

# 接合関数モデルにおける統計的推測

塚原 英敦<sup>†</sup>

(受付 2019 年 6 月 10 日；改訂 8 月 5 日；採択 8 月 7 日)

## 要 旨

本論文では、多変量分布  $F$  からの標本を用いて、 $F$  の接合関数に関する推測を、その周辺分布は未知のまま行う方法について解説する。この状況下では、 $\mathcal{G}$  十分性という基準に従えば、各座標ごとの順位から成るベクトルにのみ依存する方法が望ましいことになる。経験接合関数やその変形版は接合関数のノンパラメトリックな推定量であり、順位のみを通じてデータに依存する。その漸近的性質をまず簡潔に復習した後、順位相関係数のような接合関数の汎関数の推定量の性質を見ていく。さらに、接合関数が母数化されている場合に、そのパラメータをセミパラメトリックに推定するいくつかの方法を、擬似尤度推定量を含む順位近似  $Z$  推定量クラスにとりわけ重点を置いて考察する。続いて、独立性検定を含む一般的な適合度検定を手短かに再検討する。最後に、これまで述べた推定・検定法を実際に適用する際に必要不可欠である、経験接合関数に基づくいくつかのリサンプリング法について詳しく検討する。

キーワード：接合関数、 $\mathcal{G}$  十分性、経験接合関数、セミパラメトリック推定、適合度検定、ブートストラップ法。

## 1. はじめに

$\mathbf{X}_i := (X_{i1}, \dots, X_{id})$ ,  $i = 1, \dots, n$  を独立に同一分布に従う  $d$  次元確率ベクトルとし、その  $d$  次元分布関数  $F$  が連続であるとする。このとき、良く知られた Sklar の定理から  $F$  に対して一意的に定まる接合関数(copula)  $C$  を用いて

$$(1.1) \quad F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$$

と書ける。ここで、 $F_1, \dots, F_d$  は 1 次元周辺分布関数である。よって、 $d$  次元連続分布関数の全体を  $\mathcal{P}_d$  と書くと、 $\mathcal{P}_d$  は  $(F_1, \dots, F_d, C)$  という(無限次元)パラメータで母数化された族とみなすことができる。

各  $i \in \{1, \dots, n\}$  と  $j \in \{1, \dots, d\}$  に対して、 $X_{1j}, \dots, X_{nj}$  における  $X_{ij}$  の順位を  $R_{ij,n}$  と書き(各座標ごとの順位)、 $\mathbf{R}_{i,n} := (R_{i1,n}, \dots, R_{id,n})$  とおく。すなわち、

$$(1.2) \quad R_{ij,n} = \sum_{k=1}^n \mathbb{1}\{X_{kj} \leq X_{ij}\}.$$

$F_j$  は連続であるから、 $U_{ij} := F_j(X_{ij})$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  は  $U(0, 1)$  分布に従い、 $(U_{i1}, \dots, U_{id})$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  は独立、そして分布関数が  $C$  である分布に従う。また、 $R_{ij,n}$  は  $U_{1j}, \dots, U_{nj}$  における  $U_{ij}$  の順位と一致することに注意する。

<sup>†</sup> 成城大学 経済学部：〒157-8511 東京都世田谷区成城 6-1-20

本稿では、 $F_1, \dots, F_d$  が未知の場合に、データ  $X_1, \dots, X_n$  に基づく  $C$  に関する統計的推測手法について、これまでのこの分野での研究結果を概説する。次節では、順位ベクトルの  $\mathcal{G}$  十分性を示して、順位に基づく方法がある種の望ましさの基準を満たすことを説明する。接合関数  $C$  のノンパラメトリック推定量として経験接合関数を定義し、その漸近的性質を第 3 節で述べた上で、第 4 節では、順位相関係数などの接合関数の汎関数を考え、対応する経験接合関数プラグイン推定量の漸近的な結果を示す。第 5 節では、接合関数  $C$  が  $C_\theta$  と有限次元パラメータ  $\theta$  で母数化されている場合に、 $\theta$  をセミパラメトリックに推定する方法をいくつか紹介する。第 6 節では、 $C$  に関する様々な適合度検定を、 $C$  がある接合関数族  $\mathcal{C}$  に属するという帰無仮説の検定として統一的に整理して概観する。最後に第 7 節で、上記の推定・検定を行う際に必要なりサンプリング法について、これまでに提案されている手法を詳述する。接合関数に関する基本的な知識はある程度仮定して話を進めるが、それについては Nelsen (2006) や塚原 (2008) などを適宜参照していただきたい。

## 2. 順位統計量の $\mathcal{G}$ 十分性

### 2.1 $\mathcal{G}$ 十分性の一般論

まず、伝統的な統計的決定理論の枠組みを導入する。 $\mathcal{X}$  を標本空間、 $\mathcal{A}$  を  $\mathcal{X}$  上の  $\sigma$  集合体とし、可測空間  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  上の確率測度の族  $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta}$  が識別性条件を満たすとする ( $\theta \neq \theta'$  ならば、 $P_\theta \neq P_{\theta'}$ )。そして、標本空間  $\mathcal{X}$  上の変換群  $\mathcal{G}$  が与えられているとする。すなわち、 $\mathcal{G}$  は  $\mathcal{X}$  からそれ自身への(可測な)全単射の集合で、

- (i)  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  に対して、 $g_2 g_1 \in \mathcal{G}$  ( $g_2 g_1$  は  $g_1$  と  $g_2$  の合成)
- (ii)  $g \in \mathcal{G}$  に対して、 $g^{-1} \in \mathcal{G}$

を満たす。さらに、 $\mathcal{G}$  から  $\Theta$  上の変換群  $\overline{\mathcal{G}}$  への準同型写像  $g \mapsto \overline{g}$  が存在し、

$$P_\theta(A) = P_{\overline{g}\theta}(gA)$$

が成り立つとする。このとき、確率分布族  $\{P_\theta\}_{\theta \in \Theta}$  は  $\mathcal{G}$  不変であるという。

パラメータ空間  $\Theta$  は、ある  $\Theta_1$  と  $\Theta_2$  について直積空間  $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$  と書けるものとし、その要素を  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  と書く。 $\theta_1$  が局外パラメータ (nuisance parameter) である場合に、 $\theta_2$  に対する十分性 (部分十分性 (partial sufficiency)) をどう定義するかという問題は古くから議論されてきており、いくつかの概念が提案されている (Rémon, 1984 や Severini, 2000 参照)。ここでは群の考え方をういた流儀を述べて、接合関数モデルに適用する。

**定義 2.1.** (Barnard, 1963)  $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$  からある可測空間  $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$  への可測写像、すなわち統計量  $T$  が与えられたとする。このとき、 $T$  が  $\theta_1$  未知の下で  $\theta_2$  に対して  $\mathcal{G}$  十分 ( $\mathcal{G}$ -sufficient for  $\theta_2$  in the absence of knowledge of  $\theta_1$ ) であるとは、次の 3 つの条件が成り立つことをいう。

(i)  $\overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$  は  $\Theta_1$  上推移的に作用し、かつ  $\theta_2$  は変えない。すなわち、任意の  $\theta \in \Theta$  と  $\overline{g} \in \overline{\mathcal{G}}$  に対して、 $\Theta_1$  上の変換  $\overline{g}'$  があって  $\overline{g}\theta = (\overline{g}'\theta_1, \theta_2)$  が成り立つ。また、任意の  $\theta_1, \tilde{\theta}_1 \in \Theta_1$  に対して、 $\theta_1 = \overline{g}'\tilde{\theta}_1$  となる  $\overline{g}'$  が存在する。

(ii)  $T$  は  $\mathcal{G}$  不変である：すべての  $g \in \mathcal{G}$ 、 $x \in \mathcal{X}$  に対して、 $T(gx) = T(x)$ 。

(iii)  $S$  を任意の  $\mathcal{G}$  不変な統計量とすると、 $T$  を所与とした  $S$  の条件付き分布は  $\theta_2$  に依存しない。

この定義は Barnard (1963) で最初に与えられたとされるが、上記の形は Sprott (1965) に従った (この論文は、上の定義で (ii) から (iii) が自動的に成り立つ条件を与えている)。その骨子は、

$\theta_1$  が未知であるということを,  $\theta_2$  に対する推測を行う場合に  $\mathcal{G}$  不変な統計量に基づくべきであるという要請と捉え, その上で古典的な十分性の定義を当てはめるとのことである. データの縮約 (data reduction) という観点からいえば, まず不変性によって, 次に十分性による縮約を行うという考え方と解釈できる. これは, Hall et al. (1965, p. 579) による不変的十分性 (invariantly sufficient) という概念と一致する.

条件 (i) から, 写像  $\theta = (\theta_1, \theta_2) \mapsto \theta_2$  は変換群  $\overline{\mathcal{G}}$  の下での最大不変量となる. よって,  $\mathcal{G}$  不変な統計量の分布は  $\theta_2$  にのみ依存する. この事実は Lehmann (1986, Theorem 6.3) に述べられているが, 不変性によりパラメータ空間も縮約され,  $\theta_2$  が共通の  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$  をすべて同一視することを意味する. この意味で  $\theta_1$  は局外パラメータということなのである.

