

統計数理

第 65 卷 第 1 号

(通巻 125 号)

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF STATISTICAL MATHEMATICS

目次

特集「高頻度金融データに基づく統計的推測とモデリング」

| | |
|---|-----|
| 「特集 高頻度金融データに基づく統計的推測とモデリング」について 川崎 能典・荻原 哲平 | 1 |
| 拡散過程による日内株価データのモデリングと統計推測理論 [研究詳解] 荻原 哲平 | 5 |
| Lévy 駆動型確率微分方程式の段階的推定について [研究ノート] 上原 悠楨・増田 弘毅 | 21 |
| 高頻度データに基づく確率微分方程式モデルのハイブリッド推定 [研究詳解] 内田 雅之 | 39 |
| 高頻度データに対する Whittle 推定 [原著論文] 深澤 正彰 | 71 |
| 東京証券取引所における高速な注文反応の分析 [研究ノート] 田代 雄介・川口 宗紀 | 87 |
| 高頻度注文板データの統計解析: 異市場・同一株式価格間の先行遅延関係 [原著論文] 林 高樹 | 113 |
| 切断実現ボラティリティの推定と観測時間間隔 —日本株式による実証分析— [研究ノート] 吉田 靖 | 141 |
| 経験類似度に基づくボラティリティ予測 [原著論文] 森本 孝之・川崎 能典 | 155 |

2017 年 6 月

大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構 統計数理研究所

〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3 電話 050-5533-8500(代)

本号の内容はすべて <http://www.ism.ac.jp/editsec/toukei/> からダウンロードできます

ISSN 0912-6112

統
計
数
理

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF STATISTICAL MATHEMATICS

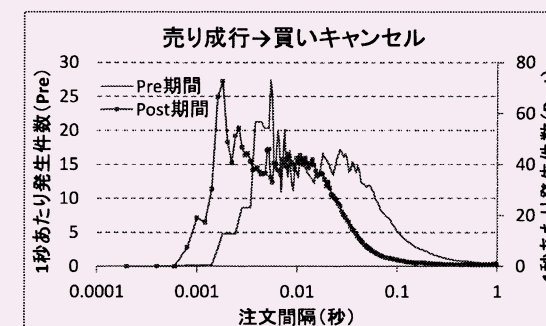
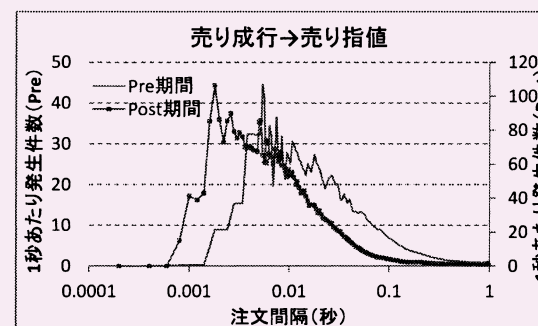
第 65 卷 第 1 号

2017

統計数理

Vol. 65, No. 1

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF STATISTICAL MATHEMATICS



統計数理研究所

統計数理

(年2回発行)

編集委員長 加藤 昇吾
編集委員 足立 淳
 小山 慎介
 武田 朗子
 野間 久史
 南 和宏
特集担当編集委員 川崎 能典
 荻原 哲平

編集室

池田 広樹 長嶋 昭子 脇地 直子 渡邊 百合子

「統計数理」は、統計数理研究所における研究成果を掲載する統計数理研究所「彙報」として1953年に歴史を始め、1985年に誌名を変更し今の形となりました。現在は、統計数理研究所の研究活動に限らず、広く統計科学に関する投稿論文を掲載し、統計科学の深化と発展、そして統計科学を通じた社会への貢献を目指しています。

投稿を受け付けるのは、次の6種です。

- a. 原著論文 b. 総合報告 c. 研究ノート
- d. 研究詳解 e. 統計ソフトウェア f. 研究資料

投稿された原稿は、編集委員会が選定・依頼した査読者の審査を経て、掲載の可否を決定します。投稿規程、執筆要項は、本誌最終頁をご参照ください。

また、上記以外にも統計科学に関して編集委員会が重要と認める内容について、編集委員会が原稿作成を依頼することがあります。

その他、「統計数理」に関するお問い合わせは、各編集委員にお願いします。

All communications relating to this publication should be addressed to associate editors of the Proceedings.

大学共同利用機関法人 情報・システム研究機構
統計数理研究所

〒190-8562 東京都立川市緑町10-3 電話 050-5533-8500(代)

<http://www.ism.ac.jp/>

© The Institute of Statistical Mathematics 2017

印刷：笹氣出版印刷株式会社

PROCEEDINGS OF THE INSTITUTE OF STATISTICAL MATHEMATICS

Vol. 65, No. 1

Contents

| | |
|---|-----|
| Special Topic : Statistical Inference and Modeling in High-frequency Financial Data | |
| On the Special Topic “Statistical Inference and Modeling in High-frequency Financial Data” Yoshinori KAWASAKI and Teppei OGIHARA | 1 |
| Modeling Intraday Stock Price Dynamics Using Diffusion Processes and Estimating Volatility and Covariation Teppei OGIHARA | 5 |
| On Stepwise Estimation of Lévy Driven Stochastic Differential Equation Yuma UEHARA and Hiroki MASUDA | 21 |
| Hybrid Estimation for Stochastic Differential Equations Based on High-frequency Data Masayuki UCHIDA | 39 |
| Whittle Estimation for High-frequency Data Masaaki FUKASAWA | 71 |
| Analysis of High Frequency Reactions on Tokyo Stock Exchange Yusuke TASHIRO and Muneki KAWAGUCHI | 87 |
| Statistical Analysis of High-frequency Limit-order Book Data : On Cross-market, Single-asset Lead-lag Relationships in the Japanese Stock Market Takaki HAYASHI | 113 |
| Estimating Truncated Realized Volatility and Time Interval : Evidence from Japanese Stock Market Yasushi YOSHIDA | 141 |
| Volatility Forecasting with Empirical Similarity : Japanese Stock Market Case Takayuki MORIMOTO and Yoshinori KAWASAKI | 155 |

June, 2017

Research Organization of Information and Systems
The Institute of Statistical Mathematics
10-3 Midori-cho, Tachikawa, Tokyo 190-8562, JAPAN

表紙の図は本誌 101 ページを参照

「特集 高頻度金融データに基づく統計的推測と モデリング」について

川崎 能典[†]・萩原 哲平[†] (オーガナイザー)

「統計数理」における金融データの統計解析に関連した過去の特集としては、2002年12月号(第50巻第2号)の「ファイナンス統計学」、2011年6月号(第59巻第1号)の「金融リスクの統計解析」がある。これら間口の広いテーマ設定に比較して、今回の「高頻度金融データに基づく統計的推測とモデリング」は、かなり絞り込まれた感があるが、にもかかわらず8本の論文が集まっているところに、この分野の研究の活発さが反映されていると見ることができよう。

金融市場のマイクロ構造(microstructure)に関する仮説形成は、経済学や金融論においては古くから行われてきたわけだが、それらの仮説が検証されるには、データの利用可能性を待たなければならなかった。学説史的な観点から厳密に研究の源流を探る、というような作業は筆者の能力と専門性を越えているので、極めて私的な印象論を述べれば、1990年代の半ばにOlsen & Associates社が、1992年10月から1993年9月の1年分ではあったが外国為替市場の高頻度データを、少なくとも学術研究機関には極めて安価に提供し、合わせて国際会議をホストすることで、高頻度金融データの分析を促進したことは特筆に値する。こうした時代の研究がまとめられたものとして、Dunis and Zhou (1998)やDacorogna et al. (2001)といった論文集がある。また、金融市場のマイクロ構造に関する基本文献であるO'Hara (1995)も同時期の出版である。

さて、本特集は、高頻度金融データの利用を前提とした、確率過程の推測や時系列モデリングを扱っているが、分析の切り口を幾つかのキーワードを挙げながら取り上げておきたい。

高頻度金融データによってもたらされた最大のインパクトは、分単位、秒単位、あるいはそれ以下の観測間隔で得られるデータを集約することで、日次(に限らないが典型的には日次)のボラティリティが容易に得られるようになったことである。いわゆる実現ボラティリティ(realized volatility, RV)である。研究テーマとしてのRVは、市場のマイクロ構造に起因するノイズ(microstructure noise)を避けながらRVを得るにはどうすればよいか、という観点から、多数の問題を統計学者に提供してきたと言える。こうした流れの中で、日次データに基づく非線形・非ガウスフィルタリングといった手法は、かつてほどの重要性を持たなくなったと言えるだろう。

RV計算に絡むもう一つの現実的問題点は、価格プロセスに含まれるジャンプである。ジャンプの存在は、RVの計算に当然大きな影響を与えるわけだが、成り行き注文に起因するbid-askバウンスのようなノイズと、ジャンプの影響を排してボラティリティを推定する、という問題に対しては、ここまでさまざまな研究が行われている。

一方、観測頻度という観点からも、高頻度金融データは新たな切り口を必要としている。それは、データが原則不等間隔(irregularly spaced)にしか観測されないことである。モデリングの方向性としては少なくとも二通り考えられるが、ひとつは取引と取引の生起間隔(duration)に着目した時系列モデルを作成することである。ARCH/GARCH系のモデルからの類推で導入

[†]統計数理研究所：〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

された、生起間隔に関する条件付き自己回帰モデル (Autoregressive Conditional Duration, ACD モデル) とその変種は、計量ファイナンス (financial econometrics) の分野で盛んに研究された。Hautsch (2004) に詳しい。もうひとつは、点過程 (point process) として扱い、その条件付き強度ないし生起度関数 (intensity function) のモデリングを行うというやり方である。

ひとつの資産に関する取引レコードが不等間隔データであるということは、複数の資産の相関を考える際にはいわゆる非同期観測の問題が発生する。複数資産のポートフォリオ管理においては、相関の計算は基本的なことであるが、データの補間で便宜的に同期させて RV を求めると、観測期間が小さくなるにつれてバイアスが生じる (Epps 効果)。この点を克服する推測理論は、Hayashi and Yoshida (2005) を嚆矢に、以後活発に提案されている。

以下では、本特集に採録された論文の内容を概観しておこう。最初の 4 編は、高頻度金融データを扱うための基礎となる統計理論に関連する話題を取り扱っている。

荻原論文は、連続的な path をもつ確率過程である拡散過程による日内株価のモデリングと分散・共分散等のリスク量の統計推測手法の理論研究を詳解している。特に高頻度金融データ特有の問題をモデルに組み込み、それを考慮した統計理論を紹介している。上原・増田論文では、変動にジャンプを含む Lévy 過程を用いたモデリングを研究しており、Lévy 過程の係数であるスケール係数とドリフト係数を段階的に推定する手法を研究している。内田論文では、拡散過程モデルのパラメータ推定において、確率過程のドリフト項の係数と拡散係数のパラメータを分けて推定し、また、最適化関数を簡易なものから段階的に尤度関数に近づける方法により、安定的で高速な推定手法を研究している。深澤論文では、拡散過程モデルにおいて拡散過程自体が高頻度観測されるのではなく、その時間積分値が高頻度観測される場合の拡散係数項の推定手法を論じている。これはファイナンスにおいては株価ボラティリティの推定に対応するが、物理学における分子運動の Langevin モデルとも関係が深い。

後半の 4 編では日本株式市場における実証分析に関連する話題を取り扱っている。田代・川口論文では、東京証券取引所の個別株式の板情報を多次元 Hawkes 過程と呼ばれる点過程を用いてモデリングし、高速な株式売買システム (arrowhead) の導入前後における注文タイプ別の発生頻度の傾向を分析している。林論文では、東京証券取引所と 2 つの私設証券取引所において取引される個別株式について、取引所間の株価変動の先行遅延関係について調べている。吉田論文は、実現ボラティリティに価格のジャンプが与える影響を、切断実現ボラティリティとの比較で実証的に分析した結果を報告している。容易に想像される通り、観測時間間隔の取り方と閾値の選択は、分析結果を大きく左右する。森本・川崎論文は、日次実現ボラティリティに対する予測モデルとして、経験類似度に基づくある種のモデル平均法を軸に、heterogeneous autoregression (HAR) モデルを主たる比較対象に、それらの予測能力を内挿・外挿の両面からシミュレーションで検討した結果を報告している。

この巻頭言前半に列挙した論点からすると、この 8 編の論文で取り上げられているテーマは必ずしも網羅的とは言えないが、2017 年時点でのスナップショットとしての価値は確実に有するものと自負している。寄稿して下さった研究者の多くは、統計数理研究所の客員教授・准教授として、あるいは共同利用研究員としての登録のある方である。共同利用・共同研究の成果を論文として結実できたことに、オーガナイザーとしてこの場を借りて感謝申し上げたい。本特集が、読者諸兄の興味を少しでも喚起できたなら、編者・著者として望外の幸せである。

参 考 文 献

- Dacorogna, M. M., Gençay, R., Muller, U., Olsen, R. B. and Pictet, O. V. (2001). *An Introduction to High-frequency Finance*, Academic Press, San Diego.

- Dunis, C. and Zhou, B. (eds.) (1998). *Nonlinear Modeling of High Frequency Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Hautsch, N. (2004). *Modelling Irregularly Spaced Financial Data*, Springer-Verlag, Berlin.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of nonsynchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**, 359–379.
- O’Hara, M. (1995). *Market Microstructure Theory*, John Wiley & Sons, Cambridge, Massachusetts.

拡散過程による日内株価データの モデリングと統計推測理論

萩原 哲平^{1,2}

(受付 2016 年 8 月 8 日; 改訂 11 月 9 日; 採択 12 月 20 日)

要 旨

本稿では、拡散過程と呼ばれる連続的な path をもつ確率過程を用いた日内株価モデリングとリスク量の統計推測手法の理論研究を紹介する。特に日内株価データのモデリングで問題となる、「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれる仮想的な観測誤差の存在や、複数資産の観測時刻が一致しない「非同期観測」の問題を取り上げ、関連する研究を紹介する。まず、株価ボラティリティや複数資産の共変動のノンパラメトリック推定手法の研究の歴史を簡潔に振り返った後、パラメトリック推定法として最尤型推定量の漸近理論を取り扱う。その後、推定量の最適性の概念である「漸近有効性」を扱う。特に推定量の漸近有効性を議論する上で重要な役割を果たす、統計モデルの局所漸近混合正規性の概念について紹介し、最尤型推定量が漸近有効性を満たすことについて論ずる。最後にベイズ型推定量を構築し、その漸近理論を紹介する。

キーワード：高頻度データ、最尤型推定法、漸近有効性、非同期観測、ベイズ型推定法、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ。

1. 高頻度データとその問題点

株式資産のリスク管理を行う際には、株価時系列の分散・共分散構造を特定することが重要であり、従来のリスク管理においては日次以上の株価データを用いてこれらのリスク量の推定が行われていた。一方で、近年各証券取引所における全ての取引の取引時刻・取引価格・売買高等の情報を記録したような「高頻度データ」の利用可能性が高まり、それらのデータを用いたリスク管理手法の研究も活発になっている。このようなデータは秒・ミリ秒単位のタイムスタンプを持っており、そのデータ量が膨大となるだけでなく、特有の構造からいくつかの問題が生じるため、従来の統計解析手法の適用が困難になっている。

例えば、ある証券の証券価格の観測時刻を $\{t_i\}_{i=0}^n$ 、時刻 t_i における証券の対数価格を X_{t_i} と書くと、実現ボラティリティは

$$RV_n = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

で定義される。証券対数価格 $X = \{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ がブラウン運動 $\{W_t\}_{0 \leq t \leq T}$ に対し、

¹ 統計数理研究所：〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3

² 国立研究開発法人科学技術振興機構(さきがけ)：〒 332-0012 埼玉県川口市本町 4-1-8

$$(1.1) \quad X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T]$$

を満たし、観測時刻 $\{t_i\}$ が $t_i = Ti/n$ ($0 \leq i \leq n$) であるとする、 X の二次変分 $\langle X \rangle_T$ に対し、

$$(1.2) \quad RV_n \rightarrow^p \langle X \rangle_T \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることが知られている。(1.1)式は、証券対数価格 X_t が、時間とともに積みあがるトレンド成分 $\int_0^t \mu_s ds$ と、ランダムな W_t に駆動される拡散項 $\int_0^t \sigma_s dW_s$ で構成されていることを意味する。(1.2)の収束先である、

$$\langle X \rangle_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

は累積ボラティリティと呼ばれ、 X の日内変動の大きさを測る重要なリスク量として、高頻度データの解析では分散に代わってよく用いられる。

しかし、高頻度観測データを用いた実証分析において、データの観測頻度を高くすると RV_n が急激に増加する現象が確認されている。この現象は、連続セミマルチンゲールで記述される潜在的な証券対数価格 X に対し、実際の証券価格の観測に仮想的な観測ノイズが混入していると解釈されている。このノイズは高頻度観測データを解析する際に現れる特有のものとして、「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれている。

また、複数証券の共変動の推定を考えると、売買取引データを用いる場合には、証券価格は証券の取引が起きた時にその取引価格として観測されるので、異なる証券の観測時刻が一致しないという「非同期観測」の問題が発生する。

本稿では、高頻度データの統計解析上の問題としてこの「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」の問題と「非同期観測」の問題を中心に取り上げ、現在までで研究が進んできた、累積ボラティリティ・共変動のノンパラメトリック推定の研究の概観を紹介した後、筆者が関わってきたパラメトリック推定手法、特に最尤型・ベイズ型推定法についての最近の結果を紹介する。

本稿では扱わないが、高頻度データのその他の話題として、time endogeneity と呼ばれる観測時刻の対数株価 X への依存性の問題や X がジャンプを含む確率過程で記述される場合の理論などがある。ジャンプを含む確率過程に関する研究は Ait-Sahalia and Jacod (2014) の四章に詳しく紹介されている。time endogeneity に関する研究としては、例えば、Li et al. (2014), Fukasawa and Rosenbaum (2012), Koike (2017) 等を参照されたい。

2. 累積ボラティリティ・共変動のノンパラメトリック推定法

2.1 実現ボラティリティとマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ

上で紹介したように、証券対数価格 X が(1.1)を満たし、それがノイズ無しで規則的に観測されている状況では、実現ボラティリティ RV_n は $\langle X \rangle_T$ に確率収束する。このような状況において、推定誤差の漸近分布についても研究されている。 X の定義される確率空間を (Ω, \mathcal{F}, P) と書くと、標準的な条件の下で、 $A = 2 \int_0^T \sigma_s^4 ds$ と (Ω, \mathcal{F}, P) の拡張上で定義された \mathcal{F} と独立な標準正規乱数 ζ に対し、

$$(2.1) \quad \sqrt{n}(RV_n - \langle X \rangle_T) \rightarrow^{s-\mathcal{L}} \sqrt{A}\zeta \quad (n \rightarrow \infty)$$

を満たす。ここで、 $\rightarrow^{s-\mathcal{L}}$ は確率変数の stable convergence を表す。 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率変数列 Z_n と $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ のある拡張 $(\Omega'', \mathcal{F}'', P'')$ 上の確率変数 Z に対して、 $Z_n \rightarrow^{s-\mathcal{L}} Z$ とは、任意の (Ω, \mathcal{F}) 上の確率変数 V に対して、 (Z_n, V) が (Z, V) に分布収束することを定義とする。その定義から

stable convergence は分布収束より強く、確率収束より弱い概念であるといえる。より詳しい stable convergence の性質等に関しては、Jacod and Protter (2012) の 2.2.1 節、または Jacod and Shiryaev (2003) の VIII 章 5c 節を参照せよ。

一方、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下では実現ボラティリティは一致性を持たず(つまり $\langle X \rangle_T$ に確率収束せず)、別の推定量を考える必要がある。マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズのモデルで最もシンプルなものとしては、(1.1) を満たす確率過程 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ の観測 $\{Y_i\}_{i=0}^n$ が、

$$Y_i = X_{i/n} + U_i$$

で与えられる設定が考えられている。ただし、ノイズ $\{U_i\}_{i=0}^n$ は X と独立な平均 0 の独立同分布列である。

マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下での累積ボラティリティ推定に関しては近年活発に研究されており、例えば Bandi and Russell (2008) では、ノイズによる推定誤差と観測の少なさによる推定誤差のトレードオフから最適な観測頻度を選択する方法を研究している。また、ノイズを除去するいくつかの手法が提案されており、代表的なものとしては、Barndorff-Nielsen et al. (2008) のカーネル法や、Podolskij and Vetter (2009) のプレ・アベレージング法が挙げられる。

例えばプレ・アベレージング法は、観測データの部分的な平均をとることでノイズを除去する方法であり、Jacod et al. (2009) では、正の実数 θ 、正整数列 k_n と、連続かつ区分的に滑らかな重み関数 $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $g(0) = g(1) = 0$ 、 $\int_0^1 g(s)^2 ds > 0$ 、 $k_n = \theta n^{1/2} + o(n^{1/4})$ となるものを用いて、観測 $\{Y_i\}_{i=0}^n$ を

$$\overline{\Delta Y}_i^n = \sum_{p=1}^{k_n-1} g\left(\frac{p}{k_n}\right) (Y_{i+p} - Y_{i+p-1})$$

で平均化した。そして $s \in [0, 1]$ に対し、 $\phi_1(s) = \int_s^1 g'(u)g'(u-s)du$ 、 $\phi_2(s) = \int_s^1 g(u)g(u-s)du$ 、 $\psi_j = \phi_j(0)$ ($j = 1, 2$) と定めた時、累積ボラティリティの推定量を

$$\hat{C}_n = \frac{n^{-1/2} n^{-k_n+1}}{\theta \psi_2} \sum_{i=0}^{n-k_n+1} (\overline{\Delta Y}_i^n)^2 - \frac{\psi_1}{2\theta \psi_2 n} \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_{i-1})^2$$

で定義し、ノイズ U_i の 8 次モーメントの存在や μ_t, σ_t の標準的な条件の下で $n \rightarrow \infty$ の時、

$$(2.2) \quad n^{1/4} (\hat{C}_n - \langle X \rangle_1) \xrightarrow{s-\mathcal{L}} \int_0^1 \gamma_t dB_s$$

となることを示した。ただし、 $v = E[U_0^2]$ 、 $1 \leq i, j \leq 2$ に対し、 $\Phi_{ij} = \int_0^1 \phi_i(s)\phi_j(s)ds$ 、

$$\gamma_t^2 = \frac{4}{\psi_2^2} \left(\Phi_{22}\theta\sigma_t + 2\Phi_{12}\frac{\sigma_t^2 v}{\theta} + \Phi_{11}\frac{v^2}{\theta^3} \right)$$

で $\{B_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ は \mathcal{F} と独立な標準ブラウン運動である。

また、

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= \frac{4\Phi_{22}}{3\theta\psi_2^4} \sum_{i=0}^{n-k_n+1} (\overline{\Delta Y}_i^n)^4 + \frac{4}{n\theta^3} \left(\frac{\Phi_{12}}{\psi_2^3} - \frac{\Phi_{22}\psi_1}{\psi_2^4} \right) \sum_{i=0}^{n-2k_n+1} (\overline{\Delta Y}_i^n)^2 \sum_{j=i+k_n}^{i+2k_n-1} (Y_j - Y_{j-1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{n\theta^3} \left(\frac{\Phi_{11}}{\psi_2^2} - 2\frac{\Phi_{12}\psi_1}{\psi_2^3} + \frac{\Phi_{22}\psi_1^2}{\psi_2^4} \right) \sum_{i=1}^{n-2} (Y_i - Y_{i-1})^2 (Y_{i+2} - Y_{i+1})^2 \end{aligned}$$

と定めた時,

$$\Gamma_n \rightarrow^p \int_0^1 \gamma_t^2 dt$$

となることを示した. よって,

$$n^{1/4} \Gamma_n^{-1/2} (\hat{C}_n - \langle X \rangle_1) \rightarrow^{s-\mathcal{L}} B_1$$

となる. B_1 は標準正規分布に従うので, $\alpha = 0.01, 0.05$ 等に対して, Z_α を正規分布の上側 100α パーセント点を Z_α とすると, $\langle X \rangle_T$ の信頼係数 $1 - \alpha$ の信頼区間は近似的に

$$[\hat{C}_n - n^{-1/4} \Gamma_n^{1/2} Z_{\alpha/2}, \hat{C}_n + n^{-1/4} \Gamma_n^{1/2} Z_{\alpha/2}]$$

と計算される.

(2.2) より, \hat{C}_n の $\langle X \rangle_1$ への収束レートは $n^{-1/4}$ となり, (2.1) におけるレート $1/\sqrt{n}$ よりも悪くなっている. これはノイズの存在により $\langle X \rangle_1$ の推定効率が落ちることを意味している. Gloter and Jacod (2001a) では, ノイズの存在下で $\langle X \rangle_1$ の任意の推定量の収束レートは $n^{-1/4}$ が最適であるということを証明しているので, \hat{C}_n は最適な収束レートを達成していることになる.

2.2 共変動の推定と非同期観測

金融資産のリスク管理を行う際には, 単一資産の累積ボラティリティだけではなく, 複数資産の共分散・共変動の計測も重要である. 証券価格 $X^1 = \{X_t^1\}_{0 \leq t \leq T}$, $X^2 = \{X_t^2\}_{0 \leq t \leq T}$ とその観測時刻 $\{t_i\}_{i=0}^n$ に対して, 実現ボラティリティの自然な拡張として実現共分散 RCV_n が以下のように定義される:

$$\text{RCV}_n = \sum_{i=1}^n (X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1)(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2).$$

実現ボラティリティと同様, X^1, X^2 が (1.1) に対応する式を満たし, $t_i = Ti/n$ の時, X^1, X^2 の二次変分 $\langle X^1, X^2 \rangle_T$ に対し, $\text{RCV}_n \rightarrow^p \langle X^1, X^2 \rangle_T$ となることが知られている. $\langle X^1, X^2 \rangle_T$ は高頻度データの解析において, X^1, X^2 の共分散に代わり, X^1 と X^2 の連動性を測る指標として用いられる.

複数証券の共分散推定の際には, マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの問題に加え, X^1, X^2 の観測時刻が一致しないという「非同期観測」の問題が発生する. 非同期観測の問題を解決するために考えられる最もシンプルな方法としては, 価格データを線形補完するか, RCV_n 計算の基準となる時刻を設定し, 各基準時刻に対して X^1, X^2 の直前の観測データを用いる等の方法により, 観測を「同期化」して RCV_n を計算することが考えられる. しかし, Hayashi and Yoshida (2005) では, このようなシンプルな同期化により計算された RCV_n には深刻なバイアスが存在することが指摘されている. さらに, 彼らは非同期観測下における二次変分 $\langle X^1, X^2 \rangle_T$ の推定量 HY_n を提案している. X^1 の観測時刻 $\{s_i\}_{i=0}^{\ell_1}$ と X^2 の観測時刻 $\{t_j\}_{j=0}^{\ell_2}$ に対して,

$$\text{HY}_n = \sum_{i,j} (X_{s_i}^1 - X_{s_{i-1}}^1)(X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2) 1_{\{[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset\}}$$

と定義される. 観測時刻 $\{s_i\}, \{t_j\}$ と X^1, X^2 が独立で $\max_{i,j} (s_i - s_{i-1}) \vee (t_j - t_{j-1}) \rightarrow^p 0$ の時,

$$\text{HY}_n \rightarrow^p \langle X^1, X^2 \rangle_T$$

が示されている.

Hayashi and Yoshida (2008, 2011) では、推定誤差の漸近分布が研究されている。Hayashi and Yoshida (2008) では、証券価格過程 $X = (X^1, X^2)$ がブラウン運動 $(W_t^l)_{t \geq 0}$ に対して確率微分方程式：

$$dX_t^l = \mu_t^l dt + \sigma_t^l dW_t^l, \quad t \in [0, T], \quad l = 1, 2,$$

$d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho_t dt$ を満たし、 $\{\sigma_t^l\}_{0 \leq t \leq T}$ と $\{\rho_t\}_{0 \leq t \leq T}$ が deterministic で観測時刻が X と独立の時、ある正数列 $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}, p_n \rightarrow 0$ に対し、以下を示した：

$$p_n^{-1/2}(\text{HY}_n - \langle X^1, X^2 \rangle_T) \rightarrow^d N(0, c) \quad (n \rightarrow \infty).$$

ただし、 $K_{i,j} = 1_{\{[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j] \neq \emptyset\}}$ 、 $v_i^1 = \int_{s_{i-1}}^{s_i} (\sigma_t^1)^2 dt$ 、 $v_j^2 = \int_{t_{j-1}}^{t_j} (\sigma_t^2)^2 dt$ 、 $v_{i,j} = \int_{[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}, t_j]} \sigma_t^1 \sigma_t^2 \rho_t dt$ に対し、

$$c = \text{P-lim}_{n \rightarrow \infty} p_n^{-1} \left(\sum_{i,j} v_i^1 v_j^2 K_{i,j} + \sum_i (v_i^1)^2 + \sum_j (v_j^2)^2 - \sum_{i,j} (v_{i,j})^2 \right).$$

Hayashi and Yoshida (2011) では、 σ_t が random で $\{s_i\}, \{t_j\}$ の X の従属性を許したようなより広いモデル設定において、 $\{s_i\}, \{t_j\}$ に対する strong predictability と呼ばれる条件等を仮定した下で、

$$p_n^{-1/2}(\text{HY}_n - \langle X^1, X^2 \rangle_T) \rightarrow^{s-\mathcal{L}} C\zeta \quad (n \rightarrow \infty)$$

が示されている。ただし、 C は X^1, X^2 の拡散係数に依存する確率変数である。

マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズと非同期観測の問題が同時に存在する場合の共変動推定法の研究も近年活発に研究されている。例えば、Christensen et al. (2010) ではプレ・アベレージング法と Hayashi–Yoshida 推定量を組み合わせた pre-averaged Hayashi–Yoshida estimator が研究されている。他にもカーネル法を用いた Barndorff-Nielsen et al. (2011) や multiscale estimator を用いた Bibinger (2011, 2012) 等がある。

2.3 リード・ラグ推定

共分散推定に関連する研究として、Hoffmann et al. (2013) では、非同期観測された二証券間において一方が他方に対する価格変化の先行性があるかどうかを測るリード・ラグが研究されている。簡単のため、二証券対数価格 X^1, X^2 が実数 θ_* と二次元標準ブラウン運動 $W_t = (W_t^1, W_t^2)$ に対し、

$$\begin{aligned} X_t^1 &= \sigma_1 W_{t+\theta_*}^1 \\ X_t^2 &= \rho \sigma_2 W_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 W_t^2 \end{aligned}$$

を満たすとする。この時、 X^2 は X^1 に対して時間 θ_* だけ遅れていると考えることができる。また、 X^1, X^2 の観測が $\{X_{s_i}^1\}_i, \{X_{t_j}^2\}_j$ で与えられているとする。彼らはコントラスト関数 $\mathcal{U}^n(\theta)$ を

$$\mathcal{U}^n(\theta) = \sum_{i,j} (X_{s_i}^1 - X_{s_{i-1}}^1)(X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2) 1_{\{[s_{i-1}, s_i] \cap [t_{j-1}-\theta, t_j-\theta] \neq \emptyset\}}$$

で定め、時間のラグ(リード) θ_* の推定量 $\hat{\theta}_n$ を $\hat{\theta}_n = \operatorname{argmax}_\theta |\mathcal{U}^n(\theta)|$ と定めた。この時彼らは、 $v_n \rightarrow 0$ かつ $v_n^{-1} \max_{i,j} (s_i - s_{i-1}) \vee (t_j - t_{j-1}) \rightarrow^p 0$ となる正数列 $\{v_n\}_n$ に対して、 $v_n^{-1}(\hat{\theta}_n - \theta_*) \rightarrow^p 0$ を示した。

Huth and Abergel (2014) は $\mathcal{U}^n(\theta)$ を用いて、lead-lag ratio と呼ばれる指標を作り、フランス株価市場の高頻度個別株データに対する分析から、流動性の高い銘柄が他の銘柄をリードする

傾向があることを確認した。ただし、リードは数秒単位の非常に短い期間となっている。また、Koike (2016)では、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下におけるリード・ラグの推定手法が研究されている。

3. パラメトリック推定法

上の研究はパラメトリック・モデルを仮定しないノンパラメトリック推定量の研究であるが、パラメトリック・モデルの下での最尤型推定量・ベイズ型推定量に関する研究もなされている。最尤型推定量を考えるメリットとしては、様々なモデルにおいて、推定誤差の漸近分散を最小にすることが示されることや尤度比検定, one-step 推定量, 情報量基準によるモデル選択などへの応用が可能であることである。

フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0 \leq t \leq T}, P)$ 上の二次元確率過程 $\{X_t\}_{0 \leq t \leq T}$ が確率微分方程式:

$$(3.1) \quad dX_t = \mu(t, X_t, \sigma_*)dt + b(t, X_t, \sigma_*)dW_t$$

を満たすとする。この時、 X_t は拡散過程と呼ばれる確率過程のクラスに属する。ここで、 W_t は二次元標準ブラウン運動、 $\mu(t, x, \sigma)$ は未知 \mathbb{R}^2 -値関数、 $b(t, x, \sigma)$ は 2×2 行列値の既知関数で、未知パラメータ σ_* は $\sigma_* \in \Lambda$ を満たし、 $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ は Lipschitz boundary をもつ開集合である。 σ_* の値が推定できれば、累積ボラティリティ等のリスク量の推定が可能となる。最尤推定量を計算するには尤度関数を計算する必要があるが、拡散過程に対して尤度関数を計算することは一般に困難であるため、疑似尤度関数を構築することを考える。

本章以後、いくつかの仮定は弱めることが可能だが、煩雑さを避けるため比較的簡易な仮定を採用する。 $\text{clos}(\Lambda)$ は Λ の閉包を表すとする。まずは X のドリフト項 μ と拡散項 b に対する以下の条件を仮定する。

[A1] 関数 $(t, x) \mapsto \mu(t, x, \sigma_*)$ は局所有界で、 b は (t, x, σ) に関して十分なめらか、 bb^\top は各点で正定値で b は $[0, T] \times \mathbb{R}^2 \times \text{clos}(\Lambda)$ 上の連続関数に拡張される。

[A2] 任意の (t, x) に対し、 $\inf_{\sigma_1 \neq \sigma_2} (|bb^\top(t, x, \sigma_1) - bb^\top(t, x, \sigma_2)| / |\sigma_1 - \sigma_2|) > 0$.

(3.1) の dt 項は高頻度極限で dW_t 項より速く零に収束するため、漸近理論で無視することができ、仮定があまり必要にならない。[A2] 条件は統計モデルの分離性に関するもので、ラフに言えば、データ $\{X_t\}$ の(ノイズ付)観測からパラメータを推定するためには、違うパラメータに対して違うデータが生成される必要があり、 bb^\top の水準が異なる必要があるということである。

3.1 同期観測・ノイズ無しの場合

まずは $t_k = kT/n$ に対し、 $\{X_{t_k}\}_{k=0}^n$ が観測されている(同期観測でノイズがない)場合を考える。この時、

$$\Delta X_k := X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \approx b_k(\sigma_*)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

となる。ただし、 $b_k(\sigma) = b(t_{k-1}, X_{t_{k-1}}, \sigma)$ 。よって ΔX_k は $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ の条件付の下、近似的に平均 0、分散 $b_k b_k^\top(\sigma_*)(t_k - t_{k-1})$ の正規分布に従う。このことから、疑似対数尤度関数 $H_n^0(\sigma)$ を

$$(3.2) \quad H_n^0(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\Delta X_k^\top \left(\frac{b_k b_k^\top(\sigma) T}{n} \right)^{-1} \Delta X_k + \log \det(b_k b_k^\top(\sigma)) \right)$$

で定める(局所ガウス近似)。ただし、定数項は σ の最適化に影響を与えないため除外している。最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^0$ を $\hat{\sigma}_n^0 = \text{argmax}_\sigma H_n^0(\sigma)$ で定める。

同期観測・ノイズ無しの場合の最尤型推定量の漸近的性質は Genon-Catalot and Jacod (1994),

Uchida and Yoshida (2013) で研究されており, $\Gamma_0 = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^{-1} \partial_\sigma^2 H_n^0(\sigma_*))$ と書くと, 以下の定理が成立する.

定理 3.1. [A1], [A2] の下, ある d 次元標準正規乱数 ζ で \mathcal{F} と独立なものがあって, $\Gamma_0 > 0$ a.s. かつ $n \rightarrow \infty$ の時,

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^0 - \sigma_*) \rightarrow^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_0^{-1/2} \zeta.$$

3.2 非同期・ノイズ無しの場合

Ogihara and Yoshida (2014) では, X^1, X^2 の (random な) 観測時刻をそれぞれ $\{S_i^{n,1}\}_{i=0}^{\ell_{1,n}}$, $\{S_j^{n,2}\}_{j=0}^{\ell_{2,n}} \subset [0, T]$ で与え,

$$0 = S_0^{n,p} < S_1^{n,p} < \dots < S_{\ell_p, n}^{n,p} = T, \quad (p = 1, 2)$$

$$\max_{i,p} (S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) \rightarrow^p 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (\text{高頻度観測極限})$$

の条件の下, 最尤型推定量を構築し, その漸近挙動を調べた.

同期観測の場合と同様, 局所ガウス近似から疑似対数尤度関数を構築することを考える. $\delta_{i,j}$ をクロネッカーのデルタとし, $b_i^1(\sigma), b_j^2(\sigma)$ は拡散係数 b の行ベクトル b^1, b^2 に対して, それぞれ時刻 $S_{i-1}^{n,1}, S_{j-1}^{n,2}$ における最新の X^1, X^2 の値を代入して得られるものとし, 区間 $K = [a, b]$ に対し $|K| = b - a$, $I_i^p = [S_{i-1}^{n,p}, S_i^{n,p}]$ と置く. この時, X^1, X^2 の規格化された増分 $(\Delta X_i^1 |I_i^1|^{-1/2})_i$, $(\Delta X_j^2 |I_j^2|^{-1/2})_j$ に対し, その条件付共分散は,

$$E \left[\frac{\Delta X_i^p}{|I_i^p|^{1/2}} \frac{\Delta X_j^p}{|I_j^p|^{1/2}} \middle| \mathcal{F}_{S_{i-1}^{n,p} \wedge S_{j-1}^{n,p}} \right] \approx |b_i^p|^2 \delta_{i,j},$$

$$E \left[\frac{\Delta X_i^1}{|I_i^1|^{1/2}} \frac{\Delta X_j^2}{|I_j^2|^{1/2}} \middle| \mathcal{F}_{S_{i-1}^{n,1} \wedge S_{j-1}^{n,2}} \right] \approx b_i^1 \cdot b_j^2 \frac{|I_i^1 \cap I_j^2|}{|I_i^1|^{1/2} |I_j^2|^{1/2}}$$

と近似される. よって $G_{ij} = |I_i^1 \cap I_j^2| |I_i^1|^{-1/2} |I_j^2|^{-1/2}$,

$$Z = \begin{pmatrix} (\Delta X_i^1 |I_i^1|^{-1/2})_i \\ (\Delta X_j^2 |I_j^2|^{-1/2})_j \end{pmatrix}, \quad S(\sigma) = \begin{pmatrix} \text{diag}(|b_i^1|^2(\sigma))_i & \{b_i^1(\sigma) \cdot b_j^2(\sigma) G_{ij}\}_{ij} \\ \{b_i^1(\sigma) \cdot b_j^2(\sigma) G_{ij}\}_{ji} & \text{diag}(|b_j^2|^2(\sigma))_j \end{pmatrix}$$

と置いて, 疑似対数尤度関数 $H_n^1(\sigma)$ を

$$(3.3) \quad H_n^1(\sigma) = -\frac{1}{2} Z^\top S^{-1}(\sigma) Z - \frac{1}{2} \log \det S(\sigma)$$

と定める. この時最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ を $\hat{\sigma}_n^1 = \arg \max_\sigma H_n^1(\sigma)$ で定める.

非同期観測のケースで最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ の漸近挙動を調べるには, 確率過程 X の条件 [A1], [A2] だけではなく, 観測時刻列 $\{S_i^{n,p}\}$ の漸近挙動に関する仮定が必要になる. Ogihara and Yoshida (2014) では, $\{S_i^{n,p}\}$ のある汎関数の極限の存在を仮定しているが, ここではより簡易な十分条件として以下の仮定を置く.

[A3] ある exponential α -mixing simple point process $(N_t^1, N_t^2)_{t \geq 0}$ で増分が定常となるものがあって, 任意の $q > 0$ に対し,

$$(3.4) \quad E[|N_1^q|] < \infty, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{p=1,2} u^q P[N_u^p = 0] < \infty$$

かつ

$$(3.5) \quad S_i^{n,p} = \inf\{t \geq 0; N_{nt}^p \geq i\}.$$

例えば, $(N_t^1, N_t^2)_{t \geq 0}$ が独立なポアソン過程でパラメータを λ_1, λ_2 とすると, 増分定常な exponential α -mixing simple point process となり, (3.4) の最初の条件も明らかに満たす. 二番目の条件に関しては,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} u^q P[N_u^p = 0] = \lim_{u \rightarrow \infty} (u^q e^{-\lambda_p u}) = 0$$

より満たされる. よって, 観測時刻列を (3.5) で定めれば [A3] 条件を満たすことがわかる.

定理 3.2. (Ogihara and Yoshida, 2014) [A1]–[A3] を仮定する. この時,

$$\Gamma_1 = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^{-1} \partial_\sigma^2 H_n^1(\sigma_*))$$

が存在し, 最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ に対して, \mathcal{F} と独立な d 次元標準正規乱数 ζ があって, $\Gamma_1 > 0$ a.s. かつ

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^1 - \sigma_*) \rightarrow^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_1^{-1/2} \zeta \quad (n \rightarrow \infty).$$

Ibragimov and Has'minskiĭ (1972, 1973, 1981) の尤度比確率場の理論を用いると, $j = 0, 1$ に対し, 最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^j$ の漸近的性質を調べる上で, 疑似対数尤度比 $\partial_\sigma^k (H_n^j(\sigma) - H_n^j(\sigma_*))$ ($k = 0, 1, 2, 3, 4$) の極限の性質を調べることが本質的になる. (3.2) 式では, $H_n^0(\sigma)$ は, 各 k に対する ΔX_k の疑似対数尤度を足し合わせたシンプルな関数であるが, 非同期・ノイズ無しの $H_n^1(\sigma)$ では, S^{-1} の全ての要素が非零となり得る上に, $\Delta X_k \Delta X_l$ の係数が遠い先の時刻まで参照しているため, マルチンゲールに対する極限定理などを使いづらくなるため, 定理 3.2 の証明には, Itô 解析と線型代数を組み合わせて係数の時刻ずらしを行ってからマルチンゲールの極限定理を適用するなどのより複雑な解析が必要となる.

3.3 非同期・ノイズ付の場合

次に非同期観測でノイズがあるモデルを考える. $p = 1, 2$ に対し, ノイズを $\{\epsilon_i^{n,p}\}_{i=0}^\infty$ と書き, 独立同分布で, 未知の $v_{p,*} > 0$ と任意の $q > 0$ に対し, $E[\epsilon_i^{n,p}] = 0$, $E[(\epsilon_i^{n,p})^2] = v_{p,*}$, $E[(\epsilon_i^{n,p})^q] < \infty$ を満たすとする. 観測は $Y_i^p = X_{S_i^{n,p}}^p + \epsilon_i^{n,p}$ で与えられるとし, $\{S_i^{n,p}\}_{n,p,i}$, $\{\epsilon_i^{n,p}\}_{n,p,i}$, $(X_t, W_t)_t$ は独立とする.

自然数列 $\{l_n\}_{n=1}^\infty$ をある $\epsilon > 0$ に対し, $l_n \rightarrow \infty$, $l_n n^{-1/2+\epsilon} \rightarrow 0$ かつ $n^{1/3+\epsilon} l_n^{-1} \rightarrow 0$ となるようにとり, $s_m = T l_n^{-1} m$ ($0 \leq m \leq l_n$) に対し, 観測を l_n 個の区間 $\{[s_{m-1}, s_m]\}_{m=1}^{l_n}$ に分けて疑似対数尤度関数を構築することを考える. この疑似対数尤度関数構築の手法は同期観測・ノイズ無しの最尤型推定量を研究している Gloter and Jacod (2001b) のアイデアに基づいており, 疑似対数尤度関数の漸近挙動を制御するための技術的な理由によりこのような操作が必要になるが, l_n の取り方は最尤型推定量の漸近分布に影響を与えないことが示される.

