統計数理（2019）
第 67 巻 第 2 号 277–297

創立 75 周年記念号
［研究ノート］

標準コウホート表のコウホート分析モデルのデザイン行列について

中村 隆†

（受付 2019 年 5 月 17 日；改訂 10 月 10 日；採択 10 月 17 日）

要　旨

継続調査で得られる年齢区分×調査時点形式の標準コウホート表データから年齢・時代・世代（コウホート）要因の効果を分離するコウホート分析モデルについて，3 要因のデザイン行列を陽な表現により与えた．デザイン行列を，目視により与えるとともに，コウホート表のセルに 1 対 1 で対応するセルパラメータに等値制約と同値のゼロ和制約を課すことにより導出した．

キーワード：APC モデル，年齢・時代・世代効果，セルパラメータ，等値制約，ゼロ和制約，継続（反復横断）調査．

1.　はじめに

コウホート分析（cohort analysis or age-period-cohort analysis）は，継続調査（反復横断調査）から得られる何らかの調査項目の年齢区分×調査時点形式の集計表データから，年齢・時代・コウホート（世代）効果を分離しようとする統計的方法である．3 効果がうまく分離できれば，社会の変化の構造に関する知見が得られ，将来の予測に資することができる（Ryder, 1965; Mason and Fienberg, 1985; Glenn, 2005）．

しかしながらコウホート分析には，何らかの付加条件を与えなければ 3 効果を分離できないという識別問題が存在し，付加条件の与え方とその評価を巡って長年に渡り議論が続けられてきた．近年の成書に，Yang and Land (2013)，O’Brien (2015)，Fu (2018) がある．

中村 (1982)，Nakamura (1986) は，統計数理研究所が 1953 年以降 5 年ごとに継続実施している日本人の国民性調査データへの適用を目的として，コウホート分析の識別問題を克服するパラメータの漸進的変化の条件（1 次階差制約）を取り入れ，赤池ベイズ型情報量規準（ABIC）最小化により最適モデルを選択するベイズ型コウホートモデルを開発した．中村 (2005) では，年齢×時代の交互作用効果をもつコウホートモデルに拡張している．

さて，コウホート分析モデルのデザイン行列を具体的に例示したものは散見される（たとえば，Fienberg and Mason, 1979, p.21）ものの，行列表示によって明示的に示したのは坂口・中村 (2019) が最初である．ただし，これは目視によるものである．

以下では，陽には示されてこなかったコウホート要因のデザイン行列の導出を行う．2 節では，年齢・時代・世代 3 要因のデザイン行列を目視により与える．3 節では年齢と時代要因のデザイン行列を，4 節ではコウホート要因のデザイン行列を，コウホート表のセルに 1 対 1 で

† 統計数理研究所 名誉教授：〒 190–8562 東京都立川市緑町 10-3

対応するセルパラメータに等値制約を課すことにより導出する．付録に，導出の過程に有用なベクトルと行列の定義と操作についてまとめる．

2. コウホートモデル

2.1 標準コウホート表

継続調査から得られる年齢区分×調査時点形式の集計表は，コウホート分析の観点から「コウホート表」と呼ばれる．年齢区分幅と調査実施間隔が等しい場合(たとえば，5 歳幅と 5 年間隔)は特に「標準コウホート表」と言う．

標準以外の表は「一般コウホート表」と呼ばれ，年齢区分幅が調査実施間隔と一致しなかったり，調査実施間隔が不規則だったり，年齢区分幅が調査年によって変化したりする場合に得られる．コウホート分析の対象は標準表データに限らないが，本稿では以下，標準コウホート表を想定する．

年齢区分数を I，調査時点数を J とし，第 j 調査時点の第 i 年齢区分を (i, j) セルと呼ぶ $(i = 1, \ldots, I;\ j = 1, \ldots, J)$．表 1 は，$I = 4$，$J = 3$ の場合の模式的な標準コウホート表である．調査実施間隔を 10 年，年齢区分幅を 10 歳としている．表のセルにはデータではなく，セルと 1 対 1 に対応するセルパラメータ η_{ij} を配した．

標準コウホート表について特徴的なことは，表に自然に現れるコウホート区分の数を K とするとき，$K = I + J - 1$ となることである(表 1 では $K = 6$)．また，(i, j) セルに対応するコウホートを第 k コウホート区分とすると，i，j，k の間に，

$$k = k(i, j) = j - i + I, \tag{2.1}$$

という関係(「出生年＝調査年－年齢」のインデックス版)がある $(k = 1, \ldots, K)$．この関係 $k(i, j)$ がコウホート分析における識別問題の源泉である(本稿では識別問題については 4 節で簡単に触れるに留める．詳しくは，たとえば，中村, 2005，坂口・中村, 2019 を参照)．

2.2 コウホートモデル

標準コウホート表における (i, j) セルの何らかの集計項目の期待値をリンク関数で変換したセルパラメータ η_{ij} を，コウホートモデルは次のように分解する．

$$\eta_{ij} = \beta^G + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C, \tag{2.2}$$

ここで，β^G は総平均効果，β_i^A，β_j^P，β_k^C はそれぞれ年齢，時代，コウホート効果のパラメータである．

表 1. 模式的な標準コウホート表のセルパラメータ (η_{ij})．

年齢区分	調査時点 2000年 $(j=1)$	調査時点 2010年 $(j=2)$	調査時点 2020年 $(j=3)$
20歳台 $(i=1)$	η_{11}	η_{12}	η_{13}
30歳台 $(i=2)$	η_{21}	η_{22}	η_{23}
40歳台 $(i=3)$	η_{31}	η_{32}	η_{33}
50歳台 $(i=4)$	η_{41}	η_{42}	η_{43}

パラメータたち $\{\eta_{ij}\}$，$\{\beta_i^A\}$，$\{\beta_j^P\}$，$\{\beta_k^C\}$ をベクトルに配したものをそれぞれ $\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\beta}^A$，$\boldsymbol{\beta}^P$，$\boldsymbol{\beta}^C$ とし，パラメータ $\boldsymbol{\beta}^A$，$\boldsymbol{\beta}^P$，$\boldsymbol{\beta}^C$ に対応するデザイン行列をそれぞれ $\boldsymbol{X}_A$，$\boldsymbol{X}_P$，$\boldsymbol{X}_C$ とすると，モデル(2.2)は，

$$\boldsymbol{\eta} = \beta^G \mathbf{1}_{IJ} + \boldsymbol{X}_A\boldsymbol{\beta}^A + \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{\beta}^P + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{\beta}^C,$$

と書くことができる．ここで，$\mathbf{1}_{IJ}$ はすべての要素が 1 のワンズベクトル(付録 A 参照)である．

2.3　3 要因のデザイン行列

まず，コウホート要因のデザイン行列 $\boldsymbol{X}_C$ を目視により与える．

表 2 は，表 1 と同じ仕様の標準コウホート表であるが，コウホート区分のインデックス k を配したものである．表において，一番古いコウホート区分($k=1$)は，一番古い調査時点($j=1$ [2000 年])の最高齢年齢区分($i=I=4$ [50 歳台])で 1940 年代生まれ，一方，一番新しいコウホート区分($k=K=6$)は，一番新しい調査時点($j=J=3$ [2020 年])の最若齢年齢区分($i=1$ [20 歳台])で 1990 年代生まれである．両者の間に同一コウホート区分は斜め右下方向を辿るセル群に現れ，右上にいくほど新しいコウホート区分($k=2,\ldots,5$)となって並んでいる．

表 3 は，表側に表 2 のセルを縦に並べ，表頭にコウホート効果パラメータを横に並べて，コウホート区分のインデックスが対応するところに 1 を立てたものである．調査時点ごとのブロックに付録(A.1)の反単位行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_I$ が現れている．しかも調査時点が新しくなるにつれ右方向にずれていく．これを表現するには(A.2)の拡張反単位行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}$ に(A.3)のシフト行列のベキ

表 2. 標準コウホート表におけるコウホート効果のインデックス．

年齢区分	調査時点		
	2000年 ($j=1$)	2010年 ($j=2$)	2020年 ($j=3$)
20歳台 ($i=1$)	($k=4$)	($k=5$)	($k=6$)
30歳台 ($i=2$)	($k=3$)	($k=4$)	($k=5$)
40歳台 ($i=3$)	($k=2$)	($k=3$)	($k=4$)
50歳台 ($i=4$)	($k=1$)	($k=2$)	($k=3$)

表 3. 標準コウホート表セルとコウホート効果パラメータの対応．

セ　ル			コウホート効果パラメータ (β_k^C)					
調査時点	年齢区分	コウホート区分	β_1^C	β_2^C	β_3^C	β_4^C	β_5^C	β_6^C
$j=1$	$i=1$	$k=4$				1		
	$i=2$	$k=3$			1			
	$i=3$	$k=2$		1				
	$i=4$	$k=1$	1					
$j=2$	$i=1$	$k=5$					1	
	$i=2$	$k=4$				1		
	$i=3$	$k=3$			1			
	$i=4$	$k=2$		1				
$j=3$	$i=1$	$k=6$						1
	$i=2$	$k=5$					1	
	$i=3$	$k=4$				1		
	$i=4$	$k=3$			1			

