大相関行列 R である。

Yoshiba (2018)は、 Ψ やRといった相関行列が相関行列としての性質、すなわち、非負定値対称行列で対角要素が 1 という性質を満たすように、相関行列を Cholesky 分解したうえで三角関数を使って θ_{ij} と再パラメータ化をする手法を提案している。この方法は、Lewandowski et al. (2009)や Joe (2014)で示されているように、確率ベクトルの第 1 成分から第 j-1 成分を定数としたときの第 i 成分と第 j 成分 (j < i) の偏相関係数 $\rho_{ij;1:(j-1)}$ について、 $\cos\theta_{ij} = \rho_{ij;1:(j-1)}$ と再パラメータ化していることに相当している。

3.3 自由度パラメータの更新

一般に、t 分布や非対称 t 分布の自由度パラメータ ν について、他のパラメータと同様に尤度最大化の過程での更新パラメータとする方法もあるが、整数の自由度に固定してその他のパラメータを可変とした場合の最大尤度を比較し、最も最大尤度が大きくなる自由度を選択するという方法もある。t 接合関数や非対称 t 接合関数でも同様である。

Yoshiba (2018) は自由度パラメータを他のパラメータと同様の更新パラメータとしている. 一方, 戸坂・吉羽 (2005)では, t 接合関数の推定に際して, 自由度 ν を 3 \sim 20 までの整数の値で固定した最大尤度をプロットし, 自由度を推定している. Joe and Sang (2016)では, 尤度が自由度 ν に対してフラットであると論じ, GH 非対称 t 接合関数と AC 非対称 t 接合関数の最尤推定をする際に自由度 ν を 5 刻み, すなわち, ν = 5, 10, 15, ... と推定して最大尤度を比較するアプローチを採用している.

AC 非対称 t 接合関数では、整数の自由度に限定すると、対数尤度 (3.3) の計算が高速になる。それは、自由度が 1 と 2 の場合の 1 変量 AC 非対称 t 分布の累積分布関数は解析的に表現され、Jamalizadeh et al. (2009) が示した再帰式によって、整数自由度の累積分布関数は高速に計算さ

れ、Newton 法での分位点の計算も高速になるためである。Joe and Sang (2016)が参照している Yoshiba (2018)のプレプリント版 Yoshiba (2015)では、自由度が実数の場合の対数尤度の計算と自由度が整数の場合の対数尤度の計算時間が比較されている。

ここで、自由度 ν 、歪みパラメータ ζ の 1 変量 AC 非対称 t 分布の累積分布関数を $G(x;\nu,\zeta)$ と置く. Jamalizadeh et al. (2009) では、

(3.4)
$$G(x; 1, \zeta) = \frac{1}{\pi} \left\{ \tan^{-1}(x) + \cos^{-1}\left(\frac{\zeta}{\sqrt{(1+\zeta^2)(1+x^2)}}\right) \right\}$$
(3.5)
$$G(x; 2, \zeta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(\zeta) + \frac{x}{\sqrt{2+x^2}} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\zeta x}{\sqrt{2+x^2}}\right) \right\}$$

 2π $\sqrt{2}+x^2$ (2π) $\sqrt{2}$ が示され、 $\nu > 1$ に対して、Theorem 1 で

(3.6)
$$G(x; \nu + 1, \zeta) = G\left(\sqrt{\frac{\nu - 1}{x}}x; \nu - 1, \zeta\right)$$

$$G(x; \nu + 1, \zeta) = G\left(\sqrt{\frac{\nu - 1}{\nu + 1}}x; \nu - 1, \zeta\right) + \frac{\Gamma(\nu/2)(\nu + 1)^{(\nu - 1)/2}}{\sqrt{\pi}\Gamma((\nu + 1)/2)}$$
$$\times \frac{x}{(\nu + 1 + x^2)^{\nu/2}} G\left(\frac{\sqrt{\nu}\zeta x}{\sqrt{\nu + 1 + x^2}}; \nu, 0\right)$$

という再帰式を示している。 $G(x; \nu, 0)$ は通常の t 分布関数のため、高速に計算可能である。

3.4 実装

本節で示した Yoshiba (2018)の計算方法については、AC 非対称 t 接合関数における整数自由度での接合密度、尤度計算を含めて、Yoshiba (2018)の Supplemental material に統計分析ソフト R での実装コードを示している。