上記のような群構造をもつモデルは, Barndorff-Nielsen et al. (1989) の流儀では変換モデル (transformation model) と呼ばれている. Severini (2000) では, 上記の設定および定義 2.1 (i) の状況を指して複合変換モデル (composite transformation model) と呼んでいる. Rémon (1984) は, (通常の意味での) 十分統計量の最大不変量による縮約であることを Barnard (1963) による  $\mathcal{G}$  十分性の定義としているが, これでは十分性と不変性による縮約の順序が定義 2.1 とは異なっている. 縮約の結果が十分性と不変性の適用順序によらないための一般的条件は Hall et al. (1965) に与えられている (鍋谷, 1978, 5.4 節も参照). また, Severini (2000, Section 8.3.3) で最大不変量のことを  $\mathcal{G}$  十分と呼んでいるが, これは Barnard (1963) の定義とは異なる.

上記の定義が適用される最も単純かつ古典的な例は以下のものである.

**例 2.2.** (正規分布族)  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^n$  とし,  $\theta = (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$  に対して,  $P_\theta$  を平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$  の正規分布の  $n$  個の直積とする (すなわち, 標本  $X_1, \dots, X_n$  が i.i.d.  $N(\mu, \sigma^2)$  ということである). 変換群  $\mathcal{G}$  は平行移動群 (translation group), すなわち,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  に対して,  $g_c x = (x_1 + c, \dots, x_n + c)$  とすると,  $\overline{g}_c \theta = (\mu + c, \sigma)$  となる. そして,  $S = [(n-1)^{-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2]^{-1/2}$  が  $\mu$  未知の下で  $\sigma$  に対して  $\mathcal{G}$  十分となる.

## 2.2 接合関数モデルにおける順位の $\mathcal{G}$ 十分性

独立性検定 (Blum et al., 1961) などのある種の問題では,  $C$  が興味の対象となるパラメータで, 周辺分布  $F_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  は局外パラメータとみなされる. このような場合,  $C$  に関する統計的推測において順位に基づく統計量を用いることの正当化は通常, 座標毎の狭義単調増加変換の下での不変性に基づいて議論されている. しかし, 単に不変だというだけでは順位に基づく方法の良さを示していることにはならない. そこで, 2.1 節において導入した定義 2.1 の意味での  $\mathcal{G}$  十分性を一つの最適性と捉えて, それを順位統計量について示そう.

$g_1, \dots, g_d$  を  $\mathbb{R}$  上の連続な狭義単調増加関数で,  $g_j(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  を満たすものとし,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1d} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nd} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

に対して,  $g: \mathbb{R}^{n \times d} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$  を

$$gX = \begin{pmatrix} g_1(x_{11}) & g_2(x_{12}) & \dots & g_d(x_{1d}) \\ g_1(x_{21}) & g_2(x_{22}) & \dots & g_d(x_{2d}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1(x_{n1}) & g_2(x_{n2}) & \dots & g_d(x_{nd}) \end{pmatrix}$$

で定義する．そして，このような変換全体を  $\mathcal{G}$  で書き表すと，これは  $\mathbb{R}^{n \times d}$  上の変換群となる．さらに， $\mathcal{C}_d$  を  $d$  次元接合関数全体， $\mathcal{D}$  を 1 次元連続分布関数全体とし， $\Theta := \{\theta = (F_1, \dots, F_d, C) \in \mathcal{D}^d \times \mathcal{C}_d\}$  とおくと (上述の記法でいえば， $\Theta_1 = \mathcal{D}^d$ ， $\Theta_2 = \mathcal{C}$ )， $d$  次元連続分布関数の全体  $\mathcal{P}_d$  はパラメータ  $\theta$  で母数化された族とみなせ， $\{P_\theta^{\otimes n}\}_{\theta \in \Theta}$  が標本空間  $\mathbb{R}^{n \times d}$  上の確率分布族となる．

**命題 2.3.** 確率分布族  $\{P_\theta^{\otimes n}\}_{\theta \in \Theta}$  は  $\mathcal{G}$  不変である．

**証明.** 対応する準同型写像  $\bar{g}$  は

$$(2.1) \quad \bar{g}\theta = (F_1 \circ g_1^{-1}, \dots, F_d \circ g_d^{-1}, C)$$

で与えられるから，接合関数の単調変換下での不変性 (塚原, 2008, 定理 2.8) より主張は明らかである．□

$i \in \{1, \dots, n\}$ ， $j \in \{1, \dots, d\}$  に対して， $x_{1j}, \dots, x_{nj}$  の中の  $x_{ij}$  の順位を  $r_{ij}$  とし，順位ベクトルを並べた行列を

$$R = R(X) := \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1d} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nd} \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_d)$$

と書き，順位統計量と呼ぶ．

**定理 2.4.** 定義 2.1 の意味で，順位統計量  $R$  は 1 次元周辺分布関数  $(F_1, \dots, F_d)$  が未知の下で，接合関数  $C$  に対して  $\mathcal{G}$  十分である．

**証明.** 定義 2.1 の条件 (i)-(iii) を確かめればよい．準同型写像  $\bar{g}$  は (2.1) で与えられており，(i) は明らかに満たされる．また，順位は狭義単調増加変換の下で不変だから， $R$  が  $\mathcal{G}$  不変であることも自明である．次に， $S$  を任意の  $\mathcal{G}$  不変な統計量とする． $R$  を所与とするということは， $(r_{1j}, \dots, r_{nj})$  の逆順列を  $(s_{1j}, \dots, s_{nj})$  とするとき， $\mathbb{R}^{n \times d}$  の  $(n!)^d$  個の順序錐による分割の中で，

$$\mathcal{K}_r := \mathcal{K}_{r_1} \times \dots \times \mathcal{K}_{r_d}, \quad \text{ただし } \mathcal{K}_{r_j} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : x_{s_{1j}} < \dots < x_{s_{nj}}\}$$

上に限定するというにほかならない．ところが，各  $\mathcal{K}_{r_j}$  内の任意の 2 点は適当な連続かつ狭義単調増加関数  $g$  で互いに変換可能であるから， $S$  はこの上で一定となる．よって， $R$  を所与とした  $S$  の条件付き分布は  $C$  に依存しない．したがって，定理の主張が示された．□

次節以降では，接合関数  $C$  に関する統計的推測の様々な方法について包括的に解説する．

**注意 2.5.** 上に述べた接合関数モデルに対しての順位統計量の部分十分性は，Hoff (2007) に簡単に述べられている．

### 3. 接合関数のノンパラメトリック推定

第 1 節で導入した設定を思い出そう： $\mathbf{X}_i := (X_{i1}, \dots, X_{id})$ ， $i = 1, \dots, n$  は  $d$  次元連続分布関数  $F$  からの iid 標本である． $F$  が連続である場合には，その Sklar 分解 (1.1) における接合関数  $C$  は

$$(3.1) \quad C(\mathbf{u}) = F(F_1^-(u_1), \dots, F_d^-(u_d)), \quad \mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

で与えられることが容易にわかる。ここで、任意の 1 次元分布関数  $H$  に対して、その分位関数(quantile)は  $H^-(u) := \inf\{x \in \mathbb{R}: H(x) \geq u\}$  である。よって、上式における  $F$  および  $F_1^-, \dots, F_d^-$  を対応する経験分布関数・経験分位関数で置き換えれば、 $C$  の自然なノンパラメトリック推定量が得られる。すなわち、 $j \in \{1, \dots, d\}$  に対して、

$$\mathbb{F}_{nj}(x_j) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{ij} \leq x_j\}, \quad \mathbb{F}_n(\mathbf{x}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{i1} \leq x_1, \dots, X_{id} \leq x_d\}$$

と定義するとき、経験接合関数(Deheuvels, 1979)  $\mathbb{C}_n$  は

$$(3.2) \quad \mathbb{C}_n(\mathbf{u}) := \mathbb{F}_n(\mathbb{F}_{n1}^-(u_1), \dots, \mathbb{F}_{nd}^-(u_d))$$

で定義される。また、これを少し変形したバージョンである“順位に基づく経験接合関数”は次の式で定義される：

$$(3.3) \quad \tilde{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\left\{\frac{R_{ij,n}}{n+1} \leq u_j\right\}.$$

接合関数研究分野では、

$$(3.4) \quad \hat{U}_i := \frac{1}{n+1} \mathbf{R}_{i,n} = \left(\frac{R_{i1,n}}{n+1}, \dots, \frac{R_{id,n}}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n$$

を擬似観測値(pseudo-observations)と呼ぶことが多い(Ghoudi and Rémillard, 2004)。よって、(3.3)は擬似観測値に基づく経験分布関数であるということが出来る。

同順位がない場合には、

$$(3.5) \quad \|\tilde{\mathbb{C}}_n - \mathbb{C}_n\|_\infty := \sup_{\mathbf{u} \in [0, 1]^d} |\tilde{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u}) - \mathbb{C}_n(\mathbf{u})| \leq \frac{d}{n}$$