乗 $\boldsymbol{N}_K^{j-1}$ $(j=1,\ldots,J)$ を右からかけて順に積み上げれば得られる．すなわち，コウホート要因のデザイン行列 $\boldsymbol{X}_C$ は，付録(B.3)に従って，

$$\boldsymbol{X}_C = \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^0 \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^1 \\ \vdots \\ \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{J-1} \end{bmatrix} = \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}\right)(\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_K), \tag{2.3}$$

とすればよい．

時代要因，年齢要因のデザイン行列についても，表 2 にそれぞれのインデックスを配して同様に考察することにより，

$$\boldsymbol{X}_P = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_I & & & \\ & \boldsymbol{1}_I & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{1}_I \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I, \qquad \boldsymbol{X}_A = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_I \\ \boldsymbol{E}_I \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_I \end{bmatrix} = \boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_I, \tag{2.4}$$

と得られる．

3. 年齢と時代要因のデザイン行列の導出

3.1 セルパラメータ

コウホート表のセルと 1 対 1 に対応するセルパラメータ $\{\eta_{ij}\}$ を配したベクトルと行列を，

$$\boldsymbol{\eta}_j = [\eta_{1j},\ldots,\eta_{Ij}]' \in \mathbb{R}^I \ (j=1,\ldots,J),$$
$$\boldsymbol{H} = [\,\boldsymbol{\eta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_J\,] \in \mathbb{R}^{I\times J}, \qquad \boldsymbol{\eta} = \operatorname{vec}\boldsymbol{H} \in \mathbb{R}^{IJ},$$

とおく($\boldsymbol{\eta}$ については先に 2.2 節で言及した)．ここで，vec は行列の列ベクトルを順に縦に並べる操作である．

同時に，同じ仕様のパラメータ β_{ij} を，以下での説明の都合上用意しておく．

$$\boldsymbol{\beta}_j = [\beta_{1j},\ldots,\beta_{Ij}]', \qquad \boldsymbol{B} = [\,\boldsymbol{\beta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\beta}_J\,], \qquad \boldsymbol{\beta} = \operatorname{vec}\boldsymbol{B}, \tag{3.1}$$

である．また，$\boldsymbol{B}$ の行ベクトルを転置したものを

$$\boldsymbol{\gamma}_i = [\beta_{i1},\ldots,\beta_{iJ}]' \in \mathbb{R}^J \ (i=1,\ldots,I),$$

とおく．

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1' \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_I' \end{bmatrix},$$

である．

3.2 セルパラメータの等値制約・ゼロ和制約とデザイン行列

セルパラメータに対する等値制約と同値のゼロ和制約を斉次連立 1 次方程式として解くことによりデザイン行列を求める方法について説明する．

セルパラメータ・ベクトルの IJ 個の要素の内，ある要因のある水準が対応する L 個の要素を取り出して $\boldsymbol{\eta}_* = [\eta_1, \ldots, \eta_L]'$ とし，残りを $\boldsymbol{\eta}_{**}$ とおいてあらためて $\boldsymbol{\eta} = [\boldsymbol{\eta}'_*, \boldsymbol{\eta}'_{**}]'$ とする．

等値制約 $\eta_1 = \cdots = \eta_L$ は，等しい値を β とおけば，$\boldsymbol{\eta}_* = \beta \mathbf{1}_L$ と表わすことができる．これより

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \beta \mathbf{1}_L \\ \boldsymbol{\eta}_{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_L & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \boldsymbol{\eta}_{**} \end{bmatrix},$$

であるから，この水準のデザイン行列は $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ とすればよい（ただし，元の $\boldsymbol{\eta}$ に対するデザイン行列とするためには，適宜行を並べ戻す必要がある）．これは目視によるデザイン行列の作成にあたる．

等値制約と同値のゼロ和制約 $\eta_1 - \eta_2 = \cdots = \eta_{L-1} - \eta_L = 0$ は，付録(A.22)の階差行列 $\boldsymbol{D}_a$ を用いれば，

$$\boldsymbol{D}_L \boldsymbol{\eta}_* = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_L,$$

と表わすことができ, $\boldsymbol{\eta}$ 全体に対しては,

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_L & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix},$$

とおいて，$\boldsymbol{R}\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ である．これを斉次連立 1 次方程式として解く．付録 C と(A.24)より，

$$\boldsymbol{R}^- \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_L^- \boldsymbol{D}_L & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} - \boldsymbol{R}^- \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_L \boldsymbol{e}'_L & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix},$$

に注意すれば，任意の $\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\beta}'_*, \boldsymbol{\beta}'_{**}]'$，$\boldsymbol{\beta}_* = [\beta_1, \ldots, \beta_L]'$ に対して，

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{R}^- \boldsymbol{R})\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_L \boldsymbol{e}'_L \boldsymbol{\beta}_* \\ \boldsymbol{\beta}_{**} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1}_L & \boldsymbol{O} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_L \\ \boldsymbol{\beta}_{**} \end{bmatrix},$$

となり，デザイン行列は同じ $\begin{bmatrix} \mathbf{1}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ となる．元の $\boldsymbol{\eta}$ の並び替えないゼロ和制約の表現を与えることができれば，直接デザイン行列の表現が得られる．

3.3 時代要因のデザイン行列

時代要因のデザイン行列を得るために，セルパラメータ $\{\eta_{ij}\}$ に同一時点のすべての年齢区分の値が等しいという等値制約と同値のゼロ和制約

$$\eta_{ij} - \eta_{i+1,j} = 0 \quad (i = 1, \ldots, I-1;\ j = 1, \ldots, J),$$

を課す．階差行列を用いれば $\boldsymbol{D}_I \boldsymbol{\eta}_j = \mathbf{0}_{I-1}$ $(j = 1, \ldots, J)$，あるいは，$\boldsymbol{D}_I \boldsymbol{H} = \boldsymbol{O}_{(I-1)\times J}$ となる．vec を施せば，$\boldsymbol{\eta}$ に対する線形制約

$$\mathbf{0} = \mathrm{vec}\, \boldsymbol{D}_I \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I)\mathrm{vec}\, \boldsymbol{H} = (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I)\boldsymbol{\eta},$$

となる（付録(B.1)を使った）．

上記制約を斉次連立 1 次方程式として $\boldsymbol{\eta}$ について解く．付録(C.1)で，$\boldsymbol{E}_b = \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_I$，

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I$ ととればよい．$\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I$ の一般逆行列の 1 つは $\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I^-$ であり，(A.24) より，

$$(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_I) - (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I^-)(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{D}_I) \;=\; \boldsymbol{E}_J \otimes (\boldsymbol{E}_I - \boldsymbol{D}_I^- \boldsymbol{D}_I) \;=\; \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I \boldsymbol{e}_{I,I}',$$

であるから，一般解は，(3.1) で用意した任意の $\boldsymbol{\beta}$ について，

$$\boldsymbol{\eta} \;=\; (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I \boldsymbol{e}_I')\boldsymbol{\beta} \;=\; \mathrm{vec}\,(\boldsymbol{1}_I \boldsymbol{e}_I' \boldsymbol{B}) \;=\; \mathrm{vec}\,(\boldsymbol{1}_I \boldsymbol{\gamma}_I'),$$

と得られる．最右辺の $\boldsymbol{\gamma}_I'$ は $\boldsymbol{B}$ の最下行であるが，要素が時代のインデックスに依存するだけであるから時代効果ベクトルとしてよく，$\beta_j^P = \beta_{Ij}$ として $\boldsymbol{\beta}^P = [\beta_1^P, \ldots, \beta_J^P]' (= [\beta_{I1}, \ldots, \beta_{IJ}]' = \boldsymbol{\gamma}_I)$ とおくと，

$$\boldsymbol{\eta} \;=\; \mathrm{vec}\{\boldsymbol{1}_I (\boldsymbol{\beta}^P)'\} \;=\; (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I)\mathrm{vec}(\boldsymbol{\beta}^P)' \;=\; (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I)\boldsymbol{\beta}^P,$$

となって，(2.4) で示した時代要因のデザイン行列 $\boldsymbol{X}_P = \boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{1}_I$ が得られる．

3.4　年齢要因のデザイン行列

年齢要因のデザイン行列を得るために，セルパラメータ $\{\eta_{ij}\}$ に異なる時点の同じ年齢区分の値が等しいというゼロ和制約を課す．すなわち，

$$\eta_{ij} - \eta_{i,j+1} \;=\; 0 \quad (i = 1, \ldots, I;\; j = 1, \ldots, J-1),$$

である．これはゼロ和制約 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_J' = \boldsymbol{O}_{I \times (J-1)}$ となり，vec を施せば，$\boldsymbol{\eta}$ に対する線形制約

$$\boldsymbol{0} \;=\; \mathrm{vec}\,\boldsymbol{H}\boldsymbol{D}_J' \;=\; (\boldsymbol{D}_J \otimes \boldsymbol{E}_I)\mathrm{vec}\,\boldsymbol{H} \;=\; (\boldsymbol{D}_J \otimes \boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{\eta},$$