区間 $[s_{m-1}, s_m)$ の間の Y^1, Y^2 の観測数をそれぞれ $k_m^1 + 1, k_m^2 + 1$ とし, $\Delta Y_i^p = Y_i^p - Y_{i-1}^p$, $b_m^k(\sigma) = b^k(s_{m-1}, ((k_m^p)_{i=1}^{-1} \sum_{i: I_i^p \subset [s_{m-2}, s_{m-1})} Y_i^p), \sigma)$, $k_m^p \times k_m^p$ 行列 $M_{p,m}$ を

$$(M_{p,m})_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j) \\ -1 & (|i - j| = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める.

まずノイズ項 $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従うとすると, $[s_{m-1}, s_m)$ 内の観測 $\Delta Y_i^p, \Delta Y_{i'}^{p'}$ に対し, $p = p'$ の時,

$$E[\Delta Y_i^p \Delta Y_{i'}^{p'} | \mathcal{F}_{s_{m-1}}] \approx |b_m^p(\sigma_*)|^2 (\text{diag}(|I_i^p|)_{ii'}) + v_{p,*} (M_{p,m})_{ii'},$$

$p = 1, p' = 2$ の時,

$$E[\Delta Y_i^1 \Delta Y_j^2 | \mathcal{F}_{s_{m-1}}] \approx b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma_*) |I_i^1 \cap I_j^2|.$$

よって $Z_m = ((\Delta Y_i^1)_{i; I_i^1 \subset [s_{m-1}, s_m]}, (\Delta Y_j^2)_{j; I_j^2 \subset [s_{m-1}, s_m]})$,

$$S_m(\sigma, v) = \begin{pmatrix} |b_m^1|^2(\sigma) \text{diag}(|I_i^1|)_i & b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma) \{|I_i^1 \cap I_j^2|\}_{i,j} \\ b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma) \{|I_i^1 \cap I_j^2|\}_{j,i} & |b_m^2|^2(\sigma) \text{diag}(|I_j^2|)_j \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} v_1 M_{1,m} & 0 \\ 0 & v_2 M_{2,m} \end{pmatrix} \quad (v = (v_1, v_2))$$

に対し、疑似対数尤度関数 $H_n^2(\sigma, v)$ を以下で定める:

$$H_n^2(\sigma, v) = -\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{l_n} (Z_m^\top S_m^{-1}(\sigma, v) Z_m + \log \det S_m(\sigma, v)).$$

$v_* = (v_{1,*}, v_{2,*})$ は未知だが^s, v_* の推定量 $\{\hat{v}_n\}_{n=1}^\infty$ で $\{\sqrt{n}(\hat{v}_n - v_*)\}_{n=1}^\infty$ が tight となるものに対し、 σ_* の最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ を

$$\hat{\sigma}_n^2 = \operatorname{argmax}_\sigma H_n^2(\sigma, \hat{v}_n)$$

で与える. 上の疑似対数尤度関数の導出ではノイズ項 $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従うことを仮定したが, 上のように σ_* と v_* の推定を分離することにより, ノイズ項が非正規でも, H_n^2 を用いて計算される $\hat{\sigma}_n^2$ に対して, ノイズ項が正規の場合と同様の漸近的性質を導くことができる.

観測頻度が高くなれば各 ΔY_i^p におけるノイズ項の寄与が支配的になるので, ノイズ分散 $v_{p,*}$ の一致推定量を作るのは容易である. 例えば

$$\hat{v}_{p,n} = (2\ell_{p,n})^{-1} \sum_{i=1}^{\ell_{p,n}} (\Delta Y_i^p)^2$$

ととれば上の条件を満たす.

また, 観測時刻列 $\{S_i^{n,p}\}$ に関する以下の条件を仮定する.

[A4] 任意の $\delta > 0$ に対し, $\max_{p,i} (S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) = O_p(n^{-1+\delta})$ かつ $(\min_{p,i} (S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}))^{-1} = O_p(n^{1+\delta})$.

[A5] ある $\eta \in (0, 1/2)$ と連続正値確率過程 $\{a_t^p\}_{0 \leq t \leq T, p=1,2}$ があって, $\sup_{t \neq s} (|a_t^j - a_s^j|/|t-s|) < \infty$ a.s. かつ $n \rightarrow \infty$ の時,

$$n^{1/2} \ell_n^{-1} \max_{1 \leq l \leq L_n} \left| n^{-1} (s''_{n,l} - s'_{n,l})^{-1} \#\{i; I_i^p \subset [s'_{n,l}, s''_{n,l}]\} - a_{s_{n,l}}^p \right| \rightarrow^p 0.$$

ただし, $\{[s'_{n,l}, s''_{n,l}]\}_{1 \leq l \leq L_n} \subset [0, T]$ は任意の disjoint な区間列で

$$0 < \inf_{n,l} (n^{1-\eta} (s''_{n,l} - s'_{n,l})) \leq \sup_{n,l} (n^{1-\eta} (s''_{n,l} - s'_{n,l})) < \infty.$$

[A5] は観測数に関して, 局所的な大数の法則が成り立つことを意味している.

定理 3.3. (Ogihara, 2015b) [A1], [A2], [A4], [A5] を仮定する. この時,

$$\Gamma_2 = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^{-1/2} \partial_\sigma^2 H_n^2(\sigma_*, v_*))$$

が存在し, $\Gamma_2 > 0$ a.s. また, \mathcal{F} と独立な d 次元標準正規分布 ζ に対して, $n \rightarrow \infty$ の時,

$$n^{1/4} (\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_*) \rightarrow^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_2^{-1/2} \zeta, \quad -n^{-1/2} \partial_\sigma^2 H_n^2(\hat{\sigma}_n^2, \hat{v}_n) \rightarrow^p \Gamma_2.$$

$\mathcal{Y}(\sigma) = P\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-1/2}(H_n^2(\sigma, v_*) - H_n^2(\sigma_*, v_*)))$ と置き, $b_t = b(t, X_t, \sigma)$, $\tilde{a}_t^j = a_t^j/v_{j,*}$, $b_{t,*} = b(t, X_t, \sigma_*)$, $B_t = \sqrt{\det(b_t b_t^\top)}$, $B_{t,*} = \sqrt{\det(b_{t,*} b_{t,*}^\top)}$ と置くと,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}(\sigma) &= \int_0^T \left[\frac{\sum_{j=1}^2 (|b_t^j|^2 - |b_{t,*}^j|^2) (|b_t^{3-j}|^2 \sqrt{\tilde{a}_t^1 \tilde{a}_t^2} + \tilde{a}_t^j B_t) - 2(b_t^1 \cdot b_t^2 - b_{t,*}^1 \cdot b_{t,*}^2) b_t^1 \cdot b_t^2 \sqrt{\tilde{a}_t^1 \tilde{a}_t^2}}{4B_t(\tilde{a}_t^1 |b_t^1|^2 + \tilde{a}_t^2 |b_t^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1 \tilde{a}_t^2} B_t)^{1/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(\tilde{a}_t^1 |b_t^1|^2 + \tilde{a}_t^2 |b_t^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1 \tilde{a}_t^2} B_t)^{1/2} - (\tilde{a}_t^1 |b_{t,*}^1|^2 + \tilde{a}_t^2 |b_{t,*}^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1 \tilde{a}_t^2} B_{t,*})^{1/2}}{2} \right] dt. \end{aligned}$$

また, この時 $\Gamma_2 = -\partial_\sigma^2 \mathcal{Y}(\sigma_*)$ となる.

非同期・ノイズ付のケースでも S_m^{-1} の各要素が非零になり得るということに加え, ノイズ項の共分散行列 $M_{p,m}$ の存在により S_m^{-1} の漸近挙動が非自明となり, H_n^2 の漸近的性質の導出がより困難になる. Gloter and Jacod (2001b)では, 同期(等間隔)観測・ノイズ付のケースを扱っており, この場合, X の共分散行列に対応する部分が単位行列のスカラー倍になるので, あるスカラー確率変数 c と単位行列 I に対して, S_m に対応する共分散行列は,

$$cI + vM_{1,m}$$

と書ける. $M_{1,m}$ の固有値は

$$\left\{ 2 \left(1 - \cos \left(\frac{i\pi}{k_m^1 + 1} \right) \right) \right\}_{i=1}^{k_m^1}$$

と求まるので, S_m の固有値は

$$\left\{ c + 2v \left(1 - \cos \left(\frac{i\pi}{k_m^1 + 1} \right) \right) \right\}_{i=1}^{k_m^1}$$

となる. この性質が疑似対数尤度関数の漸近的性質を導く上で本質的な役割を果たす. 非同期・ノイズ付の場合では, X の共分散行列が非同期性から複雑になり, S_m の固有値を簡単な関数で表すことができないので解析はより困難になる. しかし, $M_{p,m}$ の特殊な漸近的性質を用いることにより, X の共分散行列が単位行列のスカラー倍のケースに帰着して, 漸近理論を展開することが可能となる. 詳しくは, Ogihara (2015b)の五章を参照されたい.

例として, X が

$$\begin{cases} dX_t^1 = \sigma_{1,*} dW_t^1 \\ dX_t^2 = \sigma_{3,*} dW_t^1 + \sigma_{2,*} dW_t^2 \end{cases}$$

を満たすシンプルなケースを考える. この時, パラメータは $\sigma_* = (\sigma_{1,*}, \sigma_{2,*}, \sigma_{3,*})$ であり, X は相関付ブラウン運動になる. また, $\langle X^1, X^2 \rangle_T = T\sigma_{1,*}\sigma_{3,*}$ となるので, 最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2 = (\hat{\sigma}_{1,n}^2, \hat{\sigma}_{2,n}^2, \hat{\sigma}_{3,n}^2)$ を用いた自然な推定量 $T\hat{\sigma}_{1,n}^2 \hat{\sigma}_{3,n}^2$ を考えることができ, 定理 3.3 の仮定の下, デルタ法を用いることで,

$$n^{1/4} (T\hat{\sigma}_{1,n}^2 \hat{\sigma}_{3,n}^2 - \langle X^1, X^2 \rangle_T) \rightarrow^{s\text{-}\mathcal{L}} V\zeta$$

が示される. ここで Γ_2^{-1} の行列要素を $(\Gamma_2^{-1})_{ij}$ と書く時,

$$V = T^2(\sigma_{3,*}^2 (\Gamma_2^{-1})_{11} + 2\sigma_{1,*}\sigma_{3,*} (\Gamma_2^{-1})_{13} + \sigma_{1,*}^2 (\Gamma_2^{-1})_{33})$$

である.

次章では, X が一般の (3.1) を満たす拡散過程のケースで, 最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ の漸近的な最良

性を議論する．上の相関付ブラウン運動の例では，パラメータ変換を用いることで， $T\hat{\sigma}_{1,n}^2\sigma_{3,n}^2$ が $\langle X^1, X^2 \rangle_T$ の推定量として漸近的に最良であることも示される．また，Ogihara (2015b) の第三章では，シミュレーションにより， $T\hat{\sigma}_{1,n}^2\sigma_{3,n}^2$ を $\langle X^1, X^2 \rangle_T$ の既存の代表的なノンパラメトリック推定量と比較し，高頻度観測において，推定誤差の標本標準偏差が最も小さいことを確認している．そのため，最尤型推定法は漸近理論における最適性が保証されるだけでなく，実際の数値シミュレーションにおいても有用であると言える．

4. 統計モデルの局所漸近混合正規性と推定量の漸近有効性

最尤型推定量の一つのメリットとして，様々なモデルで推定誤差の漸近分散が最小になること（漸近有効性）がある．これは統計モデルの局所漸近混合正規性 (local asymptotic mixed normality, LAMN) と呼ばれる性質から証明される．

定義 4.1. 可測空間 $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ 上の確率分布の族 $\{P_{\sigma,n}\}_{\sigma,n}$ が以下を満たすとき， $\sigma = \sigma_*$ で局所漸近混合正規であるという：ある正数列 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ と $d \times d$ 対称正定値確率行列 Γ_n, Γ と d 次元確率ベクトル $\mathcal{N}_n, \mathcal{N}$ があって，任意の $u \in \mathbb{R}^d$ に対し， $n \rightarrow \infty$ の時， $e_n \rightarrow 0$,

$$\log \frac{dP_{\sigma_* + e_n u, n}}{dP_{\sigma_*, n}} - \left(u^\top \sqrt{\Gamma_n} \mathcal{N}_n - \frac{1}{2} u^\top \Gamma_n u \right) \rightarrow 0$$

in $P_{\sigma_*, n}$ -probability, \mathcal{N} は Γ と独立な d 次元標準正規乱数で

$$(\mathcal{N}_n, \Gamma_n) \rightarrow^d (\mathcal{N}, \Gamma).$$

さらに Γ が deterministic の時， $\{P_{\sigma,n}\}$ は局所漸近正規 (locally asymptotic normal, LAN) であるという．

定理 4.1. (Jeganathan, 1983) 確率分布族 $\{P_{\sigma,n}\}_{\sigma,n}$ が $\sigma = \sigma_*$ で LAMN を満たすとする．この時任意の推定量列 $\{V_n\}$ と任意の非減少関数 $l: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ で $l(0) = 0$ を満たすものに対し，

$$(4.1) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{|u| \leq \alpha} E_{\sigma_* + e_n u, n} [l(|e_n^{-1}(V_n - \sigma_* - e_n u)|)] \geq E[l(|\Gamma^{-1/2} \mathcal{N}|)].$$

ただし， $E_{\sigma,n}$ は $P_{\sigma,n}$ に関する期待値を表す．

この不等式は minimax 不等式と呼ばれ，パラメータ推定量列 $\{V_n\}$ の推定誤差のリスク量に対する漸近的下界を与える．特に $l(x) = x^2$ の時，上の式は推定誤差の漸近分散の下界を与える． $\sigma = \sigma_*$ におけるリスク量 $E_{\sigma_*, n} [l(|e_n^{-1}(V_n - \sigma_*)|)]$ は自明な推定量 $V_n \equiv \sigma_*$ により最小化される．しかし，実際にはパラメータの真値 σ_* を事前に知ることはできないので，この推定量はたまたま真値を当てただけになる．このような自明な推定量を取り除くために，minimax 不等式ではパラメータの摂動に対する局所的な supremum がとられている．minimax 不等式において等号を満たすような推定量列 $\{V_n\}$ は漸近有効であると言われる．

同期観測でノイズ無しのケースでは，Gobet (2001) により統計モデルの LAMN が示されている．また，同期観測・ノイズ付のケースでは，Gloter and Jacod (2001a) において，拡散係数 $b(t, x, \sigma)$ が x に依存しないケースでの LAN が示されている．非同期観測の場合の LAMN (LAN) に関する結果としては以下がある．

定理 4.2. (Ogihara, 2015a) [A1]–[A3] を仮定する．さらに μ は (t, x, σ) に関して十分なめらかで， $\partial_x \mu, \partial_x b$ は有界かつ，任意の $r \in [0, 1], t_1, t_2, x_1, x_2, \sigma$ に対し，

$$(rb(t_1, x_1, \sigma) + (1-r)b(t_2, x_2, \sigma))(rb(t_1, x_1, \sigma) + (1-r)b(t_2, x_2, \sigma))^\top$$

が正定値であるとする。この時、5.2 節の非同期・ノイズ無しの統計モデルに対する LAMN が成立する。

定理 4.3. (Ogihara, 2015b) [A1], [A2], [A4], [A5] を仮定する。さらに $\mu \equiv 0$, $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従い、 $b(t, x, \sigma)$ が (t, x) に依存しないとする。この時、5.3 節の非同期・ノイズ付の統計モデルに対する LAN が成立する。

定理 4.3 は X がブラウン運動になるようなやや強い仮定を置いている。 X がより広い拡散過程のクラスに属する場合にも同様の結果が成り立つと予想されるが、そのような結果はまだ示されていない。 X が一般の拡散過程の時、 ΔX_k の確率密度関数の解析は困難であるが、Gobet (2001), Ogihara (2015a) では、Malliavin Calculus を用いたアプローチにより尤度比の挙動を解析している。非同期・ノイズ付のケースでも同等の技術が必要になると予想される。

定理 3.3 の stable convergence の結果は、(4.1) 式の l が有界連続関数で $u = 0$ の時の結果に対応する。最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1, \hat{\sigma}_n^2$ の漸近有効性を示すには、 $l(x) = x^2$ 等の l が多項式増大関数の場合や $u \neq 0$ の摂動に関する sup を扱う必要があり、定理 3.3 よりもやや強い仮定が必要となる。これらの結果は、次の章の推定量のモーメント収束の結果を用いることで示すことができる。

5. ベイズ型推定量とモーメント収束

この章における結果は、非同期・ノイズ無しの場合も同様のものが得られるが、ここでは非同期・ノイズ付のケースのみを扱う。

事前確率密度 $\pi(\sigma)$ が有界連続関数で $\inf_\sigma \pi(\sigma) > 0$ を満たすとする。この時ベイズ型推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ を以下で定義する：

$$\hat{\sigma}_n^2 = \left(\int \exp(H_n^2(\sigma, \hat{v}_n)) \pi(\sigma) d\sigma \right)^{-1} \int \sigma \exp(H_n^2(\sigma, \hat{v}_n)) \pi(\sigma) d\sigma.$$

最尤型推定量の数値計算ではパラメータに関する非凸最小化問題を解くことになり、パラメータの次元を上げると困難になることがあるため、MCMC を用いた計算アルゴリズムが使えるベイズ型推定量の方が計算が容易なことがある。

一方、ベイズ型推定量はその定義にパラメータに関する積分を含むため、推定誤差が大きくなる事象に対するより精緻な評価が必要となる。Yoshida (2011) において、コントラスト推定量に対して、コントラスト関数のモーメント条件などの条件から推定量の大偏差の評価を得る手法が開発され、我々の疑似対数尤度関数に対しても適用できる。

以下の仮定を考える。

[B1] 1. ある正定数 C があって、任意の $0 \leq 2i + j \leq 4, 0 \leq k \leq 4, x \in \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\sup_{t \in [0, T], \sigma \in \Lambda} (|\partial_t^i \partial_x^j \partial_\sigma^k \mu(t, x, \sigma)| \vee |\partial_t^i \partial_x^j \partial_\sigma^k b(t, x, \sigma)|) \leq C(1 + |x|)^C.$$

2. $\inf_{t, x, \sigma} \det bb^\top(t, x, \sigma) > 0$.

3. 任意の $q > 0$ に対して、 $E[|X_0|^q] < \infty$.

[B2] ある $\eta \in (0, 1/2), \delta > 0$ と正值確率変数 $\{a_t^j\}_{t \in [0, T], j=1,2}$ があって、任意の $q > 0$ に対して

$$E \left[\sup_{j, t > s} \frac{|a_t^j - a_s^j|^q}{|t - s|^q} \right] < \infty, \quad E \left[\sup_{j, t} |a_t^j|^q \right] \vee E \left[\sup_{j, t} (|a_t^j|^{-q}) \right] < \infty,$$

かつ

$$\sup E \left[\left(n^{1/2+\delta} l_n^{-1} \max_{1 \leq l \leq L_n} \left| n^{-1} (s''_{n,l} - s'_{n,l})^{-1} \#\{i; I_i^j \subset (s'_{n,l}, s''_{n,l})\} - a'_{s'_{n,l}} \right| \right)^q \right] < \infty.$$

ただし、最後の式における \sup は、任意の自然数 n と [A5] と同じ区間列 $\{[s'_{n,l}, s''_{n,l}]\}_{1 \leq l \leq L_n, n \in \mathbb{N}}$ の範囲に対してとる。さらに、ある正定数 γ があつて、 $b_n^{3/7+\gamma} l_n^{-1} \rightarrow 0$ かつ任意の $\epsilon > 0$ と $q > 0$ に対して $n \rightarrow \infty$ の時、

$$E \left[\left(n^{1-\epsilon} \max_{p,i} (S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) \right)^q \right] \rightarrow 0, \quad E \left[\left(n^{1+\epsilon} \min_{p,i} (S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) \right)^{-q} \right] \rightarrow 0.$$

$$[\text{B3}] \inf_{t,x} \inf_{\sigma_1 \neq \sigma_2} (|bb^\top(t, x, \sigma_1) - bb^\top(t, x, \sigma_2)| / |\sigma_1 - \sigma_2|) > 0.$$

[\text{B4}] ノイズ分散 v_* の推定量 \hat{v}_n に対して、 $\hat{v}_n > 0$ a.s. かつ任意の $q > 0$ に対して

$$\limsup_n E[\hat{v}_n^{-q}] < \infty, \quad \text{and} \quad \sup_n E[|\sqrt{n}(\hat{v}_n - v_*)|^q] < \infty.$$

定理 5.1. (多項式型大偏差不等式, Ogihara, 2015b) [\text{B1}]-[\text{B4}] を仮定する。この時、任意の $L > 0$ に対して、ある正定数 C_L があつて、任意の $r > 0$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$P \left[\sup_{u \in V_n(r)} \exp(H_n^2(\sigma_* + n^{-1/4}u, \hat{v}_n) - H_n^2(\sigma_*, \hat{v}_n)) \geq e^{-r/2} \right] \leq C_L r^{-L}.$$

ただし、 $V_n(r) = \{u \in \mathbb{R}^d; |u| \geq r, \sigma_* + n^{-1/4}u \in \Lambda\}$.

定理 5.1 から任意の $p > 0$ に対し、 $L > p$ として、

$$E[|n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_*)|^p] = \int_0^\infty pt^{p-1} P[|n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_*)| \geq t] dt \leq \int_0^\infty pt^{p-1} (1 \wedge (C_L t^{-L})) dt < \infty.$$

つまり最尤型推定量の誤差のモーメントが収束する。

さらに最尤型・ベイズ型推定量に対して以下が成立。

定理 5.2. (Ogihara, 2015b) [\text{B1}]-[\text{B4}] を仮定する。この時、任意の有界確率変数 \mathbf{Y} と任意の高々多項式増大の連続関数 f に対して $n \rightarrow \infty$ の時、

$$\begin{aligned} E[\mathbf{Y} f(n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_*))] &\rightarrow E[\mathbf{Y} f(\Gamma_2^{-1/2}\zeta)], \\ E[\mathbf{Y} f(n^{1/4}(\tilde{\sigma}_n^2 - \sigma_*))] &\rightarrow E[\mathbf{Y} f(\Gamma_2^{-1/2}\zeta)]. \end{aligned}$$

参考文献

- Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2014). *High-frequency Financial Econometrics*, Princeton University Press, Princeton.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008). Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling, *Review of Economic Studies*, **75**, 339–369.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrica*, **76**, 1481–1536.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2011). Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise

- and non-synchronous trading, *Journal of Econometrics*, **162**, 149–169.
- Bibinger, M. (2011). Efficient covariance estimation for asynchronous noisy high-frequency data, *Scandinavian Journal of Statistics*, **38**, 23–45.
- Bibinger, M. (2012). An estimator for the quadratic covariation of asynchronously observed Itô processes with noise: Asymptotic distribution theory, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 2411–2453.
- Christensen, K., Kinnebrock, S. and Podolskij, M. (2010). Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data, *Journal of Econometrics*, **159**, 116–133.
- Fukasawa, M. and Rosenbaum, M. (2012). Central limit theorems for realized volatility under hitting times of an irregular grid, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 3901–3920.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1994). Estimation of the diffusion coefficient for diffusion processes: Random sampling, *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 193–221.
- Gloter, A. and Jacod, J. (2001a). Diffusions with measurement errors. I. Local asymptotic normality, *ESAIM Probability and Statistics*, **5**, 225–242.
- Gloter, A. and Jacod, J. (2001b). Diffusions with measurement errors. II. Optimal estimators, *ESAIM Probability and Statistics*, **5**, 243–260.
- Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**, 359–379.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2008). Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **60**, 367–406.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2011). Nonsynchronous covariation process and limit theorems, *Stochastic Processes and Their Applications*, **121**, 2416–2454.
- Hoffmann, M., Rosenbaum, M. and Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data, *Bernoulli*, **19**, 426–461.
- Huth, N. and Abergel, F. (2014). High frequency lead/lag relationships — Empirical facts, *Journal of Empirical Finance*, **26**, 41–58.
- Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1972). The asymptotic behavior of certain statistical estimates in the smooth case. I. Investigation of the likelihood ratio, *Akademiya Nauk SSSR. Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, **17**, 469–486.
- Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1973). Asymptotic behavior of certain statistical estimates. II. Limit theorems for a posteriori density and for Bayesian estimates, *Akademiya Nauk SSSR. Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya*, **18**, 78–93.
- Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1981). *Statistical Estimation*, Springer-Verlag, New York, Berlin.
- Jacod, J. and Protter, P. (2012). *Discretization of Processes*, Springer, Heidelberg.
- Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Jacod, J., Li, Y., Mykland, P. A., Podolskij, M. and Vetter, M. (2009). Microstructure noise in the continuous case: The pre-averaging approach, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 2249–2276.
- Jeganathan, P. (1983). Some asymptotic properties of risk functions when the limit of the experiment is mixed normal, *Sankhyā Series A*, **45**, 66–87.
- Koike, Y. (2016). On the asymptotic structure of Brownian motions with an infinitesimal lead-lag effect,

arXiv:1601.03614.

- Koike, Y. (2017). Time endogeneity and an optimal weight function in pre-averaging covariance estimation, *Stochastic Inference for Stochastic Processes*, **20**, 15–56.
- Li, Y., Mykland, P. A., Renault, E., Zhang, L. and Zheng, X. (2014). Realized volatility when sampling times are possibly endogenous, *Econometric Theory*, **30**, 580–605.
- Ogihara, T. (2015a). Local asymptotic mixed normality property for nonsynchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **21**, 2024–2072.
- Ogihara, T. (2015b). Parametric inference for nonsynchronously observed diffusion processes in the presence of market microstructure noise, arXiv:1412.8173.
- Ogihara, T. and Yoshida, N. (2014). Quasi-likelihood analysis for nonsynchronously observed diffusion processes, *Stochastic Processes and Their Applications*, **124**, 2954–3008.
- Podolskij, M. and Vetter, M. (2009). Estimation of volatility functionals in the simultaneous presence of microstructure noise and jumps, *Bernoulli*, **15**, 634–658.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2851–2876.
- Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 431–479.

Modeling Intraday Stock Price Dynamics Using Diffusion Processes and Estimating Volatility and Covariation

Tepei Ogihara^{1,2}

¹The Institute of Statistical Mathematics

²PRESTO, Japan Science and Technology Agency

This paper introduces modeling of intraday stock price dynamics using diffusion processes, and statistical inference of volatility and covariation. In particular, we study the problems of ‘market microstructure noise’ and ‘nonsynchronous observations’. First, we look back at the history of nonparametric estimation of volatility and covariation. Then we construct maximum-likelihood-type estimators and show their asymptotic mixed normality. We also study local asymptotic mixed normality of statistical models, which is significant when we discuss asymptotic optimality of estimators. Finally, we construct a Bayes-type estimator and study its asymptotics.

Lévy 駆動型確率微分方程式の段階的推定について

上原 悠禎[†]・増田 弘毅[†]

(受付 2016 年 6 月 28 日；改訂 10 月 13 日；採択 10 月 17 日)

要 旨

非正規型 Lévy 過程で駆動される確率微分方程式モデルの推定を考える。指数的エルゴード性とデータの高頻度性の下、正規型疑似スコア関数に基づいてスケール係数およびドリフト係数をこの順に段階的に推定する方法を提案し、推定量の漸近正規性および裾確率評価を導出する。推定対象を分割することで最適化の計算負荷が削減され、より安定した推定精度が得られる。拡散過程の場合と異なり、特に両係数のパラメータが共通因子を持つ場合には、ドリフト係数の漸近共分散行列は同時推定の場合と異なる形をとる。

キーワード：エルゴード性、正規型疑似スコア関数、高頻度観測、段階的推定、Lévy 駆動型確率微分方程式。

1. はじめに

連続時間確率過程で記述される統計モデルによって観測頻度に伴う推定精度の差異がモデリング可能となり、モデルの具体系のみならず推定方式によって漸近分布論も様々な形式を取り得る。本稿では、常微分方程式 $dx_t = a(x_t, \alpha)dt$ の時間発展に確率的なノイズを加えた、フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, P)$ 上に定義された次の d 次元確率微分方程式 (SDE) モデル

$$(1.1) \quad dX_t = a(X_t, \alpha, \gamma)dt + c(X_{t-}, \gamma)dJ_t.$$

を考える。ここで J は (\mathcal{F}_t) -適度な r 次元非正規型 Lévy 過程であり、ドリフト係数 $a: \mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha \times \Theta_\gamma \mapsto \mathbb{R}^d$ とスケール係数 $c: \mathbb{R}^d \times \Theta_\gamma \mapsto \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$ は有限次元未知パラメータ

$$\theta := (\alpha, \gamma) \in \Theta := \Theta_\alpha \times \Theta_\gamma \subset \mathbb{R}^{p_\alpha} \times \mathbb{R}^{p_\gamma}$$

を除いて既知であるとし、初期変数 X_0 は J と独立とする。簡単のためパラメータ空間 Θ は有界凸領域とする。SDE モデル (1.1) の解過程から高頻度観測 $(X_{t_0}, X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ が得られていると仮定する。ここで、 $t_j = t_j^n = jh_n$ であり、正数列 $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ は

$$(1.2) \quad T_n := nh_n \rightarrow \infty, \quad nh_n^2 \rightarrow 0$$

を満たしているとする。目的は θ の真値 $\theta_0 \in \Theta$ を推定することである。

Lévy 過程とは独立定常増分性を有する確率過程であり、離散時間ランダムウォークの自然な連続時間版と解釈される。これは互いに独立な Wiener 過程と非正規型 (純粋ジャンプ型) Lévy 過程の畳み込みとして、また同時に複合 Poisson 過程のある種の極限として定義される。そのジャンプ構造・挙動の多様性により、Lévy 過程は非正規性が色濃い金融データや工学・生体信

[†]九州大学大学院 数理学研究院：〒 819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744

号の表現として広く用いられている。Lévy 過程の理論を包括的に扱った標準的な教科書として Sato (1999) を挙げておく。

現在膨大な高頻度データの入手が可能となり、上述の現象記述精度の高さから Lévy 駆動型 SDE モデルの実現象への応用の機運が高まっている。しかしながらその高頻度統計理論は J に対応する無限分解可能分布族を (相当) 限定した場合でさえ未だ十分に整備されていない。これは一つには、ジャンプ構造が過度に多様なため統一的な推定手法の構築が不可能であるという事実が災いしている。実際、最尤推定量の最適収束率も観測頻度とジャンプ構造の双方が本質的に関与して決まる。この問題への一つの対処法として、Masuda (2013) は (1.1) でドリフト係数 $a(x, \alpha, \gamma)$ が γ によらない場合に、漸近効率を犠牲にした正規型疑似最尤推定量の漸近挙動を調べた。この手法により、漸近有効性を放棄することで陽な疑似尤度関数を用いつつ駆動ノイズ J の具体的な分布構造を仮定せずに θ の推定を行える。

ところで単一の疑似尤度に基づいた θ の推定は α と γ の同時最適化を伴い、Masuda (2013) の推定方式も例外ではない。このため、係数が複雑な場合には計算負荷の高さおよび同時最適化の不安定さが懸念されよう。近年、拡散過程 (J が標準 Wiener 過程) の場合にこの問題に対する種々のアプローチ (Uchida and Yoshida, 2012 や Kamatani and Uchida, 2015 とその参考文献を参照) が提案され、拡散係数とドリフト係数を個別に、しかも漸近有効性を保持しつつ推定する形で、数値統計の観点からも発展がなされた。これらの方法論においては α と γ の最適収束率の差異が有効活用されている。翻って Lévy 駆動型 SDE の場合についてはその限りではない。実際、正規型疑似尤度は α, γ 共に $\sqrt{T_n}$ の収束率しか持たず、さらに一般に漸近共分散行列は拡散過程の場合のようにブロック対角型にはならないため、段階的な推定手法の定式化は自明な話ではない。この点を踏まえ、本稿の主眼は θ の推定を α, γ 個々の推定へ分割する段階的推定法を定式化し、当該推定量の漸近分布と多項式型裾確率評価を導出することにある。提案手法によって γ, α をこの順に別個に推定可能となり、計算負荷の大きな軽減の可能性が期待できる。

本稿の構成は以下の通りである。まず 2 節で段階的推定量 $\hat{\theta}_n$ 構成の概略を述べ、その漸近的性質を導出するための仮定を導入する。3 節において主結果である $\hat{\theta}_n$ の漸近正規性および裾確率評価を与える。特に、漸近分布の形を通じて拡散過程の場合との差異を浮き彫りにする。4 節では段階的推定量のパフォーマンスを確認するために幾つかの数値実験結果を紹介し、最後に 5 節において主結果の証明を与える。

2. 段階的係数推定法

本稿の主眼である (1.1) の段階的係数推定法について述べていく。

J が有限共分散をもつとき、標準化した $\tilde{J}_t := \text{cov}(J_1)^{-1/2} \{J_t - E(J_1)t\}$ を用いて (1.1) を書き換えると

$$(2.1) \quad dX_t = (a(X_t, \alpha, \gamma) + c(X_t, \gamma)E(J_1))dt + c(X_{t-}, \gamma)\text{cov}(J_1)^{1/2}d\tilde{J}_t$$

となる。新たに $E(J_1), \text{cov}(J_1)$ をパラメータとみなせば (2.1) は (1.1) での特別な場合となるため、(1.1) において一般性を失うことなく J は標準化されているとしてよい。ここではより強く、以下を仮定する (I_r は r 次元単位行列を表す)。

仮定 2.1. $E(J_1) = 0, E(J_1^{\otimes 2}) = I_r$, また任意の $q > 0$ に対し $E[|J_1|^q] < \infty$.

任意の確率過程 Y と $\mathbb{R}^d \times \bar{\Theta}$ 上の可測関数 f に対して

$$Y_j = Y_{t_j}, \quad \Delta_j Y = Y_j - Y_{j-1}, \quad f_j(\theta) = f(Y_j, \theta)$$

と適宜略記する. (1.1)の形式的な Euler-丸山近似は

$$(2.2) \quad X_j \approx X_{t_{j-1}} + h_n a_{j-1}(\alpha, \gamma) + c_{j-1}(\gamma) \Delta_j J$$

で与えられる. 以下では

$$S := c^{\otimes 2}$$

と表す. ただし任意の行列に対し $x^{\otimes 2} := xx^T$ (T は転置を表す) である. 形式的に局所正規近似 $\Delta_j J \approx N(0, h_n I_r)$ を適用した場合の条件付き尤度の近似

$$(2.3) \quad \mathcal{L}(X_j | X_{t_{j-1}} = x) \approx N(x + h_n a(x, \alpha, \gamma), h_n S(x, \gamma))$$

に基づき, Masuda (2013)では, ドリフト係数とスケール係数内のパラメータの重複がない場合(ドリフト係数が $a(x, \alpha)$ の形)において, 同時正規型疑似尤度

$$(2.4) \quad \mathbb{M}_n(\theta) := -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \log |S_{j-1}(\gamma)| + \frac{1}{h_n} S_{j-1}^{-1}(\gamma) [(\Delta_j X - h a_{j-1}(\theta))^{\otimes 2}] \right\}$$

から得られる疑似最尤推定量の漸近正規性, モーメント収束を導出した. 局所正規近似(2.3)そのものは理論上正しくないが, 条件付き平均・共分散構造に関するモーメント法の一種として推定に利用可能であることが分かる. このような正規型疑似尤度の有用性は時系列モデルにおいてもよく知られているが, Lévy 駆動型 SDE モデルの場合には収束率が真に下がる.

以下では ∂_x で変数 x に関する偏微分を, また $|A|$ で正方行列 A の行列式を表す. また, 多重線形形式 $M := \{M^{(i_1 \dots i_K)} : i_k = 1, \dots, d_k; k = 1, \dots, K\} \in \mathbb{R}^{d_1} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{d_K}$ と d_k 次元ベクトル $u_k = \{u_k^{(j)}\}$ について

$$M[u_1, \dots, u_K] := \sum_{i_1=1}^{d_1} \dots \sum_{i_K=1}^{d_K} M^{(i_1, \dots, i_K)} u_1^{(i_1)} \dots u_K^{(i_K)}$$

と表す.

正規型疑似スコア関数 $\theta \mapsto (\mathbb{G}_{1,n}(\gamma), \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma))$, ただし

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{1,n}(\gamma) &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ \partial_\gamma \log |S_{j-1}(\gamma)| + \frac{1}{h_n} \partial_\gamma (S_{j-1}^{-1}(\gamma)) [(\Delta_j X)^{\otimes 2}] \right\} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left\{ [\text{trace}(S_{j-1}^{-1} \partial_\gamma S_{j-1})(\gamma)]_{i=1}^{p_\gamma} - \frac{1}{h_n} (S_{j-1}^{-1}(\partial_\gamma S_{j-1}) S_{j-1}^{-1})(\gamma) [(\Delta_j X)^{\otimes 2}] \right\}, \\ \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma) &:= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1}(\gamma) [\partial_\alpha a_{j-1}(\theta), \Delta_j X - h_n a_{j-1}(\theta)], \end{aligned}$$

に対して以下で定義される段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_n, \hat{\gamma}_n)$ を提案する.

- (1) $\hat{\gamma}_n$ を $\mathbb{G}_{1,n}(\gamma) = 0$ のランダムな解とする.
- (2) 上記 $\hat{\gamma}_n$ を用いて, $\hat{\alpha}_n$ を $\mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \hat{\gamma}_n) = 0$ のランダムな解とする.

このように定義された $\hat{\theta}_n$ は, 元々の疑似尤度 \mathbb{M}_n による $(p_\alpha + p_\gamma)$ -次元同時最適化を γ と α 個別の最適化へ分断可能とするため, 推定値計算負荷の削減による時間短縮へつながら.

$\mathbb{G}_{1,n}(\gamma)$ は, \mathbb{M}_n の定義でドリフト項を無いものと勝手にみなした場合の γ に関する疑似スコア関数をスケールしたものに相当する. このドリフト非依存正規型疑似尤度は拡散過程の拡散項の推定において今日標準的となったが, そこに至るまでは当該分野において数多の試行錯誤があったと思われる. 近年においては, 計算負荷の観点から疑似尤度関数の同時最適化変

数の削減や初期推定量の構築などの目的にも利用されている．関連する先行研究については，Uchida and Yoshida (2012) や Kamatani and Uchida (2015) とその参考文献を参照されたい．

ドリフト項，拡散項に共通パラメータを持つ拡散過程に上記の段階的推定法を適用すると，収束レートの違い(ドリフトパラメータは $\sqrt{T_n}$ ，拡散パラメータは \sqrt{n}) から，その漸近分散は共通パラメータを持たない場合と同様のものが得られる．しかしながら，Lévy 駆動型 SDE において正規型疑似尤度最尤推定量はドリフトパラメータ，スケールパラメータともに収束レートが $\sqrt{T_n}$ であるため(Masuda, 2013)，状況は本質的に異なる．実際，後述の定理 3.4 によって，疑似スコア関数 $(\mathbb{G}_{1,n}(\gamma), \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma))$ に基づく段階的推定量 $\hat{\theta}_n = (\hat{\alpha}_n, \hat{\gamma}_n)$ は，ドリフト・スケール係数が共通パラメータを持つ場合には $\hat{\alpha}_n$ の漸近分散が変わることが明示的に示される．

3. 主結果

本節の定理 3.4 において，推定量の漸近正規性に加え，推定量依存型統計量の確率・モーメント評価を保証する裾確率評価を与える．

仮定 3.1. ドリフト係数 $a(\cdot, \theta_0)$ とスケール係数 $c(\cdot, \gamma_0)$ は Lipschitz 連続で，各 $i \in \{0, 1, 2\}$ ， $j \in \{0, \dots, 5\}$ ， $k \in \{0, \dots, 5\}$ に対して連続な導関数 $\partial_x^i \partial_\alpha^j \partial_\gamma^k a$ および $\partial_x^i \partial_\gamma^k c$ が存在し，ある非負定数 $C_{(i,j,k)}$ に対して

$$(3.1) \quad \sup_{(x,\alpha,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \bar{\Theta}_\alpha \times \bar{\Theta}_\gamma} \frac{1}{1 + |x|^{C_{(i,j,k)}}} \{|\partial_x^i \partial_\alpha^j \partial_\gamma^k a(x, \alpha, \gamma)| + |\partial_x^i \partial_\gamma^k c(x, \gamma)| + |S^{-1}(x, \gamma)|\} < \infty$$

が成り立つ．

仮定 3.2. ある確率測度 π_0 と正定数 a, C に対して

$$(3.2) \quad \sup_{f: |f| \leq g_q} \left| \int f(y) \{P(X_t \in dy | X_0 = x) - \pi_0(dy)\} \right| \leq C e^{-at} g_q(x), \quad x \in \mathbb{R}, q > 0,$$

が成立する ($g_q(x) := 1 + |x|^q$)．さらに任意の $q > 0$ に対して

$$(3.3) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}_+} E[|X_t|^q] < \infty.$$

仮定 3.2 の下，エルゴード定理より任意の多項式増大関数 f について

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(X_{t_{j-1}}) \xrightarrow{P} \int f(x) \pi_0(dx)$$

が成立する．さらに大数の法則の収束率を加味したモーメント評価を得ることができる(Masuda, 2013, Lemma 4.3)．

関数 $\mathbb{G}^\infty(\theta) := (\mathbb{G}_\alpha^\infty(\alpha), \mathbb{G}_\gamma^\infty(\gamma)) \in \mathbb{R}^p$ および定数行列 $\mathcal{I}_\alpha \in \mathbb{R}_{p_\alpha} \otimes \mathbb{R}_{p_\alpha}$ ， $\mathcal{I}_\gamma \in \mathbb{R}_{p_\gamma} \otimes \mathbb{R}_{p_\gamma}$ を以下で定義する: $u, u' \in \mathbb{R}^{p_\alpha}$ と $v, v' \in \mathbb{R}^{p_\gamma}$ に対して

$$\mathbb{G}_\alpha^\infty(\alpha) := \int \partial_\alpha a(x, \theta_0)^T S^{-1}(x, \gamma_0) [a(x, \alpha_0, \gamma_0) - a(x, \alpha, \gamma_0)] \pi_0(dx),$$

$$\mathbb{G}_\gamma^\infty(\gamma) := \int \partial_\gamma S^{-1}(x, \gamma) [S(x, \gamma_0) - S(x, \gamma)] \pi_0(dx),$$

$$\mathcal{I}_\alpha[u, u'] := - \int (S^{-1}(x, \gamma_0) [\partial_\alpha a(x, \theta_0)[u], \partial_\alpha a(x, \theta_0)[u']]) \pi_0(dx),$$

$$\mathcal{I}_\gamma[v, v'] := \int \text{trace}\{(S^{-1} \partial_\gamma S \otimes S^{-1} \partial_\gamma S)(x, \gamma_0)[v, v']\} \pi_0(dx).$$

モデルの識別可能性・非負定値性のため、以下の仮定を導入する。

仮定 3.3. $\mathcal{I}_\alpha, \mathcal{I}_\gamma$ はそれぞれ逆行列を持ち、さらにある正定数 χ_α, χ_γ が存在して

$$(3.4) \quad |\mathbb{G}_\alpha^\infty(\alpha)| \geq \chi_\alpha |\alpha_0 - \alpha|, \quad |\mathbb{G}_\gamma^\infty(\gamma)| \geq \chi_\gamma |\gamma - \gamma_0|,$$

が任意の (α, γ) に対して成り立つ。

ν_0 で J の Lévy 測度を表すとき、 $i_1, \dots, i_m \in \{1, \dots, r\}$ に対して

$$\nu_{i_1, \dots, i_m}(m) = \int z^{(i_1)} \dots z^{(i_m)} \nu_0(dz)$$

と書く(仮定 2.1 の下、これらは有限値として定まる)。記号

$$\begin{aligned} \Sigma &= \begin{pmatrix} \Sigma_\alpha & \Sigma_{\alpha, \gamma} \\ \text{Sym.} & \Sigma_\gamma \end{pmatrix}, \quad \hat{\Sigma}_n = \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_{\alpha, n} & \hat{\Sigma}_{\alpha, \gamma, n} \\ \text{Sym.} & \hat{\Sigma}_{\gamma, n} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{I} &:= \begin{pmatrix} \mathcal{I}_\alpha & B \\ 0 & \mathcal{I}_\gamma \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathcal{I}}_n := \begin{pmatrix} -\hat{\Sigma}_{\alpha, n} & \hat{B}_n \\ 0 & \hat{\mathcal{I}}_{\gamma, n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を導入する。ここで $u, u' \in \mathbb{R}^{p_\alpha}$ と $v, v' \in \mathbb{R}^{p_\gamma}$ に対して、

$$\begin{aligned} \Sigma_\alpha[u, u'] &:= \int S^{-1}(x, \gamma_0) [\partial_\alpha a(x, \theta_0)[u], \partial_\alpha a(x, \theta_0)[u']] \pi_0(dx), \\ \Sigma_\gamma[v, v'] &:= \int \sum_{s, t, s', t'=1}^r \nu_{s, t, s', t'}(4) \{ \partial_\gamma S^{-1}(x, \gamma_0) [v, c^{(\cdot s)}(x, \gamma_0), c^{(\cdot t)}(x, \gamma_0)] \} \\ &\quad \cdot \{ \partial_\gamma S^{-1}(x, \gamma_0) [v', c^{(\cdot s')}(x, \gamma_0), c^{(\cdot t')}(x, \gamma_0)] \} \pi_0(dx), \\ \Sigma_{\alpha, \gamma}[u, v] &:= \int \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^r \nu_{k_1, k_2, k_3}(3) S^{-1}(x, \gamma_0) [\partial_\alpha a(x, \theta_0)[u], c^{(\cdot k_1)}(x, \gamma_0)] \\ &\quad \cdot \partial_\gamma S^{-1}(x, \gamma_0) [v, c^{(\cdot k_2)}(x, \gamma_0), c^{(\cdot k_3)}(x, \gamma_0)] \pi_0(dx), \\ B[u, v] &:= - \int S^{-1}(x, \gamma_0) [\partial_\alpha a(x, \theta_0)[u], \partial_\gamma a(x, \theta_0)[v]] \pi_0(dx), \\ \hat{\Sigma}_{\alpha, n}[u, u'] &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1}(\hat{\gamma}_n) [\partial_\alpha a_{j-1}(\hat{\theta}_n)[u], \partial_\alpha a_{j-1}(\hat{\theta}_n)[u']], \\ \hat{\Sigma}_{\gamma, n}[v, v'] &:= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n (\partial_\gamma S^{-1} \otimes \partial_\gamma S^{-1})(\hat{\gamma}_n) [(v, (\Delta_j X)^{\otimes 2}), (v', (\Delta_j X)^{\otimes 2})], \\ \hat{\Sigma}_{\alpha, \gamma, n}[u, v] &:= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n (S_{j-1}^{-1} \otimes \partial_\gamma S_{j-1}^{-1})(\hat{\gamma}_n) \\ &\quad \cdot [(\partial_\alpha a_{j-1}(\hat{\theta}_n)[u], \Delta_j X - h_n a_{j-1}(\hat{\theta}_n)), (v, (\Delta_j X)^{\otimes 2})], \\ \hat{B}_n[u, v] &:= - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1}(\hat{\gamma}_n) [\partial_\alpha a_{j-1}(\hat{\theta}_n)[u], \partial_\gamma a_{j-1}(\hat{\theta}_n)[v]], \\ \hat{\mathcal{I}}_{\gamma, n}[v, v'] &:= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \text{trace}\{ (S_{j-1}^{-1} \partial_\gamma S_{j-1} \otimes S_{j-1}^{-1} \partial_\gamma S_{j-1})(\hat{\gamma}_n)[v, v'] \} \end{aligned}$$

である。最後に $\phi(\cdot; 0, V)$ で $N(0, V)$ の密度関数を表す。

定理 3.4. 仮定 2.1, 3.1, 3.2, 3.3, さらに行列 Σ の正定値性の下で以下が成り立つ.

