

## 「特集 複雑な依存構造を持つデータの 統計解析法—コピュラとその周辺—」について

加藤 昇吾<sup>1</sup>・吉羽 要直<sup>1,2</sup> (オーガナイザー)

データ解析においては、変量間に非線形な関係があるデータや非対称に分布するデータなどの「複雑な依存構造を持つデータ」を扱わなければならないことがある。このようなデータは、金融・保険・医学・政治科学をはじめとする様々な学術分野で観測されている。しかし、古典的な統計学においては、線形回帰モデルや多変量正規分布のような単純な依存構造を持つモデルに基づく統計手法が主に研究され、これらの統計手法を複雑な依存構造を持つデータに応用すると誤った解析結果を与えてしまうことが知られている。

例えば、株価などの資産価格変動は、ブラックマンデーやリーマン・ショックのように急変動があるため、1変量正規分布では捉えられないと言われている。故に、こうした資産価格変動をリスクファクターとしてポートフォリオのリスクを把握するために多変量正規分布を用いることは、一般に適切ではない。そこで、リスクファクターに1変量正規分布ではない裾の重い分布などのより適切な分布を設定し、リスクファクター間には柔軟な依存構造を表現できるコピュラを用いて分析していくなどの統計解析法が必要となる。

本特集では、複雑な依存構造を持つデータのための統計解析法について、第一線で活躍する研究者による最新の研究結果およびレビューを提供する。本特集の副題にもあるように、本特集の論文では主にコピュラに関連した話題を扱っている。また、近年研究が進んでいる realized stochastic volatility モデルも議論している。

コピュラ(copula)は、非対称性・非線形性などの変量間の複雑な依存構造を表現できる確率分布族として、近年大きな注目を集めている。コピュラはその語源から、「接合分布関数」または「接合関数」とも呼ばれる(実際、塚原論文、吉羽論文、福元論文では「接合関数」を用いている)。コピュラは変量間の関係のみを表す確率分布族であるため、それぞれの変量の周辺分布はコピュラとは無関係に選ぶことができる。故にコピュラと周辺分布は自由に組み合わせることができ、それが複雑かつ柔軟なモデリングを可能としているのである。また、周辺分布やコピュラに経験分布を用いることで、セミパラメトリックまたはノンパラメトリックな統計解析を行うこともできる。さらに、モデリングのみならず、コピュラは変量間のある種の依存関係を測る尺度としても有用である。

コピュラに関して広く紹介している英語の文献としては、確率的な性質を詳しく議論している Nelsen (2006)や、より統計的な話題を紹介している Joe (2014)、計量経済学における応用を扱っている McNeil et al. (2015, 5章, 15.2節, 16.3節)が挙げられる。また、日本語の文献としては、統計的推測を含む入門として塚原(2008)、多変量コピュラに関する入門として室町(2014, 3章)、金融実務における解説として戸坂・吉羽(2005)、先に挙げた文献の初版の McNeil et al. (2005, 5章, 9.7節)の邦訳などがある。

<sup>1</sup> 統計数理研究所：〒190-8562 東京都立川市緑町10-3

<sup>2</sup> 東京都立大学大学院 経営学研究科：〒100-0005 東京都千代田区丸の内1-4-1

また、特集号で扱うもう 1 つの主要なテーマは、Takahashi et al. (2009) で提案された realized stochastic volatility モデルである。realized stochastic volatility モデルは、資産価格のボラティリティとして標準的になりつつある日中の高頻度リターンから計算される realized volatility と、代表的な資産価格変動モデルである確率ボラティリティ (stochastic volatility) モデルを組み合わせ、同時推定するモデルである。これにより、リターンとボラティリティの複雑な依存構造 (レバレッジ) を精緻に捉えようとしている。