となる．

上記制約を斉次連立 1 次方程式として $\boldsymbol{\eta}$ について解く．

$$(\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_I) - (\boldsymbol{D}_J^- \otimes \boldsymbol{E}_I)(\boldsymbol{D}_J \otimes \boldsymbol{E}_I) \;=\; (\boldsymbol{E}_J - \boldsymbol{D}_J^- \boldsymbol{D}_J) \otimes \boldsymbol{E}_I \;=\; \boldsymbol{1}_J \boldsymbol{e}_{J,J}' \otimes \boldsymbol{E}_I,$$

であるから，一般解は，任意の $\boldsymbol{\beta}$ について，

$$\boldsymbol{\eta} \;=\; (\boldsymbol{1}_J \boldsymbol{e}_J' \otimes \boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{\beta} \;=\; \mathrm{vec}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{e}_J \boldsymbol{1}_J') \;=\; \mathrm{vec}(\boldsymbol{\beta}_J \boldsymbol{1}_J'),$$

であり，$\boldsymbol{\beta}_J$ は要素が年齢区分のインデックスに依存するだけであるから年齢効果ベクトルとしてよく，$\beta_i^A = \beta_{iJ}$ として $\boldsymbol{\beta}^A = [\beta_1^A, \ldots, \beta_I^A]' (= [\beta_{1J}, \ldots, \beta_{IJ}]' = \boldsymbol{\beta}_J)$ とおくことにすれば，

$$\boldsymbol{\eta} \;=\; \mathrm{vec}(\boldsymbol{\beta}^A \boldsymbol{1}_J') \;=\; (\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_I)\mathrm{vec}\,\boldsymbol{\beta}^A \;=\; (\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{\beta}^A,$$

となって，(2.4) で示した年齢要因のデザイン行列 $\boldsymbol{X}_A = \boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_I$ が得られる．

4.　コウホート要因のデザイン行列の導出

前節の時代要因および年齢要因のデザイン行列を導出したときと同じ考え方に基づき，以下でセルパラメータのゼロ和制約によりコウホート要因のデザイン行列を導出する．

4.1　反転セルパラメータ

$\boldsymbol{\eta}_j$ の要素は，新しいコウホートから古いコウホートに対応するものが並んでいる．これを逆順にして古いコウホートから新しいコウホートに対応するようにしておくのが後のために便利である．(A.1) の反転行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_I$ を使い，反転セルパラメータ・ベクトルとして，

$$\breve{\boldsymbol{\eta}}_j = \breve{\boldsymbol{E}}_I \boldsymbol{\eta}_j = [\eta_{Ij}, \ldots, \eta_{1j}]',$$

とし，

$$\breve{\boldsymbol{H}} = \breve{\boldsymbol{E}}_I \boldsymbol{H} = [\, \breve{\boldsymbol{E}}_I \boldsymbol{\eta}_1 \quad \cdots \quad \breve{\boldsymbol{E}}_I \boldsymbol{\eta}_J \,] = [\, \breve{\boldsymbol{\eta}}_1 \quad \cdots \quad \breve{\boldsymbol{\eta}}_J \,] \in \mathbb{R}^{I \times J},$$

$$\breve{\boldsymbol{\eta}} = \mathrm{vec}\, \breve{\boldsymbol{H}} = \mathrm{vec}(\breve{\boldsymbol{E}}_I \boldsymbol{H}) = (\boldsymbol{E}_J \otimes \breve{\boldsymbol{E}}_I)\mathrm{vec}\boldsymbol{H} = (\boldsymbol{E}_J \otimes \breve{\boldsymbol{E}}_I)\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{IJ},$$

とおく．$\breve{\boldsymbol{\eta}}$ から $\boldsymbol{\eta}$ に戻すには，$\breve{\boldsymbol{E}}_a^{-1} = \breve{\boldsymbol{E}}_a$ だから，

$$\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{E}_J \otimes \breve{\boldsymbol{E}}_I)\, \breve{\boldsymbol{\eta}} = \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \breve{\boldsymbol{E}}_I \right) \breve{\boldsymbol{\eta}}, \tag{4.1}$$

とすればよい．

4.2　同一コウホートの等値制約

隣り合う時点の $\breve{\boldsymbol{\eta}}_j$ と $\breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1}$ の要素を次のように対比する．コウホート区分のインデックスが (2.1) の $k = j - i + I$ であることに注意して，

$$\breve{\boldsymbol{\eta}}_j = \begin{bmatrix} \eta_{Ij} \\ \eta_{I-1,j} \\ \vdots \\ \eta_{2j} \\ \eta_{1j} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} j\text{th cohort} \\ (j+1)\text{th c.} \\ \vdots \\ (j+I-2)\text{th c.} \\ (j+I-1)\text{th c.} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} (j+1)\text{th c.} \\ (j+2)\text{th c.} \\ \vdots \\ (j+I-1)\text{th c.} \\ (j+I)\text{th c.} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_{I,j+1} \\ \eta_{I-1,j+1} \\ \vdots \\ \eta_{2,j+1} \\ \eta_{1,j+1} \end{bmatrix} = \breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1}.$$

$\breve{\boldsymbol{\eta}}_j$ の第 i 要素と $\breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1}$ の第 $i-1$ 要素が同じコウホートに対応するから，$\breve{\boldsymbol{\eta}}_j$ の第 1 要素と $\breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1}$ の最終要素を次のように削除して揃え，すなわち，

$$\boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I \breve{\boldsymbol{\eta}}_j = \begin{bmatrix} \eta_{I-1,j} \\ \vdots \\ \eta_{2j} \\ \eta_{1j} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} (j+1)\text{th c.} \\ \vdots \\ (j+I-2)\text{th c.} \\ (j+I-1)\text{th c.} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (j+1)\text{th c.} \\ (j+2)\text{th c.} \\ \vdots \\ (j+I-1)\text{th c.} \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} \eta_{I,j+1} \\ \eta_{I-1,j+1} \\ \vdots \\ \eta_{2,j+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_I \breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1},$$

とする（ここで，$\breve{\boldsymbol{\eta}}_j$ と $\breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1}$ のそれぞれに (A.13) と (A.10) を右からかけた）．これに基づき，

$$\mathbf{0} = \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I \breve{\boldsymbol{\eta}}_j - \boldsymbol{F}_I \breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I & -\boldsymbol{F}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \breve{\boldsymbol{\eta}}_j \\ \breve{\boldsymbol{\eta}}_{j+1} \end{bmatrix} \quad (j = 1, \ldots, J-1),$$

のように等値制約と同値のゼロ和制約を課す．全セルについては，

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I & -\boldsymbol{F}_I & & & \\ & \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I & -\boldsymbol{F}_I & & \\ & & \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I & \ddots & \\ & & & \ddots & -\boldsymbol{F}_I \\ & & & & \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I & -\boldsymbol{F}_I \end{bmatrix}$$
$$= (\boldsymbol{F}_J \otimes \boldsymbol{F}_I \boldsymbol{N}_I) - (\boldsymbol{F}_J \boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{F}_I) \in \mathbb{R}^{(I-1)(J-1) \times IJ},$$

とおいて，$\breve{\boldsymbol{\eta}}$ に対する線形制約

$$\boldsymbol{R}\breve{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{0}, \tag{4.2}$$

となる．

4.3 $\boldsymbol{R}$ の一般逆行列

$\boldsymbol{R}$ の一般逆行列の候補として，

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & & & & \\ -\boldsymbol{F}_I' & \boldsymbol{O} & & & \\ -\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{F}_I' & -\boldsymbol{F}_I' & \boldsymbol{O} & & \\ -\boldsymbol{N}_I^2\boldsymbol{F}_I' & -\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{F}_I' & -\boldsymbol{F}_I' & \boldsymbol{O} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ -\boldsymbol{N}_I^{J-2}\boldsymbol{F}_I' & -\boldsymbol{N}_I^{J-3}\boldsymbol{F}_I' & \cdots & -\boldsymbol{N}_I\boldsymbol{F}_I' & -\boldsymbol{F}_I' \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{IJ\times(I-1)(J-1)},$$

ととる．積 $\boldsymbol{RG}$ の対角ブロックが $\boldsymbol{E}_{I-1}$ に，非対角ブロックが $\boldsymbol{O}_{I-1}$ になるように考えると思い付く．

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= -(\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I') - \{(\boldsymbol{N}_J^2)'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I\boldsymbol{F}_I'\} - \cdots - \{(\boldsymbol{N}_J^{J-1})'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I^{J-2}\boldsymbol{F}_I'\} \\ &= -\sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\}, \end{aligned}$$

であるから，

$$\boldsymbol{RG} = -\sum_{j=1}^{J-1}\{\boldsymbol{F}_J(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^j\boldsymbol{F}_I'\} + \sum_{j=1}^{J-1}\{\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\}, \tag{4.3}$$