が成り立つことが容易にわかる。(3.2)と(3.3)はどちらも順位のみ依存するため、それらの確率分布は  $C$  を通してのみ  $F$  に依存する。

$\mathbb{C}_n$  の漸近挙動を調べるために、経験接合過程(empirical copula process)を  $\mathbb{G}_n := \sqrt{n}(\mathbb{C}_n - C)$  で定義する。 $[0, 1]^d$  上の実数値有界関数全体に  $\sup$  ノルム  $\|\cdot\|_\infty$  を備えたバナッハ空間を  $\ell^\infty([0, 1]^d)$  で表す。そして、曲がりくねった矢印  $\rightsquigarrow$  は、van der Vaart and Wellner (1996)で定義された意味での弱収束を表すとす。

経験接合関数が  $C$  の一様強一致推定量、すなわち  $\|\mathbb{C}_n - C\|_\infty \rightarrow 0$ ,  $P$ -a.s. が成り立つことは Deheuvels (1979)らによって古くから知られていた。Fermanian et al. (2004)や Tsukahara (2005)は、 $C$  の偏導関数  $\dot{C}_j = \partial C / \partial u_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  が  $[0, 1]^d$  全域で連続であるという条件の下で、経験接合過程  $\mathbb{G}_n$  に対する収束定理を得ていたが、その仮定は Segers (2012)により裾依存性をもつ接合関数に対しても成り立つ条件に弱められた。

**定理 3.1.** (Segers, 2012) 各  $j \in \{1, \dots, d\}$  について、接合関数  $C$  は集合  $\{\mathbf{u} \in [0, 1]^d: 0 < u_j < 1\}$  上で連続な 1 次偏導関数  $\dot{C}_j(\mathbf{u}) = \partial C(\mathbf{u}) / \partial u_j$  をもつと仮定すると、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において

$$\mathbb{G}_n \rightsquigarrow \mathbb{G}^C, \quad n \rightarrow \infty$$

が成り立つ。ここで、

$$\mathbb{G}^C(\mathbf{u}) := \mathbb{U}^C(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^d \dot{C}_j(\mathbf{u}) \mathbb{U}^C(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$$

であるが,  $(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$  は第  $j$  成分が  $u_j$  で, その他のすべての成分が 1 の  $d$  次元ベクトル,  $\mathbb{U}^C$  は  $C$  でピン止めされたブラウンシート ( $C$ -pinned Brownian sheet), すなわち連続な軌道をもつ平均 0 のガウス過程で, 共分散関数が

$$\text{Cov}\{\mathbb{U}^C(\mathbf{u}), \mathbb{U}^C(\mathbf{v})\} = C(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) - C(\mathbf{u})C(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^d$$

で与えられるものである. また,  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  は成分毎に最小値をとったベクトル, すなわち,  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = (\min(u_1, v_1), \dots, \min(u_d, v_d))$  である.

式(3.5)より,  $\tilde{C}_n(\mathbf{u})$  を用いた経験接合過程  $\tilde{\mathbb{G}}_n := \sqrt{n}(\tilde{C}_n - C)$  についても同じ結果が成り立つことは明らかである.

$C_n$  や  $\tilde{C}_n$  は階段関数であるから, 接合関数の性質の中で連続性や周辺分布の一様性は満たし得ない. これを満たす接合関数の推定量として, Segers et al. (2017) では次式で定義される経験ベータ接合関数が提案されている:

$$(3.6) \quad C_n^\beta(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d F_{n, R_{ij, n}}(u_j), \quad \mathbf{u} \in [0, 1]^d$$

ここで,  $u \in [0, 1]$  と  $r \in \{1, \dots, n\}$  に対して,

$$F_{n, r}(u) = \sum_{s=r}^n \binom{n}{s} u^s (1-u)^{n-s} = \text{P}[\text{Bin}(n, u) \geq r]$$

はベータ分布  $B(r, n+1-r)$  の分布関数である. この経験ベータ接合関数は真の接合関数であるだけでなく, 平滑化パラメータが不要であること, リサンプリングが非常に容易であることなどの利点を兼ね備えている. また, Segers et al. (2017) では, 経験ベータ接合関数の小標本でのパフォーマンスが他の接合関数推定量と比べて良いこともモンテカルロ・シミュレーションで示されている. この経験ベータ接合関数に基づくリサンプリング法については, 第 7 節で後述する.

#### 4. 接合関数の汎関数の推定

前節の漸近的な結果を用いることによって, 接合関数の汎関数の推定量に対する漸近分布も導くことができる. 最もよく知られているものは, 次の 2 つの順位相関係数であろう (Kendall and Gibbons, 1990):

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \tau(C) &:= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 && \text{(Kendall の } \tau) \\ \rho(C) &:= 12 \int_0^1 \int_0^1 [C(u_1, u_2) - u_1 u_2] du_1 du_2 && \text{(Spearman の } \rho) \end{aligned}$$

それぞれの(伝統的な)標本版は

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \hat{\tau} &:= \frac{2K}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \text{sign}[(X_{k1} - X_{i1})(X_{k2} - X_{i2})], \\ \hat{\rho} &:= \frac{1}{n(n^2-1)} \left[ 12 \sum_{i=1}^n R_{i1, n} R_{i2, n} - 3n(n+1)^2 \right] = 1 - \frac{6 \sum_i (R_{i1, n} - R_{i2, n})^2}{n(n^2-1)} \end{aligned}$$

で定義される。これらは  $\tau(\mathbb{C}_n)$  や  $\rho(\mathbb{C}_n)$  とは若干異なる形となるが (Tsukahara, 2000), 漸近分布は同等となるため, 以下ではこれらのプラグイン推定量を考える。  $C$  は連続微分可能で偏導関数  $\dot{C}_j$  ( $j = 1, 2$ ) をもつと仮定すると,

$$\sqrt{n}(\rho(\mathbb{C}_n) - \rho) = 12 \iint \sqrt{n}[C_n(u_1, u_2) - C(u_1, u_2)] du_1 du_2$$

は  $12 \iint \mathbb{D}^C(u_1, u_2) du_1 du_2$  に弱収束する。この分布は平均 0 の正規分布であるが, その分散を書き下すのは面倒である。しかし,  $C(u_1, u_2) = u_1 u_2 =: \lambda$ , すなわち  $X_{i1}$  と  $X_{i2}$ ,  $i = 1, \dots, n$  が独立であれば,  $\mathbb{D}^\lambda$  はブラウン枕 (Brownian pillow) となるから, 直接的な計算により  $12 \iint \mathbb{D}^\lambda(u_1, u_2) du_1 du_2$  の分散は 1 となることがわかる。これは標本 Spearman 順位相関係数の独立性帰無仮説の下での漸近分散に等しくなっていることも確かめることができる (Kendall and Gibbons, 1990 参照)。

一般に,  $[0, 1]^3$  上の任意の関数  $J$  に対して,

$$S(C) := \iint J(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) du_1 du_2$$

と定義し, 対応する標本版  $S(\mathbb{C}_n)$  を Spearman 型順位統計量と呼ぶことにする。すると, 上の  $\rho(\mathbb{C}_n)$  は  $J(u_1, u_2, w) = 12(w - u_1 u_2)$  の場合に対応する。この型の統計量に対する漸近分布は, Gaenssler and Stute (1987) で得られている。

**定理 4.1.** 関数  $J$  は  $w$  に関して連続な偏導関数  $J^3(u, v, w)$  をもち,  $\sup_{u, v, w} |J^3(u_1, u_2, w)| < \infty$  を満たすとする,  $\sqrt{n}(S(\mathbb{C}_n) - S(C))$  は平均 0, 分散

$$\sigma^2(S) := \text{var} \left( \iint J^3(u_1, u_2, w) Z(u_1, u_2) du_1 du_2 \right)$$

の正規分布に分布収束する。ただし,  $\sigma^2(S) > 0$  と仮定し,  $Z(u_1, u_2)$  は

$$\begin{aligned} Z(u_1, u_2) &:= \mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq u_1, \xi_2 \leq u_2\}} - C(u_1, u_2) \\ &\quad - \dot{C}_1(u_1, u_2)(\mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq u_1\}} - u_1) - \dot{C}_2(u_1, u_2)(\mathbb{1}_{\{\xi_2 \leq u_2\}} - u_2) \end{aligned}$$

で定義される確率過程,  $(\xi_1, \xi_2)$  は分布関数  $C$  に従う確率ベクトルである。

$T(\mathbb{C}_n)$  に対する漸近論はより複雑である。Spearman 型順位統計量の場合と同様に,  $[0, 1]^3$  上の関数  $J$  に対して,

$$T(C) := \iint J(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) dC(u_1, u_2)$$

とおき,  $T(\mathbb{C}_n)$  を Kendall 型順位統計量と呼ぶことにする。  $J(u_1, u_2, w) = 4w - 1$  ととれば  $\tau(\mathbb{C}_n)$  が得られる。この Kendall 型順位統計量の漸近分布は次の定理で与えられる。

**定理 4.2.**  $J(u_1, u_2, w)$  は  $(0, 1)^3$  上で連続微分可能であるとし, 偏導関数

$$J^1(u_1, u_2, w) = \frac{\partial J(u_1, u_2, w)}{\partial u_1}, \quad J^2(u_1, u_2, w) = \frac{\partial J(u_1, u_2, w)}{\partial u_2}, \quad J^3(u_1, u_2, w) = \frac{\partial J(u_1, u_2, w)}{\partial w},$$