(1) 裾確率評価: 任意の $K > 0$ に対してある定数 $C_K > 0$ が存在して

$$(3.5) \quad \sup_n P(|\sqrt{T_n}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0)| > r) + \sup_n P(|\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)| > r) \leq \frac{C_K}{r^K}, \quad r > 0.$$

(2) 漸近標準正規性:

$$(3.6) \quad \sqrt{T_n} \hat{\Sigma}_n^{-1/2} \hat{\mathcal{L}}_n(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, I_p).$$

(3) モーメント収束: 高々多項式増大度を持つ任意の連続関数 f に対して

$$(3.7) \quad E[f(\sqrt{T_n}(\hat{\theta}_n - \theta_0))] \rightarrow \int f(y)\phi(y; 0, \mathcal{I}^{-1}\Sigma(\mathcal{I}^{-1})^\top)dy.$$

注意 3.5. 定理 3.4 より特に, 正規型疑似尤度を適用する場合の $\Delta_j X$ の微小時間変動においてはスケール係数部分が支配的であることがわかる. すなわち, 元々の α, γ の同時推定量の収束率は共に同じ $\sqrt{T_n}$ でしかもその同時推定量は漸近的に直交する(独立である)とは限らない状況であるにも関わらず, ドリフト係数を完全に無視しても, γ の同時推定と段階的推定は漸近同等となる.

注意 3.6. 行列 B は共通パラメータの存在により生じる有限バイアスの補正的役割を果たしている. 実際, 係数間のパラメータの重複がない場合には $B = 0$ であり, $\hat{\alpha}_n$ と $\hat{\gamma}_n$ の漸近分散は Masuda (2013) のそれと等しく, 推定分離による推定量の分散の変化は生じない. さらにこの時, $\nu(3) = 0$ であれば $\hat{\alpha}_n$ と $\hat{\gamma}_n$ は漸近的に直交する(独立になる).

注意 3.7. $d = r$ ($\dim(X_t) = \dim(J_t)$) の場合には, 駆動ノイズの増分の代替として Euler 残差 $\hat{\delta}_j := c_{j-1}(\hat{\gamma}_n)^{-1}(\Delta_j X - h_n a_{j-1}(\hat{\theta}_n))$ を用いることで, Masuda and Uehara (2017) と同様, 駆動ノイズ J に関するモーメント法を定式化できる. 証明の概略, 推定関数の満たすべき条件等は同論文を参照されたい.

例 3.8. (2.1) の部分族である一次元 SDE モデル

$$(3.8) \quad dX_t = \left(a_0(X_t, \gamma) + \sum_{l=1}^{p_\alpha} \alpha_l a_{1l}(X_t, \gamma) \right) dt + \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p_\gamma} \gamma_k c_k(X_{t-})\right) dJ_t$$

は, 係数の状態変数 X_t について多様な非線形性を表現可能であると同時に, γ および α の推定の各段階が凸最適化になるという点において特殊である. ここで

$$a_0(x, \gamma), \quad a_1(x, \gamma) = (a_{11}(x, \gamma), \dots, a_{1p_\alpha}(x, \gamma)), \quad c(x) = (c_1(x), \dots, c_{p_\gamma}(x)),$$

はその関数形が既知であるとしている. このとき, $\hat{\gamma}_n$ は推定方程式

$$\sum_{j=1}^n \left(1 - \frac{(\Delta_j X)^2}{h_n} \exp(-\gamma \cdot c(X_{j-1})) \right) c(X_{j-1}) = 0$$

の解であり, $\hat{\alpha}_n$ は

$$\hat{\alpha}_n = \frac{1}{h_n} \left(\sum_{j=1}^n \exp(-\hat{\gamma}_n \cdot c(X_{j-1})) a_1^{\otimes 2}(X_{j-1}, \hat{\gamma}_n) \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^n \exp(-\hat{\gamma}_n \cdot c(X_{j-1})) \{ \Delta_j X - h_n a_0(X_{j-1}, \hat{\gamma}_n) \} a_1(X_{j-1}, \hat{\gamma}_n)$$

と陽に与えられる。また、他の第一段階が凸最適化となる scale 係数の関数形の例として、 $c(x, \gamma) = (\sum_{k=1}^{p\gamma} \gamma_k c_k(x))^{-1/2}$ などが挙げられる。

4. 数値実験

先に述べた通り、駆動ノイズは基準化されたものを考えればよい。まず次の SDE モデルを取り扱う。

$$(4.1) \quad dX_t = \left\{ \frac{\gamma X_t}{1 + X_t^2} - \left(\alpha_1 X_t + \frac{\alpha_2}{(1 + X_t^2)^\gamma} \right) \right\} dt + c(X_{t-}, \gamma) dJ_t, \quad X_0 = 0.$$

ここで、スケール係数および各パラメータの真値は以下の 2 種類を想定する。

$$(i) \ c(x, \gamma) = \exp\left(-\frac{\gamma}{1+x^2}\right) \text{ および } \theta_0 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \gamma_0) = (1, 2, 3)$$

$$(ii) \ c(x, \gamma) = -\frac{\gamma}{1+x^2} \text{ および } \theta_0 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \gamma_0) = (1, 2, 1)$$

また、 J_1 の分布は、 $NIG(1, 0, t, 0)$, $NIG(10, 0, 10t, 0)$, $NIG(25/3, 20/3, 9/5t, -12/5t)$ の 3 通りを対象とする。 NIG 分布は IG 分布の正規平均尺度混合により定義される確率分布 (Barndorff-Nielsen, 1998) であり、 $NIG(\alpha, \beta, \delta, \mu)$ の特性関数は、

$$\phi_{X_1}(u) = \exp(-\delta(\sqrt{\alpha^2 - (\beta + iu)^2} - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})) \exp(i\mu u),$$

で与えられる。この表現と Lévy-Kchintchin の公式から、

$$E[X_t] = t \left(\mu + \delta \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right), \text{Var}[X_t] = t\delta \frac{\alpha^2}{(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^3}$$

が得られる。これらを用いて、 $E[J_t] = 0, E[J_t^2] = t$ であることが確認できる。また、Masuda (2013, Proposition 5.4) と係数の形を考慮すれば、(4.1) は仮定 3.2 を満たしていることがわかる。

本数値実験では、各駆動ノイズについて (T_n, h_n, n) を $(10, 0.05, 200)$, $(10, 0.01, 1000)$, $(50, 0.05, 1000)$, $(50, 0.01, 5000)$, $(100, 0.05, 2000)$, $(100, 0.01, 10000)$ の 6 通りに分け、それぞれ 500 回ずつ独立に Euler-丸山法に基づきパスを生成し段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_{1,n}, \hat{\alpha}_{2,n}, \hat{\gamma}_n)$ を計算した。(i) の γ についてはパラメータ空間は $\Theta_\gamma = [0, 10]$ とし、初期値は 2 として最適化を行った(他の推定量は陽に書ける)。また、パスの生成と $\hat{\gamma}_n$ の最適化には R の YUIMA パッケージ (Brouste et al., 2014) を用いた。表 1-3 にそれらの推定結果を示した。

- ドリフトパラメータの推定結果を見ると、表 1-3 全ての場合においてターミナル T_n の増加に応じて推定精度が向上している。また、ターミナル固定の下で観測幅が小さくなくても推定精度の向上はほとんど見られない。これは $\hat{\alpha}_n$ の収束レートが $\sqrt{T_n}$ であること、また注意 3.5 で触れた通り X の微小時間変動においてはスケール項が支配的であることから妥当な結果だと考えられる。

- スケールパラメータの推定精度は表 1-3 を見るとターミナル T_n の増加に応じて良くなっており、これは拡散過程とは異なる傾向であるが、ここでは $\hat{\gamma}_n$ の収束レートが $\sqrt{T_n}$ であることから自然である。観測幅 h_n の観点からは、表 1, 表 3 ではターミナル固定の下で観測幅が小さくなる時、標準偏差の改善が見られない。しかし表 2 では、ターミナル固定の下では観測幅の小さい場合の推定精度が大きい場合の推定精度を優越している。この点は、 $NIG(\delta, 0, \delta, 0)$ は $\delta \rightarrow \infty$ で $N(0, 1)$ に全変動収束するため、ノイズの微小時間増分系列について正規近似が機能していると捉えれば整合的である。

- スケール係数の違いに関して見ると、表 1-3 いずれにおいても (i) より (ii) の推定精度が良

表 1. $\mathcal{L}(J_t) = NIG(1, 0, t, 0)$ の場合の段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_{1,n}, \hat{\alpha}_{2,n}, \hat{\gamma}_n)$ の標準平均・標準標準偏差(括弧内).

| T_n | n | h_n | (i) | | | (ii) | | |
|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| | | | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ |
| 10 | 200 | 0.05 | 0.97 | 2.09 | 2.65 | 1.12 | 2.31 | 0.95 |
| | | | (0.20) | (0.60) | (0.73) | (0.26) | (0.80) | (0.23) |
| 10 | 1000 | 0.01 | 1.08 | 2.06 | 3.04 | 1.14 | 2.38 | 0.97 |
| | | | (0.26) | (0.64) | (1.01) | (0.26) | (0.88) | (0.23) |
| 50 | 1000 | 0.05 | 0.98 | 2.00 | 2.84 | 1.00 | 2.00 | 0.98 |
| | | | (0.14) | (0.51) | (0.56) | (0.11) | (0.39) | (0.11) |
| 50 | 5000 | 0.01 | 1.04 | 2.01 | 3.07 | 1.03 | 2.07 | 1.00 |
| | | | (0.17) | (0.41) | (0.62) | (0.12) | (0.41) | (0.13) |
| 100 | 2000 | 0.05 | 0.98 | 1.99 | 2.88 | 0.98 | 1.94 | 1.00 |
| | | | (0.11) | (0.35) | (0.40) | (0.08) | (0.27) | (0.10) |
| 100 | 10000 | 0.01 | 1.01 | 2.03 | 3.01 | 1.01 | 2.03 | 1.00 |
| | | | (0.12) | (0.34) | (0.44) | (0.08) | (0.27) | (0.10) |

表 2. $\mathcal{L}(J_t) = NIG(10, 0, 10t, 0)$ の場合の段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_{1,n}, \hat{\alpha}_{2,n}, \hat{\gamma}_n)$ の標準平均・標準標準偏差(括弧内).

| T_n | n | h_n | (i) | | | (ii) | | |
|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| | | | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ |
| 10 | 200 | 0.05 | 0.92 | 2.15 | 2.55 | 1.11 | 2.31 | 0.99 |
| | | | (0.16) | (0.55) | (0.22) | (0.27) | (0.87) | (0.06) |
| 10 | 1000 | 0.01 | 0.99 | 2.17 | 2.88 | 1.14 | 2.44 | 1.00 |
| | | | (0.15) | (0.59) | (0.17) | (0.27) | (0.88) | (0.04) |
| 50 | 1000 | 0.05 | 0.97 | 2.07 | 2.88 | 1.00 | 2.00 | 0.99 |
| | | | (0.07) | (0.48) | (0.13) | (0.12) | (0.43) | (0.03) |
| 50 | 5000 | 0.01 | 1.00 | 2.13 | 2.97 | 1.02 | 2.06 | 1.00 |
| | | | (0.07) | (0.53) | (0.09) | (0.12) | (0.42) | (0.02) |
| 100 | 2000 | 0.05 | 0.99 | 1.98 | 2.95 | 0.99 | 1.97 | 0.99 |
| | | | (0.05) | (0.45) | (0.10) | (0.09) | (0.31) | (0.02) |
| 100 | 10000 | 0.01 | 1.00 | 2.08 | 2.99 | 1.01 | 2.04 | 1.00 |
| | | | (0.05) | (0.48) | (0.06) | (0.09) | (0.32) | (0.01) |

いことが確かめられるが、これは当然パラメータの真値に依存して結果は異なる。 $\hat{\gamma}_n$ の漸近分散に着目すると、(ii) の設定(パラメータが線形に含まれている場合)だと漸近分散が不変測度 π_0 の変化に加えて、真値の 2 乗に比例することが容易に確認できる(ケース (i) では $\hat{\gamma}_n$ の漸近分散は $\pi_0(dy)$ を通じてのみ θ_0 に依存する)。ここには記載していないが、実際に (ii) の場合に真値を大きくすると標準偏差が悪化することを確認している。

また、図 1, 2 において $\mathcal{L}(J_1) = NIG(25/3, 20/3, 9/5t, -12/5t)$, $(T_n, n, h_n) = (100, 10000, 0.01)$ の場合(表 3) のヒストグラムおよび標準正規密度関数(実線)を示した。標準正規分布近似は概ねうまくいっている。

次に scale 項に複数のパラメータを持つ例として下記の SDE モデルを想定する:

$$(4.2) \quad dX_t = \left(-\alpha_1 X_t + \frac{\alpha_2}{1 + X_t^2} \right) dt + \exp \left(-\frac{\gamma_0 + \gamma_1 X_t}{2(1 + X_t^2)} \right) dJ_t, \quad X_0 = 0.$$

ここで、 $\mathcal{L}(J_t) = NIG(10, 0, 10t, 0)$, $\Theta_\gamma = [0, 50] \times [0, 50]$, $\theta_0 = (\alpha_{1,0}, \alpha_{2,0}, \gamma_{1,0}, \gamma_{2,0}) = (1, 2, 3, 4)$,

表 3. $\mathcal{L}(J_t) = NIG(25/3, 20/3, 9/5t, -12/5t)$ の場合の段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_{1,n}, \hat{\alpha}_{2,n}, \hat{\gamma}_n)$ の標準平均・標準標準偏差(括弧内).

| T_n | n | h_n | (i) | | | (ii) | | |
|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| | | | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_n$ |
| 10 | 200 | 0.05 | 0.93 (0.13) | 2.13 (0.42) | 2.56 (0.49) | 1.08 (0.24) | 2.26 (0.84) | 0.98 (0.17) |
| 10 | 1000 | 0.01 | 1.03 (0.14) | 2.11 (0.45) | 2.99 (0.67) | 1.13 (0.24) | 2.45 (0.90) | 1.00 (0.17) |
| 50 | 1000 | 0.05 | 0.95 (0.07) | 2.02 (0.33) | 2.79 (0.36) | 0.99 (0.10) | 1.97 (0.37) | 0.99 (0.09) |
| 50 | 5000 | 0.01 | 1.01 (0.08) | 2.06 (0.34) | 3.04 (0.40) | 1.02 (0.10) | 2.08 (0.37) | 1.00 (0.07) |
| 100 | 2000 | 0.05 | 0.96 (0.06) | 1.97 (0.27) | 2.84 (0.28) | 0.98 (0.07) | 1.94 (0.26) | 0.99 (0.05) |
| 100 | 10000 | 0.01 | 1.00 (0.06) | 2.01 (0.29) | 2.98 (0.29) | 1.01 (0.07) | 2.04 (0.28) | 1.00 (0.05) |

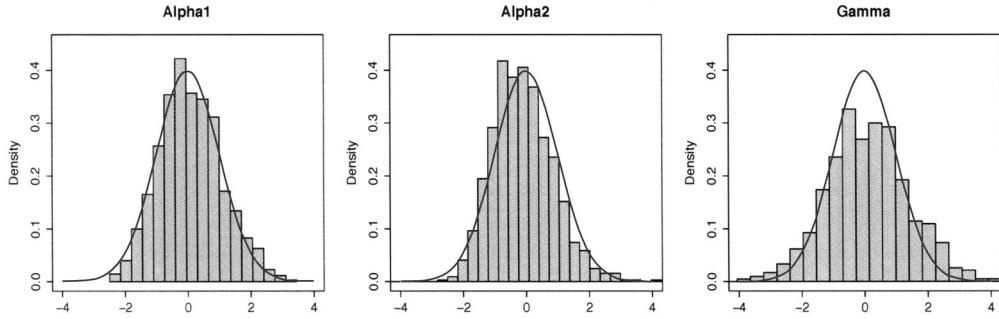


図 1. 標準化(スチューデント化)された段階的推定量 $\hat{\theta}_n$ のヒストグラム (i) の場合).

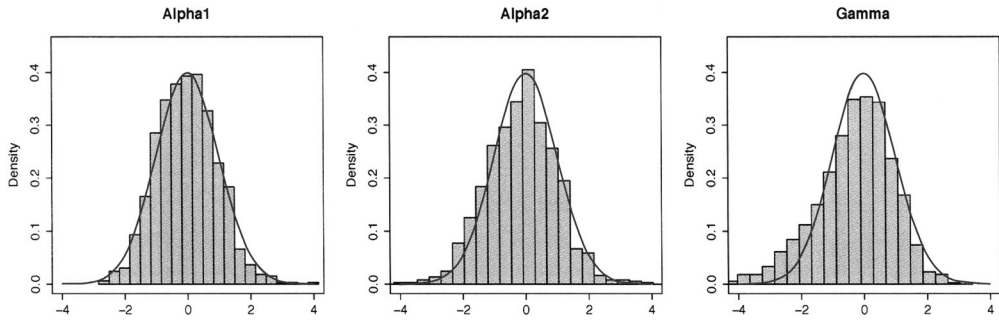


図 2. 標準化(スチューデント化)された段階的推定量 $\hat{\theta}_n$ のヒストグラム (ii) の場合).

初期値をパラメータ空間上の一様乱数とし, その他の設定は先程のものと同様とする. 数値実験結果を表 4 に示す. ここでは比較のため拡散過程 $(\mathcal{L}(J_t) = N(0, t))$ とした場合の実験結果も併記した. 表 4 から, 両モデルともにドリフトの推定精度は比較的良い一方で, scale パラメータの推定値の平均が真値とかけ離れており, 今のモデルでは平均構造を無視したことで生じるバイアスの影響が顕著であると考えられる. この問題に対し, 三段階目の推定として通常の正規

表 4. $\mathcal{L}(J_t) = NIG(10, 0, 10t, 0)$ および $\mathcal{L}(J_t) = N(0, t)$ の場合の段階的推定量 $\hat{\theta}_n := (\hat{\alpha}_{1,n}, \hat{\alpha}_{2,n}, \hat{\gamma}_{1,n}, \hat{\gamma}_{2,n})$ の標準平均・標本標準偏差(括弧内).

| T_n | n | h_n | $NIG(10, 0, 10t, 0)$ | | | | $\mathcal{L}(J_t) = N(0, t)$ | | | |
|-------|-------|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| | | | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_{1,n}$ | $\hat{\gamma}_{2,n}$ | $\hat{\alpha}_{1,n}$ | $\hat{\alpha}_{2,n}$ | $\hat{\gamma}_{1,n}$ | $\hat{\gamma}_{2,n}$ |
| 10 | 200 | 0.05 | 1.02 (0.20) | 2.03 (0.34) | 0.61 (0.42) | 6.48 (0.54) | 1.02 (0.19) | 2.02 (0.33) | 0.64 (0.42) | 6.45 (0.53) |
| 10 | 1000 | 0.01 | 1.04 (0.17) | 2.07 (0.29) | 2.08 (0.37) | 4.94 (0.44) | 1.04 (0.17) | 2.07 (0.29) | 2.08 (0.37) | 4.94 (0.44) |
| 50 | 1000 | 0.05 | 0.97 (0.12) | 1.94 (0.22) | 1.07 (0.40) | 6.02 (0.44) | 0.97 (0.12) | 1.94 (0.22) | 1.12 (0.37) | 5.98 (0.40) |
| 50 | 5000 | 0.01 | 1.01 (0.11) | 2.02 (0.21) | 2.28 (0.31) | 4.74 (0.33) | 1.01 (0.11) | 2.02 (0.21) | 2.32 (0.24) | 4.70 (0.25) |
| 100 | 2000 | 0.05 | 0.96 (0.08) | 1.92 (0.16) | 1.39 (0.38) | 5.70 (0.40) | 0.97 (0.09) | 1.93 (0.17) | 1.41 (0.35) | 5.68 (0.37) |
| 100 | 10000 | 0.01 | 1.00 (0.08) | 2.00 (0.16) | 2.43 (0.29) | 4.58 (0.30) | 1.01 (0.09) | 2.01 (0.17) | 2.46 (0.21) | 4.56 (0.22) |

表 5. $\mathcal{L}(J_t) = NIG(10, 0, 10t, 0)$ および $\mathcal{L}(J_t) = N(0, t)$ の場合の適応型推定法に基づく推定量 $\tilde{\gamma}_n := (\tilde{\gamma}_{1,n}, \tilde{\gamma}_{2,n})$ の標準平均・標本標準偏差(括弧内).

| T_n | n | h_n | $NIG(10, 0, 10t, 0)$ | | $\mathcal{L}(J_t) = N(0, t)$ | |
|-------|-------|-------|------------------------|------------------------|------------------------------|------------------------|
| | | | $\tilde{\gamma}_{1,n}$ | $\tilde{\gamma}_{2,n}$ | $\tilde{\gamma}_{1,n}$ | $\tilde{\gamma}_{2,n}$ |
| 10 | 200 | 0.05 | 3.17 (0.82) | 4.05 (0.89) | 3.29 (0.73) | 3.92 (0.79) |
| 10 | 1000 | 0.01 | 3.06 (0.50) | 3.99 (0.55) | 3.06 (0.50) | 3.99 (0.55) |
| 50 | 1000 | 0.05 | 3.08 (0.65) | 4.12 (0.67) | 3.20 (0.60) | 4.00 (0.63) |
| 50 | 5000 | 0.01 | 3.00 (0.41) | 4.04 (0.42) | 3.06 (0.29) | 3.98 (0.30) |
| 100 | 2000 | 0.05 | 3.05 (0.60) | 4.14 (0.61) | 3.13 (0.55) | 4.06 (0.56) |
| 100 | 10000 | 0.01 | 3.00 (0.36) | 4.04 (0.37) | 3.04 (0.25) | 4.00 (0.26) |

型疑似尤度(2.4)に第二段階で得られた $\hat{\alpha}_n$ をプラグインし, scale パラメータの推定値をアップデートすることを考える. すなわち, γ の推定値を以下の関数の最大点として新たに定義する:

$$\gamma \mapsto -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left\{ \log |S_{j-1}(\gamma)| + \frac{1}{h_n} S_{j-1}^{-1}(\gamma) [(\Delta_j X - h a_{j-1}(\hat{\alpha}_n, \gamma))^{\otimes 2}] \right\}.$$

ここで最適化の初期値には第一段階で得た推定量を用いることとする. このアイデアは拡散過程の適応型推定法(cf. Uchida and Yoshida, 2012)に基づくものである. 観測頻度条件(1.2)の下, 本稿で扱っている Lévy 型 SDE の scale 推定に関しても, 三段階目の推定量の漸近挙動は一段階目の推定量のそれと等しいことが示される. 表 5 にアップデートした推定量 $\tilde{\gamma}_n$ を示した. 拡散過程と同様に, 推定量の平均値に関する改善が見て取れる. 標準偏差は悪化しているが, これは上述の通り漸近分散の改善が理論上見込めないことや, $\hat{\alpha}_n$ の推定値の揺らぎに起因するものであると考えられる.

5. 定理 3.4 の証明

まず本節で用いる記号を述べておく． $E^{j-1}[\cdot]$ で $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ に関する条件付き期待値を表す．任意の $\mathbb{R} \times \Theta$ 上の関数 f について $f_s(\theta) = f(X_s, \theta)$ と定義する (記号 $f_{j-1}(\theta) = f(X_{t_{j-1}}, \theta)$ との重複はあるが, 混乱は生じないであろう)．特に $\theta = \theta_0$ の時は $f_s = f(X_s, \theta_0)$ と略記する．また

$$\begin{aligned} M'(x, \theta) &:= \partial_\alpha a(x, \theta)^T S^{-1}(x, \gamma) \in \mathbb{R}^{p_\alpha} \otimes \mathbb{R}^d, \\ M''(x, \gamma) &:= -\partial_\gamma S^{-1}(x, \gamma) \in \mathbb{R}^{p_\gamma} \otimes \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

とする．ある正定数 C が存在して十分大きな任意の n について $x_n \leq Cy_n$ となる時 $x_n \lesssim y_n$ と書く (C は n に依存せず, 現れるごとに異り得る)．

5.1 裾確率評価 (3.5) の証明

$(\hat{\gamma}_n, \hat{\alpha}_n)$ は, コントラスト関数 $\mathbb{M}_{1,n}(\gamma) := -nh_n |\mathbb{G}_{1,n}(\gamma)|^2$, $\mathbb{M}_{2,n}(\alpha) := -nh_n |\mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \hat{\gamma}_n)|^2$ に対応した M 推定量とみなすことができる．これらに対して以下の確率場を定義する:

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{1,n}(u_1) &:= \exp \left\{ \mathbb{M}_{1,n} \left(\gamma_0 + \frac{1}{\sqrt{T_n}} u_1 \right) - \mathbb{M}_{1,n}(\gamma_0) \right\}, \\ \mathbb{J}_{2,n}(u_2) &:= \exp \left\{ \mathbb{M}_{2,n} \left(\alpha_0 + \frac{1}{\sqrt{T_n}} u_2, \hat{\gamma}_n \right) - \mathbb{M}_{2,n}(\alpha_0, \hat{\gamma}_n) \right\}, \end{aligned}$$

ここで u_1, u_2 はそれぞれ, 集合 $U_{1,n} := \{u_1 \in \mathbb{R}^{p_\gamma} : \gamma_0 + \frac{1}{\sqrt{T_n}} u_1 \in \Theta_\gamma\}$, $U_{2,n} := \{u_2 \in \mathbb{R}^{p_\alpha} : \alpha_0 + \frac{1}{\sqrt{T_n}} u_2 \in \Theta_\alpha\}$ の元とする． $\mathbb{J}_{1,n}(u_1), \mathbb{J}_{2,n}(u_2)$ の定義から,

$$\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0) \in \operatorname{argmax}_{u_1 \in U_{1,n}} \mathbb{J}_{1,n}(u_1), \quad \sqrt{T_n}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0) \in \operatorname{argmax}_{u_2 \in U_{2,n}} \mathbb{J}_{2,n}(u_2)$$

である．ゆえに, 任意の $r > 0$ について

$$P(|\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)| > r) \leq P \left(\sup_{u_1: |u_1| > r, u_1 \in U_{1,n}} \mathbb{J}_{1,n}(u_1) \geq \mathbb{J}_{1,n}(0) \equiv 1 \right)$$

が成り立つ ($\sqrt{T_n}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0)$ についても同様)．すなわち, 本定理の主張は $\mathbb{J}_{1,n}(\cdot), \mathbb{J}_{2,n}(\cdot)$ の確率評価に帰着する．その評価のため, 統計的確率場の多項式型大偏差不等式 (Yoshida, 2011) の理論を援用する．証明は複数のモーメント評価の検証を伴うが, 今モーメントの存在は必要なだけ仮定している状況であり (仮定 2.1, 3.1, 3.2), したがって一般性を失うことなく $d = p_\gamma = p_\alpha = 1$ としてよいので, 以下その場合で見えていく．ここでは疑似尤度 \mathbb{M}_n が混合収束率を持つことにより対応する統計的確率場の直接評価はできないため, 疑似スコア関数から構成される確率場を対象とした多項式型大偏差不等式を適用する．

仮定の下, $\mathbb{G}_{1,n}(\cdot)$ に関しては, および正定数 M, ϵ が存在して

$$(5.1) \quad \begin{aligned} &\max_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ E[|\sqrt{T_n} \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0)|^k] + E \left[\sup_{\gamma \in \Theta_\gamma} |\partial_\gamma^k \mathbb{G}_{1,n}(\gamma)|^k \right] \right\} < \infty \quad (K > 0), \\ &\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ E \left[\sup_{\gamma \in \Theta_\gamma} |\sqrt{T_n}(\mathbb{G}_{1,n}(\gamma) - \mathbb{G}_\gamma^\infty(\gamma))|^{M+\epsilon} \right] + E[|\sqrt{T_n}(\partial_\gamma \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0) - \mathcal{I}_\gamma)|^M] \right\} < \infty \end{aligned}$$

が成り立つことを示せば十分である．任意の $k \in \{1, \dots, 4\}$ に対して

$$\mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0) = \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n \partial_\gamma S_{j-1}^{-1} \{(\Delta_j X)^2 - h_n S_{j-1}\}$$

$$\partial_\gamma^k \mathbb{G}_{1,n}(\gamma) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \partial_\gamma^k \left(\frac{\partial_\gamma c_{j-1}(\gamma)}{c_{j-1}(\gamma)} \right) + \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n \partial_\gamma^{k+1} S_{j-1}^{-1}(\gamma) (\Delta_j X)^2$$

であることに注意すれば、(5.1)は Sobolev の不等式と Masuda and Uehara (2017, Lemma 5.3) の証明内の評価からしたがう。また、

$$\mathbb{G}_{1,n}(\gamma) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial_\gamma c_{j-1}(\gamma)}{c_{j-1}^3(\gamma)} (c_{j-1}^2(\gamma) - c_{j-1}^2) - \frac{2}{T_n} \sum_{j=1}^n \frac{\partial_\gamma c_{j-1}(\gamma)}{c_{j-1}^3(\gamma)} \{(\Delta_j X)^2 - h_n c_{j-1}^2\}$$

であり、Sobolev の不等式と Masuda (2013, Lemma 4.3), Masuda and Uehara (2017, Lemma 5.3) の証明内の評価より、任意の $K > 0$ について

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E \left[\sup_{\gamma \in \Theta_\gamma} |\sqrt{T_n}(\mathbb{G}_{1,n}(\gamma) - \mathbb{G}_\gamma^\infty(\gamma))|^K \right] < \infty$$

を得る。同様にして、

$$\partial_\gamma \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0) = \frac{4}{n} \sum_{j=1}^n \frac{(\partial_\gamma c_{j-1})^2}{c_{j-1}^2} - \frac{2}{T_n} \sum_{j=1}^n \left[\frac{(\partial_\gamma^2 c_{j-1}) c_{j-1} - 3(\partial_\gamma c_{j-1})^2}{c_{j-1}^4} \{(\Delta_j X)^2 - h_n c_{j-1}^2\} \right]$$

なので

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} E[|\sqrt{T_n}(\partial_\gamma \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0) - \mathcal{I}_\gamma)|^K] < \infty$$

を得る。以上より、Masuda (2013, Theorem 3.5) を適用して $\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)$ の裾確率評価

$$\sup_n P(|\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)| > r) \leq \frac{C_K}{r^K}$$

を得る。

Taylor の公式から $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ について

$$\begin{aligned} \sqrt{T_n} \partial_\alpha^k \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \hat{\gamma}_n) &= \sqrt{T_n} \partial_\alpha^k \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0) \\ &\quad + \left(\int_0^1 \partial_\gamma \partial_\alpha^k \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0 + u(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)) du \right) [\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)] \end{aligned}$$

となる。すでに任意の $K > 0$ に対して $\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)$ の L^K -有界性を確保しているため、右辺第 2 項は L^K -有界である。ゆえに $\mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0)$ については、任意の $K > 0$ とある正定数 M, ϵ に対して

$$\begin{aligned} \max_{k \in \{1, 2, 3\}} \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ E[|\sqrt{T_n} \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0)|^K] + E \left[\sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} |\partial_\alpha^k \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0)|^K \right] \right\} &< \infty, \\ \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ E \left[\sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} |\sqrt{T_n}(\mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0) - \mathbb{G}_\alpha^\infty(\alpha))|^{M+\epsilon} \right] + E[|\sqrt{T_n}(\partial_\alpha \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0) - \mathcal{I}_\alpha)|^M] \right\} &< \infty \end{aligned}$$

を示せば十分である。今の場合

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0) &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1} \partial_\alpha a_{j-1}(\alpha, \gamma_0) (\Delta_j X - h_n a_{j-1}) \\ &\quad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1} \partial_\alpha a_{j-1}(\alpha, \gamma_0) (a_{j-1} - a_{j-1}(\alpha, \gamma_0)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^k \mathbb{G}_{2,n}(\alpha, \gamma_0) &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1} \partial_\alpha^{k+1} a_{j-1}(\alpha, \gamma_0) (\Delta_j X - h_n a_{j-1}(\alpha, \gamma_0)) \\ &\quad - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1} \partial_\alpha^{k-1} (\partial_\alpha a_{j-1}(\alpha, \gamma_0))^2 \end{aligned}$$

であることに注意すれば, $\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)$ のときと同様にして裾確率評価

$$\sup_n P(|\sqrt{T_n}(\hat{\alpha}_n - \alpha_0)| > r) \leq \frac{C_K}{r^K}$$

を得る. 以上で (3.5) が示された.

5.2 漸近標準正規性 (3.6) の証明

裾確率評価 (3.5) から $\sqrt{T_n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) = O_p(1)$, 特に一貫性 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta_0$ がしたがうことに注意する. まず

$$(5.2) \quad \mathbb{G}_n(\theta_0) := \left(\mathbb{G}_{2,n}(\alpha_0, \hat{\gamma}_n) + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M'_{j-1}[\partial_\gamma a_{j-1}] \right) [\hat{\gamma}_n - \gamma_0], \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0) \right)$$

について

$$(5.3) \quad \sqrt{T_n} \mathbb{G}_n(\theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \Sigma)$$

を示す. $\sqrt{T_n} \mathbb{G}_n(\theta_0)$ の第一成分について, Taylor 展開から

$$\begin{aligned} \sqrt{T_n} \mathbb{G}_{2,n}(\alpha_0, \hat{\gamma}_n) &= \sqrt{T_n} \mathbb{G}_{2,n}(\theta_0) + \partial_\gamma \mathbb{G}_{2,n}(\theta_0) [\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)] \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{T_n}} \left(\int_0^1 \partial_\gamma^{\otimes 2} \mathbb{G}_{2,n}(\alpha_0, \gamma_0 + u(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)) du \right) [(\sqrt{T_n}(\hat{\gamma}_n - \gamma_0))^{\otimes 2}] \end{aligned}$$

を得る. Sobolev の不等式より $\int_0^1 \partial_\gamma^{\otimes 2} \mathbb{G}_{2,n}(\alpha_0, \gamma_0 + u(\hat{\gamma}_n - \gamma_0)) du = O_p(1)$ が示され, 右辺第三項は $o_p(1)$ となる. また, モーメント条件の下, a の Lipschitz 連続性および Masuda (2013, Lemma 4.5) から $E^{j-1}[\|\int_j (a_s - a_{j-1}) ds\|^2] \lesssim h_n^3$, さらに $\int_j c_{s-} dJ_s$ のマルチンゲール性により, $E^{j-1}[\int_j c_{s-} dJ_s] = 0$, $E^{j-1}[\|\int_j c_{s-} dJ_s\|^2] \lesssim h_n$ が従うため, Genon-Catalot and Jacod (1993, Lemma 9) より

$$\begin{aligned} \partial_\gamma \mathbb{G}_{2,n}(\theta_0) &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n \partial_\gamma M'_{j-1} [\Delta_j X - h_n a_{j-1}] - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M'_{j-1} [\partial_\gamma a_{j-1}] \\ &= o_p(1) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M'_{j-1} [\partial_\gamma a_{j-1}] \end{aligned}$$

が成り立つ. これを踏まえて

$$\begin{aligned} \sqrt{T_n} \mathbb{G}_n(\theta_0) &= (\sqrt{T_n} \mathbb{G}_{2,n}(\theta_0), \sqrt{T_n} \mathbb{G}_{1,n}(\gamma_0)) + o_p(1) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{T_n}} \sum_{j=1}^n M'_{j-1} [c_{j-1} \Delta_j J], \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\sqrt{T_n}} \sum_{j=1}^n \{h_n \text{trace}(S_{j-1}^{-1} \partial_\gamma S_{j-1}) - M''_{j-1} [(c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}]\} \right) + o_p(1) \end{aligned}$$

を得る. 最右辺第一項は各 n について (\mathcal{F}_{t_j}) -マルチンゲール差分になっていることに注意する.

モーメント評価 $E[|J_{h_n}|^q] \lesssim h_n$ により, 最右辺第一項について Lyapunov 条件が容易に示される. 以下 $u \in \mathbb{R}^{p\alpha}$, $v \in \mathbb{R}^{p\gamma}$ を任意に固定し, 二次特性量を計算する.

- $E[(\Delta_j J)^{\otimes 2}] = h_n I_r$ より

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [(M'_{j-1} \otimes M'_{j-1}) [c_{j-1} \Delta_j J, c_{j-1} \Delta_j J]] \right) [u, u'] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n M'_{j-1} [u, c_{j-1}] \times M'_{j-1} [u', c_{j-1}] \\ & \xrightarrow{P} \Sigma_\alpha [u, u']. \end{aligned}$$

- 第二要素について, まず

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [\{M''_{j-1} [h_n S_{j-1} - (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}]\}^{\otimes 2}] \right) [v, v'] \\ &= - \left(\frac{h_n}{n} \sum_{j=1}^n (M''_{j-1} \otimes M''_{j-1}) [S_{j-1}, S_{j-1}] \right) [v, v'] \\ & \quad + \left(\frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [(M''_{j-1} \otimes M''_{j-1}) [(c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}, (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}] \right) [v, v'] \\ &= \left(\frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [(M''_{j-1} \otimes M''_{j-1}) [(c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}, (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}] \right) [v, v'] + o_p(1) \end{aligned}$$

に注意する. Lévy-Khintchin 表現

$$\log E[e^{iu^T J_t}] = t \int_{\mathbb{R}^r} (e^{iu^T z} - 1 - iu^T z) \nu_0(dz)$$

を偏微分して

$$\begin{aligned} E[J_t^{(i_1)} J_t^{(i_2)} J_t^{(i_3)}] &= \nu_{i_1, i_2, i_3}(3)t \\ E[J_t^{(i_1)} J_t^{(i_2)} J_t^{(i_3)} J_t^{(i_4)}] &= \nu_{i_1, i_2, i_3, i_4}(4)t + O(t^2) \end{aligned}$$

を得る. これを適用することで,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [(M''_{j-1} \otimes M''_{j-1}) [(c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}, (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}] \right) [v, v'] \\ &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [M''_{j-1} [v, (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}] \times M''_{j-1} [v', (c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}] \\ &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} \left[\sum_{i_1, i_2=1}^d (M''_{j-1} [v])^{(i_1 i_2)} \left(\sum_{s=1}^r c_{j-1}^{(i_1 s)} (\Delta_j J)^{(s)} \right) \left(\sum_{t=1}^r c_{j-1}^{(i_2 t)} (\Delta_j J)^{(t)} \right) \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{i'_1, i'_2=1}^d (M''_{j-1} [v'])^{(i'_1 i'_2)} \left(\sum_{s'=1}^r c_{j-1}^{(i'_1 s')} (\Delta_j J)^{(s')} \right) \left(\sum_{t'=1}^r c_{j-1}^{(i'_2 t')} (\Delta_j J)^{(t')} \right) \right] \\ &= \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n \left\{ \sum_{s, t, s', t'=1}^r (E^{j-1} [(\Delta_j J)^{(s)} (\Delta_j J)^{(t)} (\Delta_j J)^{(s')} (\Delta_j J)^{(t')}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sum_{i_1, i_2, i'_1, i'_2=1}^d (M''_{j-1}[v])^{(i_1 i_2)} c_{j-1}^{(i_1 s)} c_{j-1}^{(i_2 t)} \times (M''_{j-1}[v'])^{(i'_1 i'_2)} c_{j-1}^{(i'_1 s')} c_{j-1}^{(i'_2 t')} \right) \Bigg\} \\
& = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{s, t, s', t'=1}^r \nu_{s, t, s', t'}(4) \times M''_{j-1}[v, c_{j-1}^{(\cdot s)}, c_{j-1}^{(\cdot t)}] \times M''_{j-1}[v', c_{j-1}^{(\cdot s')}, c_{j-1}^{(\cdot t')}] \right) \\
& \xrightarrow{P} \Sigma_\gamma[v, v'].
\end{aligned}$$

• $E[|J_{h_n}|^2] = O_p(h_n)$ より

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (M'_{j-1}[c_{j-1} \Delta_j J] \otimes \text{trace}(S_{j-1}^{-1} \partial_\gamma S_{j-1}))[u, v] = o_p(1)$$

であり, さらに

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} [(M'_{j-1}[c_{j-1} \Delta_j J] \otimes M''_{j-1}[(c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2}]) [u, v]] \\
& = - \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} \left[\left(\sum_{s=1}^d (M'_{j-1})^{(\cdot s)} (c_{j-1} \Delta_j J)^{(s)} \right) \right. \\
& \quad \left. \otimes \left(\sum_{t, u=1}^d (M''_{j-1})^{(\cdot tu)} ((c_{j-1} \Delta_j J)^{\otimes 2})^{(tu)} \right) [u, v] \right] \\
& = - \frac{1}{T_n} \sum_{j=1}^n E^{j-1} \left[\sum_{s, t, u=1}^d \sum_{k_1, k_2, k_3}^r \Delta_j J^{(k_1)} \Delta_j J^{(k_2)} \Delta_j J^{(k_3)} \right. \\
& \quad \left. \times c_{j-1}^{(sk_1)} c_{j-1}^{(tk_2)} c_{j-1}^{(uk_3)} ((M'_{j-1})^{(\cdot s)} \otimes (M''_{j-1})^{(\cdot tu)}) [u, v] \right] \\
& = - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \sum_{k_1, k_2, k_3}^r \nu_{k_1, k_2, k_3}(3) \sum_{s, t, u=1}^d c_{j-1}^{(sk_1)} c_{j-1}^{(tk_2)} c_{j-1}^{(uk_3)} ((M'_{j-1})^{(\cdot s)} \otimes (M''_{j-1})^{(\cdot tu)}) [u, v] \\
& \xrightarrow{P} \Sigma_{\alpha, \gamma}[u, v].
\end{aligned}$$

以上の下, マルチンゲール中心極限定理 (e.g. Dvoretzky, 1972) から (5.3) がしたがう.