4. 実証分析

4.1 非対称 t 接合関数を用いた実証研究

Ammann and Süss (2009)は、金融時系列の非対称な依存構造に注目し、2変量の GH 非対称 t 接合関数を用いて、GARCH(1,1) でフィルタリングした株価の日次収益率と対応するインプライド・ボラティリティ指標について AR-GARCH(1,1) でフィルタリングした日次変化幅との依存構造を調べている。ボラティリティ指標変動の AR 次数は、0~3 次についてベイズ情報量規準で選択している。株式市場としては S&P500(ボラティリティ指標は VIX)、Nasdaq 100 (ボラティリティ指標は VXN)、DAX (ボラティリティ指標は VDAXNew)、DJ Euro STOXX 50 (ボラティリティ指標は VSTOXX)の 4 市場で分析している。分析の結果、いずれの市場でも t 接合関数よりも GH 非対称 t 接合関数の方が赤池情報量規準、ベイズ情報量規準のいずれでも低く、良好な結果が得られた。また、歪みパラメータ γ_j については、株価収益率に対しては負、ボラティリティ変動幅に対しては正の推定値を得た 10 .

Smith et al. (2012) は,AC 非対称 t 分布と似た構成である Sahu et al. (2003) の非対称 t 分布に内在する接合関数を用いて,電力市場価格などの分析を行っている。具体的には,オーストラリアの 5 つの地域の 2007 年 1 月~2010 年 2 月の日次の電力価格について,周辺分布には t や非対称 t 分布,接合関数には t ,非対称 t ,非対称 t ,非对称正規などを当てはめて分析を行った.ベイズの交差検証を行った結果,周辺分布を非対称 t ,接合関数を非対称 t としたモデルの優位性が示された.歪みパラメータ δ_j は地域ごと $j=1,\ldots,5$ に異なる設定でモデリングしており,推定値の正負は地域によって区々であった.電力価格は日々の需要の高まりにより急騰することもある点は他の資産価格変動と異なる点であり,その結果が反映されていると考えられる.

Smith et al. (2012) はさらに、周辺分布が離散分布である事例として、15 の有名な Web サイトの 2007 年 5 月 1 日の閲覧件数分布を非対称 t 接合関数と t 接合関数でモデリングした結果を比較し、非対称 t 接合関数の優位性を示している。

Christoffersen et al. (2012) は,GH 非対称 t 接合関数について,Engle (2002) のモデルに倣い,相関行列パラメータ Ψ について,前期のパラメータに回帰する部分と一定水準に回帰する部分とで動的にモデル化したうえで,16 か国の先進国と 17 か国の発展途上国にグルーピングし,週次株価変動について各グループでの相関行列パラメータ Ψ の時間変化などを分析している.各国の株価の週次収益率については,誤差項を非対称 t 分布とする AR(2)-GARCH(1,1) でモデル化している.また,各グループの各時点で GH 非対称 t 接合関数を設定する際,歪みパラメータ Υ については各グループで共通しているものと仮定してパラメータを最尤推定し,いずれのグループ,観測期間でも歪みパラメータ Υ は概ね負で有意という結果を得ている.

Joe and Sang (2016)は、多変量のモデリングに際し、まず、変量全体をいくつかのグループに分けて、グループ内の接合関数のモデリングにグループ間の接合関数のモデリングを繋げることにより、全体の接合関数をモデリングする手法を提案している。具体例として、銀行・保険、製薬・化学、消費財の3つのグループの企業から4~5社の株価を選択し、計14社の個別株価の2011~2012年の日次収益率について、各変量をAR(1)-GARCH(1,1)でフィルタリングしてから上記の多変量モデリングを行った結果を示している。接合関数には、自由度を5刻みにしたAC非対称t、GH非対称t、t の接合関数を用いて推定し、最も尤度の高かった自由度を選択している。推定結果については、正規化したスコアの推定相関行列と経験相関行列との違いや赤池情報量規準で評価を行っている。評価の結果、相関行列の誤差という観点では、3つのグループをそれぞれ自由度15、10、10のt 接合関数でモデリングし、自由度10のt 接合関数でまとめ上げるモデリングし、自由度10のt 接合関数でモデリングし、自由度10のt 接合関数でモデリングし、自由度10のt 接合関数でも良いそのモデルとほぼ変わらず、赤池情報量規準の観点では選択されることを示している。