は一様に有界であると仮定する。このとき,  $\sqrt{n}(T(\mathbb{C}_n) - T(C))$  は平均 0, 分散

$$\begin{aligned} \sigma^2(T) &:= \text{var} \left( J(\xi_1, \xi_2, C(\xi_1, \xi_2)) + \iint [J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2))(\mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq u_1, \xi_2 \leq u_2\}} - C(u_1, u_2)) \right. \\ &\quad \left. + J^1(u_1, u_2, C(u_1, u_2))(\mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq u_1\}} - u_1) + J^2(u_1, u_2, C(u_1, u_2))(\mathbb{1}_{\{\xi_2 \leq u_2\}} - u_2)] dC(u_1, u_2) \right) \end{aligned}$$

の正規分布に分布収束する。ただし、 $\sigma^2(T) > 0$  と仮定し、 $(\xi_1, \xi_2)$  は定理 4.1 と同様に分布関数  $C$  に従う確率ベクトルである。

証明は Shorack and Wellner (1986) 式の記法を用いて概略だけを述べておこう。まず、

$$\begin{aligned} & \sqrt{n}(T(\mathbb{C}_n) - T(C)) \\ &= \iint J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) \mathbb{G}_n(u_1, u_2) d\mathbb{C}_n(u_1, u_2) + \iint J(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) d\mathbb{G}_n(u_1, u_2) + R_n \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $R_n = o_P(1)$  である。1 番目の積分は

$$\iint J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) \mathbb{G}^C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2)$$

に収束する。2 番目の積分も  $\iint J(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) d\mathbb{G}^C(u_1, u_2)$  に収束する。定理 3.1 と部分積分を用いた直接的な計算によって、これら 2 つの確率変数間の共分散構造は

$$\iint J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) Z(u_1, u_2) dC(u_1, u_2)$$

( $Z(u_1, u_2)$  は定理 4.1 で定義された確率過程である) と

$$\begin{aligned} & J(\xi_1, \xi_2, C(\xi_1, \xi_2)) - \iint J(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) dC(u_2, u_2) \\ &+ \iint [J^1(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) + J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) \dot{C}^1(u_1, u_2)] (\mathbb{1}_{\{\xi_1 \leq u_1\}} - u_1) dC(u_1, u_2) \\ &+ \iint [J^2(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) + J^3(u_1, u_2, C(u_1, u_2)) \dot{C}^2(u_1, u_2)] (\mathbb{1}_{\{\xi_2 \leq u_2\}} - u_2) dC(u_1, u_2) \end{aligned}$$

との間の共分散構造と同じであることが示される。これら 2 つを加えるといくつかの項が相殺し合って、定理に述べた形の漸近分布が得られることがわかる。

**注意 4.3.** 以上の議論は大雑把であるが、より厳密には汎関数デルタ法 (van der Vaart and Wellner, 1996, Section 3.9) を用いて、ある種の関数微分可能性を示すことにより証明することもできる。他の依存性尺度については、Nelsen (2006, Chapter 5) とそこでの引用文献を参照せよ。

## 5. セミパラメトリック・モデルにおける推定

本節では、iid 標本  $\mathbf{X}_i, i \in \{1, \dots, n\}$  の母集団分布関数  $F$  の接合関数  $C$  が母数化されているセミパラメトリックモデルを考える：

$$F(x_1, \dots, x_d) = C_\theta(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^m.$$

このモデルにおける推定問題とは、周辺分布関数  $F_1, \dots, F_d$  が未知のまま  $\theta$  を推定することである。

### 5.1 順位近似 $Z$ 推定

$C_\theta$  が絶対連続で、 $\theta$  に関して微分可能な密度関数  $c_\theta$  をもつと仮定し、 $\dot{c}_\theta := (\partial c_\theta / \partial \theta_1, \dots, \partial c_\theta / \partial \theta_m)^\top$  とおくと、上記問題に対する尤度関数は、



$$\prod_{i=1}^n c_{\theta}(F_1(X_{i1}), \dots, F_d(X_{id})) f_1(X_{i1}) \cdots f_d(X_{id})$$

と書ける。もし  $F_1, \dots, F_d$  が既知であれば、尤度方程式

$$\sum_{i=1}^n \frac{\dot{c}_{\theta}(F_1(X_{i1}), \dots, F_d(X_{id}))}{c_{\theta}(F_1(X_{i1}), \dots, F_d(X_{id}))} = \mathbf{0}$$

の解が通常の最尤推定量となる。しかし、それらは未知であるため、スケールを変えて  $n+1$  で割った経験分布関数で代用することになると、結局それは  $(F_1(X_{i1}), \dots, F_d(X_{id}))$  を式(3.4)の擬似観測値  $\hat{U}_i$  で置き換えることと同じになる。さらに、 $\dot{c}_{\theta}/c_{\theta}$  を一般の推定関数  $\phi(\cdot, \theta)$  で置き換えると、

$$(5.1) \quad \sum_{i=1}^n \phi[\mathbb{F}_{n1}(X_{i1}), \dots, \mathbb{F}_{nd}(X_{id})] = \mathbf{0}$$

という推定方程式が得られる。ただし、 $\phi(\cdot, \theta) = (\phi_1(\cdot, \theta), \dots, \phi_m(\cdot, \theta))$  は  $(0, 1)^d$  上の  $\mathbb{R}^m$  値関数で、

$$\int \phi_k(\mathbf{u}, \theta) dC_{\theta}(\mathbf{u}) = 0, \quad k \in \{1, \dots, m\}$$

を満たさなければならない。このとき、方程式(5.1)の解  $\hat{\theta}_n^{RAZ}$  を  $\theta$  の順位近似  $Z$  推定量と呼ぶ (Tsukahara, 2005)。そして、特に、 $\phi(\cdot, \theta) = \dot{c}_{\theta}/c_{\theta}$  のときには、(5.1)の解は擬似尤度推定量 (pseudo-likelihood estimator) と呼ばれている (Genest et al. 1995)。他の例については、Tsukahara (2005)を参照されたい。

この順位近似  $Z$  推定量  $\hat{\theta}_n^{RAZ}$  に対する漸近論を展開するために、次の定義をおく。

**定義 5.1.** (i)  $\mathcal{Q}$  は  $[0, 1]$  上の実数値連続関数  $q$  で、 $(0, 1)$  上では正の値をとり、 $1/2$  に関して対称、 $[0, 1/2]$  上では増加関数で、 $\int_0^1 \{q(t)\}^{-2} dt < \infty$  を満たすものの全体である。

(ii) 関数  $r: (0, 1) \rightarrow (0, \infty)$  が  $\mathbf{u}$  形であるとは、 $1/2$  に関して対称であり、 $(0, 1/2]$  上で増加関数であることをいう。

(iii)  $0 < \beta < 1$  と  $\mathbf{u}$  形関数  $r$  に対して、

$$r_{\beta}(t) = \begin{cases} r(\beta t) & \text{if } 0 < t \leq 1/2; \\ r\{1 - \beta(1 - t)\} & \text{if } 1/2 < t \leq 1. \end{cases}$$

とおく。ある  $0$  の近傍におけるすべての  $\beta > 0$  に対して、 $(0, 1)$  上  $r_{\beta} \leq M_{\beta} r$  となるような定数  $M_{\beta}$  が存在するならば、 $r$  を再生  $\mathbf{u}$  形関数と呼ぶ。そして、再生  $\mathbf{u}$  形関数の全体を  $\mathcal{R}$  と書く。

$\mathcal{Q}$  と  $\mathcal{R}$  に属する関数で典型的な例は

$$q(t) = \{t(1-t)\}^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1/2, \quad r(t) = D\{t(1-t)\}^{-\tau}, \quad \tau \geq 0, \quad D \geq 0$$

である。

一般的な正則条件として、次のような条件が必要である。

(A.1) 各  $\theta$  と  $k \in \{1, \dots, m\}$  に対して、 $\phi_k(\cdot, \theta): (0, 1)^d \rightarrow \mathbb{R}$  は連続微分可能であり、その偏導関数を  $\phi_k^j = \partial \phi_k / \partial u_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  としたとき、関数  $r_j \in \mathcal{R}$ ,  $\tilde{r}_j \in \mathcal{R}$  と  $q_j \in \mathcal{Q}$  ( $j \in \{1, \dots, d\}$ ) が存在し、

$$|\phi_k(\mathbf{u}, \theta)| \leq \prod_{j=1}^d r_j(u_j), \quad |\phi_k^j(\mathbf{u}, \theta)| \leq \tilde{r}_j(u_j) \prod_{l \neq j} r_l(u_l), \quad j \in \{1, \dots, d\},$$

および

$$\int_{(0,1)^d} \left\{ \prod_{j=1}^d r_j(u_j) \right\}^2 dC_\theta(\mathbf{u}) < \infty,$$

$$\int_{(0,1)^d} \left\{ q_j(u_j) \tilde{r}_j(u_j) \prod_{l \neq j} r_l(u_l) \right\} dC_\theta(\mathbf{u}) < \infty, \quad j \in \{1, \dots, d\}$$

が成り立つ.

(A.2)  $\theta_0$  は写像  $\theta \mapsto \int \phi(\mathbf{u}, \theta) dC_{\theta_0}(\mathbf{u})$  の一意な零点である.

(A.3) 各  $j \in \{1, \dots, m\}$  に対して,  $\phi_j(\mathbf{u}, \theta)$  は  $dC_\theta$  に関して  $(0, 1)^d$  上 2 乗可積分である.