これまでの評価を踏まえて, 行列

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\alpha(\theta) &:= \int (\partial_\alpha M'(x, \theta)[a(x, \theta_0) - a(x, \theta)] - S^{-1}(x, \gamma)[(\partial_\alpha a(x, \theta))^{\otimes 2}]) \pi_0(dx), \\
\mathcal{I}_\gamma(\gamma) &:= \int \text{trace} (2(S^{-1} \partial_\gamma S S^{-1} \partial_\gamma S S^{-1})(x, \gamma) S(x, \gamma_0) - (S^{-1} \partial_\gamma S S^{-1} \partial_\gamma S)(x, \gamma) \\
& \quad + (S^{-1} \partial_\gamma^{\otimes 2} S)(x, \gamma) - (S^{-1} \partial_\gamma^{\otimes 2} S S^{-1})(x, \gamma) S(x, \gamma_0)) \pi_0(dx), \\
B(\theta) &:= - \int \{ \partial_\gamma M'(x, \theta)[a(x, \theta_0) - a(x, \theta)] + S^{-1}(x, \gamma_0)[\partial_\alpha a(x, \theta), \partial_\gamma a(x, \theta)] \} \pi_0(dx)
\end{aligned}$$

に対して一様収束

$$\begin{aligned}
\sup_{\gamma \in \Theta_\gamma} |\partial_\gamma \mathbb{G}_{1, n}(\gamma) - \mathcal{I}_\gamma(\gamma)| &\xrightarrow{P} 0, \\
\sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\alpha \mathbb{G}_{2, n}(\theta) - \mathcal{I}_\alpha(\theta)| &\xrightarrow{P} 0,
\end{aligned}$$

$$\sup_{\theta \in \Theta} |\partial_\gamma \mathbb{G}_{2,n}(\theta) - B(\theta)| \xrightarrow{P} 0$$

が成り立つことがわかる。これと \mathbb{G}_n の定義(5.2), (5.3) より

$$(5.4) \quad \sqrt{T_n} \Sigma^{-1/2} \begin{pmatrix} \partial_\alpha \mathbb{G}_{2,n}(\hat{\theta}_n) & \partial_\gamma \mathbb{G}_{2,n}(\hat{\theta}_n) \\ 0 & \partial_\gamma \mathbb{G}_{1,n}(\hat{\gamma}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\alpha}_n - \alpha_0 \\ \hat{\gamma}_n - \gamma_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, I_p)$$

を得る。例えば $\hat{\Sigma}_{\alpha,n}$ について Taylor 展開を適用すると

$$\hat{\Sigma}_{\alpha,n}[u, u'] = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n S_{j-1}^{-1} [\partial_\alpha a_{j-1}[u], \partial_\alpha a_{j-1}[u']] + o_p \left(\frac{1}{\sqrt{T_n}} \right)$$

が得られる。これにエルゴード定理と Genon-Catalot and Jacod (1993, Lemma 9) を適用すれば $\hat{\Sigma}_{\alpha,n} \xrightarrow{P} \Sigma_\alpha$ が従う。同様にして $\hat{\Sigma}_{\gamma,n} \xrightarrow{P} \Sigma_\gamma$ および $\hat{\Sigma}_{\alpha,\gamma,n} \xrightarrow{P} \Sigma_{\alpha,\gamma}$ も示され, (3.5), (5.4) と Slutsky の補題より (3.6) を得る。

5.3 モーメント収束(3.7)の証明

すでに示した $\hat{\Sigma}_n \xrightarrow{P} \Sigma$ および $\hat{\mathcal{I}}_n \xrightarrow{P} \mathcal{I}$ と (3.6) により,

$$\sqrt{T_n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathcal{I}^{-1} \Sigma (\mathcal{I}^{-1})^\top)$$

が成り立つ。(3.5) から任意の $q > 0$ に対する $\{|\sqrt{T_n}(\hat{\theta}_n - \theta_0)|^q\}_{n \in \mathbb{N}}$ の一様可積分性が成り立つので(3.7)が得られる。

謝 辞

丁寧に査読していただき、多くの改善点の指摘および有益なコメントを下さった査読者に御礼申し上げます。本研究は JST CREST, JSPS 科研費 JP26400204 (増田) の助成を受けたものです。

参 考 文 献

- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998). Processes of normal inverse Gaussian type, *Finance and Stochastics*, **2**(1), 41–68.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S., Kamatani, K., Koike, Y., Masuda, H., Nomura, R., Ogihara, T., Shimizu, Y., Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). The YUIMA project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations, *Journal of Statistical Software*, **57**(4), 1–51.
- Dvoretzky, A. (1972). Asymptotic normality for sums of dependent random variables, *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability (University of California, Berkeley, California, 1970/1971)*, Vol. II: Probability Theory, 513–535, University of California Press, Berkeley, California.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multi-dimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, **29**, 119–151.
- Kamatani, K. and Uchida, M. (2015). Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **18**(2), 177–204.
- Masuda, H. (2013). Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Lévy driven

- SDE observed at high frequency, *Annals of Statistics*, **41**, 1593–1641.
- Masuda, H. and Uehara, Y. (2017). Two-step estimation of ergodic Lévy driven SDE, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **20**(1), 105–137.
- Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, U.K.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2012). Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**(8), 2885–2924.
- Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**(3), 431–479.

On Stepwise Estimation of Lévy Driven Stochastic Differential Equation

Yuma Uehara and Hiroki Masuda

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

We consider estimation of a non-Gaussian Lévy driven stochastic differential equation. Under high-frequency data and exponential ergodicity, we propose the stepwise estimation procedure based on a Gaussian quasi-score function: first we estimate the scale parameter while ignoring the drift coefficient, and then focus on the drift parameter by plugging in the estimated scale parameters, and derive the asymptotic normality and the tail probability estimate of the proposed estimators. This stepwise strategy not only reduces computational cost but may also stabilize estimate accuracy. Unlike the diffusion case, the asymptotic covariance matrix associated with the drift parameter takes a different form when there is a common parameter in the coefficients.

高頻度データに基づく確率微分方程式モデルの ハイブリッド推定

内田 雅之^{1,2,3}

(受付 2016 年 6 月 28 日 ; 改訂 10 月 14 日 ; 採択 10 月 17 日)

要 旨

本論文では、高頻度データを用いた確率微分方程式モデルの未知パラメータにおけるハイブリッド推定について解説する。最適な収束率より遅いベイズ型推定量を初期推定量とした、マルチステップ推定法や適応的最尤型推定法を説明し、それらの推定量の漸近的性質について述べる。エルゴード的拡散過程、非エルゴード的拡散過程、微小拡散過程の 3 種類の拡散モデルを取り扱い、数値実験により提案した推定量の漸近的挙動を考察する。

キーワード：拡散過程，確率微分方程式，最尤型推定量，ハイブリッド推定量，ベイズ型推定量，マルチステップ推定量。

1. はじめに

情報技術の発展により、金融などの時系列データが高頻度に観測可能となり、連続時間確率過程モデルの統計解析の需要が増してきている。特に、確率微分方程式で定義された拡散型確率過程モデルの統計解析は今までに盛んに研究されている (Kutoyants, 1984, 1994, 2004; Prakasa Rao, 1988; Yoshida, 1992a, 1992c; Genon-Catalot and Jacod, 1993; Bibby and Sørensen, 1995; Kessler, 1997; Prakasa Rao, 1999; Iacus, 2008; Sørensen, 2012)。非線形で非定常な連続時間確率過程である拡散過程モデルは表現力豊かな統計モデルである反面、尤度関数を明示的に求めることができない難点があるが、マリアバン解析や疑似尤度解析を援用することにより、統計的漸近理論を展開することが可能である。高頻度データにおける統計的モデリングやモデル選択のための情報量規準についても精力的に研究されていて、実際にデータ解析を行う上での問題点が指摘されている。例えば、エルゴード的拡散過程モデルでは、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータという 2 種類の未知パラメータを推測する必要があるが、疑似尤度関数が複雑で、パラメータ空間が高次元である場合、疑似尤度関数の最大化によって疑似最尤推定量 (または最尤型推定量) を計算することが困難となることが多々ある。最尤型推定量の導出に失敗して、誤った値を算出した場合、情報量規準に基づくモデル選択に影響が出ることも知られている。このことから、理論的に保障された推定量であっても、実際にデータ解析において正しい推定量を算出できるかは別の問題となる。本論文では、確率微分方程式モデルのパラメータを効率よく推定するための統計的手法の一つであるハイブリッド推定法について解説する。

¹ 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

² 大阪大学 数理・データ科学教育研究センター (MMDS)：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

³ CREST

最初に, I.I.D. モデルにおけるハイブリッドマルチステップ(HMS)推定量について考察する. $l_n(\theta)$ は $\theta \in \mathbb{R}$ に関して滑らかな対数尤度関数とする. $q \in (0, 1/2]$, $J = \lceil -\log_2 q \rceil$ とすると, $2^{J-1}q \leq 1/2 < 2^Jq$ となる. 初期推定量 $\hat{\theta}^{(0)}$ は, $M > 0$ に対し,

$$(1.1) \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

を満たすとする. ここで, θ^* はパラメータ θ の真値で, E_{θ^*} は真のモデル(分布) P_{θ^*} の下での期待値を表す. $k = 1, \dots, J$ に対し, k -ステップ推定量 $\hat{\theta}^{(k)}$ を

$$\hat{\theta}^{(k)} = \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]$$

と定義する. ただし, $\partial_{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}$, $\partial_{\theta}^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ で, $\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)}) \neq 0$ とする. θ は1次元パラメータであることに注意する. テイラーの定理より,

$$\begin{aligned} \partial_{\theta} l_n(\theta^*) &= \partial_{\theta} l_n(\hat{\theta}^{(k-1)}) + \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})[\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}] + R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2], \\ R_n &= \int_0^1 (1-t) \partial_{\theta}^3 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)} + t(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})) dt \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} \hat{\theta}^{(k)} &= \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*) - \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})[\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}] - R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2]] \\ &= \hat{\theta}^{(k-1)} - [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*)] + (\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)}) + [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} R_n[(\theta^* - \hat{\theta}^{(k-1)})^2] \end{aligned}$$

となる. ゆえに,

$$\hat{\theta}^{(k)} - \theta^* = -[\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} [\partial_{\theta} l_n(\theta^*)] + [\partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(k-1)})]^{-1} R_n[(\hat{\theta}^{(k-1)} - \theta^*)^2].$$

特に, $2q \leq 1/2$ のとき(初期推定量 $\hat{\theta}^{(0)}$ が \sqrt{n} -一致性が保証されていない場合),

$$n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*) = - \left[\frac{1}{n} \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(0)}) \right]^{-1} \left[\frac{n^{2q}}{n} \partial_{\theta} l_n(\theta^*) \right] + \left[\frac{1}{n} \partial_{\theta}^2 l_n(\hat{\theta}^{(0)}) \right]^{-1} \frac{1}{n} R_n[(n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*))^2].$$

したがって, $\frac{1}{\sqrt{n}} \partial_{\theta} l_n(\theta^*)$ や $\frac{1}{n} R_n$ の可積分性などの正則条件の下で,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\hat{\theta}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

が言える. これを繰り返すことによって, マルチステップ推定量は, ある正則条件の下で

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{2q}(\hat{\theta}^{(1)} - \theta^*)|^M] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^2q}(\hat{\theta}^{(2)} - \theta^*)|^M] < \infty,$$

⋮

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-2}q}(\hat{\theta}^{(J-2)} - \theta^*)|^M] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-1}q}(\hat{\theta}^{(J-1)} - \theta^*)|^M] < \infty,$$

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^{J-1}q}(\hat{\theta}^{(J-1)} - \theta^*)|^M] < \infty \quad \Longrightarrow \quad \sup_n E_{\theta^*} [|\sqrt{n}(\hat{\theta}^{(J)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

となり, J -ステップ推定量 $\hat{\theta}^{(J)}$ は漸近有効になる. 注目すべきことは, (1.1) からわかるように, この初期推定量は最適な収束率をもつことを仮定していないが, マルチステップ推定量は最適な収束率をもつことである. よく知られているワンステップ推定量は初期推定量が \sqrt{n} -一致性をもつことを仮定している. このことから, 初期推定量の条件が緩いマルチステップ推定量がより有用であることがわかる.

(1.1) を満足する初期推定量として, 最尤型推定量とベイズ型推定量を考えることができるが,

最尤型推定量の導出には最適化が伴い、初期値の設定が重要な鍵となる。一方で、ベイズ型推定量は、マルコフチェーンモンテカルロ (MCMC) 法を用いた数値計算により導出される。最尤型推定量の数値計算に比べて、ベイズ型推定量の数値計算は初期値の影響が少ない。本論文では、ベイズ型推定量を初期推定量として用いて、最尤型推定 (マルチステップ推定) により、漸近有効推定量を導出する方法をハイブリッド推定法と呼ぶことにする。特に、初期ベイズ推定量を用いたマルチステップ推定法をハイブリッドマルチステップ推定法と表現することにする。

本論文の構成は次の通りである。第 2 節では、エルゴード的拡散過程について 3 種類のハイブリッドマルチステップ推定量を提案し、モーメント収束性などの漸近的性質について論じる。また、具体例とシミュレーション結果を示す。第 3 節では、非エルゴード的拡散過程についてハイブリッドマルチステップ推定量を提案し、モーメント収束性を含めた漸近的性質について説明する。ハイブリッドマルチステップ推定量の具体例とシミュレーション結果を述べる。第 4 節では、微小拡散過程について、適応的最尤型推定量と適応的ベイズ型推定量について考察し、それらを混合したハイブリッド推定量を提案し、その漸近的性質について概説する。ハイブリッド推定量の具体例と数値実験結果について言及する。

言うまでもなく、推定量の極限分布は統計的漸近理論には必須であり、モデル選択問題における情報量規準を正当化するために、推定量のモーメントの収束性を示すことは不可欠である。幾多の統計的漸近理論の研究があるが、特に Ibragimov and Has'minskii (1981), Kutoyants (1984, 2004), Yoshida (2011) の精読を薦める。拡散過程のモデル選択に関しては、Uchida and Yoshida (2001, 2004a, 2006, 2016), Uchida (2010) を参照。

2. エルゴード的拡散過程

本節は、Kamatani and Uchida (2015) の結果に従って、エルゴード的拡散過程のドリフトパラメータおよびボラティリティパラメータのハイブリッドマルチステップ推定量を導出し、その漸近的性質を考察する。

2.1 モデルと仮定

次の確率微分方程式で定義される d -次元拡散過程を考える。すなわち、

$$(2.1) \quad dX_t = b(X_t, \beta)dt + a(X_t, \alpha)dw_t, \quad t \geq 0, \quad X_0 = x_0.$$

ここで、 w は r -次元標準ウィーナー過程、 x_0 は初期値、 $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta$ で、 Θ_1, Θ_2 はそれぞれ、 $\mathbf{R}^{m_1}, \mathbf{R}^{m_2}$ のコンパクトで凸な部分集合とする。

さらに、 $b: \mathbf{R}^d \times \Theta_1 \rightarrow \mathbf{R}^d, a: \mathbf{R}^d \times \Theta_2 \rightarrow \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$ とする。 $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*)$ は θ の真値とする。 $\theta^* \in \text{Int}(\Theta)$ であり、パラメータ空間は局所的にリプシッツ境界をもつと仮定する。Adams and Fournier (2003) を参照。データ $\mathbf{X}_n = (X_{t_i^n})_{0 \leq i \leq n}$ は離散観測され、 $t_i^n = ih_n$ とする。 p は整数で $p \geq 2$ とする。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $h_n \rightarrow 0, nh_n^p \rightarrow 0$ であるとし、十分大きな n に対し $n^{\epsilon_0} \leq nh_n$ を満たす $\epsilon_0 \in (0, (p-1)/p)$ が存在するとする。 $h_n = 1/n^{1/4}$ の例を考える。 $n \rightarrow \infty$ のとき $nh_n \rightarrow \infty, nh_n^5 \rightarrow 0$ となるが、 nh_n^4 は 0 に収束しない。この場合 $p \geq 5$ となる p を選択する必要がある。

Kutoyants (1984, 2004) に代表されるように連続観測データに基づくエルゴード的拡散過程モデルによる統計推測はこれまで精力的に研究されてきており、離散観測データからのエルゴード的拡散過程モデルによる統計解析についても、今なお多くの研究者によって研究され続けている。Prakasa Rao (1983, 1988), Yoshida (1992c, 2011), Bibby and Sørensen (1995), Kessler (1995, 1997), Gobet (2002), Uchida (2010), Uchida and Yoshida (2001, 2011, 2012, 2014),

Masuda (2013a, 2013b)を参照. また, ジャンプ付拡散過程とレヴィ過程については Shimizu and Yoshida (2006), Shimizu (2006), Ogihara and Yoshida (2011), Masuda (2013a, 2013b)を参照.

特に Kessler (1995, 1997)は, $nh_n^p \rightarrow 0$ の仮定の下での 1 次元拡散過程の疑似対数尤度関数 $U_{p,n}(\alpha, \beta)$ を提案している. $k_0 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, $A(x, \alpha) = aa^*(x, \alpha)$ とおく. ここで $*$ は転置とする. L_θ は拡散過程 (2.1) の生成作用素, すなわち, $L_\theta = \sum_{i=1}^d b_i(x, \beta)\partial_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d A_{ij}(x, \alpha)\partial_i\partial_j$ とする. $\Delta X_i = X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}$, $A_{i-1}(\alpha) = A(X_{t_{i-1}^n}, \alpha)$, $b_{i-1}(\beta) = b(X_{t_{i-1}^n}, \beta)$ とする. \xrightarrow{p} と \xrightarrow{d} はそれぞれ, 確率収束と分布収束を表す. 同じサイズの行列 A, B に対し, $A^{\otimes 2} = AA^*$, $B[A] = \text{tr}(BA^*)$ を定義する. $|\cdot|$ はユークリッド距離を表し, 行列 A に対し, $\|A\|^2 = \text{tr}(AA^*)$ とする.

疑似対数尤度関数 $U_{p,n}(\theta)$ は次のように定義される.

$$U_{p,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j D_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\} [(X_{t_i^n} - r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))^{\otimes 2}] + \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j E_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\}.$$

ここで $(r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))_m = \sum_{j=0}^{k_0} \frac{h_n^j}{j!} L_\theta^j f_m(X_{t_{i-1}^n})$, $f_m(x) = x_m$ である. さらに $j = 0, 1, \dots$ に対し, $D_{i-1}^{(j)}(\theta) := D^{(j)}(X_{t_{i-1}^n}, \theta)$, $E_{i-1}^{(j)}(\theta) := E^{(j)}(X_{t_{i-1}^n}, \theta)$ を次のように定義する. $q, r = 1, \dots, d$ に対し,

$$\begin{aligned} (\Xi^{(l)}(h_n, x, \theta^*))_{qr} &= \sum_{v=0}^l h_n^v \sum_{w=0}^{l-v} \frac{h_n^w}{w!} L_\theta^w \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(v)}(x), \\ \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(0)}(y) &= (y_q - x_q)(y_r - x_r), \\ \bar{g}_{qr,x,\theta}^{(j)}(y) &= -(y_q - x_q) \frac{L_\theta^j f_r(x)}{j!} - (y_r - x_r) \frac{L_\theta^j f_q(x)}{j!} \\ &\quad + \sum_{\substack{r \geq 1, s \geq 1 \\ r+s=j}} \frac{L_\theta^r f_q(x)}{r!} \frac{L_\theta^s f_r(x)}{s!}, \quad (1 \leq j \leq l). \end{aligned}$$

$(\Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))_{qr} = \sum_{j=0}^l h_n^j \gamma_{qr}^{(j)}(x, \theta)$ とおけば,

$$\begin{aligned} \gamma_{qr}^{(0)}(x, \theta) &= 0, \\ \gamma_{qr}^{(1)}(x, \theta) &= A_{qr}(x, \alpha), \\ \gamma_{qr}^{(2)}(x, \theta) &= \frac{1}{2} \left\{ L_\theta A_{qr}(x, \alpha) + \sum_{j=1}^d \{ (\partial_{x_j} b_q(x, \beta)) A_{jr}(x, \alpha) + (\partial_{x_j} b_r(x, \beta)) A_{jq}(x, \alpha) \} \right\} \end{aligned}$$

となる. オーダー l までの $(h_n^{-1} \Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))^{-1}$ のテイラー展開は $\sum_{j=0}^l h_n^j D^{(j)}(x, \theta)$ であり,

$$\begin{aligned} D^{(0)}(x, \theta) &= A^{-1}(x, \alpha), \\ D^{(1)}(x, \theta) &= -A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta) A^{-1}(x, \alpha), \\ D^{(2)}(x, \theta) &= \{ (A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta))^2 - A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(3)}(x, \theta) \} A^{-1}(x, \alpha) \end{aligned}$$

となる. 同様に, オーダー l までの $\log \det(h_n^{-1} \Xi^{(l)}(h_n, x, \theta))$ のテイラー展開は $\sum_{j=0}^l h_n^j E^{(j)}(x, \theta)$ であり,

$$\begin{aligned} E^{(0)}(x, \theta) &= \log \det(A(x, \alpha)), \\ E^{(1)}(x, \theta) &= \text{tr}(A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta)), \\ E^{(2)}(x, \theta) &= \frac{1}{2} \text{tr}(2A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(3)}(x, \theta) - \{ (A^{-1}(x, \alpha) \gamma^{(2)}(x, \theta))^2 \}) \end{aligned}$$

となる．疑似対数尤度関数 $U_{p,n}(\alpha, \beta)$ の詳細については Kessler (1997) や Uchida and Yoshida (2012) を参照．Kessler (1997) は同時最尤型推定量 $\hat{\theta}_{p,n} = (\hat{\alpha}_{p,n}, \hat{\beta}_{p,n})$ を $U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}, \hat{\beta}_{p,n}) = \sup_{\alpha, \beta} U_{p,n}(\alpha, \beta)$ と定義し， $n \rightarrow \infty$ ， $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき，次のような漸近正規性を持つことを示した．

$$(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{p,n} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{p,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{m_1+m_2}(0, \Gamma(\theta^*)^{-1}).$$

ここで，

$$\begin{aligned} \Gamma(\theta^*) &= \begin{pmatrix} (\Gamma_1^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq m_1} & 0 \\ 0 & (\Gamma_2^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq m_2} \end{pmatrix}, \\ \Gamma_1^{ij}(\theta^*) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \text{tr}\{A^{-1}(\partial_{\alpha_i} A)A^{-1}(\partial_{\alpha_j} A)(x, \alpha^*)\} \mu_{\theta^*}(dx), \\ \Gamma_2^{ij}(\theta^*) &= \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_{\beta_i} b(x, \beta^*))^* A(x, \alpha^*)^{-1} \partial_{\beta_j} b(x, \beta^*) \mu_{\theta^*}(dx). \end{aligned}$$

しかし，先述した通り， Θ の次元が大きいとき，同時最尤型推定量の導出は困難となる．Yoshida (1992c) は $nh_n^3 \rightarrow 0$ という仮定での適応的最尤型推定を考察した．適応的最尤型推定とはドリフトパラメータと拡散係数パラメータを別々に推定する有効な方法である． $nh_n^p \rightarrow 0$ については Kessler (1995) を参照．Uchida and Yoshida (2012, 2014) は Ibragimov-Has'minskii-Kutoyants の手法 (Ibragimov and Has'minskii, 1981; Kutoyants, 1984, 2004) と Yoshida (2011) の結果を応用して，モーメント収束性を有する 3 種類の適応的最尤型推定量と適応的バイズ型推定量を提案した． k_0, l_0 は整数で， $k_0 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ ， $l_0 = \lfloor \frac{p-1}{2} \rfloor$ とする．ここで $l_0 \leq k_0 \leq l_0 + 1$ であることに注意する．タイプ I の適応的最尤型推定量 $\hat{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{p,n}^{(k_0)}$ は $k = 1, 2, \dots, k_0$ に対し，

$$\begin{aligned} U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) &= \sup_{\beta \in \Theta_2} U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta), \\ U_{p,n}(\hat{\alpha}_{p,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_{p,n}(\alpha, \hat{\beta}_{p,n}^{(k)}) \end{aligned}$$

で定義される．ここで， $\hat{\alpha}_n^{(0)} = \hat{\alpha}_n^{(0)}$ は $U_n^{(0)}(\hat{\alpha}_n^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha)$ を満たし，

$$U_n^{(0)}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha)[(\Delta X_i)^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}$$

である．

次に適応的バイズ型推定について考える．事前分布 $\pi_1(\alpha)$ ， $\pi_2(\beta)$ は連続で

$$\inf_{\alpha \in \Theta_1} \pi_1(\alpha) > 0, \quad \inf_{\beta \in \Theta_2} \pi_2(\beta) > 0$$

を満たすとする．タイプ I の適応的バイズ型推定量 $\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}$ ， $\tilde{\beta}_{p,n}^{(k_0)}$ は次のように定義される． $k = 1, 2, \dots, l_0$ に対し，

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{\mathbb{H}_{p,n}^{(k-1)}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(k-1)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{\mathbb{H}_{p,n}^{(k-1)}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(k-1)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, & \tilde{\beta}_{p,n}^{(k)} &= \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp\{\tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp\{\tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(k-1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}, \\ \tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp\{U_{p,n}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp\{U_{p,n}(\alpha, \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0)})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, & \tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0+1)} &= \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp\{U_{p,n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp\{U_{p,n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(l_0)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}. \end{aligned}$$

$k_0 = l_0$ のとき， $\tilde{\beta}_{p,n}^{(l_0+1)}$ は不要であることに注意する．さらに $k = 1, 2, \dots, l_0$ に対し

$$\begin{aligned}\mathbb{H}_{p,n}^{(0)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha), \\ \mathbb{H}_{p,n}^{(k)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{n^{1-\frac{2(k+1)}{p}}} U_{p,n}(\alpha, \beta), \\ \tilde{\mathbb{H}}_{p,n}^{(k)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2k}{p-1}}} U_{p,n}(\alpha, \beta).\end{aligned}$$

$p \geq 3$ の場合, Uchida and Yoshida (2014) は $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき, すべての $M > 0$ に対し,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{1}{p}}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty, \quad \sup_n E_{\theta^*} [(nh_n)^{\frac{1}{p-1}}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(1)} - \beta^*)|^M] < \infty$$

が成り立つことを示した. $\tilde{\alpha}_n^{(0)}$, $\tilde{\beta}_n^{(1)}$ の収束率は疑似対数尤度関数 $U_n^{(0)}$, $U_{p,n}$ の正規化に依存することに注意する. Uchida and Yoshida (2012, 2014) は適応的最尤型推定量と適応的ベイズ型推定量が漸近正規性およびモーメント収束性を有することを示した. 最尤型推定量を求めるためには最適化が必要であり, ベイズ型推定量の計算には多大な時間を要することはよく知られている.

次にワンステップ推定量を考えてみる. すべての $M > 0$ に対し $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき

$$(2.2) \quad \sup_{n \in \mathbf{N}} E_{\theta^*} [|(\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(0)} - \beta^*))|^M] < \infty$$

を満たす初期推定量 $\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)} = (\tilde{\alpha}_{p,n}^{(0)}, \tilde{\beta}_{p,n}^{(0)})$ を用いて, ワンステップ推定量 $\tilde{\theta}_{p,n}^{(1)} = (\tilde{\alpha}_{p,n}^{(1)}, \tilde{\beta}_{p,n}^{(1)})$ は

$$\tilde{\theta}_{p,n}^{(1)} = \tilde{\theta}_{p,n}^{(0)} - [\partial_{\theta}^2 U_{p,n}(\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)})]^{-1} \partial_{\theta} U_{p,n}(\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)})$$

で定義される. ある正則条件の下で, $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき

$$E_{\theta^*} [f(\sqrt{n}(\tilde{\alpha}_{p,n}^{(1)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\beta}_{p,n}^{(1)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

がすべての多項式増大な連続関数 f に対して成り立つ. ワンステップ推定量についての詳細は Lehmann (1999)などを参照. しかし確率微分方程式モデルの場合, モーメント条件(2.2)を満たす初期推定量 $\tilde{\theta}_{p,n}^{(0)}$ の導出は容易ではない.

以上の理由から, 本節では, $nh_n^p \rightarrow 0$ という一般的な仮定の下で, 初期推定量の条件を緩めたハイブリッドマルチステップ推定量を提案し, その推定量が漸近正規性とモーメント収束性をもつことを示す.

これ以降に用いる記号を定義しておく. $C_{\uparrow}^{k,l}(\mathbf{R}^d \times \Theta; \mathbf{R}^d)$ は次の条件を満たす関数 f の空間とする: (i) $f(x, \theta)$ は $\mathbf{R}^d \times \Theta$ 上の \mathbf{R}^d -値関数である. (ii) $f(x, \theta)$ は x に関して k 回連続微分可能で, それらの導関数は θ について一様に, x に関する多項式増大である. (iii) $|\mathbf{n}| = 0, 1, \dots, k$ に対し, $\partial^{\mathbf{n}} f(x, \theta)$ は θ に関して l 回連続微分可能である. さらに, $|\nu| = 1, \dots, l$, $|\mathbf{n}| = 0, 1, \dots, k$ に対し $\delta^{\nu} \partial^{\mathbf{n}} f(x, \theta)$ は θ について一様に, x に関する多項式増大である. ここで, $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ はマルチインデックスであり, $m = \dim(\Theta)$, $|\mathbf{n}| = n_1 + \dots + n_d$, $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_m$, $\partial^{\mathbf{n}} = \partial_1^{n_1} \dots \partial_d^{n_d}$, $\partial_i = \partial / \partial x_i$, $\delta^{\nu} = \delta_{\theta_1}^{\nu_1} \dots \delta_{\theta_m}^{\nu_m}$, $\delta_{\theta_i} = \partial / \partial \theta_i$ である. $\mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ は, $f(x)$ が x に関して多項式増大な \mathbf{R}^d 上の \mathbf{R} -値関数となるような可測関数の空間とする.

次を仮定する.

[A1] (i) ある定数 $K > 0$ が存在して, すべての $x, y \in \mathbf{R}^d$ に対し,

$$\sup_{\alpha \in \Theta_1} |a(x, \alpha) - a(y, \alpha)| + \sup_{\beta \in \Theta_2} |b(x, \beta) - b(y, \beta)| \leq K|x - y|.$$

(ii) $\inf_{x, \alpha} \det(A(x, \alpha)) > 0$.

(iii) X_t の不変測度 μ_{θ^*} がただ一つ存在し, $\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)| \mu_{\theta^*}(dx) < \infty$ を満たす任意の $f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ に対し, $T \rightarrow \infty$ のとき,

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(X_t) dt \xrightarrow{P} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \mu_{\theta^*}(dx)$$

が成り立つ.

(iv) すべての $M > 0$ に対して, $\sup_t E[|X_t|^M] < \infty$.

(v) $\int_{\mathbf{R}^d} g(x) \mu_{\theta^*}(dx) = 0$ を満たす任意の $g \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ に対し, ある関数 $G(x)$, $\partial_{x_i} G(x) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ ($i = 1, \dots, d$) が存在し, すべての x に対し,

$$L_{\theta^*} G(x) = -g(x).$$

(vi) $\Gamma(\theta^*)$ は正則.

[A2] $(\mathbf{k}, \mathbf{l}) a \in C_{\uparrow}^{k,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_1; \mathbf{R}^d)$. $b \in C_{\uparrow}^{l,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_2; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r)$.

注 1. [A1] の十分条件については, Uchida and Yoshida (2012) を参照.

2.2 ハイブリッドマルチステップ推定量

初期推定量に対して次を仮定する.

[B] $p \geq 2$, $q = \max\{p, 4\}$ とする.

(i) α の初期推定量 $\hat{\alpha}_n^{(0)}$ は $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき, すべての $M_1 > 0$ に対し

$$n^{\frac{1}{q}} (\hat{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) \rightarrow^P 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{1}{q}} (\hat{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^{M_1}] < \infty$$

を満たす.

(ii) β の初期推定量 $\hat{\beta}_n^{(0)}$ は $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき, すべての $M_2 > 0$ に対し

$$(nh_n)^{\frac{1}{q-1}} (\hat{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) \rightarrow^P 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [(nh_n)^{\frac{1}{q-1}} (\hat{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)|^{M_2}] < \infty$$

を満たす.

[B] を満たす初期推定量は次のように得ることができる.

$$\mathbb{Y}(\alpha) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \left\{ \text{tr}[A(x, \alpha)^{-1} A(x, \alpha^*) - I_d] + \log \frac{\det(A(x, \alpha))}{\det(A(x, \alpha^*))} \right\} \mu_{\theta^*}(dx)$$

とおき, 以下を仮定する.

[A3] すべての $\alpha \in \Theta_1$ に対し, $\mathbb{Y}(\alpha) \leq -\chi |\alpha - \alpha^*|^2$ となる正定数 χ が存在する.

初期最尤型推定量 $\hat{\alpha}_n^{(0)}$ は $U_n^{(0)}(\hat{\alpha}_n^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha)$ で定義される. ここで

$$U_n^{(0)}(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i)^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}.$$

初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}_n^{(0)}$ は

$$\tilde{\alpha}_n^{(0)} = \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{q}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{q}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}$$

で定義される.

命題 1. (Uchida and Yoshida, 2012, 2014) $p \geq 2$, $q = \max\{p, 4\}$ とする. [A1], [A2] (2, 2), [A3] を仮定する. $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき, すべての $M > 0$ に対して, 次が成り立つ.

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty, \\ n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{1}{q}}(\tilde{\alpha}_n^{(0)} - \alpha^*)|^M] < \infty. \end{aligned}$$

さらに,

$$\tilde{\Psi}(\beta) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} A(x, \alpha^*)^{-1} [(b(x, \beta) - b(x, \beta^*))^{\otimes 2}] \mu_{\theta^*}(dx)$$

とし, もう一つの仮定をおく.

[A4] すべての $\beta \in \Theta_2$ に対し, $\tilde{\Psi}(\beta) \leq -\tilde{\chi}|\beta - \beta^*|^2$ となる正定数 $\tilde{\chi}$ が存在する.

注 2. [A3] と [A4] の十分条件については, Fujii and Uchida (2014) の Remark 2 を参照.

初期最尤型推定量 $\tilde{\beta}_n^{(0)}$ は $U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \tilde{\beta}_n^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \beta)$ で定義される. ここで

$$U_n^{(1)}(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i - h_n b_{i-1}(\beta))^{\otimes 2}]\}.$$

初期ベイズ型推定量 $\tilde{\beta}_n^{(0)}$ は

$$\tilde{\beta}_n^{(0)} = \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp \left\{ \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2}{q-1}}} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp \left\{ \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2}{q-1}}} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_n^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}$$

で定義される.

命題 2. (Uchida and Yoshida, 2012, 2014) $p \geq 2$, $q = \max\{p, 4\}$ とする. [A1], [A2] (2, 3), [A3], [A4] を仮定する. $n \rightarrow \infty$, $nh_n^p \rightarrow 0$ のとき, すべての $M > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} (nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)^M] < \infty, \\ (nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*) &\rightarrow^p 0, \quad \sup_n E_{\theta^*} [(nh_n)^{\frac{1}{q-1}}(\tilde{\beta}_n^{(0)} - \beta^*)^M] < \infty \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に, マルチステップ推定量について考える. $p \geq 2$, $q = \max\{p, 4\}$, $k_0 = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, $l_0 = \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor$, $m_0 = \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor$ とする. 疑似対数尤度関数 $U_{p,n}(\theta)$ は, $p = 2$ のとき,

$$U_{2,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) [(\Delta X_i - h_n b_{i-1}(\theta))^{\otimes 2}] + \log \det(A_{i-1}(\alpha))\}$$

で定義される. $p \geq 3$ に対しては,

$$U_{p,n}(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j D_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\} [(X_{t_i^n} - r_{i-1}^{(k_0)}(h_n, \theta))^{\otimes 2}] + \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j E_{i-1}^{(j)}(\theta) \right\}$$

となる.

$$J_{p,n}(\alpha, \beta) := \left\{ \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) \text{ は正則} \right\},$$

$$\begin{aligned} K_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) \text{ は正則} \right\}, \\ \Gamma_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) 1_{J_{p,n}(\alpha, \beta)} + E_{m_1} 1_{K_{p,n}^c(\alpha, \beta)}, \\ \Xi_{p,n}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 U_{p,n}(\alpha, \beta) 1_{K_{p,n}(\alpha, \beta)} + E_{m_2} 1_{K_{p,n}^c(\alpha, \beta)}, \end{aligned}$$

とおく. ここで, E_m は m 次単位行列, $1_K(\omega)$ は $\omega \in K$ のとき $1_K(\omega) = 1$, $\omega \in K^c$ のとき $1_K(\omega) = 0$ であるとする. [B] において $(\hat{\alpha}_{I,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$ とする. タイプ I のマルチステップ推定量 $\hat{\alpha}_{I,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(m_0)}$ は, $k = 1, \dots, l_0$ に対し,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{I,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)} - \Gamma_{p,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{p,n}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}), \\ \hat{\beta}_{I,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)} - \Xi_{p,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{p,n}(\hat{\alpha}_{I,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{I,n}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

で定義される.

次に, タイプ II のマルチステップ推定量を考える. [B] において $(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$ とする. $U_{0,n}(\theta) = U_n^{(0)}(\alpha)$, $U_{1,n}(\theta) = U_n^{(1)}(\theta)$ とする. $p = 2$ ($l_0 = m_0 = 1$) のとき,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{0,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{0,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\ \hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \end{aligned}$$

と定義する. $p = 3$ ($l_0 = m_0 = 1$) のとき,

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\ \hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{3,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{3,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(1)}) \end{aligned}$$

と定義する.

$p \geq 4$ のとき, タイプ II のマルチステップ推定量 $\hat{\alpha}_{II,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(m_0)}$ は, $k = 1, \dots, l_0$ に対し,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{II,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)} - \Gamma_{2k+1,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{2k+1,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}), \\ \hat{\beta}_{II,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)} - \Xi_{2k+2,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{2k+2,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

で定義される. ここで, $U_{2k+2,n}$ は $p = 2k + 2$ のときの $U_{p,n}$ と等しいことに注意する. 例えば, $p = 4$ ($l_0 = m_0 = 1$) のとき,

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{II,n}^{(0)} - \Gamma_{3,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha U_{3,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}), \\ \hat{\beta}_{II,n}^{(1)} &= \hat{\beta}_{II,n}^{(0)} - \Xi_{4,n}^{-1}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta U_{4,n}(\hat{\alpha}_{II,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(0)}). \end{aligned}$$

さらにタイプ III のマルチステップ推定量について考察する. 疑似対数尤度関数は, $k = 1, \dots, l_0$ に対し,

$$\begin{aligned} V_{2k+1,n}(\alpha | \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left\{ h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\alpha) \left[(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})^{\otimes 2} - \sum_{j=2}^{k+1} h_n^j \bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta}) \right] + \log \det A_{i-1}(\alpha) \right\}, \\ V_{2k+2,n}(\beta | \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n h_n^{-1} A_{i-1}^{-1}(\bar{\alpha}) \left[\left(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - h_n b_{i-1}(\beta) - \sum_{j=2}^{k+1} h_n^j \bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta}) \right)^{\otimes 2} \right] \end{aligned}$$

で定義される．ここで， $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}, \bar{\beta})$ である．さらに， $l, m = 1, \dots, d$ に対し， $f_l(x) = x_l$ ， $h_{lm}(x) = (x - X_{t_{l-1}^n})_l(x - X_{t_{m-1}^n})_m$ ， $\bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_{lm} = \frac{1}{j!} L_{\bar{\theta}}^j h_{lm}(X_{t_{i-1}^n})$ ， $\bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_l = \frac{1}{j!} L_{\bar{\theta}}^j f_l(X_{t_{i-1}^n})$ である． $V_{2k+1,n}(\alpha | \bar{\theta})$ は $V_{2k+1,n}(\alpha | \alpha, \beta)$ でないことに注意する．例えば， $\partial_\alpha V_{2k+1,n}(\alpha | \bar{\theta}) \neq \partial_\alpha V_{2k+1,n}(\alpha | \alpha, \beta)$ である．

$k = 1, 2, \dots, l_0$ に対し， $\theta = (\alpha, \beta)$ とし，

$$\begin{aligned} J_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 V_{2k+1,n}(\alpha | \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} \text{ は正則} \right\}, \\ K_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta) &:= \left\{ \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 V_{2k+2,n}(\beta | \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} \text{ は正則} \right\}, \\ \Gamma_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{n} \partial_\alpha^2 V_{2k+1,n}(\alpha | \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} 1_{J_{2k+1,n,III}(\alpha, \beta)} + E_{m_1} 1_{J_{2k+1,n,III}^c(\alpha, \beta)}, \\ \Xi_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta) &:= \frac{1}{nh_n} \partial_\beta^2 V_{2k+2,n}(\beta | \bar{\theta}) \Big|_{\bar{\theta}=\theta} 1_{K_{2k+2,n,III}(\alpha, \beta)} + E_{m_2} 1_{K_{2k+2,n,III}^c(\alpha, \beta)} \end{aligned}$$

とする．[B] において $(\hat{\alpha}_{III,n}^{(0)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(0)}) = (\hat{\alpha}_n^{(0)}, \hat{\beta}_n^{(0)})$ とおく． $p = 2, 3$ のとき， $(\hat{\alpha}_{III,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(m_0)}) = (\hat{\alpha}_{II,n}^{(l_0)}, \hat{\beta}_{II,n}^{(m_0)})$ とおく． $p \geq 4$ のとき，タイプ III のマルチステップ推定量 $\hat{\alpha}_{III,n}^{(l_0)}$ ， $\hat{\beta}_{III,n}^{(m_0)}$ は， $k = 1, \dots, l_0$ に対して

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{III,n}^{(k)} &= \hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)} - \Gamma_{2k+1,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{2k+1,n}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)} | \hat{\alpha}_{III,n}^{(k-1)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}), \\ \hat{\beta}_{III,n}^{(k)} &= \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)} - \Xi_{2k+2,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{2k+2,n}(\hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)} | \hat{\alpha}_{III,n}^{(k)}, \hat{\beta}_{III,n}^{(k-1)}) \end{aligned}$$

で定義される．

補題 1. (Kamatani and Uchida, 2015) $k \in \mathbf{N}$ ， $p \geq 2k + 2$ ， $j = I, II, III$ とする．[A1]，[A2] $(2k_0, 2k_0 + 1)$ ，[B] を仮定する． $n \rightarrow \infty$ ， $nh^p \rightarrow 0$ のとき，すべての $M > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} \sup_n E_{\theta^*} [|n^{\frac{k}{p}} (\hat{\alpha}_{j,n}^{(k-1)} - \alpha^*)|^M] &< \infty, \\ \sup_n E_{\theta^*} [|(nh_n)^{\frac{k-1}{p-1}} (\hat{\beta}_{j,n}^{(k-1)} - \beta^*)|^M] &< \infty. \end{aligned}$$

定理 1. (Kamatani and Uchida, 2015) $p \geq 2$ ， $q = \max\{p, 4\}$ ， $k_0 = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ ， $l_0 = \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor$ ， $m_0 = \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor$ ， $j = I, II, III$ とする．[A1]，[A2] $(2k_0, 2k_0 + 1)$ ，[B] を仮定する．このとき， $n \rightarrow \infty$ ， $nh^p \rightarrow 0$ の下，

$$(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{j,n}^{(l_0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{j,n}^{(m_0)} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{m_1+m_2}(0, \text{diag}[\Gamma_1(\theta^*)^{-1}, \Gamma_2(\theta^*)^{-1}])$$

が成り立つ．さらに，すべての多項式増大な連続関数 f に対して

$$E_{\theta^*} [f(\sqrt{n}(\hat{\alpha}_{j,n}^{(l_0)} - \alpha^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\beta}_{j,n}^{(m_0)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ．

3 種類のマルチステップ推定量は，Uchida and Yoshida (2012) における 3 種類の適応的最尤型推定量にそれぞれ対応している．以下， $p \geq 4$ の場合について説明する．タイプ I のマルチステップ推定量は，最適な疑似尤度関数 $U_{p,n}$ に対して，必要回数だけニュートン・ラフソン法を繰り返して導出される．タイプ II のマルチステップ推定量は，疑似尤度関数の精度を徐々に上げながら $(U_{3,n}, U_{4,n}, \dots, U_{2k+1,n}, U_{2k+2,n})$ ，ニュートン・ラフソン法によって求める．タイプ III のマルチステップ推定量は，タイプ II のマルチステップ推定量で用いた疑似尤度関

数よりもシンプルな疑似尤度関数 ($V_{3,n}, V_{4,n}, \dots, V_{2k+1,n}, V_{2k+2,n}$) を用いて導出される。理論的観点から言えば 3 種類のマルチステップ推定量は同じ漸近的性質を有するが、計算時間はタイプ I > タイプ II > タイプ III となっており、タイプ III のマルチステップ推定量の計算時間が一番短い。一方、タイプ I やタイプ II のマルチステップ推定量はタイプ III のマルチステップ推定量よりも精密な疑似尤度関数を使用しているため、離散観測 (サンプルサイズが有限) におけるタイプ I やタイプ II のマルチステップ推定量のパフォーマンスはタイプ III のマルチステップ推定量と同等もしくはそれよりも良いことが期待される。

2.3 例とシミュレーション結果

1 次元拡散過程

$$(2.3) \quad dX_t = \left(\beta_1 - \beta_2 X_t - \frac{\beta_3}{\sqrt{1 + \beta_2 X_t^2}} \right) dt + \frac{\alpha_2 + X_t^2}{1 + \alpha_1 X_t^2} dw_t, \quad X_0 = 2,$$

を考える。ここで、 $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ は未知パラメータ、パラメータの真値は $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = (0.3, 0.5, 3.0, 0.5, 2.0)$ 、パラメータ空間は $[0.1, 50]^5$ である。

$p = 4$ すなわち $l_0 = 1, m_0 = 1$ とする。バランス条件は $nh_n^4 \rightarrow 0$ となることに注意する。 $\hat{\theta}_{B,III} = (\hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(1)}) := (\hat{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \hat{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,1}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,3}^{(1)})$ は、ベイズ型推定量を初期推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量で、次のように表される。

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{III}^{(0)} &= \frac{\int_{\Theta_1} \alpha \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_1} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p}}} U_n^{(0)}(\alpha) \right\} \pi_1(\alpha) d\alpha} \quad (\text{初期ベイズ型推定量}), \\ \hat{\beta}_{III}^{(0)} &= \frac{\int_{\Theta_2} \beta \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p-1}}} U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_2} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-\frac{2}{p-1}}} U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \right\} \pi_2(\beta) d\beta} \quad (\text{初期ベイズ型推定量}), \\ \hat{\alpha}_{III}^{(1)} &= \hat{\alpha}_{III}^{(0)} - \Gamma_{3,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{3,n}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)} | \hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}), \\ \hat{\beta}_{III}^{(1)} &= \hat{\beta}_{III}^{(0)} - \Xi_{4,n,III}^{-1}(\hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{4,n}(\hat{\beta}_{III}^{(0)} | \hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}). \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_{M,III} = (\tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(1)}) := (\tilde{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,2}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III,3}^{(1)})$ は、最尤型推定量を初期推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量で、次のように表される。

$$\begin{aligned} U_n^{(0)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha) \quad (\text{初期最尤型推定量}), \\ U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) &= \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \quad (\text{初期最尤型推定量}), \\ \tilde{\alpha}_{III}^{(1)} &= \tilde{\alpha}_{III}^{(0)} - \Gamma_{3,n,III}^{-1}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{n} \partial_\alpha V_{3,n}(\tilde{\alpha}_{III}^{(0)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(0)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}), \\ \tilde{\beta}_{III}^{(1)} &= \tilde{\beta}_{III}^{(0)} - \Xi_{4,n,III}^{-1}(\tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}) \frac{1}{nh_n} \partial_\beta V_{4,n}(\tilde{\beta}_{III}^{(0)} | \tilde{\alpha}_{III}^{(1)}, \tilde{\beta}_{III}^{(0)}). \end{aligned}$$

$\hat{\theta}_{A,III} = (\hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(1)}) := (\hat{\alpha}_{III,1}^{(1)}, \hat{\alpha}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,1}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,2}^{(1)}, \hat{\beta}_{III,3}^{(1)})$ は、タイプ III の適応的最尤型推定量で、次のように表される。

$$U_n^{(0)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} U_n^{(0)}(\alpha) \quad (\text{初期最尤型推定量}),$$

表 1. 推定量の平均(上段)と標準偏差(下段) $T = 250, h = 1/390, p = 4$.

| | β_1 | β_2 | β_3 | α_1 | α_2 |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 真値 | 3.0 | 0.5 | 2.0 | 0.3 | 0.5 |
| $\hat{\theta}_{B,III}$ | 3.06545 (0.70126) | 0.51941 (0.09644) | 2.04012 (0.77021) | 0.29996 (0.00096) | 0.49760 (0.00488) |
| $\hat{\theta}_{M,III}$ | 2.97984 (0.79250) | 0.51040 (0.10396) | 1.95829 (0.86374) | 0.30001 (0.00101) | 0.49994 (0.00457) |
| $\hat{\theta}_{A,III}$ | 2.97497 (0.80149) | 0.50987 (0.10452) | 1.95348 (0.87185) | 0.30002 (0.00101) | 0.49998 (0.00457) |

$$U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} U_n^{(1)}(\hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \beta) \quad (\text{初期最尤型推定量}),$$

$$V_{3,n}(\hat{\alpha}_{III}^{(1)} | \hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\alpha \in \Theta_1} V_{3,n}(\alpha | \hat{\alpha}_{III}^{(0)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}),$$

$$V_{4,n}(\hat{\beta}_{III}^{(1)} | \hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}) = \sup_{\beta \in \Theta_2} V_{4,n}(\beta | \hat{\alpha}_{III}^{(1)}, \hat{\beta}_{III}^{(0)}).$$

初期推定量をベイズ型推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量 $\hat{\theta}_{B,III}^{(1)}$, 初期推定量を最尤型推定量としたタイプ III のマルチステップ推定量 $\hat{\theta}_{M,III}^{(1)}$, そして, タイプ III の適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{A,III}^{(1)}$ の漸近挙動を検証する. シミュレーションでは, $T = 250$, $h_n = 1/390$ (1年の取引日数が250日で1日の取引時間が390分)と設定し, 真のモデルから1000本の独立なサンプルパスを発生させた. 実行にはR (R Development Core Team 2013)のパッケージ Yuima (Brouste et al., 2014)と組み関数 `optim()` を使い, 初期ベイズ型推定量の計算のために Kamatani (2014)が提案したマルコフ連鎖モンテカルロ (MCMC) 法のアルゴリズムを用いた.