Yoshiba (2018) は、提案した非対称 t 接合関数の最尤推定の応用事例として、日経 225、 S&P500、DAX の 3 変量の日次株価収益率について、正規、t、AC 非対称 t、非対称正規、GH 非対称 t (歪みパラメータは共通 $<\delta_j=\delta, \gamma_j=\gamma>$) の各接合関数を最尤法により推定し、赤池情報量規準やベイズ情報量規準でモデル選択を行っている。計測期間は 2005 年 4 月~2015 年 3 月の 10 年間と後半の 5 年間の双方とし、各変量については、フィルタリングしない収益率のほか、GARCH(1,1) や EGARCH(1,1) でフィルタリングしてから接合関数を当てはめた推定を行っている。推定の結果、いずれの場合も AC 非対称 t が赤池情報量規準でもベイズ情報量規準でも選択された。自由度パラメータについては、フィルタリングしないもの、GARCH(1,1) でのフィルタリング,EGARCH(1,1) でのフィルタリングの順で大きくなっており、周辺分布のモデリングが精緻になるほど、裾依存性は低下することが示されている。一方で、歪みパラメータ δ はモデリングが精緻になるほど、負の有意性が強まっていることが示されている。

夷藤・中村(2019)は、Christoffersen et al. (2012)のモデルを修正したうえで、Yoshiba(2018)の提案した非対称 t 接合関数の推定法を利用して、新興国国債市場の実証分析を行っている。具体的には、4 か国の新興国国債インデックスの日次リターンについて、各変量についてはARMA-GARCH(1,1) でモデル化し、変量間の依存関係については正規、t、GH 非対称 t(共通及び個々の歪みパラメータ)の接合関数を用いてモデル化している。なお、AR 項の次数は $0\sim1$ 、MA 項の時数は $0\sim2$ のモデルを検討し、赤池情報量規準でモデル選択している。資産運用面でのパフォーマンスの計測を念頭に置いているため、為替へッジしない場合と為替へッジする場合とも比較している。その結果、為替へッジしない場合においては、歪みパラメータ γ_j を共通 $(\gamma_j=\gamma)$ とした GH 非対称 t 接合関数が赤池情報量規準で選択され、推定された歪みパ

ラメータ γ は有意に負であることが示されている.一方,為替ヘッジをした場合は,t 接合関数が赤池情報量規準で選択されており,GH 非対称 t 接合関数を推定した場合の歪みパラメータ γ は有意にならないことが示されている.なお,相関行列パラメータ Ψ が時間変化しない静的なモデルに対して,正規,t,GH 非対称 t,AC 非対称 t(歪みパラメータについては共通と個々の双方)の各接合関数を推定し,赤池情報量規準でモデル選択を行った結果,為替ヘッジしない場合には歪みパラメータが共通の AC 非対称 t 接合関数が選択され,為替ヘッジをした場合は t 接合関数が選択されたとの結果を得ている.

これらの先行研究から、本稿で取り上げた3種類の非対称t接合関数での実証分析において、非対称性は有意になるケースが多く、モデル選択では非対称t接合関数が選択されるケースが多いことがわかる。非対称性については、株価などの金融資産価格変動を対象とした場合は負になることが多く、電力市場価格などの実物資産の変動を対象とすると符号は状況によることがわかる。

4.2 本邦の株価変動に対する推定

4.1 節の先行研究を踏まえ、本邦の 3 変量の株価変動に対して AR(1)-GARCH(1,1) でフィルタリングし、その残差に対して、AC 非対称 t、GH 非対称 t、t、非対称正規、正規の各接合関数を推定し、先行研究との整合性を確認する。株価の日次収益率 r_t に対して AR(1)-GARCH(1,1) は、

(4.1)
$$r_t = \mu + a_1 r_{t-1} + \epsilon_t = \mu + a_1 r_{t-1} + \sigma_t z_t,$$
$$\sigma_t^2 = \omega + b_1 \epsilon_{t-1}^2 + c_1 \sigma_{t-1}^2$$

で表される. 基準化された誤差項 z_t には Fernández and Steel (1998)の1変量非対称 t 分布 (2.32)を想定する(歪みパラメータ ξ , 自由度パラメータ ν). 非対称 t と非対称正規の接合関数について、非対称性パラメータは各成分で共通のものと個別に設定するものを想定し、パラメータの推定値の符号と有意性を確認し、情報量規準で接合関数を選択する. 3変量の株価としては、東証 33 業種別株価指数から、銀行業、保険業、証券業(証券・商品先物取引業)の3業種を選択する. 観測期間は、国際金融危機を含む 2006 年 10 月 2 日~2018 年 9 月 28 日の 12 年間とする (標本サイズは N=2.941).