(A.4)  $\phi(\cdot, \theta)$  は  $\theta$  について微分可能で, そのヤコビ行列

$$\dot{\phi}(\mathbf{u}, \theta) = \left[ \frac{\partial \phi_k(\mathbf{u}, \theta)}{\partial \theta_l} \right]_{m \times m}$$

は次の条件を満たす:  $\dot{\phi}(\mathbf{u}, \theta)$  は  $\mathbf{u}$  と  $\theta$  について連続であり, ある  $dC_\theta$  可積分関数  $h(\mathbf{u})$  が存在して,  $\|\dot{\phi}(\mathbf{u}, \theta)\| \leq h$  となる.

(A.5)  $m \times m$  行列  $A_0 = \int \dot{\phi}(\mathbf{u}, \theta_0) dC_{\theta_0}(\mathbf{u})$  は非特異である.

一般によく用いられる接合関数の多くについて, 擬似尤度推定量に対応する  $\phi(\cdot, \theta) = \dot{c}_\theta / c_\theta$  が上記の条件を満たすことは簡単に確かめられる.

以上の正則条件の下で, 順位近似  $Z$  推定量に対する漸近分布が得られる.

**定理 5.2.** 条件 (A.1)-(A.5) を仮定する.  $n \rightarrow \infty$  のとき, 推定方程式 (5.1) に対する解  $\hat{\theta}_n$  が存在し,  $\theta$  の真値  $\theta_0$  に収束する確率は 1 に近づく. さらに,  $n \rightarrow \infty$  のとき,  $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)$  は平均 0, 共分散行列  $A_0^{-1} \Sigma_0 A_0^{-1}$  の正規分布に分布収束する. ここで,  $\xi$  を分布関数  $C_{\theta_0}$  に従う確率ベクトルとすると,

$$\Sigma_0 = \text{var} \left\{ \phi(\xi, \theta_0) + \sum_{j=1}^d \int \phi^j(\mathbf{u}, \theta_0) (\mathbb{1}\{\xi_j \leq u_j\} - u_j) dC_{\theta_0}(\mathbf{u}) \right\}$$

である.

## 5.2 他の推定法

**最小距離推定.** 2つの接合関数  $C$  と  $D$  の距離  $\gamma(C, D)$  が与えられているとき, 経験接合関数  $C_n$  と  $C_\theta$  の距離  $\gamma(C_n, C_\theta)$  を最小化する  $\theta$  の値を推定値とする方法を最小距離推定法という. すなわち, 最小距離推定量は

$$\hat{\theta}_n^{\text{MD}} := \arg \min_{\theta} \gamma(C_n, C_\theta)$$

で定義される.  $\gamma$  の例としては,

$$\gamma(C, D) = \int_{(0,1)^d} \{C(\mathbf{u}) - D(\mathbf{u})\}^2 d\mathbf{u} \quad (\text{Cramér-von Mises 距離})$$

$$\gamma(C, D) = \sup_{\mathbf{u} \in (0,1)^d} |C(\mathbf{u}) - D(\mathbf{u})| \quad (\text{Kolmogorov-Smirnov 距離})$$

$$\gamma(C, D) = \int_{(0,1)^d} \{\sqrt{c(\mathbf{u})} - \sqrt{d(\mathbf{u})}\}^2 d\mathbf{u} \quad (\text{Hellinger 距離})$$

などが考えられる。ここで、 $c$  と  $d$  はそれぞれ  $C$  と  $D$  の接合密度関数を表す。そのため、Hellinger 距離を用いるためには、カーネル法などによって接合密度関数の推定を行う必要がある。これらの推定量はある種の頑健性をもつと期待されるが、その詳細については調べられていない。漸近分布は Tsukahara (2005) で得られている。

**順位相関反転推定.**  $d = 2, m = 1$  の場合を考える。4 節で述べたように、Kendall と Spearman の母順位相関係数(4.1)は接合関数  $C$  の汎関数として定義されるが、本節での設定のように  $C$  が母数化されて  $C_\theta$  となっている場合には、 $\theta$  の関数となる。それらをそれぞれ  $\tau(\theta)$ 、 $\rho(\theta)$  と書くことにする。ここで積率法との類似で、これらを標本順位相関係数(4.2)と等号で結び、それらを  $\theta$  について解いて得られる推定量

$$\hat{\theta}_\tau = \tau^{-1}(\hat{\tau}), \quad \hat{\theta}_\rho = \rho^{-1}(\hat{\rho})$$

を順位相関反転推定量と呼ぶ(積率法推定量とも呼ばれる)。この方法は、 $\tau(\theta)$  や  $\rho(\theta)$  が  $\theta$  の簡単な関数である場合に有効であり(その例については、塚原, 2008 参照)、2次元の場合にしかな適用できない方法ではあるが、しばしばより複雑な最適化計算を要する推定方法の初期値として用いられることがある。 $\tau$  反転推定量は、Oakes (1982) (Clayton 族) と Genest (1987) (Frank 族) で考察されている。

本節で紹介した推定方法は計算機言語 R でパッケージ ‘copula’ として実装されているが、その詳細についてはそのマニュアルである Hofert et al. (2018) や Hofert et al. (2019) を参照してほしい。Tsukahara (2005) や Kojadinovic and Yan (2010) で報告されているモンテカルロ・シミュレーションによる比較実験では、2次元の主だった接合関数族について、平均 2 乗誤差が小さいという意味で、擬似尤度推定量が最良の推定量であるという結論が得られている。Chen et al. (2006) では、篩 (sieve) 法によるセミパラメトリック最尤推定量がセミパラメトリックな意味で漸近的に最適な推定量であることが示されている。しかし、周辺分布がすべて未知の場合には、有限標本においてこの複雑な方法が擬似尤度推定量を凌駕するというようなシミュレーション結果は得られていない。

## 6. 適合度検定

本節では、 $C$  に関する様々な検定を短く概観する(より詳細な解説論文としては、Fermanian, 2013 や Genest et al., 2009 がある)。 $C$  に関する検定問題は、ある接合関数の族  $\mathcal{C}$  について、帰無仮説  $C \in \mathcal{C}$  を対立仮説  $C \notin \mathcal{C}$  に対して検定するという形で表現できる。

- 例 6.1.** (i) 独立性の検定:  $\mathcal{C} = \{\Pi\}$ ,  $\Pi(\mathbf{u}) = \prod_{j=1}^d u_j$  は独立接合関数。  
 (ii) 古典的な適合度検定:  $\mathcal{C} = \{C_0\}$ ,  $C_0$  は所与の接合関数。  
 (iii) パラメータ族の適合度検定:  $\mathcal{C} = \{C_\theta\}_{\theta \in \Theta}$ 。  
 (iv) 対称性の検定:  $\mathcal{C} = \{C: (1, \dots, d)$  の任意の置換  $(\pi_1, \dots, \pi_d)$  に対して,  $C(u_1, \dots, u_d) = C(u_{\pi_1}, \dots, u_{\pi_d})\}$ 。  
 (v) 極値依存性の検定:  $\mathcal{C} = \{C: \text{接合関数 } C_* \text{ が存在して } C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_*^n(u_1^{1/n}, \dots, u_d^{1/n})\}$ 。  
 (vi) アルキメデス型の検定:  $\mathcal{C} = \{C: C(\mathbf{u}) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_d))\}$ ,  $\phi$  は  $d$  単調な生成素}。

これらの検定問題に対する検定統計量の多くは、経験接合関数に基づくものである。(i)–(iii)については、5.2 節で最小距離推定量を考えた際に導入した、2つの接合関数  $C$  と  $D$  の距離  $\gamma(C, D)$  を用いて、

$$\inf_{C \in \mathcal{C}} \gamma(\mathbb{C}_n, C)$$

という形の検定統計量が基本的である。\$\gamma\$ としては、5.2 節で挙げた Cramér-von Mises 距離、Kolmogorov-Smirnov 距離のほかに、積分で重みをつける

$$D_n := \int_{[0,1]^d} [\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u})]^2 w_n(\mathbf{u}) d\mathbb{C}_n(\mathbf{u}), \quad D'_n := \int_{[0,1]^d} [\mathbb{C}_n(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u})]^2 w_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$$

といった Anderson-Darling 型のものも考えられる。Genest et al. (2009) では、Kolmogorov-Smirnov 距離に基づく検定は、多くの場合に検出力が他の検定よりも小さいことがシミュレーション実験により報告されている。

(iv) の検定として、\$d = 2\$ の場合には

$$\int_0^1 \int_0^1 [\mathbb{C}_n(u_1, u_2) - \mathbb{C}_n(u_2, u_1)]^2 d\mathbb{C}_n(u_1, u_2)$$

の形の検定統計量が自然に考えられる (Genest et al., 2012; Harder and Stadtmüller, 2017) は、\$d > 2\$ の場合への拡張を論じている。

(v) と (vi) の問題はより複雑であり、定義とは異なる \$\mathcal{C}\$ の便利な特徴づけが必要となる。(v) については、いわゆる Kendall 分布を用いる検定法や Pickands 従属性関数の推定量と経験接合関数に基づくものなどが提案されているが、詳しくは Bücher and Kojadinovic (2015) を参照されたい。(vi) については、\$d = 2\$ の場合に Bücher et al. (2012) が検定方式を提案しているが、\$d > 2\$ の場合への拡張は困難なようである。