MCMC 法におけるバーンイン回数 B_i は 10^3 とし, マルコフチェーンの生成数 M を 10^4 とした. 推定値の平均と標準偏差を表 1 に示す.

初期最尤型推定量とタイプ III の適応的最尤型推定量は `optim()` を用いて計算した. その際に必要となる初期値は, 真値に近いものを選び, $\bar{\theta} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \bar{\beta}_3) = (0.5, 1.0, 4.0, 1.0, 2.0)$ とした.

3つの推定量はすべて, 理論上は定理 1 と同等の漸近的性質をもつが, 数値計算上では違いが生じる. まず, $\hat{\theta}_{B,III}$ および $\hat{\theta}_{M,III}$ の計算は, 関数 $V_{3,n}$ および $V_{4,n}$ の最適化を必要としない. これは数値計算の上では魅力的である. ただし, 初期ベイズ推定量は MCMC 法により計算されるために $\hat{\theta}_{B,III}$ の導出には時間を要する. 一方, $\hat{\theta}_{M,III}$ と $\hat{\theta}_{A,III}$ の計算に要した平均 CPU 時間は 9.772 秒と 14.802 秒にすぎない (PC Intel 2.8 GHz を使用). これはニュートン・ラフソン法および最適化 `optim()` が高速であることを意味する. 初期ベイズ推定量は正規化項 $n^{1-\frac{2}{p}}$, $(nh_n)^{1-\frac{2}{p-1}}$ により頑健である. 正規化項はモンテカルロの用語では温度と言われており, 計算速度を上げるために使われる. (Robert and Casella, 2004 を参照). これは, 純粋な理論的結果とモンテカルロシミュレーション技法の興味深い関係を表していると言える.

表 1 の結果が示すように, 3種類の推定量には著しい違いは見られないが, これは, 最適化のための初期値を真値に近いものにしたためである. $\hat{\theta}_{M,III}$ と $\hat{\theta}_{A,III}$ に使われる初期最尤型推定量の導出には, 最適化が必要になるのでそれに伴い初期値の選択が要求される. 一方, ベイズ型推定量の計算は初期値の影響を受けづらいので, 最適化が困難な場合には $\hat{\theta}_{B,III}$ の方が好ましいと言える. 初期値の効果を示すため, 次の拡散過程を考える.

$$(2.4) \quad dX_t = (\beta_1 - \beta_2 X_t - 2 \sin(\beta_3 X_t)) dt + \frac{\alpha_2 + X_t^2}{1 + \alpha_1 X_t^2} dw_t, \quad X_0 = 2,$$

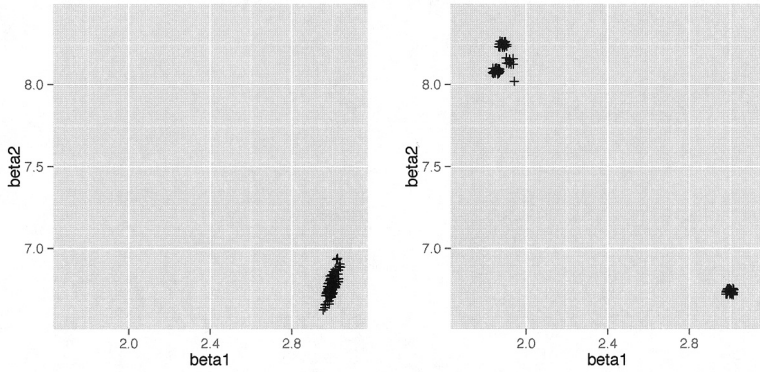


図 1. β_1, β_2 の初期ベイズ型推定量(左)と初期最尤型推定量(右). 異なる初期値を用い, 最適化には `optim()` を使用した. 右図には 5 つのクラスターがあり, 下から上に向かってそれぞれ 36, 1, 32, 11, 20 の点が集まっている. 真値は $(\beta_1, \beta_2) = (3.0, 7.0)$ で, 下の方にあるクラスターは真値に近いところに出てきている. 描画の重なりを避けるために, `ggplot2` の関数 `position_jitter(w=0.02, h=0.02)` を用いて実際の値の周囲に点を分散させている.

ここで, $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3)$ の真値は, $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*, \beta_3^*) = (0.3, 0.5, 3.0, 7.0, 5.0)$ である. T, h, p およびパラメータ空間は前述のモデルと同じとする. 図 1 は一回の実験で得られた β_1 (横軸), β_2 (縦軸) の推定値の散布図である. 左図は初期ベイズ型推定量, 右図は初期最尤型推定量である. いずれもパラメータ空間から一様に選択された 100 個の異なる初期値から計算されている. MCMC 法においてはバーンイン 10^4 回, 反復 10^5 回とした. 右図の左上隅の 4 つのクラスターには 64% の点が存在しており局所最大になっている. 左図では真値の近傍でただ一つのクラスターが存在するのみである.

この初期ベイズ型推定量と初期最尤型推定量を用いて, $\hat{\theta}_{B,III}, \hat{\theta}_{M,III}, \hat{\theta}_{A,III}$ を計算する(図 2). $\hat{\theta}_{A,III}$ (左下) は約 50% の点が真値の近くに集まっている. $\hat{\theta}_{A,III}$ は $\hat{\theta}_{M,III}$ (右上) よりも安定しており, $\hat{\theta}_{B,III}$ (左上) は最も安定していることが分かる.

3. 非エルゴード的拡散過程

本節は, 非エルゴード的拡散過程を含む一般の確率回帰モデルのボラティリティパラメータのハイブリッドマルチステップ推定量の構成およびその漸近的性質について解説する. 詳細は, Kamatani et al. (2016) を参照.

3.1 モデルと仮定

次の確率積分方程式で表される確率回帰モデルのボラティリティのパラメータ推定を考える.

$$(3.1) \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma(X_s, \theta) dw_s, \quad t \in [0, T].$$

ここで w は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, P)$ 上の r 次元標準ウィーナー過程, b, X はそれぞれ $\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^d$ 上の値をとる発展的的可測過程, Y_0 は \mathbb{R}^m -値の初期状態, σ は $\mathbb{R}^d \times \Theta$ 上で定義される $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^r$ 値関数, θ^* を θ の真値とする. Θ は局所リプシッツ境界をもつ \mathbb{R}^p での有界領域とする. \mathcal{F} -安定分布収束は $\rightarrow^{d_s(\mathcal{F})}$ と表記する. \mathcal{F} -安定分布収束については, Jacod and Shiryaev (2003) の

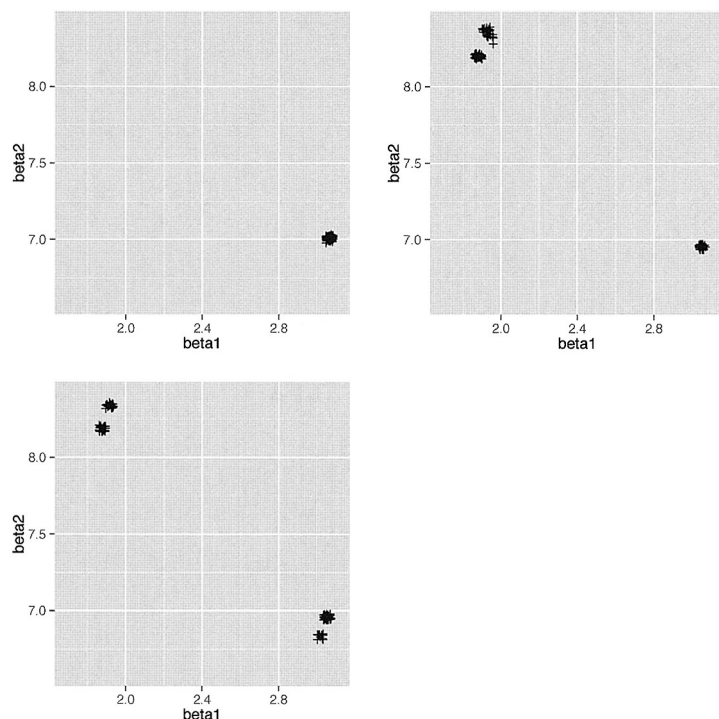


図 2. β_1, β_2 の 3 つの推定量, $\hat{\theta}_{B,III}$ (左上), $\hat{\theta}_{M,III}$ (右上), $\hat{\theta}_{A,III}$ (下) の散布図. 図 1 に示した初期ベイズ型推定量と初期最尤型推定量を用いている. 右上図には下から上に向かってそれぞれ 36, 32, 32 の点が集まった 3 つのクラスターがあり, 下図には 12, 36, 32, 20 個の点が集まった 4 つのクラスターがある. 実際の値の周囲に点を描画させている.

VIII 章を参照. $S(x, \theta) = \sigma(x, \theta)^{\otimes 2}$, $\Delta_k Y = Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$ とおく. σ は $\mathbb{R}^d \times \bar{\Theta}$ 上の連続関数に拡張可能とし, それを σ と表記する. $f \in L^p(P)$ と $p > 1$ に対し, $\|f\|_p = (E\|f\|^p)^{1/p}$ とする. データ $\mathbf{Z}_n = (X_{t_k}, Y_{t_k})_{0 \leq k \leq n}$, $t_k = kh$, $h = h_n = T/n$ は離散観測される. b は未知であることに注意する. 極限は $n \rightarrow \infty$ を考える. すなわち \mathbf{Z}_n は高頻度データである.

離散観測に基づく非エルゴード的拡散型確率過程モデルによる統計推測は多くの研究者によって発展してきている. 例えば, Dohnal (1987), Florens-Zmirou (1989), Genon-Catalot and Jacod (1993, 1994), Gobet (2001) を参照. Uchida and Yoshida (2013) は確率回帰モデルの最尤型推定量もベイズ型推定量も漸近混合正規性とモーメント収束をもつことを示した. しかし, 最尤型推定量の導出は数値最適化を必要とし, 適切な初期値の選択が重要であり, ベイズ型推定量の計算には多大な時間を要する. 先述した通り, ワンステップ推定量は非常に有効であるが, \sqrt{n} -一致性をもつ初期推定量を見つけることは容易ではないため, 非エルゴード的拡散過程のワンステップ推定量の導出は困難になる.

本節では, 先述した Kamatani and Uchida (2015) の手法に基づいて, 初期ベイズ型推定量を用いた確率回帰モデルのハイブリッドマルチステップ推定量を提案し, マルチステップ推定量が漸近混合正規性とモーメント収束性をもつことを示す.

次を仮定する.

[C1] (i) すべての $p > 1$ に対して, $\sup_{0 \leq t \leq T} \|b_t\|_p < \infty$.

(ii) $\inf_{x, \theta} \det S(x, \theta) > 0$, $\sigma \in C_{\uparrow}^{2,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta; \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^r)$.

[C2] X は次のように表される:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{b}_s ds + \int_0^t a_s dw_s + \int_0^t \tilde{a}_s d\tilde{w}_s.$$

ここで, \tilde{b} , a , \tilde{a} は, それぞれ \mathbb{R}^d , $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^{r_1}$ -値の発展的可測過程で, すべての $p > 1$ に対して

$$\|X_0\|_p + \sup_{t \in [0, T]} (\|\tilde{b}_t\|_p + \|a_t\|_p + \|\tilde{a}_t\|_p) < \infty$$

を満たす. \tilde{w} は w と独立な r_1 次元ウィーナー過程である.

疑似対数尤度関数 $\mathbb{H}_n(\theta)$ は

$$\mathbb{H}_n(\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \{\log \det S(X_{t_{k-1}}, \theta) + h^{-1} S^{-1}(X_{t_{k-1}}, \theta) [(\Delta_k Y)^{\otimes 2}]\}$$

で与えられる. $\mathbb{Y}_n(\theta) = \frac{1}{n} \{\mathbb{H}_n(\theta) - \mathbb{H}_n(\theta^*)\}$ とおくと, 仮定 [C1] [C2] の下で, $\theta \in \Theta$ について一様に,

$$\mathbb{Y}(\theta) = -\frac{1}{2T} \int_0^T \left\{ \log \left(\frac{\det S(X_t, \theta)}{\det S(X_t, \theta^*)} \right) + \text{tr}(S^{-1}(X_t, \theta) S(X_t, \theta^*) - I_d) \right\} dt$$

へ確率収束する.

$$\chi_0 = \inf_{\theta \neq \theta^*} \frac{-\mathbb{Y}(\theta)}{|\theta - \theta^*|^2}$$

とおく. 次はインデックス χ_0 の非退化性に関する条件である.

[C3] すべての $L > 0$ に対して, $c_L > 0$ が存在して, すべての $r > 0$ に対し, $P[\chi_0 \leq r^{-1}] \leq \frac{c_L}{rL}$ が成り立つ.

[C3] は $1/\chi_0$ がすべてのオーダーで有限なモーメントをもつことと同等であることに注意する.

[C3] の十分条件については Uchida and Yoshida (2013) を参照.

3.2 ハイブリッドマルチステップ推定量

初期推定量についての仮定をおく.

[D] $q \in (0, 1/2]$ とする. θ の初期推定量 $\hat{\theta}_n^{(0)}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき, すべての $M_1 > 0$ に対し,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^q (\hat{\theta}_n^{(0)} - \theta^*)|^{M_1}] < \infty$$

を満たす.

[D] を満たす初期推定量は次のように求められる. $q \in (0, 1/2]$ とする. 事前分布 $\pi: \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ に対する初期ベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)}$ は

$$\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} = \frac{\int_{\Theta} \theta \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta) \right\} \pi(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta) \right\} \pi(\theta) d\theta}$$

で定義される. π は連続で $0 < \inf_{\theta \in \Theta} \pi(\theta) \leq \sup_{\theta \in \Theta} \pi(\theta) < \infty$ であるとする.

$q = 0.5$ の場合が通常のベイズ型推定量である. $q < 0.5$ のときのベイズ型推定量を初期推定量としたマルチステップ推定量の方が通常のベイズ型推定量や通常のベイズ型推定量を初期推定量としたマルチステップ推定量よりもパフォーマンスが良くなる数値シミュレーションの結果を 3.3 節で述べる.

$\mathbb{U}_{q,n} = \{u \in \mathbb{R}^p; \theta^* + \frac{1}{n^q}u \in \Theta\}$, $\mathbb{V}_{q,n}(r) = \{u \in \mathbb{U}_{q,n}; r \leq |u|\}$ とおく. $\mathbb{U}_{q,n}$ 上の統計的確率場 $\mathbb{Z}_{q,n}$ を

$$(3.2) \quad \mathbb{Z}_{q,n}(u) = \exp \left\{ \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n \left(\theta^* + \frac{1}{n^q} u \right) - \frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta^*) \right\}$$

と定義する.

命題 3. (Uchida and Yoshida, 2013) $q \in (0, 1/2]$ とする. [C1], [C2], [C3] を仮定する. このとき, すべての $L > 0$ に対して, 正定数 C_L が存在して, すべての $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$ について

$$P \left[\sup_{u \in \mathbb{V}_{q,n}(r)} \mathbb{Z}_{q,n}(u) \geq e^{-r} \right] \leq \frac{C_L}{r^L}$$

が成り立つ.

命題 4. (Kamatani et al., 2016) $q \in (0, 1/2]$ とおく. [C1], [C2], [C3] を仮定する. このとき, $n \rightarrow \infty$ の下で, すべての $M > 0$ に対して,

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty.$$

マルチステップ推定量について考察する.

$$\Gamma_n(\theta) := \frac{1}{n} \partial_{\theta}^2 \mathbb{H}_n(\theta),$$

$$K_n(\theta) := \{\Gamma_n(\theta) \text{ は正則}\},$$

$$\bar{\Gamma}_n(\theta) := \Gamma_n(\theta) 1_{K_n(\theta)} + E_p 1_{K_n^c(\theta)},$$

とおく. ここで E_p は p 次元単位行列である.

$q \in (0, 1/2]$ に対し, $J = [-\log_2 q]$ とおく. マルチステップ推定量 $\hat{\theta}_n^{(j)}$ は, $k = 1, \dots, J$ に対し

$$\hat{\theta}_n^{(k)} = \hat{\theta}_n^{(k-1)} - \bar{\Gamma}_n^{-1}(\hat{\theta}_n^{(k-1)}) \frac{1}{n} \partial_{\theta} \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n^{(k-1)})$$

で定義される.

補題 2. (Kamatani et al., 2016) $q \in (0, 1/2]$, $J = [-\log_2 q]$ とおく. [C1], [C2], [C3], [D] を仮定する. このとき, $k = 0, 1, \dots, J-1$ に対し, すべての $M > 0$ について

$$\sup_n E_{\theta^*} [|n^{2^k q}(\hat{\theta}_n^{(k)} - \theta^*)|^M] < \infty$$

が成り立つ.

$\Gamma(\theta^*) = (\Gamma^{ij}(\theta^*))_{i,j=1,\dots,p}$, ただし

$$\Gamma^{ij}(\theta^*) = \frac{1}{2T} \int_0^T \text{tr}((\partial_{\theta_i} S) S^{-1} (\partial_{\theta_j} S) S^{-1} (X_t, \theta^*)) dt$$

とし, ζ は $\Gamma(\theta^*)$ とは独立な p 次元標準正規確率変数とする.

定理 2. (Kamatani et al., 2016) $q \in (0, 1/2]$, $J = [-\log_2 q]$ とおく. [C1], [C2], [C3], [D] を仮

定する．このとき， $n \rightarrow \infty$ の下，

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(J)} - \theta^*) \rightarrow^{d_s(\mathcal{F})} \Gamma(\theta^*)^{-1/2} \zeta$$

が成り立つ．さらに，高々多項式増大のすべての連続関数 f に対して，

$$E[f(\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^{(J)} - \theta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\Gamma(\theta^*)^{-1/2} \zeta)]$$

が成り立つ．

3.3 例とシミュレーション結果

次式で定義される 1 次元拡散過程を考える．

$$\begin{cases} dX_t = -(X_t - 1)dt + [\theta_1 + \theta_2\{1 + \sin(\theta_3 X_t)\}]dw_t, & t \in [0, 1], \\ X_0 = 1. \end{cases}$$

ここで，真値は $\theta^* = (1, 4, 8)$ とし，パラメータ空間は $\Theta = [0.01, 20] \times [0, 20] \times [0, 20]$ であるとする．データ $(X_{t_i})_{i=0,1,\dots,n}$ は $t_i = ih$ ， $h = 1/10^4$ ， $t_n = nh = T = 1$ ，サンプル数 n は 10^4 とする．ここでは，最尤型推定量 $\hat{\theta}_{M,n}$ (Genon-Catalot and Jacod, 1993)，ベイズ型推定量 $\hat{\theta}_{B,n}$ (Uchida and Yoshida, 2013) そして本節で提案されたハイブリッドマルチステップ (HMS) 推定量のシミュレーションを行う．最尤型推定量 $\hat{\theta}_{M,n}$ は

$$\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{M,n}) = \sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{H}_n(\theta)$$

で定義され，一様分布を事前分布とするベイズ型推定量 $\hat{\theta}_{B,n}$ は

$$\hat{\theta}_{B,n} := \frac{\int_{\Theta} \theta \exp(\mathbb{H}_n(\theta)) d\theta}{\int_{\Theta} \exp(\mathbb{H}_n(\theta)) d\theta}$$

で定義される． $q \in (0, 1/2]$ とすると，一様事前分布に対する初期ベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)}$ は

$$\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} = \frac{\int_{\Theta} \theta \exp\left\{\frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta)\right\} d\theta}{\int_{\Theta} \exp\left\{\frac{1}{n^{1-2q}} \mathbb{H}_n(\theta)\right\} d\theta}$$

で定義される． $\mathbb{H}_n(\theta)$ の最大化には，R 言語の組込み関数 `optim()` の L-BFGS-B 法を用いた．ベイズ型推定量は Kamatani (2014) が提案した MCMC 法のアルゴリズムを使用して計算した．

真のモデルから 1000 本の独立なサンプルパスを発生させ，推定値の平均および標準偏差を計算し，結果を表 2-4 に示す．表 2 は 2 つの異なる初期値から得られた最尤型推定量 $\hat{\theta}_{M,n}$ である．最尤型推定量は組込み関数 `optim()` を用いて導出した．真値を初期値としたものは良いパフォーマンスをするが， Θ 上の一様分布から得られた初期値は真値から遠く離れた値をとり得るため，最適化に失敗している．

表 3 は一様事前分布を持つベイズ型推定量 $\hat{\theta}_{B,n}$ の結果である．マルコフチェーン生成数 M を 5×10^4 ， 5×10^5 ， 10^7 とし，これに対するバーンイン回数 B_i をそれぞれ 5×10^3 ， 5×10^4 ， 10^6 とした． $(M, B_i) = (10^7, 10^6)$ のとき，ベイズ型推定量は良いふるまいをしているが， $(M, B_i) = (5 \times 10^4, 5 \times 10^3)$ ， $(5 \times 10^5, 5 \times 10^4)$ のときは，MCMC 法によって生成されるマルコフチェーンが定常分布に収束しきれていないため，ベイズ型推定量の計算に失敗している．

表 4 は $M = 5 \times 10^4$ ， $B_i = 5 \times 10^3$ の場合の，一様事前分布をもつベイズ型推定量 $\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)}$ と $q = 0.5, 0.45, 0.4, \dots, 0.1, 0.05$ ， $J = [-\log_2 q]$ の場合の HMS 推定量 $\hat{\theta}_{q,n}^{(J)}$ のシミュレーション結果である．すべての $M > 0$ に対し $\sup_n E_{\theta^*} [|n^q(\tilde{\theta}_{q,n}^{(0)} - \theta^*)|^M] < \infty$ となることに注意されたい．この例では，HMS 推定量の中で $q = 0.2$ とした場合が一番良いことがわかる．理論的に最適な

表 2. 最尤型推定量 $n = 1 \times 10^4$.

| 初期値 | 平均 (1, 4, 8) | 標準偏差 |
|-----|---------------------|---------------------|
| 真値 | 1.008, 4.078, 7.998 | 0.010, 0.102, 0.007 |
| 乱数 | 1.622, 1.487, 9.659 | 0.638, 1.622, 6.412 |

表 3. ベイズ型推定量 $n = 1 \times 10^4$.

| M (MCMC の生成数) | Bi (バーンイン) | 平均 (1, 4, 8) | 標準偏差 |
|-----------------|-----------------|---------------------|---------------------|
| 5×10^4 | 5×10^3 | 1.075, 3.445, 6.644 | 0.290, 1.242, 2.698 |
| 5×10^5 | 5×10^4 | 1.020, 3.812, 7.383 | 0.165, 0.812, 1.868 |
| 1×10^7 | 1×10^6 | 1.006, 4.066, 7.962 | 0.027, 0.152, 0.275 |

表 4. HMS 推定量 $n = 1 \times 10^4$, $M = 5 \times 10^4$, $Bi = 5 \times 10^3$.

| q | J | 初期ベイズ型推定量: 平均 (1, 4, 8), (標準偏差) HMS 推定量: 平均 (1, 4, 8), (標準偏差) |
|------|-----|--|
| 0.5 | 1 | 1.075, 3.445, 6.644 (0.290, 1.242, 2.698) |
| | | 1.077, 3.673, 6.637 (0.305, 2.034, 2.710) |
| 0.45 | 1 | 1.074, 3.552, 6.876 (0.278, 1.163, 2.429) |
| | | 1.069, 3.774, 6.877 (0.286, 1.841, 2.438) |
| 0.4 | 1 | 1.073, 3.599, 7.005 (0.248, 1.113, 2.298) |
| | | 1.060, 3.902, 7.001 (0.275, 2.042, 2.324) |
| 0.35 | 1 | 1.050, 3.747, 7.270 (0.187, 0.954, 1.977) |
| | | 1.041, 3.933, 7.260 (0.200, 1.710, 2.005) |
| 0.3 | 1 | 1.029, 3.993, 7.712 (0.095, 0.562, 1.149) |
| | | 1.012, 4.194, 7.713 (0.122, 1.575, 1.163) |
| 0.25 | 2 | 1.033, 4.208, 7.951 (0.033, 0.268, 0.309) |
| | | 1.009, 4.135, 7.956 (0.058, 0.774, 0.321) |
| 0.2 | 2 | 1.064, 4.488, 7.998 (0.021, 0.250, 0.026) |
| | | 1.008, 4.058, 7.999 (0.012, 0.157, 0.024) |
| 0.15 | 2 | 1.196, 5.072, 8.085 (0.039, 0.497, 0.186) |
| | | 1.014, 4.166, 8.060 (0.159, 1.845, 0.237) |
| 0.1 | 3 | 1.933, 4.587, 8.978 (0.146, 0.729, 0.476) |
| | | 2.109, 7.799, 9.111 (0.920, 4.439, 0.721) |
| 0.05 | 4 | 4.748, 5.968, 9.830 (0.253, 0.323, 0.390) |
| | | 11.680, 8.632, 9.746 (4.544, 3.355, 0.599) |

q を選び出すことは困難であるが、実際には q を様々な値に変えて、競合する HMS 推定量の中から最も良い推定量を得ることができる。最も良い推定量 $\hat{\theta}_n^*$ とは $\mathbb{H}_n(\hat{\theta}_n^*) = \max_{q \in K} \mathbb{H}_n(\hat{\theta}_{q,n}^{(J)})$ を満たすものであり、 K は q の値の組(例えば $K = \{0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.5\}$)である。

次に、推定量を得るために要した計算時間に焦点をあてる。シミュレーションに使用したパソコンのスペックは、Intel i7 4930K (3.4 GHz base clock/3.9 GHz Turbo, 12 MB cache) である。最尤型推定量 $\hat{\theta}_{M,n}$ 、ベイズ型推定量 $\hat{\theta}_{B,n}$ 、HMS 推定量 $\hat{\theta}_{0.2,n}^{(J)}$ の計算時間はそれぞれ 0.9 秒、1733 秒、1667 秒であった。 $\hat{\theta}_{M,n}$ は Θ 上の一様分布からの乱数を初期値とした。 $\hat{\theta}_{B,n}$ は一様分布を事前分布、 $M = 5 \times 10^4$ とした。 $\hat{\theta}_{0.2,n}^{(J)}$ は、 $q = 0.2$ 、一様事前分布、 $M = 5 \times 10^4$ とした初期ベ

イズ型推定量 $\hat{\theta}_{q,n}^{(0)}$ を用いて計算した。事前分布を一様分布とし、 $M = 5 \times 10^5$ とした場合のベイズ型推定量 $\hat{\theta}_{B,n}$ の平均計算時間は 281 分である。事前分布を一様分布とし、 $M = 5 \times 10^4$ とした場合の初期ベイズ型推定量に基づいた HMS 推定量は、計算時間に関してはほとんど違いがみられない。 q を変えた結果を表 4 に示す。数値計算上の見地から、短時間で推定値を得ることは極めて重要であるが、正確な推定値を得ることの方がより重要である。この意味で、 $\text{optim}()$ を使って求める最尤型推定量と比較して、初期ベイズ型推定量を用いて HMS 推定量を得るには多くの時間を要するが、このモデルでは最尤型推定量より HMS 推定量の方が優れていると言える。

4. 微小拡散過程

本節は、Nomura and Uchida (2016a, 2016b) の結果に従って、微小拡散過程のドリフトパラメータおよびボラティリティパラメータの適応的最尤型推定、適応的ベイズ型推定そしてハイブリッド推定について概説する。

4.1 モデルと仮定

次の確率微分方程式で定義される d 次元拡散過程を考える。

$$(4.1) \quad \begin{cases} dX_t = a(X_t, \alpha)dt + \epsilon b(X_t, \beta)dw_t, & t \in [0, T], \quad \epsilon \in (0, 1], \\ X_0 = x_0. \end{cases}$$

ここで、 $a: \mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^d$, $b: \mathbb{R}^d \times \Theta_\beta \rightarrow \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r$, w は r 次元標準ウィーナー過程、 ϵ と T は既知な定数、 x_0 は確定的初期条件、 $\theta = (\alpha, \beta) \in \Theta = \Theta_\alpha \times \Theta_\beta$, $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*) \in \Theta$ は θ の真値、 Θ_α , Θ_β はそれぞれ \mathbb{R}^p , \mathbb{R}^q 上の有界で凸な開部分集合である。パラメータ空間は局所的リプシッツ境界をもつとする。本節の微小拡散過程のドリフト係数 a とボラティリティ係数 b は 2 節のエルゴード的拡散過程のドリフト係数 b とボラティリティ係数 a とは記号が異なっていることに注意する。データは離散観測され、 $\mathbb{X}_n = (X_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$, $t_i = ih_n$, $h_n = T/n$ であるとする。 $\epsilon \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$ の場合を考える。また、ある $\gamma \in (0, 1]$ が存在して、 $\epsilon(\sqrt{n})^\gamma = O(1)$ を満たすとする。(4.1) で定義される拡散過程は、小さな摂動をもつダイナミカルシステムあるいは微小拡散過程と呼ばれている (Azencott, 1982; Freidlin and Wentzell, 1998; Yoshida, 1992a を参照)。微小拡散過程の数理ファイナンスや生命科学への応用については Yoshida (1992b), Kunitomo and Takahashi (2001), Takahashi and Yoshida (2004), Uchida and Yoshida (2004b), Fuchs (2013) とそれらの参考文献を参照。 $B(x, \beta) = bb^*(x, \beta)$, $\Delta X_i = X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $a_{i-1}(\alpha) = a(X_{t_{i-1}}, \alpha)$, $B_{i-1}(\beta) = B(X_{t_{i-1}}, \beta)$ とする。 X_t^0 を $\epsilon = 0$ としたときの常微分方程式の解とする。すなわち $dX_t^0 = a(X_t^0, \alpha^*)dt$, $X_0^0 = x_0$ である。

連続観測される微小拡散過程の統計推測は著しく発展している。例えば、Kutoyants (1984, 1994), Yoshida (1992a, 1993, 2003), Prakasa Rao (1999), Iacus (2000), Iacus and Kutoyants (2001), Uchida and Yoshida (2004a) とそれらの参考文献を参照。離散観測された微小拡散過程については、最尤型推定量や M 推定量に関する研究は数多く挙げられる (Genon-Catalot, 1990; Laredo, 1990; Sørensen, 2000, 2012; Sørensen and Uchida, 2003; Uchida, 2003, 2004, 2006, 2008; Gloter and Sørensen, 2009; Guy et al., 2014 など)。しかし、適応的推測やハイブリッド型推測の研究はほとんどない。

本節では、Nomura and Uchida (2016a, 2016b) で提案された適応的最尤型推定量、適応的ベイズ型推定量そしてハイブリッド推定量の漸近的性質 (漸近正規性とモーメント収束性) について説明する。

以下の仮定をおく.

[E1] (i) すべての $x, y \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$\sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} |a(x, \alpha) - a(y, \alpha)| + \sup_{\beta \in \Theta_\beta} \|b(x, \beta) - b(y, \beta)\| \leq K|x - y|$$

となる $K > 0$ が存在する.

(ii) $\inf_{x, \beta} \det B(x, \beta) > 0$.

[E2] $a(x, \alpha) \in C_{\uparrow}^{6,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta_\alpha; \mathbb{R}^d)$, $b(x, \beta) \in C_{\uparrow}^{6,4}(\mathbb{R}^d \times \Theta_\beta; \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^r)$.

次に,

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |a(X_t^0, \alpha) - a(X_t^0, \alpha^*)|^2 dt, \\ \mathbb{Y}^{(2)}(\beta) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \text{tr}[B(X_t^0, \beta)^{-1} B(X_t^0, \beta^*) - I_d] + \log \frac{\det B(X_t^0, \beta)}{\det B(X_t^0, \beta^*)} \right\} dt, \\ \mathbb{Y}^{(3)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} B(X_t^0, \beta^*)^{-1} [(a(X_t^0, \alpha) - a(X_t^0, \alpha^*))^{\otimes 2}] dt \end{aligned}$$

とおく.

[E3] すべての $\alpha \in \Theta_\alpha, \beta \in \Theta_\beta$ に対し

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}^{(1)}(\alpha) &\leq -\chi^{(1)} |\alpha - \alpha^*|^2, \\ \mathbb{Y}^{(2)}(\beta) &\leq -\chi^{(2)} |\beta - \beta^*|^2, \\ \mathbb{Y}^{(3)}(\alpha) &\leq -\chi^{(3)} |\alpha - \alpha^*|^2 \end{aligned}$$

となる正定数 $\chi^{(1)}, \chi^{(2)}, \chi^{(3)}$ が存在する.

フィッシャー情報行列 $I(\theta^*)$ を

$$\begin{aligned} I(\theta^*) &= \begin{pmatrix} ((I_a^{ij}(\theta^*))_{1 \leq i, j \leq p}) & 0 \\ 0 & (I_b^{ij}(\beta^*))_{1 \leq i, j \leq q} \end{pmatrix}, \\ I_a^{ij}(\theta^*) &= \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_{\alpha_i} a(X_t^0, \alpha^*))^* B(X_t^0, \beta^*) \partial_{\alpha_j} a(X_t^0, \alpha^*) dt, \\ I_b^{ij}(\beta^*) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \text{tr}\{B^{-1}(\partial_{\beta_i} B) B^{-1}(\partial_{\beta_j} B)(X_t^0, \beta^*)\} dt \end{aligned}$$

とおく.

4.2 適応的推定量

疑似対数尤度関数 $U_{\epsilon, n}^{(1)}(\alpha)$, $U_{\epsilon, n}^{(2)}(\alpha, \beta)$, $U_{\epsilon, n}^{(3)}(\alpha, \beta)$ は次のように表される.

$$\begin{aligned} U_{\epsilon, n}^{(1)}(\alpha) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha)|^2 (\epsilon^2 h_n)^{-1}, \\ U_{\epsilon, n}^{(2)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ \log \det B_{i-1}(\beta) + (\epsilon^2 h_n)^{-1} B_{i-1}^{-1}(\beta) [(\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha))^{\otimes 2}] \}, \\ U_{\epsilon, n}^{(3)}(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\epsilon^2 h_n)^{-1} B_{i-1}^{-1}(\beta) [(\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\alpha))^{\otimes 2}]. \end{aligned}$$

初期推定量 $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}$ と適応的最尤型推定量 $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}$ と $\hat{\beta}_{\epsilon,n}$ は次で定義される。

$$\begin{aligned} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\ U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta), \\ U_{\epsilon,n}^{(3)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \hat{\beta}_{\epsilon,n}). \end{aligned}$$

定理 3. (Nomura and Uchida, 2016a) [E1], [E2], [E3] を仮定する。このとき、 $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$ の下、

$$(\epsilon^{-1}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{p+q}(0, I(\theta^*)^{-1})$$

が成り立つ。さらに、高々多項式増大のすべての連続関数 f に対して、

$$E_{\theta^*}[f(\epsilon^{-1}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\hat{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ。

事前分布 $\pi_1(\alpha), \pi_2(\beta)$ は連続で、 $0 < \inf_{\alpha \in \Theta_\alpha} \pi_1(\alpha) \leq \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} \pi_1(\alpha) < \infty$, $0 < \inf_{\beta \in \Theta_\beta} \pi_2(\beta) \leq \sup_{\beta \in \Theta_\beta} \pi_2(\beta) < \infty$ を満たすと仮定する。初期ベイズ型推定量 $\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}$ および適応的ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n}$ は次で定義される:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \\ \tilde{\beta}_{\epsilon,n} &= \frac{\int_{\Theta_\beta} \beta \exp\{U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_\beta} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}, \\ \tilde{\alpha}_{\epsilon,n} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})\} \pi_1(\alpha) d\alpha}. \end{aligned}$$

定理 4. (Nomura and Uchida, 2016b) [E1], [E2], [E3] を仮定する。このとき、 $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$ の下、

$$(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{p+q}(0, I(\theta^*)^{-1})$$

が成り立つ。さらに、高々多項式増大のすべての連続関数 f に対して、

$$E_{\theta^*}[f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ。

次にハイブリッド推定量を定義する。 $r_1, r_2 \in (0, 1]$, $r_2 \leq 2r_1\gamma$ とする。 $n \rightarrow \infty, \epsilon \rightarrow 0$ のとき、 $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$, $\epsilon(\sqrt{n})^\gamma = O(1)$ であることに注意する。

$$\begin{aligned} \mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha) &= \epsilon^{2-2r_1} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\ \mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\alpha, \beta) &= \frac{1}{(\sqrt{n})^{2-2r_2}} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

とする。初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}$ は

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)} &= \frac{\int_{\Theta_\alpha} \alpha \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}{\int_{\Theta_\alpha} \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}(\alpha)\} \pi_1(\alpha) d\alpha}, \\ \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} &= \frac{\int_{\Theta_\beta} \beta \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}{\int_{\Theta_\beta} \exp\{\mathbb{H}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)}, \beta)\} \pi_2(\beta) d\beta}\end{aligned}$$

により定義され、ハイブリッド推定量 $\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}$, $\tilde{\beta}_{\epsilon,n}$ は

$$\begin{aligned}U_{\epsilon,n}^{(3)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)}), \\ U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \beta)\end{aligned}$$

により定義される。

注 3. $r_2 \leq 2r_1\gamma$ の条件は、 α に関する $a(x, \alpha)$ の滑らかさによって緩和することが可能である。

命題 5. (Nomura and Uchida, 2016b) $r_1, r_2 \in (0, 1]$ とする. [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき、すべての $M > 0$ に対し、次が成り立つ。

- (i) $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\epsilon^{-r_1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n,r_1}^{(1)} - \alpha^*)|^M] < \infty$.
- (ii) $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} - \beta^*)|^M] < \infty$.
- (iii) $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*)|^M] < \infty$.
- (iv) $\sup_{\epsilon,n} E_{\theta^*} [|\sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)|^M] < \infty$.