である． 右辺第 1 項 $\mathrm{RHS}_1^{(4.3)}$ は，和の終項が(A.19)より $\boldsymbol{F}_J(\boldsymbol{N}_J^{J-1})'\boldsymbol{F}_J' = \boldsymbol{O}$ (ゼロズ行列)であるから，

$$\mathrm{RHS}_1^{(4.3)} = -\sum_{j=1}^{J-2}\{\boldsymbol{F}_J(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^j\boldsymbol{F}_I'\} = -\sum_{j=2}^{J-1}\{\boldsymbol{F}_J(\boldsymbol{N}_J^{j-1})'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\},$$

となる．右辺第 2 項 $\mathrm{RHS}_2^{(4.3)}$ は，和の初項を分離し，(A.11)より $\boldsymbol{F}_I\boldsymbol{F}_I' = \boldsymbol{E}_{I-1}$，(A.13)より $\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{F}_J' = \boldsymbol{E}_{J-1}$，(A.18)より $\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J\boldsymbol{N}_J' = \boldsymbol{F}_J$ であるから，

$$\begin{aligned} \mathrm{RHS}_2^{(4.3)} &= (\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{F}_I') + \sum_{j=2}^{J-1}\{\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J\boldsymbol{N}_J'(\boldsymbol{N}_J^{j-1})'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\} \\ &= (\boldsymbol{E}_{J-1} \otimes \boldsymbol{E}_{I-1}) + \sum_{j=2}^{J-1}\{\boldsymbol{F}_J(\boldsymbol{N}_J^{j-1})'\boldsymbol{F}_J' \otimes \boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\}, \end{aligned}$$

となる．したがって，右辺第 1 項 $\mathrm{RHS}_1^{(4.3)}$ と，右辺第 2 項 $\mathrm{RHS}_2^{(4.3)}$ の第 2 項が打ち消し合って，

$$\boldsymbol{RG} = (\boldsymbol{E}_{J-1} \otimes \boldsymbol{E}_{I-1}) = \boldsymbol{E}_{(I-1)\times(J-1)},$$

と単位行列になり，確かに $\boldsymbol{G}$ が $\boldsymbol{R}$ の一般逆行列の 1 つであることがわかる．以下，$\boldsymbol{R}^- = \boldsymbol{G}$ とおく．

4.4 $\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R}$ を求める

(A.17) より $j \geq 1$ で $\boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a^j = \boldsymbol{N}_a^j$ であることに注意して，

$$\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R} = -\sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J'\boldsymbol{F}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I\boldsymbol{N}_I\} + \sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{F}_J'\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)' \otimes \boldsymbol{N}_I^j\} + \sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I\}, \tag{4.4}$$

である．右辺第 1 項 $\mathrm{RHS}_1^{(4.4)}$ は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{RHS}_1^{(4.4)} &= -\sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^j\} \\
&= -\sum_{j=1}^{J-1}\left\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\begin{bmatrix}1 & \\ & \boldsymbol{O}_{J-1}\end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{N}_I^j\right\} - \sum_{j=1}^{J-1}\left\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\begin{bmatrix}0 & \\ & \boldsymbol{E}_{J-1}\end{bmatrix} \otimes \boldsymbol{N}_I^j\right\} \\
&= -\sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{e}_{1,J}\boldsymbol{e}_{J,J}' \otimes \boldsymbol{N}_I^j\} - \sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^j\} \\
&= -\sum_{j=1}^{J-1}(\boldsymbol{e}_{j+1}\boldsymbol{e}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I^j) - \sum_{j=1}^{J-2}\{(\boldsymbol{N}_J^{j+1})'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^j\} \\
&= -\sum_{j=1}^{J-1}(\boldsymbol{e}_{j+1}\boldsymbol{e}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I^j) - \sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\},
\end{aligned}$$

となる．最後から 2 番目の等式では $\boldsymbol{N}_J^J = \boldsymbol{O}_J$ であることを使った．

一方，(4.4) の右辺第 2 項 $\mathrm{RHS}_2^{(4.4)}$ は，和の初項を分離して，

$$\mathrm{RHS}_2^{(4.4)} = (\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I) + \sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I\},$$

となる．

$\mathrm{RHS}_1^{(4.4)}$ と $\mathrm{RHS}_2^{(4.4)}$ それぞれの第 2 項を足すと，(A.16) より $\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I - \boldsymbol{E}_I = -\boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I'$ だから，

$$\begin{aligned}
\sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}(\boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I - \boldsymbol{E}_I)\} &= -\sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I'\} \\
&= -\sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+1}\boldsymbol{e}_I'\},
\end{aligned}$$

となって，

$$\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I) - \sum_{j=1}^{J-1}(\boldsymbol{e}_{j+1}\boldsymbol{e}_J' \otimes \boldsymbol{N}_I^j) - \sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+1}\boldsymbol{e}_I'\},$$

と得られる．

4.5 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R}$ を求める

まず，(A.16)，(A.4) より，

$$(\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{F}_I'\boldsymbol{F}_I) = \{\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes (\boldsymbol{E}_I - \boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I')\} = \{(\boldsymbol{E}_J - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1') \otimes \boldsymbol{E}_I\} - (\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I')$$
$$= (\boldsymbol{E}_J \otimes \boldsymbol{E}_I) - (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1' \otimes \boldsymbol{E}_I) - (\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I'),$$

であり，

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R} = (\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1' \otimes \boldsymbol{E}_I) + (\boldsymbol{N}_J'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_I\boldsymbol{e}_I') + \sum_{j=1}^{J-1}(\boldsymbol{e}_{j+1}\boldsymbol{e}_1' \otimes \boldsymbol{N}_I^j) + \sum_{j=2}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+1}\boldsymbol{e}_I'\},$$

である．$\boldsymbol{N}_a^0 = \boldsymbol{E}_a$ であるから，この右辺第 1 項は第 3 項の和でいうと $j=0$ の場合であり，また右辺第 2 項も第 4 項の和でいうと $j=1$ の場合であり，それぞれまとめることができて，

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R} = \sum_{j=0}^{J-1}(\boldsymbol{e}_{j+1}\boldsymbol{e}_1' \otimes \boldsymbol{N}_I^j) + \sum_{j=1}^{J-1}\{(\boldsymbol{N}_J^j)'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+1}\boldsymbol{e}_I'\}$$

$$= \sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_1' \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}) + \sum_{j=2}^{J}\{(\boldsymbol{N}_J^{j-1})'\boldsymbol{N}_J \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+2}\boldsymbol{e}_I'\} \tag{4.5}$$

$$= \sum_{j=1}^{J}\{[\,\boldsymbol{e}_j \quad \boldsymbol{O}\,] \otimes \boldsymbol{N}_I^{j-1}\} + \sum_{j=2}^{J}\left\{\begin{bmatrix} 0 & \\ & (\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})' \end{bmatrix} \otimes [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-j+2}\,]\right\}, \tag{4.6}$$

となる．

(4.6) の右辺第 1 項 $\mathrm{RHS}_1^{(4.6)}$ は，第 1 列ブロックに上から順に $\boldsymbol{N}_I^{j-1}$ $(j=1,\ldots,J)$ が並ぶことを，右辺第 2 項 $\mathrm{RHS}_2^{(4.6)}$ は，第 1 列ブロックを除いて，対角ブロックに $[\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_I\,]$ が並び，対角ブロックの下に順次斜め右下方向に $[\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-j+2}\,]$ $(j=3,\ldots,J)$ が並ぶことを示している．すなわち，

$$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^{-}\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_I & & & & & \\ \boldsymbol{N}_I & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_I\,] & & & & \\ \boldsymbol{N}_I^2 & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-1}\,] & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_I\,] & & & \\ \boldsymbol{N}_I^3 & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-2}\,] & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-1}\,] & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_I\,] & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{N}_I^{J-1} & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-j+2}\,] & \cdots & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-2}\,] & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_{I-1}\,] & [\,\boldsymbol{O} \quad \boldsymbol{e}_I\,] \end{bmatrix},$$

である．なお，$J > I$ であれば，$j > I$ について，$\boldsymbol{N}_I^{j-1} = \boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{e}_{I-j} = (\boldsymbol{N}_I^j)'\boldsymbol{e}_I = \boldsymbol{0}$ であるから，このとき左下のブロックは実際には $\boldsymbol{O}_I$ となっていることに注意する．

4.6 $\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}$

後のために，$\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}$ について考えておく．

$\boldsymbol{N}_K$ は，$K = I+J-1$ であるから，

$$\boldsymbol{N}_K = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_I & [\,\boldsymbol{e}_{I,I} \quad \boldsymbol{O}\,] \\ & \boldsymbol{N}_{J-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_I & \boldsymbol{e}_{I,I}\boldsymbol{e}_{1,J-1}' \\ & \boldsymbol{N}_{J-1} \end{bmatrix},$$

であり，これより一般に，

$$\boldsymbol{N}_K^{j-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_I^{j-1} & \boldsymbol{A}_j \\ & \boldsymbol{N}_{J-1}^{j-1} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_j = \sum_{\ell=1}^{j-1} \boldsymbol{e}_{I-(j-1)+\ell,I}\boldsymbol{e}'_{\ell,J-1}, \tag{4.7}$$