これらの検定について、漸近的な帰無分布は経験接合過程 \$\sqrt{n}(\mathbb{C}\_n - C)\$ の極限分布から導くことができることが多い。しかし、Fermanian (2013) にも述べられているように、漸近分布から \$p\$ 値、あるいは臨界値を求めることは 2 段階の近似を要することになるため実用的でない。よって、いくつかのリサンプリング法が提案されているのだが、これは次節の話題である。

## 7. リサンプリング法

以上見てきたように、接合関数の従属パラメータの区間推定や一般のクラスに属するかどうかの有意性検定を行うためには、何らかの形でリサンプリング法を適用しなければならないことが多い。本節では、経験接合過程のブートストラップ法についてこれまで提案されてきたものを再考察した上で、新たに我々が提案している経験ベータ接合関数に基づくリサンプリング手法についても簡単に述べる。

### 7.1 直接的ブートストラップ

\$(W\_{n1}, \dots, W\_{nn})\$ を多項分布 \$\text{Mult}(n; 1/n, \dots, 1/n)\$ に従う確率ベクトルとし、標本 \$\mathbf{X}\_1, \dots, \mathbf{X}\_n\$ とは独立であるとする。そして、

$$(7.1) \quad \mathbb{C}_n^*(\mathbf{u}) = \mathbb{F}_n^*(\mathbb{F}_{n1}^*(u_1), \dots, \mathbb{F}_{nd}^*(u_d)),$$

ただし

$$\mathbb{F}_n^*(\mathbf{x}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{ni} \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{X_{ij} \leq x_j\},$$

$$\mathbb{F}_{nj}^*(x_j) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{ni} \mathbb{1}\{X_{ij} \leq x_j\}, \quad j \in \{1, \dots, d\}$$

とおく。

ブートストラップに関する漸近論のために、van der Vaart and Wellner (1996, Section 2.9) にならって、データを所与とした条件付き分布の確率収束を定義する。まず、

$$\text{BL}_1 := \{h: \ell^\infty([0, 1]^d) \rightarrow \mathbb{R}, \|h\|_\infty \leq 1 \text{ かつ} \\ \text{すべての } x, y \in \ell^\infty([0, 1]^d) \text{ に対して } |h(x) - h(y)| \leq \|x - y\|_\infty\}$$

とおく。 $\hat{X}_n$  が  $W$  をランダムな重みとする、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  におけるブートストラップ過程の列であるとき、記号

$$\hat{X}_n \underset{W}{\overset{P}{\rightsquigarrow}} X, \quad n \rightarrow \infty$$

は

$$\sup_{h \in \text{BL}_1} |E_W h(\hat{X}_n) - E h(X)| \rightarrow 0 \quad (\text{外確率収束})$$

かつ、すべての  $h \in \text{BL}_1$  に対して

$$E_W h(\hat{X}_n)^* - E_W h(\hat{X}_n)_* \xrightarrow{P} 0$$

が成り立つことを意味する。ここで、 $E_W$  はデータ  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  を所与とした、重み  $W$  に関する条件付き期待値を示す記号であり、 $h(\hat{X}_n)^*$  と  $h(\hat{X}_n)_*$  はそれぞれ全データ  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n, W$  に関する最小可測優関数 (minimal measurable majorant) と最大可測劣関数 (maximal measurable minorant) である。

Fermanian et al. (2004) は、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において

$$(7.2) \quad \sqrt{n}(\mathbb{C}_n^* - \mathbb{C}_n) \underset{W}{\overset{P}{\rightsquigarrow}} \mathbb{G}_C, \quad n \rightarrow \infty$$

が成り立つことを示した。

いま  $(W_{n1}, \dots, W_{nn})$  は上と同様の確率ベクトルとし、順位に基づく経験接合関数 (3.3) のブートストラップ版を

$$(7.3) \quad \tilde{\mathbb{C}}_n^*(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n W_{ni} \prod_{j=1}^d \mathbb{1} \left\{ \frac{R_{ij,n}^*}{n} \leq u_j \right\}$$

で定義する。ここで、

$$(7.4) \quad R_{ij,n}^* = \sum_{k=1}^n W_{nk} \mathbb{1} \{X_{kj} \leq X_{ij}\}.$$

である。ブートストラップ標本には高い確率で同順位が起こるため、 $\mathbb{C}_n^*$  と  $\tilde{\mathbb{C}}_n^*$  については、式 (3.5) の不等式は成り立たないが、

$$(7.5) \quad \sup_{\mathbf{u} \in [0, 1]^d} |\mathbb{C}_n^*(\mathbf{u}) - \tilde{\mathbb{C}}_n^*(\mathbf{u})| = O_p(n^{-1} \log n), \quad n \rightarrow \infty.$$

が成り立つことを示すことができる (証明は Kiriliouk et al., 2019 参照)。このため、経験接合関数として (3.2), (3.3) のどちらをブートストラップしても、漸近的には同等となる。

## 7.2 偏導関数の推定値を用いた乗数ブートストラップ法

このアプローチは Remillard and Scaillet (2009) で提案されたものである。  $Z_1, \dots, Z_n$  を、データとは独立な iid 確率変数で、 $E(Z_i) = 0$ ,  $\text{Var}(Z_i) = 1$  と

$$\|Z_i\|_{2,1} := \int_0^\infty \sqrt{\mathbb{P}(|Z_i| > x)} dx < \infty$$

を満たすものとする。そして、

$$(7.6) \quad \tilde{C}_n^Z(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \prod_{j=1}^d \mathbb{1} \left\{ \frac{R_{ij}^{(n)}}{n} \leq u_j \right\}$$

と

$$(7.7) \quad \tilde{\beta}_n(\mathbf{u}) := \sqrt{n}[\tilde{C}_n^Z(\mathbf{u}) - \bar{Z}_n \tilde{C}_n(\mathbf{u})] = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}_n) \prod_{j=1}^d \mathbb{1} \left\{ \frac{R_{ij}^{(n)}}{n} \leq u_j \right\},$$

を定義する。ただし、 $\bar{Z}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n Z_i$  である。

**Remillard and Scaillet (2009)**への補足。Remillard and Scaillet (2009, p. 383) にちよつとした誤りが存在するため ( $C_n(u) = \dots$  から始まるページ中段の式) ここで修正しておく。 $U_{ij} := F_j(X_{ij})$  とおくと、 $(U_{i1}, \dots, U_{id})$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  は分布関数  $C$  に従う iid 確率ベクトルとなる。さらに、

$$\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{U_{ij} \leq u_j\}, \quad \mathbb{G}_{nj}(u_j) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{U_{ij} \leq u_j\}$$

とおくと、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において  $\mathbb{U}_n^C := \sqrt{n}(\mathbb{G}_n - C) \rightsquigarrow \mathbb{U}^C$  が成り立つ。このとき、 $u_j \in [0, 1]$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  と  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して

$$\{U_{ij} \leq \mathbb{G}_n^-(u_j)\} = \{X_{ij} \leq \mathbb{F}_n^-(u_j)\}, \text{ a.s.}$$

が成り立つことを見るのは容易である。よって、

$$\mathbb{G}_n(\mathbb{G}_{n1}^-(u_1), \dots, \mathbb{G}_{nd}^-(u_d)) = \mathbb{F}_n(\mathbb{F}_{n1}^-(u_1), \dots, \mathbb{F}_{nd}^-(u_d)), \text{ a.s.}$$

が結論される。ここで、右辺は定義より  $\mathbb{C}_n(\mathbf{u})$  に等しいことに注意する。

ここで、

$$\mathbb{U}_n^Z(\mathbf{u}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \left( \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{U_{ij} \leq u_j\} - \mathbb{G}_n(\mathbf{u}) \right)$$

と定義すると、

$$\mathbb{U}_n^Z(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \left( \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{U_{ij} \leq u_j\} - C(\mathbf{u}) \right) - \bar{Z}_n \sqrt{n}(\mathbb{G}_n(\mathbf{u}) - C(\mathbf{u})),$$

となり、右辺第 2 項は一樣に 0 に確率収束する。ゆえに、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において  $\mathbb{U}_n^Z \rightsquigarrow \mathbb{U}^C$  が成立する。Remillard and Scaillet (2009) は、 $\mathbb{U}^C$  と  $\mathbb{U}^{C'}$  を 2 つの互いに独立な  $C$  でピン止めされたブラウンスheetとして、“無条件の”収束  $(\mathbb{U}_n^C, \mathbb{U}_n^{C'}) \rightsquigarrow (\mathbb{U}^C, \mathbb{U}^{C'})$  を主張しているが、これは van der Vaart and Wellner (1996, Corollary 2.9.3), あるいはより直接的に Kosorok (2008, Corollary 10.3) を適用すれば直ちに得られる結果である。

$$(7.8) \quad \beta_n(\mathbf{u}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \left( \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{U_{ij} \leq \mathbb{G}_{nj}^-(u_j)\} - \mathbb{C}_n(\mathbf{u}) \right)$$