まず,各業種の日次収益率に対して,Rの rugarch パッケージを用いて (4.1)のパラメータ推定を行った結果は表 1 のとおりである.ここで,標準誤差は White (1982)の頑健な標準誤差を用いた.いずれの業種でも歪みパラメータは $\xi>1$ となっており,正に歪んでいることがわかる.また,自由度パラメータ ν は $7\sim8$ 程度と比較的小さく,裾の厚い分布になっていることがわかる. μ や ω は誤差を考慮すると有意性がない一方, a_1,b_1,c_1 は保険業の a_1 を除き有意にゼロから異なっていることがわかる.

次に,表1で求められたパラメータを(4.1)に代入して得られた残差系列 z_{ij} , $i=1,\ldots,N,j=$

	μ	a_1	ω	b_1	c_1	ξ	ν
銀行業	3.19E-04	0.0822	4.77E-06	0.0831	0.9051	1.1145	7.2482
標準誤差	$2.89\mathrm{E}\text{-}04$	0.0171	$5.20\mathrm{E}\text{-}06$	0.0212	0.0282	0.0317	0.9287
保険業	4.77E-04	0.0175	5.32 E-06	0.0793	0.9105	1.0337	8.3885
標準誤差	3.24E-04	0.0188	6.94 E-06	0.0249	0.0332	0.0259	1.2846
証券業	1.26E-04	0.0776	4.89E-06	0.0821	0.9116	1.0832	6.9597
標準誤差	3.61E-04	0.0176	6.64E-06	0.0263	0.0317	0.0256	0.9065

表 1. 周辺分布の推定結果.

1,2,3 に対して、Yoshiba (2018) と同様に、 $u_i=(u_{i1},u_{i2},u_{i3})$ として、接合関数推定用の疑似標本 $\{u_1,\ldots,u_N\}$ を、各 j 成分 (j=1,2,3) に対して

(4.2)
$$u_{ij} = \frac{1}{N+1} \sum_{k=1}^{N} 1_{\{z_{kj} \le z_{ij}\}}, i = 1, \dots, N$$

のように経験分布関数の一種を用いて求める。疑似標本 $\{u_1,\ldots,u_N\}$ に対して AC 非対称 t, GH 非対称 t, t, 非対称正規, 正規の各接合関数を推定した結果は, 表 2, 3 のように与えられ

	AC 非対称 <i>t</i>	GH 非対称 t	t	非対称正規	正規
$ ho_{21}$	0.8327	0.7811	0.7874	0.8482	0.7868
標準誤差	0.0106	0.0070	0.0064	0.0084	0.0055
$ ho_{31}$	0.8639	0.8217	0.8266	0.8726	0.8207
標準誤差	0.0087	0.0058	0.0052	0.0071	0.0046
$ ho_{32}$	0.7967	0.7338	0.7411	0.8106	0.7334
標準誤差	0.0128	0.0084	0.0076	0.0105	0.0068
δ, γ	-0.5909	-0.2574		-0.6699	
標準誤差	0.0581	0.0673		0.0402	
ν	7.6484	7.5062	7.8678		
標準誤差	0.7506	0.7768	0.7870		
対数尤度	3249.49	3249.22	3238.48	3155.66	3147.79
AIC	-6488.98	-6488.43	-6468.96	-6303.31	-6289.58
BIC	-6459.05	-6458.50	-6445.01	-6279.37	-6271.62

表 2. 接合関数(共通非対称性)の推定結果.

表 3. 接合関数(個別非対称性)の推定結果.

	AC 非対称 <i>t</i>	GH 非対称 t	非対称正規
$ ho_{21}$	0.8296	0.7815	0.8456
標準誤差	0.0116	0.0069	0.0095
$ ho_{31}$	0.8674	0.8214	0.8701
標準誤差	0.0095	0.0058	0.0070
$ ho_{32}$	0.7936	0.7342	0.8214
標準誤差	0.0143	0.0082	0.0107
δ_1,γ_1	-0.6145	-0.2711	-0.6386
標準誤差	0.0709	0.0533	0.0465
δ_2, γ_2	-0.5478	-0.2390	-0.8189
標準誤差	0.0755	0.0517	0.0819
δ_3, γ_3	-0.6211	-0.2671	-0.6761
標準誤差	0.0740	0.0523	0.0389
u	7.6399	7.5349	
標準誤差	0.7560	0.6495	
対数尤度	3249.92	3249.65	3156.93
AIC	-6485.85	-6485.31	-6301.86
BIC	-6443.94	-6443.40	-6265.95

る. 赤池情報量規準 (AIC),ベイズ情報量規準 (BIC) のいずれでも共通非対称性の AC 非対称 t が選択されており,非対称性のパラメータは,GH 非対称 t や非対称正規の各接合関数も含めて,非対称性の共通・個別の設定に依らず,有意に負であることがわかる.相関パラメータ ρ_{ij} は 0.8 前後と高く,自由度パラメータ ν は 7.5 程度と低いため,下側の裾依存性が強いことがわかる.