であることを数学的帰納法により示すことができる．これより，

$$\breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1} = [\,\boldsymbol{E}_I \quad \boldsymbol{O}_{I\times(J-1)}\,]\begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_I^{j-1} & \boldsymbol{A}_j \\ & \boldsymbol{N}_{J-1}^{j-1} \end{bmatrix} = [\,\boldsymbol{N}_I^{j-1} \quad \boldsymbol{A}_j\,], \tag{4.8}$$

である．

4.7 コウホート要因のデザイン行列

3.3，3.4 節と同様に斉次連立 1 次方程式(4.2)を $\breve{\boldsymbol{\eta}}$ について解くと，任意の $\breve{\boldsymbol{\beta}}= (\boldsymbol{E}_J\otimes\breve{\boldsymbol{E}}_I)\boldsymbol{\beta}$ について，一般解は

$$\breve{\boldsymbol{\eta}}= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^-\boldsymbol{R})\,\breve{\boldsymbol{\beta}},$$

である．まず，(4.5)の右辺第 1 項 $\mathrm{RHS}_1^{(4.6)}$ の和の中について $\breve{\boldsymbol{\beta}}$ をかけると，

$$(\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}'_1\otimes\boldsymbol{N}_I^{j-1})\,\breve{\boldsymbol{\beta}}= \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_I^{j-1}\,\breve{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}'_j) = \mathrm{vec}(\boldsymbol{N}_I^{j-1}\,\breve{\boldsymbol{\beta}}_1\boldsymbol{e}'_j) = (\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{N}_I^{j-1})\,\breve{\boldsymbol{\beta}}_1,$$

であり，右辺第 2 項 $\mathrm{RHS}_2^{(4.6)}$ の和の中についても同様にすると，(A.15)より，

$$\begin{aligned}\{(\boldsymbol{N}_J^{j-1})'\boldsymbol{N}_J\otimes\boldsymbol{e}_{I-j+2}\boldsymbol{e}'_I\}\,\breve{\boldsymbol{\beta}} &= \mathrm{vec}(\boldsymbol{e}_{I-j+2}\boldsymbol{e}'_I\,\breve{\boldsymbol{B}}\,\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J\boldsymbol{N}_J^{j-2}\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J)\\ &= \mathrm{vec}(\boldsymbol{e}_{I-j+2}\boldsymbol{\gamma}'_1\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J\boldsymbol{N}_J^{j-2}\boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J)\\ &= \{\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J(\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})'\otimes\boldsymbol{e}_{I-j+2}\}\,\breve{\boldsymbol{\beta}}_*,\end{aligned}$$

となる．ここで，$\breve{\boldsymbol{B}}$ の最下行の第 1 要素を除いた行 $\breve{\boldsymbol{\beta}}_* = \boldsymbol{F}_J\boldsymbol{N}_J\boldsymbol{\gamma}_1 = [\,\beta_{12},\ldots,\beta_{1J}\,]'$ とおいた．

以上より，

$$\begin{aligned}\breve{\boldsymbol{\eta}}= (\boldsymbol{E}-\boldsymbol{R}^-\boldsymbol{R})\,\breve{\boldsymbol{\beta}} &= \left\{\sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{N}_I^{j-1})\right\}\breve{\boldsymbol{\beta}}_1 + \left\{\sum_{j=2}^{J}(\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J(\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})'\otimes\boldsymbol{e}_{I-j+2})\right\}\breve{\boldsymbol{\beta}}_*\\ &= \boldsymbol{Z}\begin{bmatrix}\breve{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \breve{\boldsymbol{\beta}}_*\end{bmatrix},\end{aligned}$$

となる．ここで，

$$\boldsymbol{Z} = \left[\sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{N}_I^{j-1}) \quad \sum_{j=2}^{J}(\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J(\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})'\otimes\boldsymbol{e}_{I-j+2})\right] \in\mathbb{R}^{IJ\times(I+J-1)},$$

とおいた．

$\boldsymbol{Z}$ の第 j^* 行ブロックは，$\boldsymbol{e}'_{j^*}\otimes\boldsymbol{E}_I$ を左からかけると得られる．すなわち，

$$(\boldsymbol{e}'_{j^*}\otimes\boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{Z} = \left[\sum_{j=1}^{J}(\boldsymbol{e}'_{j^*}\boldsymbol{e}_j\otimes\boldsymbol{N}_I^{j-1}) \quad \sum_{j=2}^{J}\{\boldsymbol{e}'_{j^*}\boldsymbol{N}'_J\boldsymbol{F}'_J(\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})'\otimes\boldsymbol{e}_{I-j+2}\}\right]$$

$$= \left[\boldsymbol{N}_I^{j^*-1} \quad \sum_{j=2}^{J} \{ \boldsymbol{e}'_{j^*-1,J-1} (\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})' \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+2} \} \right],$$

である．まず，第 1 行ブロックは，$j^* = 1$ として，

$$(\boldsymbol{e}'_1 \otimes \boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{Z} = \left[\boldsymbol{N}_I^{0} \quad \sum_{j=2}^{J} \{ \boldsymbol{e}'_{0,J-1} (\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})' \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+2} \} \right] = \left[\boldsymbol{E}_I \quad \boldsymbol{O}_{I\times(J-1)} \right],$$

である．

次に，$j^* \geq 2$ について考える．(A.8) より，下記は，$j^*-1 = \ell+(j-2)$，すなわち，$\ell = j^*-j+1$ のときだけ残り，

$$\boldsymbol{e}'_{j^*-1,J-1} (\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})' = \boldsymbol{e}'_{j^*-1,J-1} \left(\sum_{\ell=1}^{J-1} \boldsymbol{e}_{\ell+(j-2)} \boldsymbol{e}'_{\ell} \right) = \boldsymbol{e}'_{j^*-j+1,J-1},$$

となる．$j^*-j+1 \geq 1$ でなければ $\boldsymbol{e}'_{j^*-j+1,J-1} = \boldsymbol{0}_{J-1}$ であるから，$j = 2,\ldots,j^*$ と渡ればよく，

$$\sum_{j=2}^{J} \{ \boldsymbol{e}'_{j^*-1,J-1} (\boldsymbol{N}_{J-1}^{j-2})' \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+2} \} = \sum_{j=2}^{j^*} (\boldsymbol{e}'_{j^*-j+1} \otimes \boldsymbol{e}_{I-j+2}) = \sum_{j=1}^{j^*-1} (\boldsymbol{e}_{I-j+1} \boldsymbol{e}'_{j^*-j}),$$

と簡単になる．さらに $j^* - j = m$ とおけば，$j = 1,\ldots,j^*-1$ に対して $m = j^*-1,\ldots,1$ であり，

$$\sum_{j=1}^{j^*-1} (\boldsymbol{e}_{I-j+1} \boldsymbol{e}'_{j^*-j}) = \sum_{j=1}^{j^*-1} (\boldsymbol{e}_{I-j^*+m+1} \boldsymbol{e}'_{m}) = \boldsymbol{A}_{j^*},$$

となって，(4.7) で $j = j^*$ とおいた $\boldsymbol{A}_j$ と一致することがわかる．結局，第 2 以降の行ブロックは，(4.8) より，

$$(\boldsymbol{e}'_{j^*} \otimes \boldsymbol{E}_I)\boldsymbol{Z} = [\ \boldsymbol{N}_I^{j^*-1} \quad \boldsymbol{A}_{j^*}\ ] = \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K} \boldsymbol{N}_K^{j^*-1},$$

と得られる．$\boldsymbol{Z}$ はより具体的には，

$$\boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_I & & & & \\ \boldsymbol{N}_I & \boldsymbol{e}_I & & & \\ \boldsymbol{N}_I^2 & \boldsymbol{e}_{I-1} & \boldsymbol{e}_I & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \boldsymbol{N}_I^{J-1} & \boldsymbol{e}_{I-J+2} & \cdots & \boldsymbol{e}_{I-1} & \boldsymbol{e}_I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{I\times K} \\ \boldsymbol{E}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K \\ \boldsymbol{E}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{J-1} \end{bmatrix}$$
$$= \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \boldsymbol{E}_{I\times K} \boldsymbol{N}_K^{j-1} \right) (\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_K),$$

となっている．

一方，$\beta_k^C = \beta_{I-i+j}^C = \beta_{ij}$ であるから，

$$\begin{bmatrix}\breve{\boldsymbol{\beta}}_1\\ \breve{\boldsymbol{\beta}}_*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_{Ii}\\ \beta_{I-1,i}\\ \vdots\\ \beta_{11}\\ \beta_{12}\\ \vdots\\ \beta_{1J}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\beta_1^C\\ \beta_2^C\\ \vdots\\ \beta_I^C\\ \beta_{I-1}^C\\ \vdots\\ \beta_{I+J-1}\end{bmatrix} = \boldsymbol{\beta}^C,$$