とくと、 $\beta_n(\mathbf{u}) = \mathbb{U}_n^Z(\mathbb{G}_{n1}^-(u_1), \dots, \mathbb{G}_{nd}^-(u_d))$  が成り立ち、(合成写像に関する)連続写像定理と  $\|\mathbb{G}_{nj}^- - I\|_\infty \rightarrow 0$ , a.s. ( $I$  は  $[0, 1]$  上の恒等関数) という事実、そして  $\mathbb{U}^C$  のパスの連続性から、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において  $\beta_n \rightsquigarrow \mathbb{U}^C$  が結論される。

Remillard and Scaillet (2009) では、下記の偏導関数推定量を用いた確率過程の無条件の収束を示しているが、ここではより興味深い条件付きの収束が成立することに注意する。すなわち、Kosorok (2008, Theorem 10.4) より、 $\ell^\infty([0, 1]^d)$  において、

$$\mathbb{U}_n^Z \xrightarrow[Z]{P} \mathbb{U}^C, \quad n \rightarrow \infty$$

であり、 $\|\mathbb{G}_{nj}^- - I\|_\infty \rightarrow 0$ , a.s. が成り立つことより、 $\beta_n \xrightarrow[Z]{P} \mathbb{U}^C$  が従う。

各  $j \in \{1, \dots, d\}$  に対して、偏導関数  $\dot{C}_j(\mathbf{u}) = \partial C / \partial u_j(\mathbf{u})$  は

$$\hat{C}_j(\mathbf{u}) = \begin{cases} \frac{C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, 2h, u_{j+1}, \dots, u_d)}{2h}, & u_j \in [0, h) \\ \frac{C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j + h, u_{j+1}, \dots, u_d) - C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, u_j - h, u_{j+1}, \dots, u_d)}{2h}, & u_j \in [h, 1-h) \\ \frac{C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, 1, u_{j+1}, \dots, u_d) - C_n(u_1, \dots, u_{j-1}, 1-2h, u_{j+1}, \dots, u_d)}{2h}, & u_j \in (1-h, 1] \end{cases}$$

で推定できる。 $h \asymp n^{-1/2}$  ととると、すべての  $\hat{C}_j$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  が  $[0, 1]^d$  上で連続であるならば、 $\|\hat{C}_j - \dot{C}_j\|_\infty \xrightarrow{P} 0$  となる。最後に

$$\alpha_n^{\text{pdm}}(\mathbf{u}) := \beta_n(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^d \hat{C}_j(\mathbf{u}) \beta_n(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$$

とくと、 $\|\hat{C}_j - \dot{C}_j\|_\infty \xrightarrow{P} 0$  であるから、Slutsky の補題と連続写像定理により、 $\alpha_n^{\text{pdm}} \xrightarrow[Z]{P} \mathbb{G}^C$  が得られる。

上記の結果は標準の経験接合関数(3.2)に対するブートストラップ中心極限定理である。次に、順位に基づく経験接合関数(3.3)について、(7.7)で定義された  $\tilde{\beta}_n$  についても同様の結果が成り立つことを示そう。まず、

$$(7.9) \quad \beta_n(\mathbf{u}) - \tilde{\beta}_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i \left[ \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{X_{ij} \leq \mathbb{F}_{nj}^-(u_j)\} - \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{\mathbb{F}_{nj}(X_{ij}) \leq u_j\} \right] - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n Z_i (C_n(\mathbf{u}) - \tilde{C}_n(\mathbf{u})), \quad \text{a.s.}$$

となり、右辺の第2項は(3.5)により  $O_p(n^{-1})$  である。さらに、(7.5)の証明と同様の議論により、(7.9)の右辺第1項の絶対値は  $d/\sqrt{n} \max_{1 \leq i \leq n} |Z_i|$  によって押さえられる。 $Z_1, Z_2, \dots$  は同じ分布に従い(ここでは独立性は不要である)、 $E(Z_i^2) < \infty$  を満たすから、

$$\max_{1 \leq i \leq n} \frac{|Z_i|}{\sqrt{n}} \xrightarrow{P} 0$$

となる。よって、(7.9)の右辺第1項は一様に  $o_p(1)$  であり、 $\|\beta_n - \tilde{\beta}_n\|_\infty \xrightarrow{P} 0$ 、そして  $\tilde{\beta}_n \xrightarrow[Z]{P} \mathbb{U}^C$

が成り立つ.

$$\tilde{\alpha}_n^{\text{pdm}}(\mathbf{u}) := \tilde{\beta}_n(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^d \hat{C}_j(\mathbf{u}) \tilde{\beta}_n(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$$

と定義すると, 上と同様の議論から  $\tilde{\alpha}_n^{\text{pdm}} \xrightarrow[\mathbb{Z}]{\mathbb{P}} \mathbb{G}^C$  が得られる.

注意 7.1. 同じ論法を用いて, 一般の交換可能な重み  $(W_{n1}, \dots, W_{nn})$  に対して,

$$\|\mathbb{C}_n^* - \tilde{\mathbb{C}}_n^*\|_\infty = o_p(n^{-1/2})$$

を示すことができる (c.f. (7.5)).

**Bücher と Dette による修正.** Bücher and Dette (2010)では, より使い勝手の良い次のような改良版が提案されている.  $\xi_1, \dots, \xi_n$  を, データとは独立な正の iid 確率変数で,  $E(\xi_i) = \mu$ ,  $\text{Var}(\xi_i) = \tau^2 > 0$  と  $\|\xi_i\|_{2,1} < \infty$  を満たすものとし,  $\bar{\xi}_n := n^{-1} \sum_{i=1}^n \xi_i$ ,

$$\mathbb{C}_n^\circ(\mathbf{u}) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\bar{\xi}_n} \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{X_{ij} \leq \mathbb{F}_{nj}^-(u_j)\}$$

とおく.  $\xi_i$  を標準化して  $Z_i = (\xi_i - \mu)/\tau$  と書くと,

$$\frac{\mu}{\tau} \sqrt{n}(\mathbb{C}_n^\circ(\mathbf{u}) - \mathbb{C}_n(\mathbf{u})) = \frac{\mu}{\bar{\xi}_n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}_n) \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{X_{ij} \leq \mathbb{F}_{nj}^-(u_j)\} = \frac{\mu}{\bar{\xi}_n} \cdot \beta_n(\mathbf{u})$$

となる. よって,  $\beta_n^\circ := \sqrt{n}(\mu/\tau)(\mathbb{C}_n^\circ - \mathbb{C}_n)$  は実際  $\beta_n$  と近いことがわかる. 同様に,

$$\tilde{\mathbb{C}}_n^\circ := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\xi_i}{\bar{\xi}_n} \prod_{j=1}^d \mathbb{1}\{\mathbb{F}_{nj}(X_{ij}) \leq u_j\}$$

とおけば,

$$\frac{\mu}{\tau} \sqrt{n}(\tilde{\mathbb{C}}_n^\circ(\mathbf{u}) - \tilde{\mathbb{C}}_n(\mathbf{u})) = \frac{\mu}{\bar{\xi}_n} \cdot \tilde{\beta}_n(\mathbf{u})$$

となり,  $\tilde{\beta}_n^\circ := \sqrt{n}(\mu/\tau)(\tilde{\mathbb{C}}_n^\circ - \tilde{\mathbb{C}}_n)$  は  $\tilde{\beta}_n$  とほぼ同等である.

Bücher and Dette (2010)の主張である  $\beta_n^\circ \xrightarrow[\xi]{\mathbb{P}} \mathbb{U}^C$  は Kosorok (2008, Theorem 2.6)と  $\|\mathbb{F}_{nj}^- - I\|_\infty \rightarrow 0$ , a.s. を用いれば従う. また,  $\tilde{\beta}_n^\circ \xrightarrow[\xi]{\mathbb{P}} \mathbb{U}^C$  も成り立つから,

$$\alpha_n^{\text{pdm}^\circ}(\mathbf{u}) := \beta_n^\circ(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^d \hat{C}_j(\mathbf{u}) \beta_n^\circ(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$$

と

$$\tilde{\alpha}_n^{\text{pdm}^\circ}(\mathbf{u}) := \tilde{\beta}_n^\circ(\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^d \hat{C}_j(\mathbf{u}) \tilde{\beta}_n^\circ(\mathbf{1}, u_j, \mathbf{1})$$

が  $\mathbb{G}^C$  を条件付きで近似することがわかる.