本特集は 8 篇の招待論文から構成されている。塚原論文では、多変量分布から得られた標本を用いて周辺分布は未知のままコピュラ (接合関数) に関する推測を行う方法を網羅的に解説している。具体的には、各変量の順位のみからの推定が望ましくなる十分性を整理し、コピュラのノンパラメトリック推定、順位相関の漸近的性質、セミパラメトリック推定、適合度検定、リサンプリング法と、統計的推測に必要な理論的事項を網羅的に整理している。清・松本論文では、セミパラメトリックコピュラにおけるダイバージェンスの性質を考察している。多変量順位統計量によって定まる順位ダイバージェンスと Kullback-Leibler ダイバージェンスの局外パラメータに関する最小値として定義されるプロファイルダイバージェンスの関係について、興味深い性質を明らかにしている。吉羽論文では、資産価格変動の依存性が下落時により強くなる非対称性に注目し、金融実務でよく用いられる  $t$  コピュラの非対称  $t$  コピュラへの拡張を整理している。非対称  $t$  コピュラの定義と性質をまとめたうえで、最尤推定に必要な手続きと実証研究の結果を整理し、本邦の株価変動を推定した実証結果を検証している。高橋・大森・渡部論文では、前述の realized stochastic volatility モデルを整理したうえで、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いたベイズ推定法を示し、日経 225 株価指数に応用した結果を紹介している。野澤・中村論文では、コピュラのパラメータが確率的に変動する確率的コピュラのモデルの構築と数値計算による推定法を整理している。ファイナンス分野への応用事例として、各資産変動に高橋・大森・渡部論文で扱われた realized stochastic volatility モデルを取り込み、リターンとボラティリティの依存関係 (レバレッジ) を確率的コピュラで捉えた事例を挙げて説明している。さらに、ヴァインコピュラを通じて確率的コピュラを多変量に拡張し、為替ヘッジに適用した応用事例を報告している。室町論文では、多くの債務を集めそのデフォルト損失額に応じて証券化を行う CDO (Collateral Debt Obligations) の市場価格から導出されるインプライドコピュラをリスク計測モデルに拡張する際のモデリング手法について論じている。インプライドコピュラでは、価格付けのための確率測度で、僅かな確率で同時デフォルト確率が極端に高まる。これを、市場参加者の将来の環境激変への畏怖としてリスク計測のための確率測度に変換する際の取り扱いについて丁寧に論じている。福元論文では、連続変数で表される事件とその事件発生までの時間をコピュラで捉えた生存分析モデルを提案している。提案されたモデルで事件と時間を同時に分析することでバイアスを理論的に抑えられることを示したうえで、戦後英国の選挙の相対的タイミングと得票率の関係を示した先行研究を再分析している。江村・道前論文では、医療・生物学データベースの発展により複雑かつ膨大な生存時間データの解析の必要性が高まっていることに触れたうえで、コピュラを用いて患者の生存時間と無憎悪期間の 2 つの生存時間をモデリングする手法について総説している。個別医療への応用例として、遺伝子発現量と憎悪情報を用いて死亡率の動的予測を行う手法を紹介している。

本特集の概観からもわかるように、コピュラについては理論と応用の両面で、幅広く研究がなされている。さらに、応用については、以前から多くの研究がなされてきた金融・保険分野に加え、近年は政治科学・医学などの分野においても広がってきていることがわかる。コピュラを直接的に用いずに複雑な依存構造を表現した realized stochastic volatility モデルのようなモデルについても、今後ますます研究が発展していくであろう。本特集における論文を通して、読者がこれらの話題について、少しでも興味を持っていただければ、編集者としてはこれ

以上ない喜びである。

最後に、本特集の刊行にあたっては、執筆をお引き受けいただいた著者の皆様、有益なコメントをくださった査読者の皆様、手厚いサポートをしていただいた編集室の皆様に厚く御礼を申し上げたい。また、編集者が所属している統計数理研究所リスク解析戦略研究センターの山下智志センター長、栗木哲プロジェクトリーダーにも、本特集の企画に際し貴重なご助言をいただいたことにお礼申し上げたい。

## 参 考 文 献

- Joe, H. (2014). *Dependence Modeling with Copulas*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.
- McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. (塚原英敦 他 訳 (2008). 『定量的リスク管理：基礎概念と数理技法』, 共立出版, 東京.)
- McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. (2015). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*, revised ed., Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- 室町幸雄 編 (2014). 『金融リスクモデリング—理論と重要課題へのアプローチ—』, 朝倉書店, 東京.
- Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*, 2nd ed., Springer, New York.
- Takahashi, M., Omori, Y. and Watanabe, T. (2009). Estimating stochastic volatility models using daily returns and realized volatility simultaneously, *Computational Statistics and Data Analysis*, **53**, 2404–2426.
- 戸坂凡展, 吉羽要直 (2005). コピュラの金融実務での具体的な活用方法の解説, 金融研究, **24**(別冊 2), 115–162 (<http://www.imes.boj.or.jp/japanese/kinyu/2005/kk24-b2-3.pdf> よりダウンロード可能).
- 塚原英敦 (2008). 接合分布関数(コピュラ)の理論と応用, 日本統計学会創立 75 周年記念出版, 『21 世紀の統計科学 第 3 巻: 数理・計算の統計科学』, 東京大学出版会, 東京 (<https://www.jss.gr.jp/book/books/> より増補版をダウンロード可能).