とおいて，コウホート効果ベクトルとしてよい．

以上より，$\breve{\boldsymbol{\eta}}=\boldsymbol{Z}\boldsymbol{\beta}^C$ であるが，$\boldsymbol{\eta}$ について戻せば，(4.1) より，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta} &= \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \breve{\boldsymbol{E}}_I\right)\left(\bigoplus_{j=1}^{J} \boldsymbol{E}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}\right)(\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_K)\boldsymbol{\beta}^C\\ &= \left(\bigoplus_{j=1}^{J} \breve{\boldsymbol{E}}_{I\times K}\boldsymbol{N}_K^{j-1}\right)(\boldsymbol{1}_J \otimes \boldsymbol{E}_K)\boldsymbol{\beta}^C,\end{aligned}$$

となり，(2.3) で示したコウホート要因のデザイン行列 $\boldsymbol{X}_C$ が得られる．

5. おわりに

コウホート分析モデルにおける 3 要因のデザイン行列を，セルパラメータに等値制約と同値のゼロ和制約を課すことにより導出し，デザイン行列の性格付けを行った．また，その過程に有用な行列や行列の操作について付録にまとめた．

デザイン行列の直和やクロネッカ積を用いた陽な表現は，コウホートモデルの識別問題を理論的に議論する際に役に立つ．たとえば，インデックスベクトルを $\boldsymbol{n}_a = [1,2,\ldots,a]'$ で定義するとき，ここでは詳細は省くが，

$$\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{n}_I - \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{n}_J + \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{n}_K \;=\; I\,\boldsymbol{1}_{IJ},$$

を示すことができる (中村, 2019)．これは，インデックス間の関係 (2.1) による $i-j+k=I$ のインデックスベクトル版であり，コウホートモデル全体のデザイン行列 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{1}_{IJ}\ \boldsymbol{X}_A\ \boldsymbol{X}_P\ \boldsymbol{X}_C]$ の列ベクトルが 1 次従属であることを示す．コウホートモデルの識別問題の源泉である．

デザイン行列 $\boldsymbol{X}$ は，直上の 1 次従属関係の他に後 3 つの関係 $\boldsymbol{X}_A\boldsymbol{1}_I = \boldsymbol{X}_P\boldsymbol{1}_J = \boldsymbol{X}_C\boldsymbol{1}_K = \boldsymbol{1}_{IJ}$ により，列数 $I+J+K+1$ より 4 つ以上ランクが落ちていることはわかるが，それがちょうど 4 つであることは数値的には示すことができるものの数式によっては示されていない．この点については別の機会に譲ることにしたい．

謝　辞

統計数理研究所国民性調査委員会の先達および同僚諸氏，また調査に協力して下さった対象者および関係者の方々は，60 年以上にもわたる貴重な調査データの蓄積を通してコウホート分析のための豊かな研究土壌を与えて下さいました．レフェリーの方には重要かつ適切なコメントをいただきました．ここに記して心より感謝いたします．

付録 A. 特別なベクトルと行列の準備

ベクトルと行列の大きさを，それぞれ a 次元実ベクトルの集合 $\mathbb{R}^a$ と大きさ $a \times b$ の実行列の集合 $\mathbb{R}^{a\times b}$ への帰属として示す．

ゼロズベクトル $\mathbf{0}_a$ ／ゼロズ行列 $\boldsymbol{O}_{a\times b}$：すべての要素が 0 のゼロズベクトルを $\mathbf{0}_a \in \mathbb{R}^a$，ゼロズ行列を $\boldsymbol{O}_{a\times b} \in \mathbb{R}^{a\times b}$ で表す．正方行列の場合は単に $\boldsymbol{O}_a$ とも書く．

ワンズベクトル $\mathbf{1}_a$：すべての要素が 1 のワンズベクトルを $\mathbf{1}_a \in \mathbb{R}^a$ で表す．

単位ベクトル $\boldsymbol{e}_{j,a}$：第 j 要素のみが 1 でその他の要素が 0 の単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_{j,a} \in \mathbb{R}^a$ で表す $(j = 1,\ldots,a)$．$j < 1$ または $j > a$ のときは，$\boldsymbol{e}_{j,a} = \mathbf{0}_a$ と定める．後述のシフト行列 $\boldsymbol{N}_a$ を使えば，$\boldsymbol{e}_{j,a} = (\boldsymbol{N}_a^{j-1})'\boldsymbol{e}_{1,a}$ であるが，$j > a$ ならば $\boldsymbol{N}_a^{j-1} = \boldsymbol{O}$ なので正当化できる（$j < 1$ の場合も同様）．大きさが明らかな場合は単に $\boldsymbol{e}_j$ とすることがある．

単位行列 $\boldsymbol{E}_a$ ／拡張単位行列 $\boldsymbol{E}_{a\times b}$：単位行列を $\boldsymbol{E}_a \in \mathbb{R}^{a\times a}$ で表す．

$$\boldsymbol{E}_a \equiv [\,\boldsymbol{e}_{1,a} \quad \boldsymbol{e}_{2,a} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{a,a}\,] = \sum_{j=1}^{a} \boldsymbol{e}_j \boldsymbol{e}_j' = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix},$$

である．単位行列の右側にゼロズ行列を補った拡張単位行列を $\boldsymbol{E}_{a\times b} \in \mathbb{R}^{a\times b}$ と書く．

$$\boldsymbol{E}_{a\times b} \equiv [\,\boldsymbol{E}_a \quad \boldsymbol{O}_{a\times(b-a)}\,] = \sum_{j=1}^{a} \boldsymbol{e}_{j,a} \boldsymbol{e}_{j,b}' \quad (b \geq a),$$

である．

反単位（反転）行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_a$ ／拡張反単位行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_{a\times b}$：左からかけてベクトルの要素あるいは行列の列を反転する反単位行列 $\breve{\boldsymbol{E}}_a \in \mathbb{R}^{a\times a}$ を，

$$\breve{\boldsymbol{E}}_a \equiv [\,\boldsymbol{e}_{a,a} \quad \boldsymbol{e}_{a-1,a} \quad \cdots \quad \boldsymbol{e}_{1,a}\,] = \sum_{j=1}^{a} \boldsymbol{e}_{j,a} \boldsymbol{e}_{a-j+1,a}' = \begin{bmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \tag{A.1}$$

で定義する．$\breve{\boldsymbol{E}}_a \breve{\boldsymbol{E}}_a = \boldsymbol{E}_a$，$\breve{\boldsymbol{E}}_a^{-1} = \breve{\boldsymbol{E}}_a$ である．

反単位行列の右側にゼロズ行列を補った拡張反単位行列を $\breve{\boldsymbol{E}}_{a\times b}$ と書く．

$$\breve{\boldsymbol{E}}_{a\times b} \equiv [\,\breve{\boldsymbol{E}}_a \quad \boldsymbol{O}_{a\times(b-a)}\,] = \sum_{j=1}^{a} \boldsymbol{e}_{j,a} \boldsymbol{e}_{a-j+1,b}' \quad (b \geq a), \tag{A.2}$$

である．

シフト行列 $\boldsymbol{N}_a$：左からかけてベクトルの要素あるいは行列の行を 1 つだけ上にシフトする行列 $\boldsymbol{N}_a$ を，

$$\boldsymbol{N}_a \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{a-1} & \boldsymbol{E}_{a-1} \\ 0 & \mathbf{0}_{a-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{a\times a}, \tag{A.3}$$

で定義する．$\boldsymbol{N}_a$ を右からかければ右にシフト，転置した $\boldsymbol{N}_a'$ を左からかければ下にシフト，$\boldsymbol{N}_a'$ を右からかければ左にシフトとなる．

$$\boldsymbol{N}_a^j \;=\; \begin{bmatrix} & \boldsymbol{E}_{a-j} \\ \boldsymbol{O}_j & \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} & \boldsymbol{N}_{a-1}^{j-1} \\ 0 & \end{bmatrix} \quad (j = 1, \ldots, a-1),$$

であり，$j \geq a$ で $\boldsymbol{N}_a^j = \boldsymbol{O}_a$ となるから $\boldsymbol{N}_a$ はベキ零行列の 1 つである．$\boldsymbol{N}_a^0 = \boldsymbol{E}_a$ と定める．

以下，単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_\ell = \boldsymbol{e}_{\ell,a}$ と略記する．

(A.4) $$\boldsymbol{N}_a'\boldsymbol{N}_a \;=\; \begin{bmatrix} & 0 \\ \boldsymbol{E}_{a-1} & \end{bmatrix}\boldsymbol{N}_a \;=\; \begin{bmatrix} 0 & \\ & \boldsymbol{E}_{a-1} \end{bmatrix} \;=\; \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1',$$

(A.5) $$\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{N}_a' \;=\; \boldsymbol{N}_a\begin{bmatrix} & 0 \\ \boldsymbol{E}_{a-1} & \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{a-1} & \\ & 0 \end{bmatrix} \;=\; \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_a',$$