### 7.3 他のリサンプリング法

Bücher and Dette (2010)では第3の方法も提案されているが、彼らのシミュレーション実験によれば、有限標本では偏導関数の推定値を用いた乗数ブートストラップ法が最良という結果が報告されているので、ここでは省略する。

例 6.1 (iii) の適合度検定に対しては、

$$\int_{[0,1]^d} [C_n(\mathbf{u}) - C_{\hat{\theta}_n}(\mathbf{u})]^2 dC_n(\mathbf{u})$$

の形の検定統計量が最も検出力が大きいとの大規模シミュレーション結果がある (Genest et al., 2009). その形から明らかなように、このタイプの統計量については、擬似観測値に基づくパラメトリック・ブートストラップ法が有効である。また、5.1 節で述べた順位近似  $Z$  推定量、あるいはその特殊ケースである疑似尤度推定量に基づく信頼区間を構成する場合にも、同方法を適用することが可能である。

最後に、(3.6) 式で定義した経験ベータ接合関数  $C_n^\beta$  を用いたリサンプリング法を簡潔に説明しよう。実際、分布関数  $C_n^\beta$  に従う  $\mathbf{V}$  を発生させるのは極めて簡単である：順位  $R_{ij,n} = r_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, d$  を所与として、

1.  $\{1, \dots, n\}$  から無作為に1つを選び、 $I$  とする。
2. それとは独立に  $V_j^\# \sim B(r_{Ij}, n+1-r_{Ij})$ ,  $j \in \{1, \dots, d\}$  を発生させる。
3.  $\mathbf{V}^\# = (V_1^\#, \dots, V_d^\#)$  とおく。

このアルゴリズムを  $n$  回繰り返せば、データ  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  を所与として、 $C_n^\beta$  からの  $n$  個の独立な確率ベクトル  $\mathbf{V}_i^\# = (V_{i1}^\#, \dots, V_{id}^\#)$ ,  $i = 1, \dots, n$  を発生させることができる。経験ベータ接合関数は経験接合関数の平滑化版と考えることができるので、上のリサンプリング法は一種の平滑化ブートストラップ (smoothed bootstrap) とみなすこともできる (Efron, 1982 や Shao and Tu, 1995, Section 3.5 を参照せよ)。この方法では同順位が起こることがないため、安定的にリサンプリングすることができる。Kiriliouk et al. (2019) では、この方法に関する漸近的妥当性を証明し、いくつかの区間推定や対称性の検定について包括的なモンテカルロ・シミュレーションを行って比較分析しており、 $C_n^\beta$  を用いたリサンプリング法は多くの場合に有望な選択肢となり得ることが示されている。

### 謝 辞

査読者の有益なコメントに感謝する。また、本研究は JSPS 科研費 JP18H00836 の助成を受けたものである。

### 参 考 文 献

- Barnard, G. A. (1963). Some logical aspects of the fiducial argument, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **25**, 111–115.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Blæsild, P. and Eriksen, P. S. (1989). *Decomposition and Invariance of Measures, and Statistical Transformation Models*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Blum, J. R., Kiefer, J. and Rosenblatt, M. (1961). Distribution free tests of independence based on the sample distribution function, *Annals of Mathematical Statistics*, **32**, 485–498.
- Bücher, A. and Dette, H. (2010). A note on bootstrap approximations for the empirical copula process,

- Statistics and Probability Letters*, **80**, 1925–1932.
- Bücher, A. and Kojadinovic, I. (2015). An overview of nonparametric tests of extreme-value dependence and of some related statistical procedures, *Extreme Value Modeling and Risk Analysis: Methods and Applications* (eds. D. Day and J. Yan), 377–398, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- Bücher, A., Dette, H. and Volgushev, S. (2012). A test for archimedeanity in bivariate copula models, *Journal of Multivariate Analysis*, **110**, 121–132.
- Chen, X., Fan, Y. and Tsyrennikov, V. (2006). Efficient estimation of semiparametric multivariate copula models, *Journal of the American Statistical Association*, **101**, 1228–1240.
- Deheuvels, P. (1979). La fonction de dépendance empirique et ses propriétés: Un test non paramétrique d'indépendance, *Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences, 5e série*, **65**, 274–292.
- Efron, B. (1982). *The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- Fermanian, J.-D. (2013). An overview of the goodness-of-fit test problem for copulas, *Copulae in Mathematical and Quantitative Finance* (eds. P. Jaworski, F. Durante and W. K. Härdle), 61–89, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- Fermanian, J.-D., Radulović, D. and Wegkamp, M. J. (2004). Weak convergence of empirical copula processes, *Bernoulli*, **10**, 847–860.
- Gaenssler, P. and Stute, W. (1987). *Seminar on Empirical Processes*, Birkhäuser, Basel.
- Genest, C. (1987). Frank's family of bivariate distributions, *Biometrika*, **74**, 549–555.
- Genest, C., Ghoudi, K. and Rivest, L.-P. (1995). A semiparametric estimation procedure of dependence parameters in multivariate families of distributions, *Biometrika*, **82**, 543–552.
- Genest, C., Rémillard, B. and Beaudoin, D. (2009). Goodness-of-fit tests for copulas: Review and a power study, *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, 199–213.
- Genest, C., Nešlehová, J. and Quessy, J.-F. (2012). Tests of symmetry for bivariate copulas, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **64**, 811–834.
- Ghoudi, K. and Rémillard, B. (2004). Empirical processes based on pseudo-observations II: The multivariate case, *Asymptotic Methods in Stochastics: Festschrift for Miklós Csörgő*, Fields Institute Communications, Vol. 44 (eds. L. Horváth and B. Szyszkowicz), 381–406, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Hall, W. J., Wijsman, R. A. and Ghosh, J. K. (1965). The relationship between sufficiency and invariance with applications in sequential analysis, *Annals of Mathematical Statistics*, **36**, 575–614.
- Harder, M. and Stadtmüller, U. (2017). Testing exchangeability of copulas in arbitrary dimension, *Journal of Nonparametric Statistics*, **29**, 40–60.
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Maechler, M., Yan, J. and Nešlehová, J. G. (2018). Package 'copula', R package version 0.999-19, <http://CRAN.R-project.org/package=copula>.
- Hofert, M., Kojadinovic, I., Mächler, M. and Yan, J. (2019). *Elements of Copula Modeling with R*, Springer International Publishing, Cham, Switzerland.
- Hoff, P. D. (2007). Extending the rank likelihood for semiparametric copula estimation, *Annals of Applied Statistics*, **1**, 265–283.
- Kendall, M. and Gibbons, J. D. (1990). *Rank Correlation Methods*, 5th ed., Oxford University Press, New York.
- Kiriliouk, A., Segers, J. and Tsukahara, H. (2019). On some resampling procedures with the empirical beta copula, <http://arxiv.org/abs/1905.12466>.
- Kojadinovic, I. and Yan, J. (2010). Comparison of three semiparametric methods for estimating dependence parameters in copula models, *Insurance: Mathematics and Economics*, **47**, 52–63.

- Kosorok, M. R. (2008). *Introduction to Empirical Processes and Semiparametric Inference*, Springer Science+Business Media Inc., New York.
- Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, 2nd ed., John Wiley & Sons, New York.
- 鍋谷清治 (1978). 『数理統計学』, 共立出版, 東京.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*, 2nd ed., Springer Science+Business Media Inc., New York.
- Oakes, D. (1982). A model for association in bivariate survival data, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **44**, 414–422.
- Rémillard, B. and Scaillet, O. (2009). Testing for equality between two copulas, *Journal of Multivariate Analysis*, **100**, 377–386.
- Rémon, M. (1984). On a concept of partial sufficiency: L-sufficiency, *International Statistical Review*, **52**, 127–135.
- Segers, J. (2012). Asymptotics of empirical copula processes under nonrestrictive smoothness assumptions, *Bernoulli*, **18**, 764–782.
- Segers, J., Sibuya, M. and Tsukahara, H. (2017). The empirical beta copula, *Journal of Multivariate Analysis*, **155**, 35–51.
- Severini, T. A. (2000). *Likelihood Methods in Statistics*, Oxford University Press, Oxford.
- Shao, J. and Tu, D. (1995). *The Jackknife and Bootstrap*, Springer-Verlag, New York.
- Shorack, G. R. and Wellner, J. A. (1986). *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley & Sons, New York.
- Sprott, D. A. (1965). Transformations and sufficiency, *Journal of the Royal Statistical Society (B)*, **27**, 479–485.
- Tsukahara, H. (2000). *Empirical copulas and some applications*, Research Report No. 27, The Institute for Economic Studies, Seijo University, <http://www.seijo.ac.jp/research/economics/publications/reserch-report/jtmo420000000mul-att/green27.pdf>.
- Tsukahara, H. (2005). Semiparametric estimation in copula models, *Canadian Journal of Statistics*, **33**, 357–375 (Erratum: *ibid.* (2011). **39**, 734–735).
- 塚原英敦 (2008). 接合分布関数(コピュラ)の理論と応用, 『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』(北川源四郎・竹村彰通 編), 111–146, 東京大学出版会, 東京.
- van der Vaart, A. W. and Wellner, J. A. (1996). *Weak Convergence and Empirical Processes: With Applications to Statistics*, Springer-Verlag, New York.

## Statistical Inference in Copula Models

Hideatsu Tsukahara

Faculty of Economics, Seijo University

In this paper, we provide an exposition of statistical inference procedures on the copula associated with a multivariate distribution from which we have a random sample, without any knowledge of the marginal distributions. According to the  $\mathcal{G}$ -sufficiency criterion, the inference should be based on vectors of coordinatewise ranks only. The empirical copula and its variants are nonparametric estimators of copula, and depend on the data only through their ranks. Their asymptotic properties are briefly reviewed. Then estimation of functionals of the copula such as rank correlation coefficients are discussed. Semiparametric estimation of the dependence parameter of copula is also considered with a special focus on rank approximate  $Z$ -estimators which includes the well-known pseudo-likelihood estimators. After a short review of general goodness-of-fit testing on copulas, we conclude the paper with a detailed examination of some resampling schemes based on the empirical and related copulas, which are indispensable for carrying out the aforementioned inference procedures in practice.