定理 5. (Nomura and Uchida, 2016b) [E1], [E2], [E3] を仮定する. このとき、 $\frac{1}{\epsilon\sqrt{n}} = O(1)$ の下、

$$(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2)$$

が成り立つ. さらに、高々多項式増大のすべての連続関数 f に対して、

$$E_{\theta^*} [f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ。

注 4. $r_1 < 1, r_2 = 1$ のとき、高々多項式増大なすべての連続関数 f に対し、

$$E_{\theta^*} [f(\epsilon^{-1}(\tilde{\alpha}_{\epsilon,n} - \alpha^*), \sqrt{n}(\tilde{\beta}_{\epsilon,n,r_2}^{(2)} - \beta^*))] \rightarrow \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

となる。

4.3 例とシミュレーション結果

次式で与えられる 1 次元拡散過程を考える。

$$\begin{cases} dX_t^\epsilon = (\alpha_1 - \alpha_2 X_t^\epsilon - 2 \sin(\alpha_3 X_t^\epsilon)) dt + \epsilon \frac{\beta_2 + (X_t^\epsilon)^2}{1 + \beta_1 (X_t^\epsilon)^2} dw_t & t \in [0, 1], \quad \epsilon \in (0, 1], \\ X_0 = 2. \end{cases}$$

ここで、 $\theta = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2)$ は未知パラメータ、真値は $\theta^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = (3, 7, 5, 0.5, 5)$ 、パラメータ空間は $\Theta = [0.01, 20]^5$ であるとする。データ $(X_{t_i}^\epsilon)$ は $\epsilon = 0.01, 0.05, 0.1$, $n = 100, 1000$ に対して発生させる。定理 5 のハイブリッド推定量 $\tilde{\theta} = (\tilde{\alpha}_{\epsilon,n}, \tilde{\beta}_{\epsilon,n})$ と定理 3 の適応的最尤型推定量 $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n})$ をシミュレーションにより検証する。適応的最尤型推定量は、

表 5. 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}$ (初期値は真値).

| ϵ | n | $\hat{\alpha}_1$ | $\hat{\alpha}_2$ | $\hat{\alpha}_3$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ |
|------------|------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 3.1522 (0.98947) | 7.1602 (1.00240) | 4.8413 (0.65782) | 0.5835 (0.24111) | 4.8717 (0.60907) |
| | 1000 | 3.2158 (1.02660) | 7.3645 (1.05284) | 4.9263 (0.64899) | 0.5060 (0.06575) | 4.9793 (0.18120) |
| 0.05 | 100 | 2.9804 (0.42147) | 6.8725 (0.46175) | 4.8843 (0.18826) | 0.5633 (0.21750) | 4.8352 (0.50216) |
| | 1000 | 3.0204 (0.42371) | 7.0451 (0.47758) | 4.9827 (0.18772) | 0.5046 (0.06437) | 4.9779 (0.17050) |
| 0.01 | 100 | 2.9587 (0.08148) | 6.8171 (0.09088) | 4.8928 (0.03566) | 0.5212 (0.20404) | 4.7987 (0.47476) |
| | 1000 | 2.9935 (0.08183) | 6.9818 (0.09426) | 4.9893 (0.03540) | 0.5042 (0.06365) | 4.9774 (0.16647) |

表 6. 初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$ (初期値は真値).

| ϵ | n | $\tilde{\alpha}_1^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_2^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_3^{(1)}$ | $\tilde{\beta}_1^{(2)}$ | $\tilde{\beta}_2^{(2)}$ |
|------------|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 3.1649 (1.20757) | 7.1480 (1.11918) | 4.7996 (1.48767) | 0.6732 (0.29173) | 5.1323 (0.76265) |
| | 1000 | 3.2260 (1.24486) | 7.3494 (1.17456) | 4.8652 (1.42835) | 0.5125 (0.06691) | 5.0004 (0.18440) |
| 0.05 | 100 | 2.9846 (0.43101) | 6.8875 (0.47242) | 4.8773 (0.24526) | 0.6373 (0.23818) | 5.0509 (0.54857) |
| | 1000 | 3.0209 (0.43633) | 7.0544 (0.49534) | 4.9753 (0.19661) | 0.5104 (0.06483) | 4.9963 (0.17158) |
| 0.01 | 100 | 2.9610 (0.08270) | 6.8225 (0.09308) | 4.8978 (0.03647) | 0.5884 (0.21740) | 4.9974 (0.50036) |
| | 1000 | 2.9931 (0.08406) | 6.9819 (0.09780) | 4.9901 (0.03677) | 0.5098 (0.06414) | 4.9952 (0.16728) |

$$\begin{aligned}
 U_{\epsilon,n}^{(1)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(1)}(\alpha), \\
 U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\beta \in \Theta_\beta} U_{\epsilon,n}^{(2)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}^{(1)}, \beta), \\
 U_{\epsilon,n}^{(3)}(\hat{\alpha}_{\epsilon,n}, \hat{\beta}_{\epsilon,n}) &= \sup_{\alpha \in \Theta_\alpha} U_{\epsilon,n}^{(3)}(\alpha, \hat{\beta}_{\epsilon,n})
 \end{aligned}$$

を満たすものである。

真のモデルから 1000 本の独立なサンプルパスを発生させ、各々の推定量の平均と標準偏差を計算する。適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}$ とハイブリッド推定量 $\tilde{\theta}$ は R 言語の組込み関数 `optim()` を使って計算し、初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ は Kamatani (2014) が提案した MCMC 法のアルゴリズムを用いて計算される。マルコフチェーンの生成数は 5×10^4 回、バーンイン回数は 5×10^3 とする。初期値 $(\alpha_1^0, \alpha_2^0, \alpha_3^0, \beta_1^0, \beta_2^0)$ には、真値あるいは Θ 上の一様乱数を用いる。

表 5-6 では真値、表 8-9 では一様乱数を初期値としている。表 7 と表 10 は、初期ベイズ型推

表 7. ハイブリッド推定量 $\hat{\theta}$ (初期値は初期ベイズ型推定量 $\check{\alpha}^{(1)}, \check{\beta}^{(2)}$).

| ϵ | n | $\check{\alpha}_1$ | $\check{\alpha}_2$ | $\check{\alpha}_3$ | $\check{\beta}_1$ | $\check{\beta}_2$ |
|------------|------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 3.1550 (1.19584) | 7.1218 (1.10431) | 4.8144 (1.53128) | 0.6176 (0.27304) | 4.9223 (0.66270) |
| | 1000 | 3.2141 (1.17337) | 7.3304 (1.11897) | 4.8795 (1.45665) | 0.5081 (0.06666) | 4.9827 (0.18295) |
| 0.05 | 100 | 2.9797 (0.42335) | 6.8707 (0.46139) | 4.8786 (0.24277) | 0.5958 (0.23516) | 4.8868 (0.52298) |
| | 1000 | 3.0205 (0.42371) | 7.0452 (0.47757) | 4.9827 (0.18772) | 0.5069 (0.06472) | 4.9818 (0.17092) |
| 0.01 | 100 | 2.9582 (0.08138) | 6.8159 (0.09071) | 4.8916 (0.03542) | 0.5525 (0.22260) | 4.8489 (0.49509) |
| | 1000 | 2.9935 (0.08183) | 6.9818 (0.09426) | 4.9893 (0.03540) | 0.5065 (0.06409) | 4.9812 (0.16688) |

表 8. 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}$ (初期値は乱数).

| ϵ | n | $\hat{\alpha}_1$ | $\hat{\alpha}_2$ | $\hat{\alpha}_3$ | $\hat{\beta}_1$ | $\hat{\beta}_2$ |
|------------|------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 2.6085 (1.37309) | 6.5868 (1.26410) | 9.3934 (5.99408) | 0.5274 (0.21488) | 4.9402 (0.53280) |
| | 1000 | 2.7294 (1.43034) | 6.8550 (1.26317) | 9.3538 (6.00919) | 0.5005 (0.06586) | 4.9864 (0.18174) |
| 0.05 | 100 | 2.0566 (0.85040) | 5.8877 (1.01678) | 9.2164 (5.18264) | 0.3671 (0.28195) | 5.1388 (0.70839) |
| | 1000 | 2.2951 (1.00509) | 6.3334 (1.13409) | 9.0811 (5.91092) | 0.4701 (0.24035) | 4.9944 (0.56477) |
| 0.01 | 100 | 2.0081 (0.98288) | 5.7267 (1.12613) | 8.4996 (5.28508) | 0.2530 (0.29049) | 10.4713 (5.67697) |
| | 1000 | 1.9570 (1.06001) | 5.7185 (1.29344) | 8.7171 (5.27892) | 0.2544 (0.24249) | 5.6897 (0.76937) |

定量 $\check{\alpha}, \check{\beta}$ に対し $r_1 = r_2 = 1$ としている. 表 11-12 では, $\epsilon = 0.05, n = 1000$, 初期ベイズ型推定量に対し $r_1 = 0.1, 0.2, \dots, 1, r_2 = 1$ としている.

適応的最尤型推定量(表 5)とハイブリッド推定量(表 7)はほぼ同じ結果を示しており, いずれも $\epsilon = 0.1$ のときに不安定となる. しかし表 8 に見られるように, 初期値に Θ 上の一様乱数を用いた場合, 適応的最尤型推定量は真値を用いた場合のようにうまく推定できていない. 一方, 初期ベイズ型推定量(表 9)とハイブリッド推定量(表 10)は初期値に Θ 上の一様乱数を用いたとしても良い結果を出している.

$\epsilon = 0.05, n = 1000$ としたときの推定量 $\check{\alpha}_3, \check{\alpha}_3$ の標準偏差に着目すると, 表 6 と表 9 の $\check{\alpha}_3$ の標準偏差に明らかな違いが生じており, 表 7 と表 10 の $\check{\alpha}_3$ の標準偏差についても同様である. これは表 9 の初期ベイズ型推定量がパラメータ α_3 の推定に数回失敗していることに起因している. 表 10 からハイブリッド推定量は初期ベイズ型推定量の影響を受けていることがわかる. 一方, 表 11 の初期ベイズ型推定量 $\check{\alpha}_3$ の標準偏差は $r_1 = 0.2$ または 0.3 のとき, 表 6 の値に近

表 9. 初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$ (初期値は乱数).

| ϵ | n | $\tilde{\alpha}_1^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_2^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_3^{(1)}$ | $\tilde{\beta}_1^{(2)}$ | $\tilde{\beta}_2^{(2)}$ |
|------------|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 3.0860 (1.27922) | 7.0710 (1.17129) | 5.3797 (2.99609) | 0.6693 (0.29384) | 5.1246 (0.75495) |
| | 1000 | 3.1539 (1.31686) | 7.2856 (1.21481) | 5.4848 (2.99470) | 0.5123 (0.06677) | 4.9996 (0.18449) |
| 0.05 | 100 | 2.9674 (0.46493) | 6.8703 (0.50537) | 4.9606 (1.10689) | 0.6348 (0.24042) | 5.0523 (0.54990) |
| | 1000 | 3.0052 (0.47404) | 7.0380 (0.52699) | 5.0437 (1.06207) | 0.5100 (0.06509) | 4.9965 (0.17177) |
| 0.01 | 100 | 2.9565 (0.12124) | 6.8174 (0.13517) | 4.9236 (0.47845) | 0.5877 (0.21938) | 5.0364 (0.83245) |
| | 1000 | 2.9869 (0.13426) | 6.9748 (0.15316) | 5.0244 (0.54853) | 0.5081 (0.07048) | 5.0015 (0.19432) |

表 10. ハイブリッド推定量 $\check{\theta}$ (初期値は初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}^{(1)}, \tilde{\beta}^{(2)}$).

| ϵ | n | $\check{\alpha}_1$ | $\check{\alpha}_2$ | $\check{\alpha}_3$ | $\check{\beta}_1$ | $\check{\beta}_2$ |
|------------|------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 100 | 3.0989 (1.27256) | 7.0785 (1.15228) | 5.3928 (3.00612) | 0.6157 (0.27360) | 4.9194 (0.66030) |
| | 1000 | 3.1639 (1.30059) | 7.2916 (1.18150) | 5.5051 (2.99580) | 0.5080 (0.06659) | 4.9822 (0.18311) |
| 0.05 | 100 | 2.9628 (0.45765) | 6.8543 (0.49362) | 4.9617 (1.10814) | 0.5935 (0.23745) | 4.8885 (0.52359) |
| | 1000 | 3.0068 (0.45617) | 7.0332 (0.49930) | 5.0506 (1.05550) | 0.5066 (0.06494) | 4.9821 (0.17108) |
| 0.01 | 100 | 2.9535 (0.12169) | 6.8106 (0.13577) | 4.9175 (0.47933) | 0.5515 (0.22425) | 4.8856 (0.81001) |
| | 1000 | 2.9862 (0.14533) | 6.9729 (0.17245) | 5.0241 (0.55603) | 0.5047 (0.07110) | 4.9871 (0.18999) |

づいており、表 12 のハイブリッド推定量 $\check{\alpha}_3$ の標準偏差は、 $r_1 = 0.2$ または 0.3 のとき、表 7 の値と非常に近い値を取っている。これは表 11 において r_1 を調整することによって得られる初期ベイズ型推定量が良いふるまいをすること、表 12 では $r_1 = 0.2$ または 0.3 , $r_2 = 1$ の場合にハイブリッド推定量が、真値を初期値として求められた適応的最尤型推定量(表 5)と同程度に良いことが分かる。

5. おわりに

本論文では、確率微分方程式モデルの未知パラメータに対して、高頻度データを用いたハイブリッド推定法について解説した。確率微分方程式(SDE)モデルの統計解析および数値シミュレーションの統計パッケージ Yuima を開発するための Yuima プロジェクト(Brouste et al., 2014)が立ち上がって 10 年以上の歳月が経っている。著者はほとんど貢献できていないが、実際に計算機で SDE の統計解析を実行しようとするとき、SDE モデル特有の問題点も多々あるが、高次元パ

表 11. 初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}^{(1)}$, $\tilde{\beta}^{(2)}$ ($r_2 = 1$).

| r_1 | $\tilde{\alpha}_1^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_2^{(1)}$ | $\tilde{\alpha}_3^{(1)}$ | $\tilde{\beta}_1^{(2)}$ | $\tilde{\beta}_2^{(2)}$ |
|-------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------|-------------------------|
| | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 2.9386 (0.38420) | 6.7986 (0.40359) | 5.7185 (0.41996) | 0.4730 (0.06666) | 4.9692 (0.17111) |
| 0.2 | 2.9787 (0.41936) | 6.9292 (0.45566) | 5.0128 (0.32924) | 0.5051 (0.06572) | 4.9913 (0.17195) |
| 0.3 | 3.0141 (0.43359) | 7.0188 (0.48016) | 4.9092 (0.28671) | 0.5075 (0.06498) | 4.9934 (0.17171) |
| 0.4 | 3.0181 (0.44859) | 7.0421 (0.50395) | 4.9585 (0.51720) | 0.5089 (0.06491) | 4.9948 (0.17162) |
| 0.5 | 3.0107 (0.46482) | 7.0396 (0.51930) | 5.0079 (0.88014) | 0.5094 (0.06491) | 4.9957 (0.17151) |
| 0.6 | 3.0049 (0.47892) | 7.0365 (0.53252) | 5.0423 (1.00453) | 0.5096 (0.06507) | 4.9960 (0.17140) |
| 0.7 | 3.0026 (0.47721) | 7.0349 (0.53111) | 5.0508 (1.08994) | 0.5098 (0.06512) | 4.9962 (0.17148) |
| 0.8 | 3.0020 (0.48074) | 7.0341 (0.53613) | 5.0581 (1.15824) | 0.5097 (0.06507) | 4.9961 (0.17145) |
| 0.9 | 3.0064 (0.46961) | 7.0394 (0.52317) | 5.0264 (0.92606) | 0.5101 (0.06500) | 4.9964 (0.17166) |
| 1 | 3.0052 (0.47404) | 7.0380 (0.52699) | 5.0437 (1.06207) | 0.5100 (0.06509) | 4.9965 (0.17177) |

表 12. ハイブリッド推定量 $\check{\theta}$ ($r_2 = 1$, 初期値は初期ベイズ型推定量 $\tilde{\alpha}^{(1)}$, $\tilde{\beta}^{(2)}$).

| r_1 | $\check{\alpha}_1$ | $\check{\alpha}_2$ | $\check{\alpha}_3$ | $\check{\beta}_1$ | $\check{\beta}_2$ |
|-------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| | 3.0 | 7.0 | 5.0 | 0.5 | 5.0 |
| 0.1 | 3.0146 (0.43261) | 7.0397 (0.48466) | 4.9777 (0.31640) | 0.5067 (0.06482) | 4.9815 (0.17108) |
| 0.2 | 3.0202 (0.42416) | 7.0452 (0.47805) | 4.9812 (0.19371) | 0.5068 (0.06472) | 4.9817 (0.17093) |
| 0.3 | 3.0212 (0.42378) | 7.0464 (0.47754) | 4.9806 (0.19390) | 0.5068 (0.06472) | 4.9817 (0.17093) |
| 0.4 | 3.0165 (0.43269) | 7.0426 (0.48206) | 4.9895 (0.49660) | 0.5068 (0.06471) | 4.9817 (0.17093) |
| 0.5 | 3.0088 (0.45058) | 7.0354 (0.49496) | 5.0230 (0.88463) | 0.5066 (0.06484) | 4.9818 (0.17091) |
| 0.6 | 3.0039 (0.46056) | 7.0312 (0.50223) | 5.0501 (0.99592) | 0.5066 (0.06490) | 4.9820 (0.17088) |
| 0.7 | 3.0033 (0.45931) | 7.0303 (0.50169) | 5.0590 (1.09509) | 0.5065 (0.06501) | 4.9820 (0.17084) |
| 0.8 | 3.0039 (0.46011) | 7.0302 (0.50334) | 5.0651 (1.15122) | 0.5065 (0.06491) | 4.9821 (0.17110) |
| 0.9 | 3.0074 (0.45249) | 7.0340 (0.49633) | 5.0337 (0.92607) | 0.5067 (0.06485) | 4.9820 (0.17090) |
| 1 | 3.0068 (0.45617) | 7.0332 (0.49930) | 5.0506 (1.05550) | 0.5066 (0.06494) | 4.9821 (0.17108) |

ラメータ空間における疑似尤度関数の最適化やベイズ型推定量のMCMC法による統計計算など普遍的な問題が浮かび上がる。エルゴード的拡散過程モデルのパラメータ推定における顕著な性質は、ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの推定量の収束率が異なる点である。この性質を用いて効率よく推定量の計算を実行したいというのが、ハイブリッド推定の最初の動機付けである。これはYuimaへの実装という具体的な問題から生まれたものである。確率微分方程式モデルの統計解析については、Kutoyants (1984, 1994, 2004, 2015), Prakasa Rao (1999), Iacus (2008), Sørensen (2012), 吉田 (2003, 2010, 2011), 林・吉田 (2008), 内田 (2008a, 2008b, 2009, 2013), 増田 (2015)などを参照。SDEモデルの最尤型推定量やベイズ推定量の理論的性質に基づいて、これら推定量を効率よく計算する方法の開発が今後益々重要視されると考えられる。

謝 辞

査読者から有益なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。本研究はJSPS科研費 24300107 およびCREST, JSTの助成を受けたものである。

参 考 文 献

- Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, 2nd ed., Pure and Applied Mathematics, 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam.
- Azencott, R. (1982). Formule de Taylor stochastique et développement asymptotique d'intégrales de Feynmann, *Séminaire de Probabilités XVI; Supplément: Géométrie Différentielle Stochastique*, Lecture Notes in Mathematics, **921**, 237–285, Springer Verlag, Berlin.
- Bibby, B. M. and Sørensen, M. (1995). Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes, *Bernoulli*, **1**, 17–39.
- Brouste, A., Fukasawa, M., Hino, H., Iacus, S., Kamatani, K., Koike, Y., Masuda, H., Nomura, R., Shimuzu, Y., Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). The YUIMA Project: A computational framework for simulation and inference of stochastic differential equations, *Journal of Statistical Software*, **57**(4), 1–51.
- Dohnal, G. (1987). On estimating the diffusion coefficient, *Journal of Applied Probability*, **24**, 105–114.
- Florens-Zmirou, D. (1989). Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes, *Statistics*, **20**, 547–557.
- Freidlin, M. I. and Wentzell, A. D. (1998). *Random Perturbations of Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Fuchs, C. (2013). *Inference for Diffusion Processes: With Applications in Life Sciences*, Springer, Berlin.
- Fujii, T. and Uchida, M. (2014). AIC type statistics for discretely observed ergodic diffusion processes, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **17**, 267–282.
- Genon-Catalot, V. (1990). Maximum contrast estimation for diffusion processes from discrete observations, *Statistics*, **21**, 99–116.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probabilités et Statistiques*, **29**, 119–151.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1994). Estimation of the diffusion coefficient for diffusion processes: Random sampling, *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 193–221.
- Gloter, A. and Sørensen, M. (2009). Estimation for stochastic differential equations with a small diffu-

- sion coefficient, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 679–699.
- Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.
- Gobet, E. (2002). LAN property for ergodic diffusions with discrete observations, *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, **38**, 711–737.
- Guy, R., Laredo, C. and Vergu, E. (2014). Parametric inference for discretely observed multidimensional diffusions with small diffusion coefficient, *Stochastic Processes and Their Applications*, **124**, 51–80.
- 林高樹, 吉田朋広 (2008). 高頻度金融データと統計科学, 『21 世紀の統計科学 I : 社会・経済の統計科学』, 第 10 章, 東京大学出版会, 東京.
- Iacus, S. (2000). Semiparametric estimation of the state of a dynamical system with small noise, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **3**, 277–288.
- Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*, Springer, New York.
- Iacus, S. and Kutoyants Yu. A. (2001). Semiparametric hypotheses testing for dynamical systems with small noise, *Mathematical Methods of Statistics*, **10**, 105–120.
- Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1981). *Statistical Estimation*, Springer Verlag, New York.
- Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.
- Kamatani, K. (2014). Efficient strategy for the Markov chain Monte Carlo in high-dimension with heavy-tailed target probability distribution, arXiv:1412.6231.
- Kamatani, K. and Uchida, M. (2015). Hybrid multi-step estimators for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **18**, 177–204.
- Kamatani, K., Nogita, A. and Uchida, M. (2016). Hybrid multi-step estimation of the volatility for stochastic regression models, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **48**, 19–35.
- Kessler, M. (1995). Estimation des paramètres d'une diffusion par des contrastes corrigés, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Series I, Mathematics*, **320**, 359–362.
- Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scandinavian Journal of Statistics*, **24**, 211–229.
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2001). The asymptotic expansion approach to the valuation of interest rate contingent claims, *Mathematical Finance*, **11**, 117–151.
- Kutoyants, Yu. A. (1984). Parameter estimation for stochastic processes (ed. B.L.S. Prakasa Rao), Heldermann, Berlin.
- Kutoyants, Yu. A. (1994). *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*, Kluwer, Dordrecht.
- Kutoyants, Yu. A. (2004). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer-Verlag, London.
- Kutoyants Yu. A. (2015). On multi-step MLE-process for ergodic diffusion, arXiv 1504.01869, Preprint.
- Laredo, C. F. (1990). A sufficient condition for asymptotic sufficiency of incomplete observations of a diffusion process, *The Annals of Statistics*, **18**, 1158–1171.
- Lehmann, E. L. (1999). *Elements of Large-Sample Theory*, Springer-Verlag, New York.
- Masuda, H. (2013a). Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2752–2778.
- Masuda, H. (2013b). Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Levy driven SDE observed at high frequency, *The Annals of Statistics*, **41**, 1593–1641.
- 増田弘毅 (2015). 非正規ノイズ型エルゴード過程の推定, 日本統計学会誌, **44**(2), 471–495.
- Nomura, R. and Uchida, M. (2016a). Adaptive maximum likelihood type estimation for small diffusion processes from discrete observations, Preprint, <http://www.sigmath.es.osaka-u.ac.jp/~uchida/>

Paper/AdaML_small.pdf.

- Nomura, R. and Uchida, M. (2016b). Adaptive Bayes estimators and hybrid estimators for small diffusion processes based on sampled data, *Journal of the Japan Statistical Society*, **46**, 129–154.
- Ogihara, T. and Yoshida, N. (2011). Quasi-likelihood analysis for the stochastic differential equation with jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **14**, 189–229.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Asymptotic theory for nonlinear least squares estimator for diffusion processes, *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Optimization*, **14**, 195–209.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1988). Statistical Inference from Sampled Data for Stochastic Processes, *Contemporary Mathematics*, **80**, 249–284, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Prakasa Rao, B. L. S. (1999). *Statistical Inference for Diffusion Type Processes*, Edward Arnold, London.
- R Development Core Team (2013). R: A language and environment for statistical computing, *R Foundation for Statistical Computing*, Vienna, Austria, <http://www.R-project.org/>.
- Robert, C. P. and Casella, G. (2004). *Monte Carlo Statistical Methods*, 3rd ed., Springer Verlag, New York.
- Shimizu, Y. (2006). M-estimation for discretely observed ergodic diffusion processes with infinitely many jumps, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 179–225.
- Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006). Estimation of parameters for diffusion processes with jumps from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **9**, 227–277.
- Sørensen, M. (2000). Small dispersion asymptotics for diffusion martingale estimating functions, Preprint No. 2000-2, Department of Statistics and Operations Research, University of Copenhagen, <http://www.math.ku.dk/~michael/smallld.pdf>.
- Sørensen, M. (2012). Estimating functions for diffusion-type processes, *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations* (eds. M. Kessler, A. Lindner and M. Sørensen), 1–107, CRC Press, Chapman and Hall, Boca Raton.
- Sørensen, M. and Uchida, M. (2003). Small diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, *Bernoulli*, **9**, 1051–1069.
- Takahashi, A. and Yoshida, N. (2004). An asymptotic expansion scheme for optimal investment problems, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 153–188.
- Uchida, M. (2003). Estimation for dynamical systems with small noise from discrete observations, *Journal of the Japan Statistical Society*, **33**, 157–167.
- Uchida, M. (2004). Estimation for discretely observed small diffusions based on approximate martingale estimating functions, *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 553–566.
- Uchida, M. (2006). Martingale estimating functions based on eigenfunctions for discretely observed small diffusions, *Bulletin of Informatics and Cybernetics*, **38**, 1–13.
- Uchida, M. (2008). Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises, *Stochastic Processes and Their Applications*, **118**, 1706–1721.
- 内田雅之 (2008a). 確率微分方程式の母数推定, 『21世紀の統計科学 III: 数理・計算の統計科学』, 第7章, 東京大学出版会, 東京.
- 内田雅之 (2008b). 離散観測に基づく拡散過程の統計的推測, *数学*, **60**(4), 368–379.
- 内田雅之 (2009). 小さな拡散過程のドリフトパラメータの推定, *統計数理*, **57**(1), 67–81.
- Uchida, M. (2010). Contrast-based information criterion for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **62**, 161–187.
- 内田雅之 (2013). 確率微分方程式の統計的モデリング, *日本統計学会誌*, **43**(2), 335–358.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2001). Information criteria in model selection for mixing processes, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **4**, 73–98.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2004a). Information criteria for small diffusions via the theory of Malliavin-

- Watanabe, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 35–67.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2004b). Asymptotic expansion for small diffusions applied to option pricing, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **7**, 189–223.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2006). Asymptotic expansion and information criteria. Dedicated to Professor Minoru Siotani on his 80th birthday, *SUT Journal of Mathematics*, **42**, 31–58.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2011). Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations, *European Series in Applied and Industrial Mathematics: Probability and Statistics*, **15**, 270–290.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2012). Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 2885–2924.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2851–2876.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2014). Adaptive Bayes type estimators of ergodic diffusion processes from discrete observations, *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **17**, 181–219.
- Uchida, M. and Yoshida, N. (2016). Model selection for volatility prediction, *The Fascination of Probability, Statistics and Their Applications*, In Honour of Ole, E. Barndorff-Nielsen (eds. Mark Podolskij, Robert Stelzer, Steen Thorbjørnsen and Almut E. D. Veraart), 343–360, Springer, Switzerland.
- Yoshida, N. (1992a). Asymptotic expansion of maximum likelihood estimators for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe, *Probability Theory and Related Fields*, **92**, 275–311.
- Yoshida, N. (1992b). Asymptotic expansion for statistics related to small diffusions, *Journal of the Japan Statistical Society*, **22**, 139–159.
- Yoshida, N. (1992c). Estimation for diffusion processes from discrete observation, *Journal of Multivariate Analysis*, **41**, 220–242.
- Yoshida, N. (1993). Asymptotic expansion of Bayes estimators for small diffusions, *Probability Theory and Related Fields*, **95**, 429–450.
- Yoshida, N. (2003). Conditional expansions and their applications, *Stochastic Processes and Their Applications*, **107**, 53–81.
- 吉田朋広 (2003). Malliavin 解析と数理統計, *数学*, **55**, 225–244.
- 吉田朋広 (2010). 確率過程の統計学：概観と展望, *日本統計学会誌*, **40**(1), 47–60.
- Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 431–479.
- 吉田朋広 (2011). 拡散型確率過程の推定における極限定理, *統計数理*, **59**(1), 125–140.

Hybrid Estimation for Stochastic Differential Equations Based on High-frequency Data

Masayuki Uchida^{1,2,3}

¹Graduate School of Engineering Science, Osaka University

²MMDS, Osaka University

³CREST

In this paper, we survey previous researches on hybrid estimation for unknown parameters of stochastic differential equations based on high-frequency data. Using a Bayes type estimator with a non-optimal rate of convergence as the initial estimator, we obtain a multi-step estimator and an adaptive maximum likelihood type estimator, and show their asymptotic properties. For three kinds of diffusion models, ergodic diffusions, non-ergodic diffusions and small diffusions, we give some examples and simulation results.

高頻度データに対する Whittle 推定

深澤 正彰^{1,2}

(受付 2016 年 6 月 24 日; 改訂 9 月 28 日; 採択 10 月 17 日)

要 旨

連続伊藤過程の拡散項に対する、高頻度データに基づく統計的推定問題を考察する。対象の伊藤過程そのものの値が高頻度データとして与えられている場合には、既にかんりの理論が整備されている。とくに Euler-丸山近似に基づく尤度の近似が漸近有効な推定を与えることはよく知られている。ここでは対象とする伊藤過程そのものの値は直接観測されず、その積分値のみが高頻度に観測される状況を扱う。データの数値微分による近似を安直に用いると、推定の一貫性さえ崩れてしまう。本稿ではとくに伊藤過程の二次変分をデータで近似する際の中心極限定理を与える。定常 Gauss 過程に対する Whittle 尤度のアイデアを用いて、漸近分散が小さい推定量を構成する。

キーワード：高頻度データ、Whittle 推定、中心極限定理、安定収束、Langevin モデル。

1. 研究の背景

溶媒中の微粒子運動に対する Langevin モデルは以下のように記述される：

$$m\ddot{Y}_t = -\nabla q(Y_t) - \gamma\dot{Y}_t + \sigma\dot{W}_t$$

または同値な表現として

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dY_t &= X_t dt, \\ mdX_t &= -\nabla q(Y_t)dt - \gamma X_t dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

ここで X, Y はそれぞれ粒子の速度と座標を表し、 m は質量、 q はポテンシャル、 $\gamma > 0$ は抵抗係数、 W は標準 Brown 運動である。以下、物理学者が言う Brown 運動 (Brown が発見した微粒子の不規則な運動) と数学的に定義された Brown 運動を区別する必要があるため、後者を指すときには常に、標準 Brown 運動と呼ぶことにする。上の式で標準 Brown 運動は W だが、物理学者にとっては Y が Brown 運動である。拡散係数 σ が 0 のとき、上式は Newton の運動方程式である。そうでないときは q に対する適当な条件の下で (X, Y) はエルゴード的拡散過程となり、その不変分布は

$$G(dx dy) = C e^{-m\gamma x^2/\sigma^2} e^{-2\gamma q(y)/\sigma^2} dx dy,$$

で与えられる。ここで C は規格化定数である (例えば Mattingly et al., 2002 参照)。この X, Y の不変分布がそれぞれ Maxwell 分布、Boltzmann-Gibbs 分布に等しいことを要請すると、Einstein

¹ 大阪大学大学院 基礎工学研究科：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

² 大阪大学 数理・データ科学教育研究センター：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3

関係 $\sigma^2 = 2\gamma\kappa_B T$ が従う。ただし κ_B は Boltzmann 定数, T は温度である。

Einstein は 1905 年前後の論文において, 微粒子の Brown 運動を, 目に見えない溶媒分子との衝突の結果だと仮定し, そこから理論的に予言される Brown 運動の性質を実験的に検証することで, 目に見えない溶媒分子の仮定そのものを検証しようと提唱した。当時, 溶媒分子の存在を直接確認する方法はなく, 全ての物質が原子からなるという原子論は単なる仮説であったことに注意する。Langevin モデルは, この Einstein のアイデアを表現するものとして Langevin が 1908 年に導入したものの(の現代的な記述)である。同時期に Perrin が, Brown 運動する微粒子の軌跡を顕微鏡を使って 30 秒ごとに記録し, その実験データが Einstein の予言通りだったことで, 初めて原子論が決定的となった。

この歴史的 연구のもう少し詳細を見てみよう。Perrin は 2 次元データをとったが, ここでは簡単のため 1 次元で考える。今ポテンシャルはない ($q = 0$) とすると, (1.1) は線形なシステムだから Y は Gauss 過程である。定常性の仮定の下,

$$E[(Y_{t+h} - Y_t)^2] = \frac{2\kappa_B T}{\gamma} \left(h + \frac{m}{\gamma} (e^{-\gamma h/m} - 1) \right) \approx \frac{2\kappa_B T}{\gamma} h$$

と計算できる。ここで実験対象となる微粒子の抵抗と質量の比は例えば $\gamma/m \approx 10^5$ 程度である。したがって微粒子の変位の二乗 $(Y_{t+h} - Y_t)^2$ の平均は h に比例するはずだと言ったのが Einstein であり, これを実験で検証したのが Perrin であった。

上の近似は, Brown 運動 Y を標準 Brown 運動の $\sqrt{2\kappa_B T/\gamma}$ 倍とみなすことに相当するが, この近似を考えた Einstein 本人も述べたように (Nerburgh et al., 2006 参照), 時間幅 h が小さいときには明らかな問題が生じる。実際計算してみれば

$$(1.2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[(Y_{t+h} - Y_t)^2]}{h} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[(Y_{t+h} - Y_t)^2]}{h^2} = \frac{\kappa_B T}{m}$$

である。しかし Perrin の $h = 30$ 秒では全く問題なかった。以来, 本来なら微分可能なはずの Brown 運動 Y を, 標準 Brown 運動の定数倍と同一視することが物理その他の分野の標準となっている。ちなみに上の近似は γ が小さいときにもよくない。実際, 気体中では抵抗が小さいので, 粒子の軌跡は標準 Brown 運動とはかけ離れている。実際に観察した物理学者の言葉を借りれば, 気体中の Brown 運動は日本舞踊, 液体中の Brown 運動は盆踊りである (図 1 参照)。

近年では, 光ピンセット (optical tweezer) と呼ばれる技術で, 1 分子をトラップしてその動きを直接観察できるようになった (例えば Gittes and Schmidt, 1998 参照)。これはレーザーで人為的にポテンシャル q を与え, 分子を一定期間顕微鏡の視野に止めておく技術である。時間解像度も進歩し, 現在の観測間隔はサブミリ秒である。このような 1 分子計測の技術発展により, 特に分子生物学分野で新たな知見が期待されるが, この新しい高頻度データの解析法に関する研究は未発展である。特に上述の議論から, 高頻度データに対しては Einstein 近似ではなく, Langevin モデル (1.1) そのものによる解析が必要と思われる。実際 Li et al. (2010) では, 気体中のガラスビーズの Brown 運動をマイクロ秒単位で観測し, (1.2) の成立を確かめている。本稿では, 非平衡状態を含むよう一般化したモデル

$$(1.3) \quad \begin{aligned} dY_t &= X_t dt \\ dX_t &= U_t dt + \sqrt{V_t} dW_t \end{aligned}$$

において, Y の高頻度データ $\{Y_{jh}; j = 0, 1, 2, \dots, [1/h]\}$ に基づく, X の二次変分

$$(1.4) \quad \bar{V} := \int_0^1 V_t dt$$

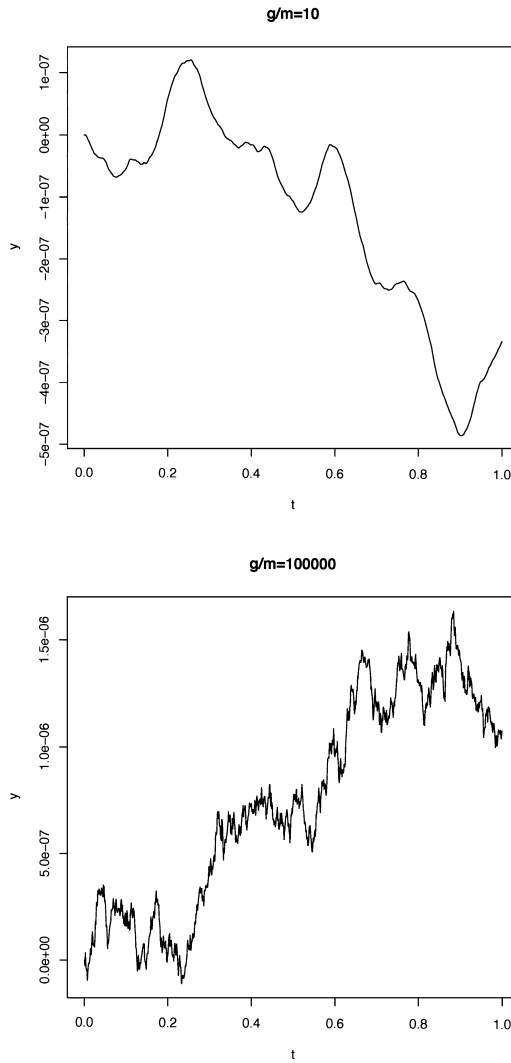


図 1. $\gamma/m = 10$ (上), $\gamma/m = 10^5$ (下) の場合の(1)のサンプルパス(ただし $q = 0$).

の推定を考察する．ここで U, V は適合過程であり, Y は 1 次元とする．尚, このモデルは計量ファイナンス分野におけるボラティリティ推定の問題にも現れる．

2. 関連する先行研究

上述の Langevin モデルで, 調和振動, つまりポテンシャル q が二次関数の場合には, 観測系列 $\{Y_{jh}\}$ は Gauss 過程となる．隠れ Markov 過程 Y は連続時間自己回帰過程と呼ばれる, 統計でも歴史あるモデルとなり, Bartlett (1946) において既にこの連続過程の離散観測が議論されている．離散観測系列は ARMA の構造を持つことが示され, 観測時間間隔 h を固定, 観測期間が無限に長くなる設定で, 標準的な定常 Gauss 過程に対する時系列解析が適用できる．パラ

メータの同定可能性が失われぬかに関する議論が Pandit and Wu (1975)にある。ノイズをフラクショナルに拡張したモデルが Tsai and Chan (2005)で扱われている。ポテンシャルが 0 の場合に、Gloter (2001)は差分をとることで、やはり定常 Gauss 過程に帰着させた。定常 Gauss 過程である限り、モデルは共分散構造で決定されるから、これら時系列解析(スペクトル解析)の方法は最尤法と同等な有効推定量を与える。

ポテンシャルが一般の非線形関数の場合にはもはや正規性は失われるが、もし Y が連続的に観測できるなら、Girsanov-丸山の定理によって尤度が陽に記述できる。観測期間が長くなると同時に、間隔 h も 0 に収束する設定で、この連続観測の尤度の近似を利用する方法が Brockwell et al. (2007)で扱われている。また Pokern et al. (2009)で Gibbs サンプリングによる数値的な推定法が提案されている。またモデルの特異摂動極限の拡散過程でフィッティングする方法が Papavasiliou et al. (2009), Pavliotis and Stuart (2007)で議論されている。観測されない過程 X が一次元拡散過程のとき、間隔 h を固定、観測期間を無限にする設定で、Ditlevsen and Sørensen (2004)、間隔 h も 0 に近づける設定で Gloter (2006)の研究がある。

以上の研究はすべて観測期間を無限にする漸近論であり、このときエルゴード性の仮定の下、 X のドリフトに現れるパラメータの推定が可能である。一方、我々の問題のように観測期間を固定、間隔 h のみに関する漸近論ではドリフトの一致推定は不可能である。それは Girsanov-丸山の定理を思い出せば、たとえ連続観測しても有限のパスから、そのドリフトを同定できないことから明らかである。それでも拡散係数に現れるパラメータの一致推定は可能である。拡散過程

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t, \theta)dW_t$$

に対し、その積分値 Y が時刻 $0, 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n, 1$ で観測されるとき、Gloter (2000)は漸近混合正規性

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \rightarrow \mathcal{MN} \left(0, \frac{9}{16} \left\{ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial_{\theta} \sigma(X_t, \theta)}{\sigma(X_t, \theta)} \right\}^2 dt \right\}^{-1} \right)$$

を持つ推定量 $\hat{\theta}_n$ を与えている。ここで \mathcal{MN} は混合正規分布を表す。その推定量は実は漸近有効でないことが、Gloter and Gobet (2008)の LAMN の結果からわかる。そこで彼らは、推定量の誤差 $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ の漸近分散の下界は

$$(2.1) \quad \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 \left\{ \frac{\partial_{\theta} \sigma(X_t, \theta)}{\sigma(X_t, \theta)} \right\}^2 dt \right\}^{-1}$$

であることを示した。これは積分値 Y ではなく X の値そのものが観測された場合と同じ漸近下界である (Gobet, 2001 参照)。LAMN は示されたが、下界を達成する推定量は知られていない。

我々はノンパラメトリックなモデル (1.3) を扱う。仮に Y_{jh} の代わりに粒子の速度 X_{jh} , $j = 0, 1, 2, \dots, [1/h]$ が観測できたとすると、これは高頻度データ解析の最も単純な例題となり、まず離散二次変分の一致性(確率収束)

$$(2.2) \quad \hat{V}_h^0 := \sum_{j=1}^{[1/h]} (X_{jh} - X_{(j-1)h})^2 \rightarrow \bar{V} \quad (h \rightarrow 0)$$

さらに漸近混合正規性(分布収束)

$$(2.3) \quad h^{-1/2}(\hat{V}_h^0 - \bar{V}) \rightarrow \mathcal{MN} \left(0, 2 \int_0^1 V_t^2 dt \right) \quad (h \rightarrow 0)$$

が成立する (Rootzén, 1980; Jacod and Protter, 1998)。ここで \bar{V} は (1.4) で定義したものである。

この離散二次変分は \bar{V} の漸近有効推定量であると予想されているが、その証明は高頻度データ解析の重要な未解決問題である。例えば V が W と独立な場合などを含む、限定的な状況においては Clement et al. (2013) による肯定的な結果がある。

我々の問題では粒子の速度 X を直接観測することはできない。自然な発想で、 X_{jh} の代わりに、計算可能な数値微分 $X_j^h = (Y_{jh} - Y_{(j-1)h})/h$ を用いたくなる。初期値 Y_0 を固定すれば $\{Y_{jh}\} \rightarrow \{X_j^h\}$ の変換で情報は失われていないことに注意。しかし Gloter (2000) が発見したことは

$$\sum_{j=2}^{[1/h]} (X_j^h - X_{j-1}^h)^2 \rightarrow \frac{2}{3} \bar{V} \quad (h \rightarrow 0),$$

つまり、数値微分による安直な近似では推定の一貫性すら崩れてしまうという事実である。一致推定量として彼は

$$(2.4) \quad \frac{3}{2} \sum_{j=2}^{[1/h]} (X_j^h - X_{j-1}^h)^2$$

を提案し、安定収束

$$h^{-1/2} \left\{ \frac{3}{2} \sum_{j=2}^{[1/h]} (X_j^h - X_{j-1}^h)^2 - \bar{V} \right\} \rightarrow \mathcal{MN} \left(0, \frac{9}{4} \int_0^1 V_t^2 dt \right), \quad (h \rightarrow 0)$$

を示した。先行研究においてこの推定量 (2.4) より漸近分散が小さいものは得られていない。

本稿ではこのモデル (1.3) において、(2.4) より漸近分散が小さい \bar{V} の推定量、とくにその値が

$$(2.5) \quad 2 \int_0^1 V_t^2 dt$$

であるものを構成する。高頻度データ解析に初めて Whittle 推定のアイデアを導入することが本研究の特色である。特殊ケース $U = 0, V = \sigma^2$ (定数) における考察 (3 節参照)、また上述の Gloter and Gobet (2008) のパラメトリックモデルに対する結果から、この値 (2.5) が \bar{V} の推定量の漸近分散の下限であることを予想している。たとえば (2.1) において $\sigma = \sqrt{\theta}$ (定数) とすると、下界は $2\theta^2$ と計算でき、この値が (2.5) に対応する。

3. Gauss 過程に対する最尤法について

平均 0 の Gauss 過程 (x_1, \dots, x_n) の尤度は、 Σ を自己共分散行列とすれば

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n |\Sigma|}} \exp \left\{ -\frac{x' \Sigma^{-1} x}{2} \right\}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$$

となる。未知パラメータ θ と既知の行列 R に対して $\Sigma = \theta R$ なる構造があるとき、このパラメータ θ に対する最尤推定量は

$$(3.1) \quad \hat{\theta}_n = \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j.$$

ここで $A = [a_{ij}]$ は $R = [r_{ij}]$ の逆行列である。この推定量の誤差分散は

$$\begin{aligned}
E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] &= \frac{1}{n^2} E \left[\left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (x_i x_j - \theta r_{ij}) \right\}^2 \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} (E[x_i x_j x_k x_l] - \theta^2 r_{ij} r_{kl}) \\
&= \frac{\theta^2}{n^2} \sum_{i,j,k,l=1}^n a_{ij} a_{kl} (r_{ik} r_{jl} + r_{il} r_{jk}) \\
&= \frac{2\theta^2}{n}.
\end{aligned}$$