5. おわりに

本稿では、先行研究で提案されている 3 種類の非対称 t 接合関数を中心に、多変量非対称 t 分布とその接合関数の性質をまとめたうえで、最尤法による推定方法が実装可能なものとして AC 非対称 t 接合関数と GH 非対称 t 接合関数での実装方法をまとめた。実証分析としては、株価や債券価格といった資産収益率に応用した事例を中心に整理し、本邦の株価変動に対する推定結果を示した。資産収益率に対する実証結果からは、共通歪みパラメータの AC 非対称 t 接合関数の当てはまりが良好な場合が多いことが示された。

相関行列パラメータが Engle (2002)のモデルのように動的に変化するモデルについては、先行研究は GH 非対称 t 接合関数での事例にとどまっている。しかし、夷藤・中村 (2019)の分析で相関行列パラメータが変化しない静的なモデルにおいて、 GH 非対称 t 接合関数よりも AC 非対称 t 接合関数が選ばれていたことを勘案すると、相関行列パラメータ Ω あるいは R が動的に変化する AC 非対称 t 接合関数のモデルが有効になる可能性も高い。そうした観点で、動的な AC 非対称 t 接合関数の統計的推定方法の実装が今後期待される。

注.

1) Ammann and Süss (2009) の(10)式で定義されている 2 変量の GH 非対称 t 接合関数の表記は誤っているため (2 変量 GH 非対称 t 分布の周辺分布と GARCH(1,1) モデルの誤差分布として想定した t 分布を混同),得られた結果が本来の結果と異なっている可能性がある。

謝辞

匿名の査読者と編集委員の方には、表記面で不十分だった原稿に対し、的確なご示唆を頂きました.ここに記して深謝致します.

参考文献

- Aas, K. and Haff, I. H. (2006). The generalized hyperbolic skew Student's t-distribution, *Journal of Financial Econometrics*, 4(2), 275–309.
- Ammann, M. and Süss, S. (2009). Asymmetric dependence patterns in financial time series, *The European Journal of Finance*, **15**(7-8), 703–719.
- Arellano-Valle, R. B. (2010). On the information matrix of the multivariate skew-t model, Metron, 68(3), 371-386.
- Azzalini, A. (2013). The Skew-normal and Related Families, Cambridge University Press, Cambridge. Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew t-distribution, Journal of the Royal Statistical Society Series B, 65(2), 367–389.
- Banachewicz, K. and van der Vaart, A. (2008). Tail dependence of skewed grouped t-distributions, Statistics & Probability Letters, 78(15), 2388–2399.