で対称であり，$\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{N}_a'\boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a$，$\boldsymbol{N}_a'\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{N}_a' = \boldsymbol{N}_a'$ であるから，$\boldsymbol{N}_a$ のムーア=ペンローズ逆行列 $\boldsymbol{N}_a^+$ は，

(A.6) $$\boldsymbol{N}_a^+ \;=\; \boldsymbol{N}_a',$$

である．また，

(A.7) $$(\boldsymbol{N}_a^j)'\boldsymbol{N}_a \;=\; \begin{bmatrix} & 0 \\ (\boldsymbol{N}_{a-1}^{j-1})' & \end{bmatrix}\boldsymbol{N}_a \;=\; \begin{bmatrix} 0 & \\ & (\boldsymbol{N}_{a-1}^{j-1})' \end{bmatrix},$$

となる．

ところで，

$$\boldsymbol{N}_a \;=\; \sum_{\ell=1}^{a-1}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+1}' \;=\; \sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+1}',$$

とも書ける．$\boldsymbol{e}_{a+1}' = \boldsymbol{0}'$ であるから，和の範囲を a までとしてもかまわない．$\boldsymbol{e}_\ell'\boldsymbol{e}_m = 0\,(\ell \neq m)$，$\boldsymbol{e}_\ell'\boldsymbol{e}_\ell = 1$ であるから，

$$\boldsymbol{N}_a^2 \;=\; \left(\sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+1}'\right)\left(\sum_{m=1}^{a}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_{m+1}'\right) \;=\; \sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+1}'\boldsymbol{e}_{\ell+1}\boldsymbol{e}_{\ell+1+1}' \;=\; \sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+2}',$$

(A.8) $$\boldsymbol{N}_a^j \;=\; \sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+j}' \;=\; \sum_{\ell=1}^{a-j}\boldsymbol{e}_\ell\boldsymbol{e}_{\ell+j}' \quad (j < a),$$

であり，

$$(\boldsymbol{N}_a^i)'\boldsymbol{N}_a^j \;=\; \left(\sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_{\ell+i}\boldsymbol{e}_\ell'\right)\left(\sum_{m=1}^{a}\boldsymbol{e}_m\boldsymbol{e}_{m+j}'\right) \;=\; \sum_{\ell=1}^{a}\boldsymbol{e}_{\ell+i}\boldsymbol{e}_{\ell+j}',$$

である．

ある上三角行列 $\boldsymbol{U}_a$：シフト行列 $\boldsymbol{N}_a$ の次のベキ和を $\boldsymbol{U}_a$ とおく．

$$\boldsymbol{U}_a \;\equiv\; \sum_{j=1}^{a}\boldsymbol{N}_a^{j-1} \;=\; \boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{N}_a + \boldsymbol{N}_a^2 + \cdots + \boldsymbol{N}_a^{a-1} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{a\times a},$$

であり，右上のすべての要素が 1 の上三角行列になる．

$$(\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a)\boldsymbol{U}_a \;=\; (\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a)(\boldsymbol{E}_a + \boldsymbol{N}_a + \boldsymbol{N}_a^2 + \cdots + \boldsymbol{N}_a^{a-1}) \;=\; \boldsymbol{E}_a,$$

であることから.

$$U_a(E_a - N_a) = E_a, \qquad (E_a - N_a)^{-1} = U_a, \tag{A.9}$$

である.

削除行列 $\boldsymbol{F}_a$: 左からかけてベクトルの最終要素あるいは行列の最終行を削除する行列 $\boldsymbol{F}_a$ を,

$$\boldsymbol{F}_a \equiv [\, \boldsymbol{E}_{a-1} \quad \boldsymbol{0}_{a-1} \,] \; (= \boldsymbol{E}_{(a-1)\times a}) \in \mathbb{R}^{(a-1)\times a}, \tag{A.10}$$

で定義する.

$$\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{F}_a' = \boldsymbol{E}_{a-1}, \tag{A.11}$$

で $\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F}_a$ を満たすから, $\boldsymbol{F}_a$ の一般逆行列の 1 つは,

$$\boldsymbol{F}_a^- = \boldsymbol{F}_a' \quad \in \mathbb{R}^{a\times(a-1)},$$

である.

転置した $\boldsymbol{F}_a'$ を左から行列にかければゼロズ行ベクトルの追加になり, 右から行列にかければ最終列の削除となる. $\boldsymbol{F}_a$ を右から行列にかければゼロズ(列)ベクトルの追加でもある.

$$\boldsymbol{1}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{1}_{a-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{1}_{a-1} + \boldsymbol{e}_a, \tag{A.12}$$

と分解できる.

シフト行列 $\boldsymbol{N}_a$ と組み合わせると,

$$\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a = [\, \boldsymbol{0}_{a-1} \quad \boldsymbol{E}_{a-1} \,] \in \mathbb{R}^{(a-1)\times a}, \qquad \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{N}_a' \boldsymbol{F}_a' = \boldsymbol{E}_{a-1}, \tag{A.13}$$

となり, $\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a$ は左からかけてベクトルの先頭要素あるいは行列の先頭行を削除する行列となる.

$$\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{F}_a' = \boldsymbol{N}_{a-1}, \tag{A.14}$$

である. $\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a$ を右からかければ先頭列としてゼロズ列ベクトルを追加する.

転置した $(\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a)'$ を左からかければ先頭行としてゼロズ行ベクトルを追加し, 右からかければ先頭列を削除する. これより (A.7) は,

$$(\boldsymbol{N}_a^j)' \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a' \boldsymbol{F}_a' (\boldsymbol{N}_{a-1}^{j-1})' \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a, \tag{A.15}$$

と表すこともできる.

さて, (A.5), (A.6) より,

$$\boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_{a-1} & \\ & 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{e}_a \boldsymbol{e}_a' = \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{N}_a' = \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{N}_a^+, \tag{A.16}$$

であることから,

$$\begin{gathered} \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{N}_a^+ \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a, \qquad \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a^j = \boldsymbol{N}_a^j \; (j \geq 1), \\ \boldsymbol{N}_a' \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a' \boldsymbol{N}_a = \boldsymbol{N}_a^+ \boldsymbol{N}_a, \end{gathered} \tag{A.17}$$

であり,

$$\boldsymbol{F}_a \boldsymbol{N}_a \boldsymbol{N}_a' = \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{F}_a' \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F}_a \boldsymbol{F}_a^- \boldsymbol{F}_a = \boldsymbol{F}_a, \tag{A.18}$$

$$\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a'\boldsymbol{F}_a' \;=\; \begin{bmatrix}\boldsymbol{N}_{a-1}' & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{F}_a' \;=\; \boldsymbol{N}_{a-1}',$$

(A.19)
$$\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{N}_a^{a-1})'\boldsymbol{F}_a' \;=\; \boldsymbol{F}_a\begin{bmatrix} & \boldsymbol{O}_{a-1}\\ 1 & \end{bmatrix}\boldsymbol{F}_a' \;=\; \boldsymbol{O}_{a-1},$$

である．

さらに，(A.9) より単位行列を分離すれば $\boldsymbol{U}_{a-1} = \boldsymbol{E}_{a-1} + \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{N}_{a-1}$ であり，(A.14) を使えば，

$$\boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a \;=\; (\boldsymbol{E}_{a-1} + \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{N}_{a-1})\boldsymbol{F}_a \;=\; \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F}_a,$$

であるから，(A.16) を使って，

(A.20)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a) &= \boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a(\boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{E}_a) \;=\; \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a\boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_a'\\ &= \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{e}_{a-1,a-1}\boldsymbol{e}_a' \;=\; \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{1}_{a-1}\boldsymbol{e}_a' \;=\; [\,\boldsymbol{E}_{a-1} \quad -\boldsymbol{1}_{a-1}\,],\end{aligned}$$

となる．また，

(A.21)
$$\boldsymbol{U}_a \;=\; \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_a',$$

とも分解できる．

階差行列 $\boldsymbol{D}_a$：左からかけてベクトルの要素の 1 次階差を作る行列 $\boldsymbol{D}_a$ を，

(A.22)
$$\boldsymbol{D}_a \;\equiv\; [\,\boldsymbol{E}_{a-1} \quad \boldsymbol{0}_{a-1}\,] - [\,\boldsymbol{0}_{a-1} \quad \boldsymbol{E}_{a-1}\,] \;=\; \begin{bmatrix}1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(a-1)\times a},$$

で定義する．$\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{1}_a = \boldsymbol{0}_a$ であり，$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_a]'$ に対して，

$$\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{\beta} \;=\; \begin{bmatrix}\beta_1 - \beta_2\\ \beta_2 - \beta_3\\ \vdots\\ \beta_{a-1} - \beta_a\end{bmatrix},$$

である．削除行列とシフト行列を使えば，

$$\boldsymbol{D}_a \;=\; \boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{F}_a\boldsymbol{N}_a \;=\; \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a),$$

である．

階差行列 $\boldsymbol{D}_a$ の 1 つの一般逆行列を与える．(A.9) より，

(A.23)
$$\boldsymbol{D}_a^- \;=\; \boldsymbol{U}_a\boldsymbol{F}_a' \in \mathbb{R}^{a\times(a-1)},$$