ここで Wick の公式

$$E[x_i x_j x_k x_l] = E[x_i x_j] E[x_k x_l] + E[x_i x_k] E[x_j x_l] + E[x_i x_l] E[x_j x_k]$$

を用いた。

我々のモデル (1.3) で $X_0 = 0, U = 0, V = \theta$ (定数), $h = 1/n$ のとき, $\{h^{-1/2}(X_{jh} - X_{(j-1)h})\}, \{h^{-1/2}(X_j^h - X_{(j-1)}^h)\}$, いずれをデータとしても, 上の設定に当てはまり, θ の有効推定量の分散は $2\theta^2/n$ となる. 前者の場合, 最尤推定量は離散二次変分 \hat{V}_h^0 に一致する. 後者の場合, まず自己共分散を計算する必要がある:

$$X_i^h - X_{i-1}^h = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} (X_t - X_{t-h}) dt = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} \int_{t-h}^t \sqrt{V_s} dW_s dt = \sqrt{h}(U_{i-1}^h + U_i^{h'}),$$

ここで

$$\begin{aligned}
U_{i-1}^h &= h^{-3/2} \int_{(i-2)h}^{(i-1)h} (s - (i-2)h) \sqrt{V_s} dW_s, \\
U_i^{h'} &= h^{-3/2} \int_{(i-1)h}^{ih} (ih - s) \sqrt{V_s} dW_s.
\end{aligned}$$

今, $V = \theta$ だから,

$$E[|U_i^h|^2] = E[|U_i^{h'}|^2] = \frac{\theta}{3}, \quad E[U_i^h U_i^{h'}] = \frac{\theta}{6}$$

となり, $i, j \geq 2$ に対して

$$r_{ij} = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{if } i = j \\ \frac{1}{6} & \text{if } |i - j| = 1 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

一般に未知パラメータに依存する共分散行列 $C(\theta)$ に対して, その逆行列を陽に求めるのは難しい. そこで Whittle (1953) は定常過程の共分散関数の逆行列そのものではなく, その近似を用いた擬似尤度を提案した. 共分散関数 $c(h, \theta) = E_\theta[x_0 x_h]$ に対してスペクトル密度は

$$f(\lambda, \theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{\infty} c(h, \theta) e^{-\sqrt{-1}h\lambda}$$

で定義される. 共分散行列 $C(\theta) = [c_{ij}(\theta)]$, $c_{ij}(\theta) = c(i-j, \theta)$ の逆行列に対する Whittle 近似は行列 $W(\theta) = [w_{ij}(\theta)]$, $w_{ij}(\theta) = w(i-j, \theta)$,

$$w(h, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\sqrt{-1}h\lambda}}{f(\lambda, \theta)} d\lambda$$

で定義される．適当な条件の下で Whittle 推定量は漸近有効となる（例えば Dzhaparidze, 1986 参照）．

我々の行列 R の逆行列に対する Whittle 近似は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} r_{0j} e^{-\sqrt{-1}j\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{2 + \cos \lambda}{3}$$

より

$$(3.2) \quad w(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{3e^{\sqrt{-1}k\lambda}}{2 + \cos \lambda} d\lambda = \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^{|k|}$$

と計算できる．よって Whittle 推定量は (3.1) の a_{ij} を $w(i-j)$ で置き換えた

$$(3.3) \quad \hat{V}_h^w := \sum_{i,j=2}^{[1/h]} \sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^{|i-j|} (X_i^h - X_{i-1}^h)(X_j^h - X_{j-1}^h)$$

となる．

データ $\{h^{-1/2}(X_{jh} - X_{(j-1)h})\}$ に対する最尤推定量 \hat{V}_h^0 は、 V が定数とは限らない一般の場合にも、 \bar{V} の推定量として良い性質 (2.2), (2.3) を持つのであった．ならばデータ $\{h^{-1/2}(X_j^h - X_{j-1}^h)\}$ に対する Whittle 推定量 \hat{V}_h^w も、一般の場合に同様の良い性質を持つのではないだろうか．これが本研究のアイデアである．

4. 高頻度データ解析のツール

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ は通常の仮定を満たすとす．離散フィルトレーション $\{\mathcal{F}_j^h\}$ を $\mathcal{F}_j^h = \mathcal{F}_{jh}$ によって定義する．高頻度データ解析において、大数の法則の役割を果たすのが次の補題である．

補題 1. (Genon-Catalot and Jacod, 1993) $\{\mathcal{F}_j^h\}$ -適合過程 $M_j^h, t \in [0, 1]$ に対し、確率収束

$$\sum_{j=1}^{[1/h]} E[|M_j^h|^2 | \mathcal{F}_{j-1}^h] \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

が成立するとき、確率収束

$$\sup_{t \in [0, 1]} \left| \sum_{j=1}^{[t/h]} M_j^h - \sum_{j=1}^{[t/h]} E[M_j^h | \mathcal{F}_{j-1}^h] \right| \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0)$$

が成立する．

これは離散マルチンゲールに Lenglart 不等式を適用すればただちに得られる．中心極限定理に相当するものを記述するために、まず安定収束の概念を導入する．

定義 1. (安定収束) 部分 σ 代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ に対して、完備可分距離空間 E に値をとる確率変数列 $\{Z_n\}$ が、確率変数 Z に \mathcal{G} -安定収束するとは、任意の有界な \mathcal{G} 可測確率変数 A に対して結合分布 (Z_n, A) が (Z, A) に分布収束することである．

安定収束は分布収束より強く確率収束より弱い．分布収束するが安定収束しない例： X, Y を非退化独立同分布な確率変数としたとき、 $\mathcal{G} = \sigma(X, Y)$, $Z_{2k+1} = X, Z_{2k} = Y$ ．

定理 1. (Genon-Catalot and Jacod, 1993) M を $\{\mathcal{F}_t\}$ -局所マルチンゲール, \mathcal{M}^\perp を M と直交する有界マルチンゲール全体とする. $\{\mathcal{F}_j^h\}$ -適合過程 M_j^h と連続過程 Q に対し, 確率収束

1. $\sup_{t \in [0,1]} \left| \sum_{j=1}^{[t/h]} E[M_j^h | \mathcal{F}_{j-1}^h] \right| \rightarrow 0, (h \rightarrow 0)$
2. $\sum_{j=1}^{[t/h]} E[|M_j^h|^2 | \mathcal{F}_{j-1}^h] \rightarrow Q_t, (h \rightarrow 0), \forall t \in [0, 1]$
3. $\sum_{j=1}^{[t/h]} E[|M_j^h|^4 | \mathcal{F}_{j-1}^h] \rightarrow 0, (h \rightarrow 0), \forall t \in [0, 1]$
4. $\sum_{j=1}^{[t/h]} E[M_j^h (M_{jh} - M_{(j-1)h}) | \mathcal{F}_{j-1}^h] \rightarrow 0, (h \rightarrow 0), \forall t \in [0, 1]$
5. $\sum_{j=1}^{[t/h]} E[M_j^h (M_{jh}^\perp - M_{(j-1)h}^\perp) | \mathcal{F}_{j-1}^h] \rightarrow 0, (h \rightarrow 0), \forall t \in [0, 1], \forall M^\perp \in \mathcal{M}^\perp$

が成立するとき, $D[0, 1]$ 値確率変数列としての \mathcal{F} -安定収束

$$\sum_{j=1}^{[t/h]} M_j^h \rightarrow \hat{W}_Q, (h \rightarrow 0)$$

が成立する. ここで \hat{W} は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ の適当な拡張の上で定義された, \mathcal{F} と独立な標準 Brown 運動.

ちなみにデータのサンプリングが等間隔でない場合には, より一般的な収束定理が必要である. これについては Fukasawa (2010, 2011) 参照.

5. 差分二次形式に対する中心極限定理

フィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0})$ は通常の仮定を満たすとし, W は $\{\mathcal{F}_t\}$ -Brown 運動, さらに $\{\mathcal{F}_t\}$ -適合過程 U, V に対して X は (1.3) を満たすとす. ドリフト U に対しては U/V が局所有界であること, 拡散項 V に対しては, (連続とは限らない)伊藤過程であることを要請する. つまり $V = A + M$ と分解され, 局所マルチンゲール M は可予測二次変分 $\langle M \rangle$ を持ち, さらに適当な局所有界過程 a, q によって

$$A_t = A_0 + \int_0^t a_s ds, \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t q_s ds$$

と表現できる. ドリフト U に対する仮定は V が 0 を取りうるモデルでは制約的だが, 例えば U も伊藤過程である, といった仮定で代用できる. データは

$$X_j^h = \frac{1}{h} \int_{(j-1)h}^{jh} X_t dt, \quad j = 1, 2, \dots, [1/h]$$

と記述できる.

さて, 任意に与えた $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m, m \in \mathbb{N}$ に対し, (1.4) で定義される \bar{V} に対する, 以下の形の推定量 $\hat{V}_h(\alpha)$ を考える:

$$(5.1) \quad \hat{V}_h(\alpha) = \sum_{i=m+1}^{[1/h]} (X_i^h - X_{i-1}^h) \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (X_{i-j}^h - X_{i-j-1}^h).$$

$m = 1, \alpha_0 = 1$ の場合が、数値微分 X_j^h による離散二次変分の安直な近似である。 $m = 1, \alpha_0 = 3/2$ の場合が Gloter (2000) による推定量 (2.4) である。第 3 節で見たように、数値微分をとることで、その差分列 $X_i^h - X_{i-1}^h, i = 1, 2, \dots$ の隣接項間に相関が生じている。その相関からも情報を取り出すことが、 $m \geq 2$ を考える動機である。次の定理は Gloter (2000) の中心極限定理 ($m = 1$ の場合) を拡張するものである。

定理 2. $\hat{V}_h(\alpha)$ が \bar{V} の一致推定量であるための必要十分条件は

$$(5.2) \quad \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_1 = 1,$$

であり、このとき \mathcal{F} -安定収束

$$h^{-1/2}(\hat{V}_h(\alpha) - \bar{V}) \rightarrow \mathcal{MN}\left(0, g(\alpha) \int_0^1 V_t^2 dt\right) \quad (h \rightarrow 0)$$

が成立する。ここで

$$g(\alpha) = \alpha_0^2 + \frac{8}{9}\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{9}\alpha_0\alpha_2 + \frac{1}{36}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m-1}\alpha_j^2 + \frac{4}{9}\sum_{j=1}^{m-2}\alpha_j\alpha_{j+1} + \frac{1}{18}\sum_{j=1}^{m-3}\alpha_j\alpha_{j+2}.$$

証明. Girsanov-丸山変換によって $U = 0$ と仮定してよい。また局所化によって q は有界と仮定してよい。 $n = [1/h]$,

$$V_i^h = \int_{(i-1)h}^{ih} V_t dt$$

とおく。条件 (5.2) の下で

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{i=m+1}^n V_i^h + \int_0^{mh} V_t dt + \int_{nh}^1 V_t dt \\ &= \sum_{i=m+1}^n \left\{ \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_1 \right\} V_i^h + O_p(h) \\ &= \sum_{i=m+1}^n \left\{ \frac{1}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_1 \right\} V_{i-1}^h + \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{3}\alpha_0 V_i^h + O_p(h) \end{aligned}$$

と書ける。そこで

$$Z_{i,j}^h = h^{-1/2} \left\{ (X_i^h - X_{i-1}^h)(X_{i-j}^h - X_{i-j-1}^h) - \delta_{0,j} \frac{1}{3}(V_i^h + V_{i-1}^h) - \delta_{1,j} \frac{1}{6}V_i^h \right\}$$

と置けば

$$h^{-1/2}(\hat{V}_n(\alpha) - \bar{V}) = \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j Z_{i,j}^h + O_p(h^{1/2})$$

となる。これが離散マルチンゲールの形をしていないのが技術的な問題で、これを定理 1 が使える状況に書き直すことがポイントである。

$$E[Z_{i,0}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] = h^{-1/2} \left\{ hE[|U_i^{h'}|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] + h|U_{i-1}^h|^2 - \frac{1}{3} \int_{(i-1)h}^{ih} E[V_s | \mathcal{F}_{i-1}^h] ds - \frac{1}{3}V_{i-1}^h \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= h^{-5/2} \int_{(i-1)h}^{ih} \left\{ (ih-s)^2 - \frac{h^2}{3} \right\} E[V_t | \mathcal{F}_{i-1}^h] dt \\
&\quad + h^{-1/2} \left\{ h|U_{i-1}^h|^2 - \frac{1}{3}V_{i-1}^h \right\} \\
&= h^{-1/2} \left\{ h|U_{i-1}^h|^2 - \frac{1}{3}V_{i-1}^h \right\} + O(h^{3/2}), \\
E[Z_{i,1}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= h^{-1/2} \left\{ hU_{i-1}^h(U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'}) - \frac{1}{6}V_{i-1}^h \right\}, \\
E[Z_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= h^{1/2}U_{i-1}^h(U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'}), \quad j \geq 2
\end{aligned}$$

という計算をして,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=m+1}^n \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j Z_{i,j}^h &= \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (Z_{i,j}^h - E[Z_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h]) + \sum_{i=m+1}^n \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j E[Z_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \\
&= \sum_{i=m+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (Z_{i,j}^h - E[Z_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h]) + \sum_{i=m+1}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j E[Z_{i+1,j}^h | \mathcal{F}_i^h] + O_p(h^{1/2}) \\
&= \sum_{i=m+1}^{n-1} h^{1/2} \left\{ \alpha_0 \left(2U_{i-1}^h U_i^{h'} + |U_i^{h'}|^2 - \frac{1}{3h}V_i^h + |U_i^h|^2 - \frac{1}{3h}V_i^h \right) \right. \\
&\quad + \alpha_1 \left(U_i^{h'}(U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'}) + U_i^h(U_{i-1}^h + U_i^{h'}) - \frac{1}{6h}V_i^h \right) \\
&\quad \left. + \sum_{j=2}^{m-1} \alpha_j (U_i^{h'}(U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'}) + U_i^h(U_{i-j}^h + U_{i-j+1}^{h'})) \right\} + O_p(h^{1/2}) \\
&=: \sum_{i=m+1}^{n-1} h^{1/2} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j F_{i,j}^h + O_p(h^{1/2})
\end{aligned}$$

を得る。これは近似的に離散マルチンゲールの形をしている：

$$\begin{aligned}
E[F_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= O(h), \\
E[F_{i,j}^h (X_{ih} - X_{(i-1)h}) | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= O(h), \\
E[|F_{i,0}^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{4}{3h}|U_{i-1}^h|^2 E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] + \frac{5}{9h^2} E[|V_i^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] + O(h^{1/2}) \\
E[|F_{i,1}^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{1}{3h} \{ (U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'})^2 + U_{i-1}^h(U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'}) + |U_{i-1}^h|^2 \} E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \\
&\quad + \frac{5}{36h^2} E[|V_i^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] + O(h^{1/2}) \\
E[F_{i,0}^h F_{i,1}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{1}{3h} (2U_{i-1}^h(U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'}) + |U_{i-1}^h|^2) E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \\
&\quad + \frac{2}{9h^2} E[|V_i^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] + O(h^{1/2}) \\
E[F_{i,0}^h F_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{1}{3h} U_{i-1}^h \{ 2(U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'}) + U_{i-j}^h + U_{i-j+1}^{h'} \} E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] + O(h^{1/2}) \\
E[F_{i,1}^h F_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{1}{6h} \{ (U_{i-2}^h + U_{i-1}^{h'}) \{ 2(U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'}) + U_{i-j}^h + U_{i-j+1}^{h'} \} \\
&\quad + U_{i-1}^h \{ U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'} + 2(U_{i-j}^h + U_{i-j+1}^{h'}) \} \} E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] + O(h^{1/2}) \\
E[F_{i,j}^h F_{i,k}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] &= \frac{1}{6h} \{ (U_{i-j-1}^h + U_{i-j}^{h'}) \{ 2(U_{i-k-1}^h + U_{i-k}^{h'}) + U_{i-k}^h + U_{i-k+1}^{h'} \}
\end{aligned}$$

$$+ (U_{i-j}^h + U_{i-j+1}^{h'}) \{U_{i-k-1}^h + U_{i-k}^{h'} + 2(U_{i-k}^h + U_{i-k+1}^{h'})\} E[V_i^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \\ + O(h^{1/2}),$$

ここで $j, k \geq 2$. すると確率収束

$$h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[|F_{i,0}^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] \rightarrow \int_0^1 V_s^2 ds, \\ h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[|F_{i,1}^h|^2 | \mathcal{F}_{i-1}^h] \rightarrow \frac{19}{36} \int_0^1 V_s^2 ds, \\ h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[F_{i,0}^h F_{i,1}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \rightarrow \frac{4}{9} \int_0^1 V_s^2 ds,$$

さらに $j \geq 3$ に対して

$$h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[F_{i,0}^h F_{i,2}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \rightarrow \frac{1}{18} \int_0^1 V_s^2 ds, \\ h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[F_{i,0}^h F_{i,j}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \rightarrow 0$$

が従う. 一方 $j, k \geq 2$ に対しては,

$$h \sum_{i=m+1}^{n-1} E[F_{i,j}^h F_{i,k}^h | \mathcal{F}_{i-1}^h] \\ \rightarrow \left\{ \frac{1}{2} \delta_{j,k} + \frac{2}{9} \delta_{j+1,k} + \frac{2}{9} \delta_{j,k+1} + \frac{1}{36} \delta_{j+1,k-1} + \frac{1}{36} \delta_{j-1,k+1} \right\} \int_0^1 V_s^2 ds$$

で, この確率収束は $j = k = 1$ の場合を除けば $j, k \geq 1$ において正しい. かくして

$$h \sum_{i=m+1}^{n-1} E \left[\left| \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j F_{i,j}^h \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{i-1}^h \right] \\ \rightarrow \left\{ \frac{19}{36} \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{m-1} \alpha_j^2 + \frac{4}{9} \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j \alpha_{j+1} + \frac{1}{18} \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j \alpha_{j+2} \right\} \int_0^1 V_s^2 ds \\ = \left\{ \frac{1}{36} \alpha_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j^2 + \frac{4}{9} \sum_{j=1}^{m-2} \alpha_j \alpha_{j+1} + \frac{1}{18} \sum_{j=1}^{m-3} \alpha_j \alpha_{j+2} \right\} \int_0^1 V_s^2 ds.$$

あとは定理 1 を

$$M_i^h = h^{1/2} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j F_{i,j}^h, \quad M = X$$

に対して適用すればよい. \square

定理 2 より, $m = 1$ のときは一致性のために $\alpha_0 = 3/2$ が必要で, そのとき $g(\alpha) = 9/4 = 2.25$, これは Gloter (2000) の結果である. $m = 2$ の場合, (5.2) の下

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) &= \alpha_0^2 + \frac{19}{36}\alpha_1^2 + \frac{8}{9}\alpha_0\alpha_1 \\
 &= \alpha_0^2 + \frac{19}{36}(6 - 4\alpha_0)^2 + \frac{8}{9}\alpha_0(6 - 4\alpha_0) \\
 &= \frac{53}{9}\alpha_0^2 - 20\alpha_0 + 19 \\
 &= \frac{53}{9}\left(\alpha_0 - \frac{90}{53}\right)^2 + \frac{107}{53}.
 \end{aligned}$$

最適化すると $\alpha_0 = 90/53$, $\alpha_1 = -42/53$ で, そのとき最小値 $g(\alpha) = 107/53 \approx 2.018868$ となり, この時点で既に先行研究の推定量 (2.4) より良いものが構成できたことになる. さらに $m = 3$ の場合, (5.2) の下

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) &= \alpha_0^2 + \frac{19}{36}\alpha_1^2 + \frac{8}{9}\alpha_0\alpha_1 + \frac{1}{9}\alpha_0\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{4}{9}\alpha_1\alpha_2 \\
 &= \frac{53}{9}\alpha_0^2 - 20\alpha_0 + 19 + \frac{1}{9}\alpha_0\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{4}{9}(6 - 4\alpha_0)\alpha_2 \\
 &= \frac{53}{9}\left(\alpha_0 - \frac{9}{53}\left(10 + \frac{5}{6}\alpha_2\right)\right)^2 + \frac{81}{212}\alpha_2^2 - \frac{26}{159}\alpha_2 + \frac{107}{53} \\
 &= \frac{53}{9}\left(\alpha_0 - \frac{9}{53}\left(10 + \frac{5}{6}\alpha_2\right)\right)^2 + \frac{81}{212}\left(\alpha_2 - \frac{52}{243}\right)^2 + \frac{77327}{38637}
 \end{aligned}$$

で, 最適化すると $\alpha_2 = 52/243$, $\alpha_0 = 7420/4293$, $\alpha_1 = -3922/4293$ によって最小値 $g(\alpha) = 77327/38637 \approx 2.001372$ をとる. m を上げると計算量は上がるが, それでも二次形式の計算なので, 通常のデータ量なら計算コストを考慮する必要はない. ではどこまで漸近分散を下げられるだろうか.

補題 2.

$$\inf \left\{ g(\alpha) \mid \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}) \in \mathbb{R}^m, \frac{2}{3}\alpha_0 + \frac{1}{6}\alpha_1 = 1, m \in \mathbb{N} \right\} = 2.$$

また

$$(5.3) \quad \alpha_0 = \sqrt{3}, \quad \alpha_j = 2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 2)^j, \quad j = 1, 2, \dots, m - 1$$

とすると $g(\alpha) \rightarrow 2$ ($m \rightarrow \infty$).

証明. ある $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ が存在して $g(\alpha) < 2$ であるとする. 定理 2 の中心極限定理は $U = 0$, $V = \theta$ (定数), $h = 1/n$ の場合にも勿論成立するから,

$$h^{-1/2}(\hat{V}(\alpha) - \theta) \rightarrow \mathcal{N}(0, g(\alpha)\theta^2)$$

となる. これは定常 Gauss 過程の未知パラメータ θ の推定量で, 誤差分散が Cramér-Rao の下界 $2\theta^2/n$ を下回るものが得られたことになり矛盾である. 直接 $g(\alpha)$ の定義に代入すれば (5.3) に対して $g(\alpha) \rightarrow 2$ が分かり, 下限が 2 であることが従う. \square

下限を達成する α の列 (5.3) は Whittle 推定量 (3.3) の形をもとに発見したものである. 我々のモデル (1.3) は一般に非定常で非 Gauss 過程であるが, それでも高頻度データに対しては定常 Gauss 過程に対する Whittle 推定のアイデアが応用できることを初めて示した次の定理が本研究の主な貢献である.

定理 3. 推定量 \hat{V}_h^w を (3.3) によって定義する. このとき $h \rightarrow 0$ で \mathcal{F} -安定収束

$$h^{-1/2}(\hat{V}_h^w - \bar{V}) \rightarrow \mathcal{MN}\left(0, 2 \int_0^1 V_t^2 dt\right)$$

が成立する。

証明. Girsanov-丸山変換によって $U = 0$ と仮定してよい. また局所化によって q, V は有界と仮定してよい.

$$\hat{V}_h^m = \sum_{i=2}^{[1/h]} \sqrt{3}(X_i^h - X_{i-1}^h)^2 + 2 \sum_{i=2}^{[1/h]} \sum_{k=1}^{(m-1) \wedge (i-2)} \sqrt{3}(\sqrt{3}-2)^k (X_i^h - X_{i-1}^h)(X_{i-k}^h - X_{i-k-1}^h)$$

とおけば

$$(5.4) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{h > 0} h^{-1} E[|\hat{V}_h^w - \hat{V}_h^m|^2] = 0$$

である. また, (5.3) で与えた α に対して (5.1) によって $\hat{V}_h(\alpha)$ を定義すると, 任意の m に対して確率収束

$$h^{-1/2}(\hat{V}_h^m - \hat{V}_h(\alpha)) \rightarrow 0$$

が成立する. これと定理 2 を合わせると

$$(5.5) \quad h^{-1/2}(\hat{V}_h^m - \bar{V}) \rightarrow \mathcal{MN}\left(0, g(\alpha) \int_0^1 V_t^2 dt\right)$$

となる. 補題 2 より $m \rightarrow \infty$ の時 $g(\alpha) \rightarrow 2$ だから (5.4) と (5.5) を合わせて主張を得る. \square

謝 辞

本研究は科学研究費補助金若手研究 (A) 24684006 及び基盤研究 (B) 24300107 の助成を受けた.

参 考 文 献

- Bartlett, M.S. (1946). On the theoretical specification and sampling properties of autocorrelated time-series, *Supplement to the Journal of the Royal Statistical Society*, **8**(1), 27–41.
- Brockwell, P.J., Davis, R.A. and Yang, Yu (2007). Continuous-time Gaussian autoregression, *Statistica Sinica*, **17**, 63–80.
- Clement, E., Delattre, S. and Gloter, A. (2013). An infinite dimensional convolution theorem with applications to the efficient estimation of the integrated volatility, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2500–2521.
- Ditlevsen, S. and Sørensen, M. (2004). Inference for observations of integrated diffusion processes, *Scandinavian Journal of Statistics*, **31**, 417–429.
- Dzhaparidze, K. (1986). *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Spectral Analysis of Stationary Time Series*, Springer-Verlag, New York.
- Fukasawa, M. (2010). Realized volatility with stochastic sampling, *Stochastic Processes and Their Applications*, **120**, 829–852.
- Fukasawa, M. (2011). Discretization error of stochastic integrals, *Annals of Applied Probability*, **21**, 1436–1465.
- Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **29**, 119–151.

- Gittes, F. and Schmidt, C. (1998). Signals and noise in micromechanical measurements, *Methods in Cell Biology*, **55**, 129–156.
- Gloter, A. (2000). Discrete sampling of an integrated diffusion process and parameter estimation of the diffusion coefficient, *ESAIM Probability and Statistics*, **4**, 205–224.
- Gloter, A. (2001). Parameter estimation for a discrete sampling of an integrated Ornstein-Uhlenbeck process, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **35**(3), 225–243.
- Gloter, A. (2006). Parameter estimation for a discretely observed integrated diffusion process, *Scandinavian Journal of Statistics*, **33**, 83–104.
- Gloter, A. and Gobet, E. (2008). LAMN property for hidden processes: The case of integrated diffusions, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **44**(1), 104–128.
- Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**(6), 899–912.
- Jacod, J. and Protter, P. (1998). Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations, *Annals of Probability*, **26**(1), 267–307.
- Li, T., Kheifets, S., Medellin, D. and Raizen, M.G. (2010). Measurement of the instantaneous velocity of a Brownian particle, *Science*, **328**, 1673–1675.
- Mattingly, J.C., Stuart, A.M. and Higham, D.J. (2002). Ergodicity for SDEs and approximations: Locally Lipschitz vector fields and degenerate noise, *Stochastic Processes and Their Applications*, **101**, 185–232.
- Nerburgh, R., Peidle, J. and Reuckner, W. (2006). Einstein, Perrin, and the reality of atoms: 1905 revisited, *American Journal of Physics*, **74**, 478.
- Pandit, S.M. and Wu, S.M. (1975). Unique estimates of the parameters of a continuous stationary stochastic process, *Biometrika*, **62**(2), 497–501.
- Papavasiliou, A., Pavliotis, G.A. and Stuart, A.M. (2009). Maximum likelihood drift estimation for multiscale diffusions, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 3172–3210.
- Pavliotis, G.A. and Stuart, A.M. (2007). Parameter estimation for multiscale diffusions, *Journal of Statistical Physics*, **127**(4), 741–781.
- Pokern, Y., Stuart, A.M. and Wiberg, P. (2009). Parameter estimation for partially observed hypoelliptic diffusions, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, **71**, Part 1, 49–73.
- Rootzén, H. (1980). Limit distributions for the error in approximations of stochastic integrals, *Annals of Probability*, **8**(2), 241–251.
- Tsai, H. and Chan, K.S. (2005). Quasi-maximum likelihood estimation for a class of continuous-time long-memory processes, *Journal of Time Series Analysis*, **26**(5), 691–713.
- Whittle, P. (1953). Estimation and information in time series analysis, *Arkiv för Matematik*, **2**(5), 423–434.

Whittle Estimation for High-frequency Data

Masaaki Fukasawa^{1,2}¹Graduate School of Engineering Science, Osaka University²Center for Mathematical Modeling and Data Science, Osaka University

In this paper, we consider a statistical estimation problem of the diffusion term of a continuous Itô process based on high-frequency data. This problem has been extensively studied in the literature, where it has been typically assumed that the Itô process itself is observed discretely. In particular, it is well-known that a quasi-likelihood based on the Euler-Maruyama approximation yields an asymptotically efficient estimator. Here, we study the case where the Itô process is hidden but its integrated process is observed at high-frequency. It is known that a naive method that simply uses numerical derivatives of observed integrated processes results in an inconsistent estimation. We prove a central limit theorem for quadratic forms of first-order differences of the numerical derivatives. Using Whittle's approximation of the inverse of a covariance matrix, we construct a consistent estimator of the quadratic variation of the Itô process of which the asymptotic variance is smaller than those of previously proposed estimators.

東京証券取引所における高速な注文反応の分析

田代 雄介[†]・川口 宗紀[†]

(受付 2016 年 7 月 15 日；改訂 12 月 27 日；採択 2017 年 1 月 23 日)

要 旨

近年の株式市場では、高頻度取引の存在感が世界的に増している。東京証券取引所でも、高頻度取引のシェアは年々増加してきている。また、2015 年 9 月には売買システムがリニューアルされ、より高速な取引が可能になった。本稿では、東京証券取引所における高頻度な注文行動を分析するために、直前の注文との時間間隔が短い注文に注目し、その特徴について議論する。また、時間間隔が短い注文の原因となる高速な注文反応がリニューアル前後で変化したのかについても合わせて言及する。分析の結果、短間隔で発注される注文は成行注文のようなインパクトの大きな注文後に連続しやすいこと、特にリニューアル後においてこの傾向が高まっていることなどが分かった。また、異なる注文タイプ間の注文反応を多次元 Hawkes 過程でモデル化し、その推定を行ったところ、注文に瞬時に反応する参加者と 10 ミリ秒程度遅れて反応する参加者がいることが観察された。特に後者の参加者について、リニューアル後における一部の注文タイプの発注頻度の向上、銘柄の板の特徴量に応じた注文行動の変化、といった注文行動の特徴を発見した。

キーワード：マーケット・マイクロストラクチャー、高頻度取引、注文行動、多次元 Hawkes 過程。

1. はじめに

近年の株式市場では、高頻度取引(HFT)と呼ばれる高速な取引が世界的に存在感を増している。日本では、2010 年 1 月に arrowhead と呼ばれる高速な株式売買システムが東京証券取引所に導入されたのを機に、高頻度取引のシェアが伸びている。現在では売買代金の 40%程度が高頻度取引を実現するためのコロケーションサービスを通して発注されていると言われている。こうした高頻度取引の台頭、コンピュータの発展による機械的な取引の増加などに伴い、市場での注文行動もまた変化してきている。

高頻度取引が市場に与える影響については、新井(2012)、宇野・柴田(2012)、中山・藤井(2013)など日本でも多くの研究が行われている。一方で、東京証券取引所における高頻度取引の注文行動に関する実証分析は多くない。これは、どの注文が高頻度取引で出されたものかを入手可能なデータから特定するのが難しいためである。注文行動を分析した先行研究としては、保坂(2014)が売買参加者別に割り当てられた仮想サーバのデータを用いて高頻度取引による注文を推定し、高頻度取引の注文の特徴を示している。また、川口・田代(2015)は隣り合う注文の時間間隔に注目し、時間間隔が短い注文を高頻度取引によるものと推定することで、高頻度取引の特徴を分析している。

[†]株式会社三菱 UFJ トラスト投資工学研究所：〒 107-0052 東京都港区赤坂 4-2-6

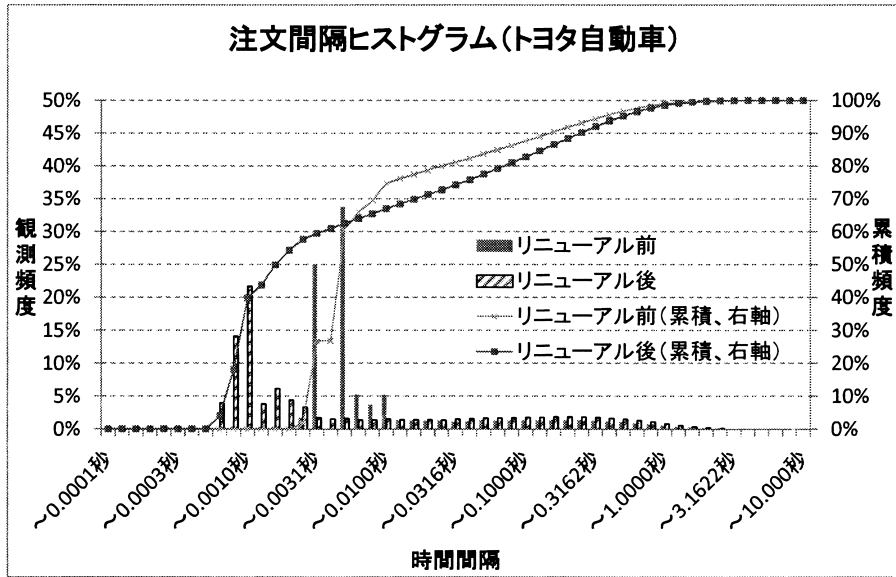


図 1. 売買システムのリニューアル前後における、トヨタ自動車株で生じた注文の時間間隔のヒストグラム。横軸は注文の時間間隔(対数スケール)、縦軸はその時間間隔で観測された注文の割合を表す。また、集計期間は 2015 年 7 月 1 日~2015 年 12 月 29 日である。

本稿は川口・田代 (2015) と同様に注文の時間間隔(注文間隔)に注目し、注文速度を意識した高速な注文を行う売買参加者の注文行動を捉えるための実証分析を行う。川口・田代 (2015) と異なる点の 1 つは、売買システムの変更注目した分析を行っている点である。東京証券取引所では、2015 年 9 月に売買システムのリニューアルが行われ、注文処理速度が高速化した。その影響の一例として、図 1 にトヨタ自動車株における注文の時間間隔のヒストグラムを示した。図 1 から、数ミリ秒以下の短い間隔で出される注文が、システムのリニューアル後により短い間隔で発注されるようになってきていること、それ以外の頻度分布に大きな違いはないことが見てとれる。これは、短い時間間隔で出される注文の多くが、偶然短い間隔になったのではなく、直前の注文に素早く反応した発注である、すなわち高速性を意図した発注であることを示している。本稿では、短い間隔の注文の特徴を示すとともに、リニューアルの前後で注文行動に差異が表れたのかを分析する。

川口・田代 (2015) と異なるもう 1 点は、成行、指値といった注文タイプ別に注文間隔を分析している点である。直前の注文に素早く反応する参加者は、全ての注文に反応するのではなく、特定の注文に反応し、売買アルゴリズムにしたがった行動をとっていると考えられる。そこで、注文タイプ別に注文間隔を分析することで、注文に反応する参加者の注文行動の特徴を捉える。

以下に、本稿の構成について記す。まず 2 章では、注文行動を理解する上で必要となる、東京証券取引所の売買制度や、マーケットの参加者について整理を行う。3 章では、高頻度取引や注文行動についての先行研究について述べる。続く 4 章で、分析に用いるデータならびに注文の分類について述べる。5 章で分析結果を示す。分析結果は大きく 2 つに分かれる。まず前半で、直前の注文との時間間隔が短い短間隔注文に注目し、短間隔注文の特性や、リニューアル前後での差異について述べる。後半では、注文タイプ別に注文間隔を分析し、タイプ毎の特徴的な注文行動を示す。6 章でまとめと今後の課題について述べる。

2. 売買システムと売買参加者

本節では、東京証券取引所の注文行動を理解する上で重要となる、売買システムならびに売買参加者について整理を行う。

2.1 東京証券取引所の売買システム

本節では、東京証券取引所(以下、東証)の売買システムについて、注文速度の観点からまとめる。内容は東証が公開している情報に基づいている。

東証では、2010年1月に arrowhead と呼ばれる株式売買システムが導入され、東証内部での注文応答時間、外部への板や注文の情報配信時間が高速化された。また、2015年9月24日の arrowhead リニューアルにより処理能力が向上し、注文応答時間、情報配信時間はさらに高速化した。リニューアル前後の処理速度を比較したのが表1であり、リニューアルにより処理時間が半分以下に短縮されたのが見てとれる。

現在の東証の売買において重要な役割を果たしているのが、コロケーションサービスである。コロケーションサービスは、東証のプライマリーサイト内にあるコロケーションエリアに、売買参加者や情報ベンダーの機器を設置できるサービスである。コロケーションエリアを利用する売買参加者は、設置した機器にあらかじめ売買アルゴリズムを設定しておくことで、外部への情報配信時間を待たずに売買を行うことが可能になる。また、コロケーションエリアと arrowhead との間では片道4.7マイクロ秒で通信を行うことができる。そのため、高頻度取引を行う参加者はコロケーションを利用することで高速な売買を実現できる。

コロケーションサービスとは別に、東証は、プロキシミティサービスと呼ばれるサービスも提供している。これは、東証内部にあるアクセスポイントに機器を設置することで、売買システムとの通信時間を260マイクロ秒程度に短縮可能とするサービスである。プロキシミティサービスはコロケーションよりは遅いが、利用することでそれ以外の一般の売買参加者よりは高速な注文が実現できる。

コロケーションサービス利用者と一般の売買参加者の注文フロー、ならびにコロケーションが注文速度に与える影響を図示したのが図2である。コロケーションを利用した売買参加者は、市場の変化に対し数マイクロ秒で反応し、アルゴリズムに従い注文を出すことができる。一方、サービスを何も利用しない一般の売買参加者は、情報を受け取るまでに1ミリ秒以上の所要時間を必要とするため、市場変化に対し反応して発注するのに時間がかかる。東証による情報伝達時間以外の物理的な通信距離なども考慮すると、市場変化に反応して発注された注文がシステムに到着するまでには少なくとも数ミリ秒は要すると考えられる。なお、リニューアル前後で比較すると、注文応答時間、情報伝達時間が短縮されたことにより、コロケーション利用者、それ以外の売買参加者ともに市場変化から注文到着にかかる時間は短縮されているといえる。

2.2 売買参加者と注文行動

市場にどのような売買参加者がいるのか、またそれぞれがどのような注文行動をとっている

表1. リニューアル前後での注文処理時間の差異。数値は東京証券取引所ホームページ(URL: <http://www.jpx.co.jp/corporate/news-releases/0060/20150924-01.html>)を参照した。

| | リニューアル前 | リニューアル後 |
|--------|-----------|----------|
| 注文応答時間 | 約1.0ミリ秒 | 0.5ミリ秒未満 |
| 情報配信時間 | 約2~2.5ミリ秒 | 1.0ミリ秒未満 |

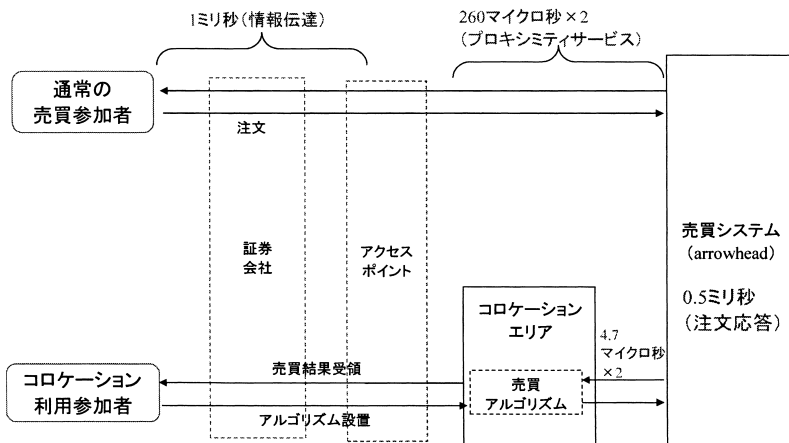


図 2. コロケーションサービス利用者とそれ以外の売買参加者の注文フロー，ならびにコロケーションサービスが注文速度に与える影響。図中の所要時間はリニューアル後の数値を用いている。東京証券取引所ホームページ (URL: <http://www.jpx.co.jp/systems/network/>) を元に作成。

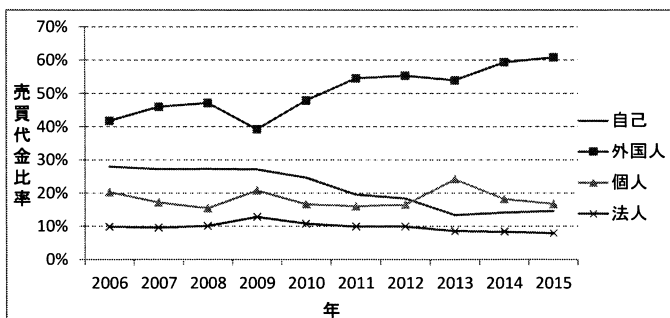


図 3. 東京証券取引所の売買主体別の売買代金比率。図中の「自己」は自己売買を行う参加者を表す。データは東京証券取引所ホームページ (URL: <http://www.jpx.co.jp/markets/statistics-derivatives/sector/>) を参照した。

かを知るのは、注文行動を分析し理解する上で重要である。本節では、売買参加者と注文行動について整理を行う。

市場における売買主体は、証券会社自身による売買(自己売買)を行う参加者と、証券会社が仲介する売買(委託売買)を行う参加者に分けられる。委託売買を行う参加者の中でさらに、個人で売買を行う個人投資家、顧客から預かった資金を運用するような金融機関や企業で構成される法人投資家、海外から注文を行う外国人投資家などに分類される。図3からは、外国人投資家の売買シェアが非常に高いことが見てとれる。コロケーションを通じた売買シェアが40%程度あることから、ある程度の外国人投資家はコロケーションを利用していると考えられる。外国人投資家は投資地域による分類であり、その中身はヘッジファンド、年金基金など複数の主体から構成されるため、どの主体がコロケーションを利用しているかは分からない。ただし外国人投資家のうち、個人の割合は1%以下であり、ほとんどが法人であることは東証のデータで示されている。

以下では国内投資家の属性に基づいて、各投資家の特徴を見ていく。特に高速売買に関係する注文に焦点を当てて見ていく。

個人投資家は、各個人が売買を望む銘柄に対する注文を証券会社に発注する。選択できる注文方法は証券会社毎に異なるが、多くの証券会社では、即時に市場に指値または成行注文を発注する通常注文以外に、引け注文のような時間を指定した注文、株価をトリガーとする逆指値注文などを選択できる。このうち、高速売買との関係が強いのは逆指値注文である。逆指値注文は、株価をトリガーとして予め発注してあるため、株価が指定した価格に達したら即座に自動的に執行される。そのため、注文の応答速度が高速化することの影響を受けると考えられる。実際、個人向け証券会社の一部はコロケーションサービスを導入するなどの動きをとっている。だが、そのような一部注文を除けば、個人投資家の注文のコロケーション利用率は低い。

法人投資家は、年金基金、投資信託、ヘッジファンド、プロップファーム(自己資金による運用会社)など数種類の投資家にさらに分けられる。このうち年金基金、投資信託などは長期的な運用を行う投資家である。彼らの売買の特徴の1つに、一回の注文金額が大きいことが挙げられる。市場流動性に比べて大きい金額の注文を一度に市場で執行しようとする、マーケットインパクトにより不利な価格で約定することになる。そのため、機関投資家が注文執行する際には、注文を分割して少しずつ市場に発注する方法、市場には発注せず証券会社を介して相対で売買する方法、などがよく取られる。このうち高速取引と直接関係するのは、前者の分割発注である。分割発注は、現在では証券会社が提供するアルゴリズム取引で行われることが多い。アルゴリズム取引については杉原(2011)などに詳しい。

アルゴリズム取引での1件1件の売買は、売買目的に応じて予め設定されたアルゴリズムに基づいて自動的に行われる。そのため、逆指値のような発注ロジックがアルゴリズムに含まれていれば、やはり注文の応答速度が高速化することの影響を受けると考えられる。特に、最良気配の変化に応じて機動的に注文を変化させる peg 取引などは、ある注文に反応して注文を出すことが多いと考えられるため、高速化の影響を受ける。アルゴリズム取引がコロケーションを通して行われているかどうかは、アルゴリズムを提供する証券会社次第であり、不明である。だが、高速売買ではなく分割発注を目的とすることを考慮すると、アルゴリズム取引を利用して長期的な運用を行う投資家のコロケーション利用率は高くはないと考えられる。

一方、ヘッジファンドやプロップファーム(自己資金による運用会社)は、年金基金などよりも機動的な売買を行う。例えば、上昇トレンドにある株式を短期で売買し、株価上昇の利益を得るような取引が挙げられる。彼らの中には、高頻度取引を中心とした運用会社もある。高頻度取引の戦略については Gomber et al. (2011)などで述べられているが、詳しい実態は分かっていないものも多い。その中で有名な戦略としては、マーケットメイク戦略、統計的裁定取引戦略などがある。このうち、マーケットメイク戦略は売り買い両側の指値注文を発注して市場に流動性を供給し、スプレッド分の利益を得る手法である。マーケットメイク戦略においては、同戦略をとる他の投資家に対していかに先んじて注文を出すか、という注文速度の優劣は非常に重要であり、したがって応答速度高速化の影響は非常に大きいといえる。また、高頻度取引を行う運用会社のコロケーション利用率は当然非常に高いと予想される。