- Barndorff-Nielsen, O. E. (1977). Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, **353**(1674), 401–419.
- Bauwens, L. and Laurent, S. (2005). A new class of multivariate skew densities, with application to generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models, *Journal of Business & Economic Statistics*, **23**(3), 346–354.
- Blaesild, P. and Jensen, J. L. (1981). Multivariate distributions of hyperbolic type, Statistical Distributions in Scientific Work, Vol. 4, 45–66, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
- Branco, M. D. and Dey, D. K. (2001). A general class of multivariate skew-elliptical distributions, Journal of Multivariate Analysis, 79(1), 99–113.
- Christoffersen, P., Errunza, V., Jacobs, K. and Langlois, H. (2012). Is the potential for international diversification disappearing? A dynamic copula approach, Review of Financial Studies, 25(12), 3711–3751.
- Demarta, S. and McNeil, A. J. (2005). The t copula and related copulas, *International Statistical Review*, **73**(1), 111–129.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation, Journal of Business & Economic Statistics, 20(3), 339–350.
- Fernández, C. and Steel, M. F. J. (1998). On Bayesian modeling of fat tails and skewness, Journal of the American Statistical Association, 93(441), 359–371.
- Ferreira, J. T. A. S. and Steel, M. F. J. (2007). A new class of skewed multivariate distributions with applications to regression analysis, *Statistica Sinica*, **17**(2), 505–529.
- Fung, T. and Seneta, E. (2010). Tail dependence for two skew t distributions, Statistics & Probability Letters, 80(9-10), 784–791.
- 夷藤 翔, 中村信弘 (2019). ダイナミック非対称 t コピュラを用いた新興国国債市場の相互依存構造に関する研究, ジャフィー・ジャーナル, 17, 45–66.
- Jamalizadeh, A., Khosravi, M. and Balakrishnan, N. (2009). Recurrence relations for distributions of a skew-t and a linear combination of order statistics from a bivariate-t, Computational Statistics & Data Analysis, 53(4), 847–852.
- Joe, H. (2005). Asymptotic efficiency of the two-stage estimation method for copula-based models, Journal of Multivariate Analysis, 94(2), 401–419.
- Joe, H. (2006). Discussion of "Copulas: Tales and facts", by Thomas Mikosch, Extremes, 9(1), 37-41.
- Joe, H. (2014). Dependence Modeling with Copulas, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Joe, H. and Sang, P. (2016). Multivariate models for dependent clusters of variables with conditional independence given aggregation variables, Computational Statistics & Data Analysis, 97, 114– 132.
- Jones, M. C. (2002). Multivariate t and beta distributions associated with the multivariate F distribution, Metrika, 52(3), 215-231.
- Jones, M. C. and Faddy, M. J. (2003). A skew extension of the t-distribution, with applications, Journal of the Royal Statistical Society, Series B (Statistical Methodology), 65(1), 159–174.
- Kollo, T. and Pettere, G. (2010). Parameter estimation and application of the multivariate skew t-copula, Copula Theory and Its Applications, 289–298, Springer, Heidelberg.
- Kotz, S. and Nadarajah, S. (2004). Multivariate t Distributions and Their Applications, Cambridge University Press, Cambridge.
- Lewandowski, D., Kurowicka, D. and Joe, H. (2009). Generating random correlation matrices based on vines and extended onion method, *Journal of Multivariate Analysis*, 100(9), 1989–2001.
- 増田弘毅 (2002). GIG 分布と GH 分布に関する解析, 統計数理, 50(2), 165-199.
- Padoan, S. A. (2011). Multivariate extreme models based on underlying skew-t and skew-normal distributions, Journal of Multivariate Analysis, 102(5), 977–991.
- Rosco, J. F., Jones, M. C. and Pewsey, A. (2011). Skew t distributions via the sinh-arcsinh transformation, Test, 20(3), 630–652.

- Sahu, S. K., Dey, D. K. and Branco, M. D. (2003). A new class of multivariate skew distributions with applications to Bayesian regression models, *Canadian Journal of Statistics*, **31**(2), 129–150.
- Smith, M. S., Gan, Q. and Kohn, R. J. (2012). Modelling dependence using skew t copulas: Bayesian inference and applications, *Journal of Applied Econometrics*, 27(3), 500–522.
- 戸坂凡展, 吉羽要直 (2005). コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 金融研究, **24**(別冊第 2), 115–162.
- 塚原英敦 (2008). 接合分布関数(コピュラ)の理論と応用, 『21 世紀の統計科学 III 数理・計算の統計科学 『(北川源四郎, 竹村彰通 編), 第5章, 111-146, 東京大学出版会, 東京.
- White, H. (1982). Maximum likelihood estimation of misspecified models, *Econometrica*, **50**(1), 1–25. Yoshiba, T. (2015). Maximum likelihood estimation of skew-t copulas with its applications to stock returns, Research Memo., No.1195, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Yoshiba, T. (2018). Maximum likelihood estimation of skew-t copulas with its applications to stock returns, Journal of Statistical Computation and Simulations, 88(13), 2489–2506.

Properties of Skew-t Copulas and Their Statistical Estimation —Application to Asset Returns—

Toshinao Yoshiba^{1,2}

 $^1{\rm Graduate}$ School of Management, Tokyo Metropolitan University $^2{\rm Visiting}$ Professor, The Institute of Statistical Mathematics

The skew-t copula is the copula that is implicit in a multivariate skew-t distribution. There are various types of multivariate skew-t distributions, depending on the way that skewness is incorporated into the multivariate Student-t distribution. First, we summarize the representative multivariate skew-t distributions and show the procedures for applying the maximum likelihood estimation to the three types of skew-t copulas. Next, we refer to empirical studies for the applications of skew-t copulas and show estimation results for three indices from TOPIX33 Sector Indices to indicate the effectiveness of skew-t copulas in representing asset returns. Finally, we conclude by describing future research tasks.