が予想され，確かに，

$$\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{D}_a^- \;=\; \boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a)\boldsymbol{U}_a\boldsymbol{F}_a' \;=\; \boldsymbol{F}_a\boldsymbol{E}_a\boldsymbol{F}_a' \;=\; \boldsymbol{E}_{a-1},$$

となって，一般逆行列の条件 $\boldsymbol{D}_a\boldsymbol{D}_a^-\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{D}_a$ を満たす．(A.23) は具体的には，$\boldsymbol{U}_a$ が上三角行列で，その右から $\boldsymbol{F}_a'$ をかけているから最終列が削除され，

$$\boldsymbol{D}_a^- = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \ddots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

である．(A.21)を利用すれば，

$$\boldsymbol{D}_a^- = \boldsymbol{U}_a\boldsymbol{F}_a' = \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a\boldsymbol{F}_a' + \boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_a'\boldsymbol{F}_a' = \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{U}_{a-1},$$

でもある．(A.20)より，

$$\boldsymbol{D}_a^-\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{U}_{a-1}\boldsymbol{F}_a(\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{N}_a) = \boldsymbol{F}_a'(\boldsymbol{F}_a - \boldsymbol{1}_{a-1}\boldsymbol{e}_a'),$$

であり，(A.12)も使って，

$$\boldsymbol{E}_a - \boldsymbol{D}_a^-\boldsymbol{D}_a = \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F}_a + \boldsymbol{e}_a\boldsymbol{e}_a' - \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{1}_{a-1}\boldsymbol{e}_a' = (\boldsymbol{e}_a + \boldsymbol{F}_a'\boldsymbol{1}_{a-1})\boldsymbol{e}_a' = \boldsymbol{1}_a\boldsymbol{e}_a', \tag{A.24}$$

と簡単になることがわかる．

付録 B. 行列の積み上げ—直和とクロネッカ積

行列 $\boldsymbol{X}_j\ (j = 1, \ldots, b)$ の直和は，

$$\boldsymbol{X}_1 \oplus \boldsymbol{X}_2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{X}_b = \bigoplus_{j=1}^{b} \boldsymbol{X}_j = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & & & \\ & \boldsymbol{X}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix},$$

と定義される．一般に行列 $\boldsymbol{X}_j$ の大きさは異なっていてもよい．行列 $\boldsymbol{Y}_j\ (j = 1, \ldots, b)$ があるとき，行列積 $\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{Y}_j$ が定義されれば，

$$(\oplus_j \boldsymbol{X}_j)(\oplus_j \boldsymbol{Y}_j) = \oplus_j \boldsymbol{X}_j\boldsymbol{Y}_j,$$

である．$\boldsymbol{X}_j$ がすべて同一のときは($\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{Z}$ として)，

$$\oplus_j \boldsymbol{Z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{Z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}_b \otimes \boldsymbol{Z},$$

とクロネッカ積を用いても書ける．

クロネッカ積は左側の行列の要素に右側の行列を埋め込んで大きな行列を作る操作と考えてよい．行列の大きさが整合していれば，$(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC} \otimes \boldsymbol{BD}$ である．行列をベクトル化する vec 演算子との間に，

$$\mathrm{vec}\boldsymbol{ABC} = (\boldsymbol{C}' \otimes \boldsymbol{A})\mathrm{vec}\,\boldsymbol{B},$$

$$\mathrm{vec}\,\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{A})\mathrm{vec}\,\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{B}' \otimes \boldsymbol{E})\mathrm{vec}\,\boldsymbol{A}, \tag{B.1}$$

という関係がある (Magnus and Neudecker, 1999, p.30)．

以下，行列 $\boldsymbol{X}_j \in \mathbb{R}^{a\times c}\ (j = 1, \ldots, b)$ とし，これら b 個を縦方向に積み上げた行列

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ab\times c},$$

を考える．まず，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_c \\ \vdots \\ \boldsymbol{E}_c \end{bmatrix} = (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c), \tag{B.2}$$

と行列の直和とクロネッカ積を使って表すことができる．$\boldsymbol{X}_j$ がすべて同一のときは($\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{Z}$ として)，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Z} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Z} \end{bmatrix} = \boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{Z} = (\boldsymbol{E}_b \otimes \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c) = (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{Z})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c),$$

である．

つぎに，行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{d\times c}$ に対しては，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} &= (\boldsymbol{E}_b \otimes \boldsymbol{A})(\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c) \\ &= (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{A})(\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c) \\ &= (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c) \in \mathbb{R}^{bd\times c} \end{aligned} \tag{B.3}$$

となり，(B.2)から直接得られるものに当然ながら等しい．

また，行列 $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{c\times e}$ を右からかけると，縦積みのブロック行列の表記からは一目瞭然ではあるが，

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b \end{bmatrix} \boldsymbol{B} &= (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c)\boldsymbol{B} = (\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_c)(1 \otimes \boldsymbol{B}) \\ &= (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{B}) = (\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\boldsymbol{E}_b \otimes \boldsymbol{B})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e) \\ &= (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\bigoplus_j \boldsymbol{B})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e) = (\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j\boldsymbol{B})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e) \\ &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{X}_b\boldsymbol{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{ab\times e}, \end{aligned}$$

と $\boldsymbol{B}$ が潜り込む．

あわせて，

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1\boldsymbol{B} \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_b\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = (\textstyle\bigoplus_j \boldsymbol{A})(\bigoplus_j \boldsymbol{X}_j)(\bigoplus_j \boldsymbol{B})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e) = (\bigoplus_j \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{B})(\boldsymbol{1}_b \otimes \boldsymbol{E}_e),$$

である．この形に整理されれば，積み上げた全体の上から j 番目のブロックの行列 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_j\boldsymbol{B}$ を取り出すのは容易である．

付録 C. 一般逆行列と斉次連立 1 次方程式の一般解

行列 $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{a\times b}$ に対して $\boldsymbol{AGA} = \boldsymbol{A}$ を満たす行列 $\boldsymbol{G} \in \mathbb{R}^{b\times a}$ は $\boldsymbol{A}$ の一般逆行列と呼ばれ，$\boldsymbol{A}^{-}$ で表記される．$\boldsymbol{A}^{-}$ は唯一とは限らない．

斉次連立 1 次方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}_a$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^b)$ の一般解は，任意の $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^b$ について，

$$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E}_b - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{z}, \tag{C.1}$$

で与えられる（Harville, 1997, p.140）．

参 考 文 献

Fienberg, S. E. and Mason, W. M. (1979). Identification and estimation of age-period-cohort models in the analysis of discrete archival data, *Sociological Methodology 1979* (ed. K. F. Shuessler), 1-67, Jossey-Bass, San Francisco.

Fu, W. (2018). *A Practical Guide to Age-Period-Cohort Analysis*: *The Identification Problem and Beyond*, CRC Press, Boca Raton.

Glenn, N. D. (2005). *Cohort Analysis*, 2nd ed., Sage Publications, Thousand Oaks, London, New Delhi.

Harville, D. A. (1997). *Matrix Algebra from a Statistician's Perspective*, Springer, New York.

Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Revised Edition, John Wiley & Sons, New York.

Mason, W. M. and Fienberg, S. E. (eds.) (1985). *Cohort Analysis in Social Research*: *Beyond the Identification Problem*, Springer-Verlag, New York.

中村 隆 (1982). ベイズ型コウホート・モデル—標準コウホート表への適用—, 統計数理研究所彙報, **29**, 77-97.

Nakamura, T. (1986). Bayesian cohort models for general cohort table analyses, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **38**, 353-370.

中村 隆 (2005). コウホート分析における交互作用効果モデル再考, 統計数理, **53**, 103-132.

中村 隆 (2019). コウホート分析の古今—一般化線形混合モデルとしてのコウホートモデル, 社会と調査, **32**, 106-114.

O'Brien, R. M. (2015). *Age-Period-Cohort Models*: *Approaches and Analyses with Aggregated Data*, CRC Press, Boca Raton.

Ryder, N. B. (1965). The cohort as a concept in the study of social change, *American Sociological Review*, **30**, 843-861.

坂口尚文, 中村 隆 (2019). 混合効果モデルとしてみたコウホート分析モデル, 理論と方法, **33**, 3-17.

Yang, Y. and Land, K.C. (2013). *Age-Period-Cohort Analysis*: *New Models, Methods, and Empirical Applications*, CRC Press, Boca Raton.

The Design Matrices of an Age-Period-Cohort Model for a Standard Cohort Table

Takashi Nakamura

Professor Emeritus, The Institute of Statistical Mathematics

This paper gives the explicit expressions of the design matrices of an age-period-cohort model for standard cohort table data classified by age group and survey period, obtained from repeated cross-sectional surveys, to separate the effects of age, period, and cohort factors. The matrices are derived from imposing equality or zero-sum constraints on the cell parameters in a cohort table as well as from visual inspection.

Key words: APC model, age, period and cohort effects, cell parameters, equality or zero-sum constraints, repeated cross-sectional surveys.