自己の投資家は、自己資金で売買を行う証券会社のディーラーである。売買の目的としては、証券会社が顧客と売買するための株式の在庫管理、短期的な取引によるキャピタルゲイン獲得などが挙げられる。個々の売買については、マーケットメイクなど複数の戦略をとっていると考えられる。

以上をまとめると、高頻度取引以外の売買参加者もアルゴリズム取引を行っており、注文に対して高速に反応する注文は高頻度取引だけではないことが分かる。ただし、コロケーションサービスの利用有無によって、その反応速度は異なると考えられる。なお、世の中ではコロケー

ションサービス = 高頻度取引, といった文脈でコロケーションが語られることも多いが, 上で述べたようにそれ以外の参加者もコロケーションを用いている可能性があることに注意されたい。

3. 先行研究

本稿は, 高頻度取引に関する注文行動について分析を行う。そこで本節では, 高頻度取引ならびに注文行動について, 先行研究との関係を述べる。本稿で分析対象とする短い時間間隔で出される注文は, 高頻度取引と関係がある可能性が高い。そこで本節では, 高頻度取引ならびに注文行動について, 先行研究との関係を述べる。なお, 本稿における高頻度取引は, 保坂 (2014) でまとめられているような特徴を有する注文を指している。

まず, 高頻度取引に関する先行研究について整理する。1章で述べたように, 高頻度取引の研究における難しい点の1つは, 分析対象となる高頻度取引による注文がどの注文であるかを判断する方法である。1つのアプローチとして, 各注文が高頻度取引かどうかの ID がついたデータを用いる方法が挙げられる。例えば, NASDAQ のティックデータには注文主体を示す ID がついており, 高頻度取引業者による注文を特定した分析が可能となっている。また, 保坂 (2014) や Bellia et al. (2016) では発注者が用いたサーバーの ID が付与されたデータを用い, サーバーを通した注文の特性から高頻度取引を定義している。しかし, こうしたデータは必ずしも入手可能ではない。

別のアプローチとしては, 高頻度取引として出されている注文を何らかの方法で推定することが挙げられる。こちらは, 高頻度取引の特徴に基づいて代替指標を作成したり, 各注文を分類したりすることによって, 挙動を分析するアプローチである。例えば Hasbrouck and Saar (2013) は, 高頻度取引によるアルゴリズムが生じさせていると思われる売買注文の列 (strategic runs) に注目した。彼らは, 指値とキャンセルとが短期間のうちに繰り返される現象があることを発見し, これを strategic runs と呼んだ。そして, strategic runs の多さを高頻度取引の多さの代替指標として分析を行った。

Latza et al. (2014) では直前の売買との取引間隔に注目し, その売買行動について分析している。彼らは 50 ミリ秒以下の取引を fast, その中でも約定したものを fast aggressive trade と定義した。分析の結果, fast trade はそれ以外の取引よりも売買コストが小さく, 恒久的な価格インパクトをもたらさないという結果を得ている。また, fast trade の一部が価格操作をしている可能性があるとして述べている。川口・田代 (2015) では, 直前の注文との間隔によって注文を分類し, 直前の注文との間隔が短い注文が価格変化時の価格インパクトを増幅させるトレンドフォロワ的な傾向があることなど, 高速な注文の特性を分析している。本稿もこのアプローチに従っている。

次に, 注文行動に関する先行研究について述べる。投資家の注文行動に関する先行研究は古くから行われており, 例えば Hasbrouck (1991) は過去の注文の売買方向が価格リターンにどのような影響を与えるかを, VAR モデルを用いて分析している。こうした注文行動に関する分析は, データが充実してきた近年になって特に研究が進んできている。

近年の研究の流れの1つに, 注文タイプの拡張, 過去のフローのモデルへの導入などにより, より現実の事象を捉えるアプローチがある。Eisler et al. (2012) は成行注文以外に指値注文, キャンセル注文も市場イベントとして定義し, そのフローが価格に与える影響を分析している。Cont et al. (2013) も成行注文, 指値注文, キャンセル注文のデータを用いて, オーダーフローの偏りと価格変化との関係を分析している。Taranto et al. (2016a, 2016b) では, 成行注文を価格変化を起こす注文とそれ以外に分け, 価格インパクトに与える差異を分析している。

また, オーダーフローの影響を Hawkes 過程を用いて表現するアプローチも近年盛んである。

実証研究も活発に行われており、Bacry and Muzy (2014), Bacry et al. (2016)は多次元 Hawkes 過程のノンパラメトリックな推定方法を提案し、成行注文、指値注文など複数の注文タイプの相互作用を分析している。Toke and Pomponio (2012)は trades-through と呼ばれる大きなサイズの成行注文の影響を Hawkes 過程でモデル化している。Rambaldi et al. (2016)は、注文のボリュームに応じた注文影響力の違いを多次元 Hawkes 過程を用いて分析している。Martins and Hendricks (2016)は、多次元 Hawkes 過程のパラメトリックなモデル化を行い、価格変化指値注文、成行注文など複数の注文タイプの相互作用について推定や検定を行っている。本稿では、Hawkes 過程を用いた注文タイプ間の時間間隔についての実証分析を行い、東証における注文行動の特徴を明らかにする。

4. データ

本節では、分析に用いるデータならびに注文分類について説明する。

4.1 データ

本稿では、東証が提供している FLEX Full ヒストリカルデータを用いる。データには、各日における各銘柄の板の変化情報が、変化が起こる毎に記録されており、市場の開始時点から順にデータを追っていくことで各時点の全ての価格の板を再現可能である。対象とするデータ期間は 2015 年 7 月 1 日～12 月 29 日の 121 日間であり、arrowhead がリニューアルされた 9 月 24 日の前後でデータを分ける。以下では、2015 年 7 月 1 日～9 月 18 日(56 日間)を Pre 期間、9 月 24 日～12 月 29 日(65 日間)を Post 期間と呼ぶことにする。

データに記録されている主な情報としては

- 時刻
- 板が変化した価格
- 板の変化後の注文数量
- 約定量
- 約定価格

がある。時刻については、Pre 期間ではミリ秒単位、Post 期間では 100 マイクロ秒(0.1 ミリ秒)単位で記録されている。

同一時刻に複数の注文が同時に処理されることは、寄り引けなどの例外的なケースを除いては存在しない。したがって、隣り合う注文の最短の時間間隔は、Pre 期間では 1 ミリ秒、Post 期間では 0.1 ミリ秒となる。また、データには寄り前や寄り付きを含む全注文が記録されているが、本稿ではザラ場中のデータのみを分析対象とする。

データの特徴の 1 つとして、最良気配だけでなく、全ての板情報が含まれていることが挙げられる。そのため、指値注文が出されたとき、その注文が新規に出されたものなのか、すでに発注していた注文を修正したものなのかを区別することが可能である。

一方で、ID 情報など注文を誰が出したかを特定できる情報はデータに含まれない。また、板の変化情報しか含まれないため、注文が約定したとき、その注文が価格を指定して出された指値注文として発注されたのか、価格を指定しない成行注文として発注されたのかも、原則として区別できない。そのため本稿では、上記のように発注されて即座に約定した注文は全て成行注文と見なし、それ以外で板数量を増加させた注文を指値注文と便宜上呼ぶことにする。

最後に分析対象銘柄について述べる。分析対象銘柄は、TOPIX500 に含まれる銘柄のうち、期間中に上場廃止がなく、かつ分析期間中に呼値単位の変更が起らなかった銘柄のみとする。

表 2. 分析対象銘柄の特徴量の銘柄間分布. 分析対象 377 銘柄について, 平均値やパーセントイル点を計算している.

| | Pre 期間 | | | Post 期間 | | |
|----------|--------|-------|--------|---------|-------|--------|
| | スプレッド | デプス | ティック数 | スプレッド | デプス | ティック数 |
| 平均値 | 1.89 | 6.13 | 39602 | 1.76 | 7.08 | 41522 |
| 最小値 | 1.00 | 1.25 | 2688 | 1.00 | 1.48 | 4018 |
| 最大値 | 8.21 | 57.09 | 582395 | 6.93 | 85.22 | 493197 |
| 25%ile 点 | 1.34 | 2.73 | 13450 | 1.28 | 3.03 | 14238 |
| 50%ile 点 | 1.66 | 3.94 | 22889 | 1.55 | 4.33 | 24638 |
| 75%ile 点 | 2.09 | 6.36 | 43188 | 1.96 | 6.90 | 49413 |

ここで呼値についての制約を課すのは, 注文行動がスプレッドや板の厚さに影響を受けるためである. 呼値単位が変わると, その銘柄のスプレッドや板の厚さも大きく変化するため, 比較が難しくなる.

呼値単位は株価の価格帯に応じて定められているため, 株価が大きく変化すると呼値単位も変わる. また, TOPIX100 に属する銘柄については, リニューアルと同時に一部の価格帯で呼値単位変更が行われている. これらに注意して呼値単位の変更銘柄を除外した結果, 377 銘柄が分析対象銘柄となった.

表 2 に, 分析対象銘柄の特徴量分布を示した. 特徴量の定義を以下に述べる.

- スプレッド: 「ビッドアスクスプレッド(単位: 円) ÷ 呼値単位」の平均値(時間加重). ビッドアスクスプレッドが呼値単位の何倍かを表す指標である.
- デプス: 「最良気配数量 ÷ 平均約定サイズ」. ここで, 最良気配数量は売り買いそれぞれの最良気配数量の平均を時間加重したものであり, 平均約定サイズは約定数量の 1 回あたり平均値である. この指標は, 板の厚さが約定何回分に相当するかを表す.
- ティック数: ティック数の 1 日あたり平均値. ここで, ティック数はザラ場中に板が更新された回数を表す.

表 2 からは, Post 期間において平均的にスプレッドが低下し板が厚くなっていることが見てとれる. これは, Post 期間において流動性供給行動がより強まった可能性を示している. ただし, スプレッドが低下した要因として, Pre 期間と Post 期間での相場環境の違いの影響なども考えられるため, この結果だけからリニューアルによる高速化が流動性供給行動に変化を与えたかどうかを判断することは難しい.

4.2 注文分類

本稿では, 成行注文, 指値注文といった注文の種類に注目した分析を行う. ここでは, その準備として, 注文タイプを定義し注文进行分类する.

まず注文を, 最良気配の価格または数量に変化を及ぼす注文かどうかで分類する. 最良気配に影響しない注文は, 先行研究では分析対象外として扱われないことが多い. だが, この注文を除外すると, 注文間隔に影響が出てしまう. そこで, 本稿では最良気配に影響しない注文を「その他注文」と定義し, 1 つの注文タイプとして扱う.

次に, 残った注文を売り買いの 2 種類に分ける. その上で, 売り買いそれぞれを成行変化, 成行, 指値, キャンセルの 4 種類に分類する. ここで, 「成行変化」は成行注文のうち, 事前と事後で最良気配価格が変化する注文と定義する. 売り成行注文の場合はビッド価格を変化させる注文, 買い成行注文の場合はアスク価格を変化させる注文が「成行変化」注文となる. 「成行」

は「成行変化」でない成行注文と定義する。このように成行注文を2種類に分けるのは、「成行変化」注文が板に特に大きな影響を与える注文であるためである。この分類は先行研究でもよく見られる。「成行変化」注文後は、短間隔注文を出す売買参加者の反応も他注文が出た後より強まることが予想される。以上、 $2 \times 4 + 1 = 9$ 種類の分類で分析を進める。

5. 分析結果

5.1 短間隔注文の特性

本節では、直前の注文との時間間隔が短い「短間隔注文」の分析を通して、高速な注文行動の特性、リニューアルの影響などを示していく。まず、分析準備として、短間隔注文を定義する。冒頭に示した図1のトヨタ自動車株の注文間隔ヒストグラムを見ると、Pre 期間、Post 期間ともに注文間隔が0.01秒程度を超える付近まで、それ以降の注文間隔より極端に高い頻度の山が見てとれる。この傾向は、他の銘柄で確認しても同様である。そこで、本稿では直前との注文が0.02秒(=20ミリ秒)以内の注文を「短間隔注文」と定義し、両期間とも短間隔を意図した注文が「短間隔注文」に含まれるようにする。ここで、0.02秒という閾値は、短間隔を意図した注文が漏れないようやや大きめに、かつキリがいい値を選んだ結果である。また上記の短間隔注文の定義は、注文参加者別の反応速度も考慮している。2.1節で見たように、コロケーションを利用しない通常の売買参加者がある注文に反応して注文を出すためには、少なくとも数ミリ秒必要である。短間隔注文の注文間隔の閾値を0.02秒に設定することで、コロケーションを利用しない売買参加者の反応もある程度捉えることができると考えられる。

このように定義した短間隔注文は、主に3種類の注文を含むと考えられる。1つは、本稿での研究対象である、直前の注文に高速に反応した注文である。次に、同一主体による連続注文も短間隔注文に含まれる。例えば、Hasbrouck and Saar (2013)で言及されているような短期間に連続する指値とキャンセルは、同一主体による注文である可能性が高い。最後に、偶然短間隔になった注文もまた短間隔注文に含まれる。本分析で用いるデータでは、これら3種類の注文を区別することは難しい。だが、図1の分布形状や東証の売買システムの速度をふまえると、高速な反応を意図した注文の大半は短間隔注文に含まれているであろう。そこで本稿では、短間隔注文の分析を通して、高速な注文反応の特性を捉える。

はじめに、短間隔注文の比率について見ていく。表3は、注文全体に占める短間隔注文の比率を分析対象銘柄について計算し、銘柄間の分布を示したものである。どちらの期間でも、多くの銘柄で短間隔注文の比率は50%以上と高い。どのような銘柄で短間隔注文がより起こりやすいかを確認するため、Pre 期間、Post 期間それぞれについて、短間隔注文の比率を被説明変数、銘柄の特徴量を説明変数として回帰分析を行う。この際、ティック数は極端な値をとる銘柄があるため、対数をとって回帰する。結果が表4である。Pre 期間、Post 期間ともにデプス

表3. 注文全体に占める短間隔注文比率の銘柄間分布。分析対象377銘柄について、平均値やパーセンタイル点を計算している。

| | Pre 期間 | Post 期間 |
|----------|--------|---------|
| 平均値 | 62.1% | 62.4% |
| 最小値 | 27.7% | 27.5% |
| 最大値 | 86.1% | 80.6% |
| 25%ile 点 | 57.2% | 57.9% |
| 50%ile 点 | 62.3% | 63.2% |
| 75%ile 点 | 67.7% | 68.6% |

表 4. 短間隔注文比率と銘柄特徴量の関係. カッコ内は t 値である. また, *の数是有意水準を表しており, *の数に応じてそれぞれ 10%有意, 5%有意, 1%有意を示す.

| | 切片 | スプレッド | デプス | ティック数 (対数) | R2 |
|---------|-------------------|---------------------|-----------------------|--------------------|-------|
| Pre 期間 | 0.15 (7.8***) | 0.0198 (10.1***) | -0.0062 (-22.7***) | 0.107 (24.4***) | 84.2% |
| Post 期間 | 0.21 (10.5***) | 0.0269 (11.9***) | -0.0056 (-27.0***) | 0.092 (20.9***) | 85.2% |

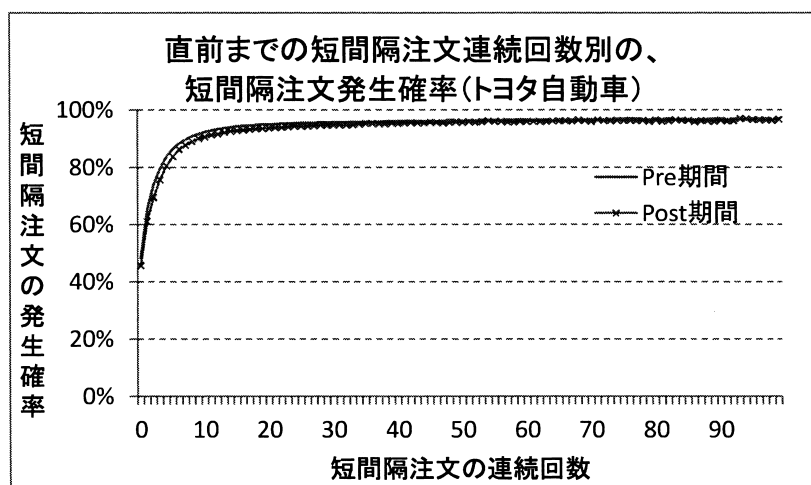


図 4. トヨタ自動車株における, 直前までの短間隔注文連続回数別の, 短間隔注文の発生確率. 横軸は直前までの短間隔注文連続回数, 縦軸は次の注文が短間隔注文である確率を表している.

が負に有意, スプレッドが正に有意であり, 板が薄くスプレッドが広い銘柄で短間隔注文比率は高い. これは, 板が薄くスプレッドが広い銘柄では, 板の変化頻度が多く, 注文速度がより重要視されるためだと考えられる. また, 表 4 からは, ティック数が大きな銘柄で短間隔注文比率は高いことも見てとれる. 全体の注文件数が多ければ, 短間隔注文比率が上がるのは自然な結果だといえる. これらの結果は川口・田代 (2015) と整合的である.

続いて, 短間隔注文の発注タイミングに注目する. 図 1 の注文間隔ヒストグラムを見ると, Pre 期間での 0.005 秒付近, Post 期間の 0.001 秒付近といった観測できる注文間隔の最小値近辺に短間隔注文が集中している. こうした集中が生じる理由の 1 つは, コロケーションの売買アルゴリズムが直前の注文に反応して注文を頻繁に出しているためだと考えられる. 別の理由として, 短期間の注文集中が頻繁に起こり, 注文が連続処理された結果, 1 つ 1 つの注文間隔が短くなっている可能性が挙げられる.

後者の注文集中の有無を確認するため, トヨタ自動車株における短間隔注文の連続性を見たのが図 4 である. 図 4 の横軸は直前までの短間隔注文連続回数, 縦軸は次の注文が短間隔注文である確率, すなわち短間隔注文の連続しやすさを表している. 例えば, 直前の 1 回だけが短間隔注文であり, 2 回前は短間隔注文でないとき, 次が短間隔注文である確率は約 60% である. 図 4 から, 短間隔注文が数回連続したとき, 次も短間隔注文が続く確率が非連続時に比べて大きく高まっており, 注文集中が起こっていることが確認できる. また, この短間隔注文の連続

表 5. 直前までの短間隔注文連続回数別の、短間隔注文の発生確率の銘柄間分布. 上の行の数字が直前までの短間隔注文連続回数を表しており、その条件下における短間隔注文の発生比率を銘柄毎に計算している. その上で、分析対象 377 銘柄について分布を計算している.

| | 短間隔注文の連続回数 | | | | | | | |
|---------|------------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|-------|
| | Pre 期間 | | | | Post 期間 | | | |
| | 0 | 1 | 2~10 | 11~50 | 0 | 1 | 2~10 | 11~50 |
| 平均値 | 38.0% | 54.1% | 81.9% | 93.4% | 39.2% | 53.5% | 81.5% | 93.6% |
| 最小値 | 12.5% | 33.9% | 75.6% | 88.5% | 14.5% | 25.0% | 69.7% | 88.3% |
| 最大値 | 52.8% | 67.8% | 87.9% | 97.7% | 53.9% | 66.2% | 85.6% | 97.8% |
| 25ile 点 | 34.7% | 51.3% | 80.6% | 92.5% | 35.2% | 50.8% | 80.3% | 92.8% |
| 50ile 点 | 39.3% | 54.7% | 81.9% | 93.4% | 39.9% | 53.9% | 81.7% | 93.7% |
| 75ile 点 | 42.4% | 57.7% | 83.3% | 94.2% | 44.6% | 57.4% | 83.2% | 94.3% |

表 6. 短間隔注文の連続性と銘柄特微量の関係. カッコ内は t 値である. また, *の数は有意水準を表しており, *の数に応じてそれぞれ 10%有意, 5%有意, 1%有意を示す.

| | 切片 | スプレッド | デプス | ティック数 (対数) | R2 |
|---------|--------------------|--------------------|---------------------|--------------------|-------|
| Pre 期間 | 0.80 (156.5***) | 0.0028 (5.5***) | 0.0016 (22.6***) | 0.026 (22.7***) | 70.8% |
| Post 期間 | 0.82 (143.2***) | -0.0001 (-0.2) | 0.0012 (19.6***) | 0.025 (20.2***) | 65.9% |

性は連続回数が増しても弱まることはない.

数回連続してから短間隔注文の発生確率が上昇する原因としては、多くの参加者が反応するような大きなインパクトのある注文とそうでない注文に、注文が二極化している可能性が考えられる. 前者の注文に数十回程度の多くの短間隔注文が集まり、後者に2~3回程度しか集まらなければ、数回連続してからの発生確率上昇が説明できる. また別の要因として、注文に対する参加者の反応速度の違いが挙げられる. 短間隔注文が数回連続したとき、少なくとも数ミリ秒が経過しており、コロケーションを用いない売買参加者の注文についても、起点となった注文に反応した注文がシステムに到着しうる. そのため、数期間後から短間隔注文がより連続しやすくなると考えられる.

分析対象全銘柄についても、同様の短間隔注文の連続性が確認されるかを確認したのが表 5 である. 短間隔注文が 1 回出ただけでは平均で 54.1%の継続性しかない一方、ほとんどの銘柄で 10 回以上続いた後の短間隔注文比率は 90%を超えており、Pre 期間、Post 期間ともに短間隔注文の連続性が観察される.

では、どのような銘柄でこのような連続性はより高いのだろうか. これを見るため、表 5 で示した 11~50 回連続時の短間隔注文比率を被説明変数、表 4 の回帰でも用いた銘柄特微量を説明変数として回帰を行ったのが表 6 である. まず、デプスの係数を見ると、Pre 期間、Post 期間ともにが正に有意であり、板が厚い銘柄ほど短間隔注文は連続しやすいといえる. この連続性の一因として、板の厚い銘柄では指値注文を発注する参加者がよりタイミングを計って発注する傾向があることが考えられる. 板が厚い銘柄では価格変化が起こりづらく、板が薄くなる時間、あるいはスプレッドが拡大する時間は他銘柄に比べて少ない. 指値注文を発注する参加者にとって、板が厚い平時は急いで発注しても後ろにしか並べないが、板が薄くなるような状況では急ぐことで板の先頭近くに発注することができるため、その数少ない瞬間を狙って発注

表 7. 短間隔注文と全注文の注文タイプ別構成比.

| | Pre 期間 | | | | | Post 期間 | | | | |
|-----|--------|----------|-------|-----------|-------|---------|----------|-------|-----------|-------|
| | 成行 | 成行 変化 | 指値 | キャン セル | その他 | 成行 | 成行 変化 | 指値 | キャン セル | その他 |
| 短間隔 | 3.1% | 2.2% | 24.5% | 16.3% | 53.9% | 3.2% | 2.1% | 24.6% | 16.4% | 53.6% |
| 全注文 | 2.6% | 2.7% | 22.1% | 16.7% | 55.9% | 2.7% | 2.5% | 21.9% | 16.7% | 56.1% |

表 8. 短間隔注文連続の起点となった注文タイプ別の、短間隔注文の平均連続回数.

| | Pre 期間 | | | | | Post 期間 | | | | |
|--------|--------|----------|-----|-----------|-----|---------|----------|-----|-----------|-----|
| | 成行 | 成行 変化 | 指値 | キャン セル | その他 | 成行 | 成行 変化 | 指値 | キャン セル | その他 |
| 平均連続回数 | 8.4 | 15.8 | 4.8 | 3.8 | 3.0 | 9.6 | 16.3 | 4.5 | 3.6 | 2.9 |

するインセンティブが強まる. このように注文が集中しやすいときとそうでないときがより区別されることで, 短間隔注文が連続しやすくなっていると考えられる. 次に, 表 6 でティック数が正に有意なのは, 全体の注文件数が多ければ短間隔注文の連続性も増すと考えられるので, 自然な結果である. スプレッドについては, Post 期間で有意でなく, 他の 2 変数よりも短間隔注文連続性への影響は小さい. スプレッドが有意でなくなった原因は定かではないが, 表 2 で見たように Post 期間においてスプレッドは全体的に縮小しており, 銘柄の差異を表現しづらくなっている可能性がある.

ここまで, 短間隔注文の比率や連続性について見てきた. 以下では, 短間隔注文を注文タイプで分類して比率や連続性を見ていくことで, 短間隔注文の注文行動をより詳細に分析する. 短間隔注文の注文タイプ比率を各期間について集計したのが表 7 である. なお, 売り買いの対称性が成り立っているため, 注文タイプの売り買いはまとめて集計している. 短間隔 (1 行目) と全注文 (2 行目) を注文タイプ別に比較すると, 短間隔注文における成行注文の比率が, Pre 期間, Post 期間でそれぞれ 3.1%, 3.2% であり, 全注文での 2.6%, 2.7% と比べて高いことが見てとれる. また指値注文についても同様に, 短間隔注文の方が比率が高い. 逆に, 短間隔注文における成行変化注文の比率は, Pre 期間, Post 期間でそれぞれ 2.2%, 2.1% であり, 全注文での 2.7%, 2.5% と比べて低い. これは, 成行変化注文が, 他の注文に反応して短間隔で発注されるよりも, 他の注文と関係なく単独で発注されやすいことを意味している. また Pre 期間と Post 期間での各注文タイプの比率を比較すると, どの注文タイプの差も 0.5% 以下であり, 数字上は大きくはない. だが表 2 で見たようにデータ数 (ティック数) が多いため, カイ 2 乗検定を用いて銘柄毎に Pre 期間と Post 期間の構成比の差を検定すると, 全ての銘柄で有意水準 5% で差があるという仮説が採択される. Pre 期間と Post 期間でのデプスの差などが注文行動にも影響して構成比に差が生じていると考えられる.

次に, 短間隔注文が連続する際の注文タイプを分析する. 具体的には, 連続の起点となる注文タイプ, その後に続く短間隔注文の注文タイプのそれぞれについて特徴を見ていく. 表 8 は, 短間隔注文の平均連続回数を, 連続する際の起点となった注文タイプ別に計算したものである. ここでも売り買いはまとめて集計している. まず注文タイプを比較すると, 成行注文, 成行変化注文が出た時の平均連続回数が他タイプの時よりも大きいことが見てとれる. 成行注文, 成行変化注文といった約定を起こす注文は, 最良気配の板を薄くし市場にインパクトを与える注文であり, その後に短間隔注文が続くやすいのは自然な結果だといえる. また, Pre 期間と Post 期間を比較すると, Post 期間では成行注文, 成行変化注文後の平均連続回数がそれぞれ 9.6 回,

表 9. 売り成行注文を起点とする短間隔注文連続時の注文タイプの構成比。起点から何回目の短間隔注文かで場合分けし、その条件下での構成比を示している。

| 起点からの回数 | Pre 期間 | | | | Post 期間 | | | |
|---------|--------|--------|------|--------|---------|--------|------|--------|
| | 売り成行 | 売り成行変化 | 買い成行 | 買い成行変化 | 売り成行 | 売り成行変化 | 買い成行 | 買い成行変化 |
| 1~1 | 9.8% | 18.4% | 0.9% | 0.3% | 9.8% | 16.0% | 0.9% | 0.2% |
| 2~3 | 6.2% | 6.9% | 0.7% | 0.3% | 6.6% | 6.6% | 0.7% | 0.3% |
| 4~5 | 4.3% | 3.6% | 0.7% | 0.5% | 4.5% | 3.5% | 0.6% | 0.5% |
| 6~10 | 2.6% | 2.1% | 0.9% | 0.8% | 2.7% | 2.0% | 0.8% | 0.7% |
| 11~20 | 1.3% | 1.2% | 1.3% | 0.9% | 1.3% | 1.1% | 1.1% | 0.9% |
| 21~30 | 1.1% | 1.1% | 1.3% | 0.9% | 1.0% | 1.0% | 1.4% | 0.9% |
| 31~50 | 1.3% | 1.1% | 1.4% | 1.0% | 1.2% | 1.0% | 1.4% | 0.9% |
| 無条件 | 1.3% | 1.3% | 1.3% | 1.3% | 1.3% | 1.3% | 1.4% | 1.3% |

| 起点からの回数 | Pre 期間 | | | | Post 期間 | | | |
|---------|--------|---------|-------|---------|---------|---------|-------|---------|
| | 売り指値 | 売りキャンセル | 買い指値 | 買いキャンセル | 売り指値 | 売りキャンセル | 買い指値 | 買いキャンセル |
| 1~1 | 18.1% | 2.2% | 4.5% | 12.0% | 19.0% | 3.0% | 4.6% | 13.9% |
| 2~3 | 24.5% | 2.3% | 6.3% | 12.5% | 23.8% | 2.7% | 6.1% | 13.4% |
| 4~5 | 22.2% | 2.5% | 6.7% | 13.9% | 22.2% | 2.5% | 6.1% | 14.2% |
| 6~10 | 17.6% | 2.6% | 6.9% | 15.7% | 18.2% | 2.5% | 6.1% | 15.4% |
| 11~20 | 14.2% | 3.3% | 5.8% | 15.9% | 14.3% | 3.0% | 5.4% | 15.9% |
| 21~30 | 13.9% | 4.1% | 5.5% | 12.8% | 13.7% | 3.9% | 5.0% | 13.5% |
| 31~50 | 14.8% | 5.2% | 6.1% | 10.5% | 14.8% | 4.9% | 5.4% | 11.0% |
| 無条件 | 11.1% | 8.3% | 11.1% | 8.4% | 11.0% | 8.4% | 10.9% | 8.3% |

16.3 回であり、Pre 期間での 8.4 回、15.8 回よりも大きい。逆に、それ以外の注文タイプでは、Post 期間の方が平均連続回数が小さい。高速化した Post 期間では、市場への影響が強い注文への短間隔での反応がより高まったといえる。

では、表 8 で観察された連続する短間隔注文は、どのようなタイプの注文で構成されているのだろうか。ここでは、成行注文を起点として連続する短間隔注文の注文タイプを分析する。起点を成行注文に限定するのは、表 8 での Pre 期間と Post 期間で平均連続回数の差が特に大きく、また分析したところ特徴的な連続パターンが観察されたためである。なお、連続する注文の注文タイプは起点の注文方向によって差異が大きく出ると考えられるため、起点の成行注文は売りに限定し、その後続く注文の注文タイプを売り買いを分けて確認する。

表 9 は、売り成行注文後に連続して出される短間隔注文の各注文タイプの比率を、「その他注文」以外の注文タイプについて示したものである。ここで、何回目に出された短間隔注文かで条件付けて、回数別に比率を計算している。まず注文タイプについて比較すると、両期間ともに短間隔注文が 1~10 回続く間の売り成行注文、売り成行変化注文、売り指値注文、買いキャンセル注文の比率が無条件時に比べて高いこと、その反対方向の注文タイプの比率が低下していることが分かる。起点となる注文直後の短間隔注文はコロケーションを利用している可能性が高く、コロケーションを利用した売買アルゴリズムが、起点となる注文に反応して、比率が高いタイプの注文を出していることを示唆している。一方、短間隔注文が 11 回以上連続する際の注文タイプに注目すると、売り指値注文、買いキャンセル注文の比率の高さ、反対方向の注文タイプの比率の低さが継続して観察される。すなわち、注文直後以外でも継続性が見られている。起点となる売り成行注文、それに続く売り指値、買いキャンセル注文はともに価格を押し下げる方向性の注文であり、短間隔注文が 50 回連続して出る間は、注文タイプについて価格に

対するモメンタム性が継続しているといえる。川口・田代 (2015) では成行変化注文後に短間隔注文が続くとき、価格変化がモメンタム性をもつことが示されているが、本結果は注文行動の観点から同様のモメンタム性を捉えている。なお、起点を買いの成行注文とした場合、売り買いを反転させた対称的な結果が観察される。

次に Pre 期間と Post 期間を比較する。買いキャンセル注文に注目すると、起点となる注文直後の数回の間、Post 期間の買いキャンセル注文比率がより高い。この Post 期間での買いキャンセル注文比率の高さは、起点から 21~50 回目の注文でも若干ではあるが観察される。キャンセル注文比率の高まりの理由は明確ではないが、注文反応速度が高速化したことで、あらかじめ指値を出しておき、市場変化時にキャンセルするような戦略を取りやすくなった可能性が考えられる。

5.2 注文タイプ別の注文間隔と注文行動の関係

前節の表 9 で見た短間隔注文の連続性分析で、短間隔注文連続時の注文タイプのモメンタム性の継続、Post 期間における売り成行注文後の買いキャンセルの高まり、といった現象が観察された。これらの現象は、連続して出された注文のうち、どの注文に起因するものだろうか。まず、最初の数注文は、起点の売り成行注文に反応して注文が出されたと考えられる。それ以後は、起点の注文ではなく、途中で出た短間隔注文に反応した可能性もある。

本節ではこのような参加者の反応を注文タイプ別に分離するため、2つの注文タイプの注文間隔に注目し、あるタイプの注文が出たときに別のタイプの注文が受ける影響を分析する。特に、表 9 で注文タイプのモメンタム性の継続が見られた、売り成行注文後の売り指値注文、買いキャンセル注文への影響を中心に分析する。本稿では、このような注文タイプの関係をフローと呼ぶこととし、売り成行 → 売り指値、売り成行 → 買いキャンセル、といったように矢印を用いて表現する。フローの分析では、連続した注文だけではなく、離れた注文の間隔も含めて注文間隔を計測する。これは、連続注文が起こるような時において別の注文を間に挟んだときの影響も見るとためであり、Bacry and Muzy (2014) などの先行研究でも同様の計測方法が用いられている。

はじめに、フローについての注文間隔の分布を確認する。売り成行 → 売り指値、売り成行 → 買いキャンセルのフローについて、タイプを満たす任意の 2 注文間の注文間隔を集計し、売り成行注文 1 件あたりの注文間隔毎の平均発生件数を計算して図示したのが図 5 である。ここで、発生件数をそのまま図示すると、横軸の時間スケールの影響を受けるため、1 秒あたりの発生件数に直した上で全銘柄平均をとっている。発生件数の水準が同じであれば、同程度の注文の出やすさであることを意味する。

図 5 を見ると、Pre 期間、Post 期間ともに売り成行注文が出た直後に売り指値注文、買いキャンセル注文の発生件数が急激に高まり、その後 0.01 秒程度の間は発生件数はあまり減衰していないことが確認できる。例えば売り成行 → 買いキャンセルの Post 期間では、0.02 秒程度経過するまで発生件数が減衰しない。これは前節の表 9 で見た、短間隔注文連続時における注文行動のモメンタム性の継続と整合的である。次に売り指値注文と買いキャンセル注文を比較すると、買いキャンセル注文の方が発生件数の減衰しはじめるタイミングが遅い。これは表 9 における、6~20 回短間隔注文が連続する時の買いキャンセル注文の比率の高さに対応している。また、売り指値注文、買いキャンセル注文ともに Pre 期間の方が継続時間が長いのは、1 件 1 件の注文処理にかかる最低時間の違いによるものだと考えられる。

以下では、多次元 Hawkes 過程によるモデルを用いて注文間隔を分析することで、上記のような注文タイプの持続性の背景にどのような注文行動があるのかを詳しく見ていく。

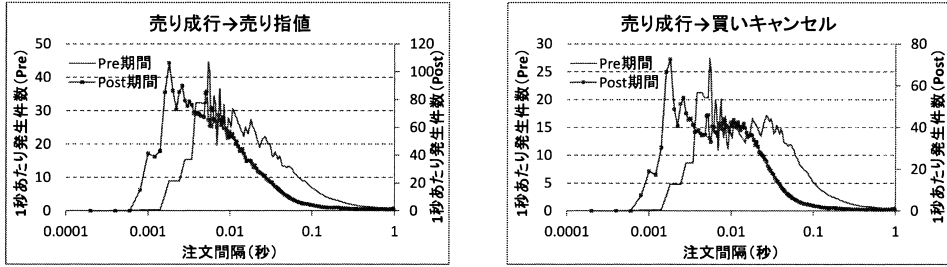


図 5. 売り成行注文が 1 件出た後の売り指値注文, 買いキャンセル注文の平均発生件数. 横軸は注文間隔(対数スケール), 縦軸は 1 秒あたりの平均注文発生件数である. また, Pre 期間と Post 期間の分布形状を比較しやすくするために, Post 期間の平均発生件数は右軸に表示している.

5.2.1 モデル

多次元 Hawkes 過程は, 注文タイプ別の注文発生確率が他のタイプの注文発生に受ける影響を表現可能な確率過程であり, 高頻度注文データに対する応用が近年活発に研究されている. またモデル推定の実証研究では, 3 章で述べたように, パラメトリックな推定手法, ノンパラメトリックな推定手法など複数の方法が提案されている. 本稿では, 注文が出た後に注文発生確率が一時的に低下するなど, パラメトリックな関数では表現することが難しい注文反応の挙動を捉えることも狙っている. そこで本稿の分析では, Bacry and Muzy (2014), Bacry et al. (2016) が提案しているノンパラメトリックな推定方法を用いる.

モデルならびに推定方法の概要を以下に述べる. まず, 多次元 Hawkes 過程を定義する. D 次元点過程 $N_t = (N_t^i)_{1 \leq i \leq D}$ の強度関数 λ_t が, 任意の $i (1 \leq i \leq D)$ について以下の表現で表れるとき, N_t を D 次元 Hawkes 過程と呼ぶ.

$$(5.1) \quad \lambda_t^i = \mu^i + \sum_{j=1}^D \int_{(-\infty, t)} \phi^{ij}(t-s) dN_s^j.$$

ここで, $\mu = (\mu^i)_{1 \leq i \leq D}$ は外生強度, $\phi = (\phi^{ij})_{1 \leq i, j \leq D}$ は Hawkes カーネル行列であり, それぞれ $\mu^i \geq 0, \phi^{ij}(t) > 0$ を満たす. 本稿において D は注文タイプの数であり, λ_t^i は時刻 t における注文タイプ i の発生強度をモデル化したものである. また, ϕ^{ij} は注文タイプ j が起きた後の注文タイプ i の発生確率の高まりやすさを意味しており, 注文タイプ i の発生強度 λ_t^i がタイプ i 以外の注文発生から受ける影響も表現できるモデルとなっている. 例えば, 成行注文が出た後のキャンセル注文の発生確率の高まりなどが本モデルで表現可能である.

次に, Hawkes 過程の conditional law $g = (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq D}$ を以下のように定義する.

$$(5.2) \quad g^{ij}(t) dt = E[dN_t^i | dN_0^j = 1] - \mathbf{1}_{\{i=j\}} \delta(t) - \Lambda^i dt.$$

ここで, $\Lambda^i = E[\lambda_t^i]$ であり, $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である. g は図 5 で見た平均注文発生件数に対応している.

このとき, conditional law g をもつ Hawkes 過程のカーネル ϕ は, 任意の $t > 0$ について以下の Wiener-Hopf 方程式

$$(5.3) \quad g(t) = \phi(t) + (g * \phi)(t)$$

の唯一解となることが Bacry and Muzy (2014) で示されている. また, カーネルの各要素 ϕ^{ij} の

L^1 ノルムを $\|\phi^{ij}\|_1 = \int \phi^{ij}(t)dt$ と定義するとき、その行列

$$(5.4) \quad \|\phi\| = (\|\phi^{ij}\|_1)_{1 \leq i, j \leq D}$$

のスペクトル半径が 1 未満であるならば、その Hawkes 過程 N_t は漸近的に定常な増分をもち、 ϕ, μ について

$$(5.5) \quad \Lambda = (I_D - \|\phi\|)^{-1} \mu$$

が成り立つ。ここで、 $\Lambda = (\Lambda^i)_{1 \leq i \leq D}$ であり、 I_D は D 次元単位行列である。

以上のモデルの推定には、Bacry and Muzy (2014), Bacry et al. (2016) で提案されているノンパラメトリックな推定手法を用いる。これは t に関する線形補間を用いた手法である。推定アルゴリズムを以下に記す。

(1) 線形補間のための時間刻みを以下のように定める。

$$(5.6) \quad \{t_k\}_{1 \leq k \leq K} = \{0, \delta T_1, 2\delta T_1, \dots, T_1, T_1 e^\delta, T_1 e^{2\delta}, \dots, T_2\}.$$

ここで、 T_1, T_2, δ は時間刻みのためのパラメータ、 K は $\{t_k\}$ の要素数である。直前の注文から $0 \sim T_1$ までの短い値域を線形間隔で刻み、 $T_1 \sim T_2$ までの長い値域を指数間隔で刻むことで、注文に対する短時間での挙動をより細かく捉える。

(2) 各イベントの発生時刻列 $\{T_l^i\}_{1 \leq l \leq n_i}$ ($1 \leq i \leq D$) を集計する (n_i はイベント i の発生総件数)。 (i, j) の各ペアに対し、定めた時間刻み毎に以下の式で g を推計する。

$$(5.7) \quad \begin{aligned} g^{ij} \left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2} \right) &\simeq \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} g^{ij}(t) dt \\ &\simeq \frac{1}{t_{k+1} - t_k} \frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{n_i} \sum_{m=1}^{n_j} \mathbf{1}_{T_l^i - T_m^j \in [t_k, t_{k+1})} - \Lambda^i. \end{aligned}$$

$(k = 1, 2, \dots, K - 1)$

ここで、 Λ^i はイベント i の 1 秒あたりの発生件数であり、 n_i を総時間で割ることで得られる。また、上記式の時刻以外の $g^{ij}(t)$ を線形補間で与える。

(3) 式(5.3)を離散化して得られる以下の ϕ に関する連立一次方程式を解き、 t_n における ϕ の推定値を得る。

$$(5.8) \quad \begin{aligned} g^{ij}(t_n) &= \phi^{ij}(t_n) + \sum_{m=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} \phi^{mj}(t_k) \int_{t_n - t_{k+1}}^{t_n - t_k} g^{im}(s) ds \\ &\quad + \sum_{m=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\phi^{mj}(t_{k+1}) - \phi^{mj}(t_k))(t_n - t_k)}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_n - t_{k+1}}^{t_n - t_k} g^{im}(s) ds \\ &\quad - \sum_{m=1}^D \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\phi^{mj}(t_{k+1}) - \phi^{mj}(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \int_{t_n - t_{k+1}}^{t_n - t_k} s g^{im}(s) ds. \end{aligned}$$

$(n = 1, \dots, K)$

また、 t_n 以外における $\phi^{ij}(t)$ を線形補間によって得る。

(4) 式(5.5)に ϕ, Λ を代入し、 μ の推定値を得る。

ここまで Hawkes 過程でのモデル化、推定手法について述べてきた。Hawkes 過程では ϕ が正値をとる。だが、市場で見られる注文行動の中には、あるタイプの注文が出たことで、別のタ

イブの注文が出にくくなるケースも存在しうる。このような場合、カーネル ϕ はある t において負値をとる。Hawkes 過程に対して提案されている推定手法の中には、負値のカーネルをとる点過程に適用しても正のカーネルしか返さないような推定手法も存在する。だが、本稿で用いる推定手法は、式(5.1)の右辺が負になる確率が無視できるくらいに小さければ信頼できる推定結果を与えることが、Bacry and Muzy (2014)で数値例とともに述べられている。なお、上記のようにカーネルが負値をとる場合は、強度関数が負値になるのを回避するため、Bacry and Muzy (2014)などの先行研究と同様に式(5.1)を

$$(5.9) \quad \lambda_t^i = \left(\mu^i + \sum_{j=1}^D \int_{(-\infty, t)} \phi^{ij}(t-s) dN_s^j \right)_+$$

と拡張して考える。ここで、 $(c)_+$ は c が非負のとき c 、負のとき 0 をとる。

5.2.2 推定結果：注文タイプと注文間隔

本節では前節で述べたモデルの推定結果について述べる。まず、分析パラメータについて述べる。注文タイプ数 D は、4.2節で定義した9種類である。時間刻み $\{t_k\}$ を決める式(5.6)のパラメータについては、データにおける最小の注文間隔である 0.1 ミリ秒から数ミリ秒までの挙動を細かく捉えるために、 $T_1 = 5.0 \times 10^{-3}$ とし、最大で 1 秒程度までの短間隔の挙動を捉えられるようにするため $T_2 = T_1 \times e^6 \simeq 2$ とした。また、刻み幅のパラメータ δ については小さくすることで計算精度が上がる一方、計算負荷も上がるため、両者を考慮して $\delta = 0.04$ と定めた。以上をまとめると、時間刻み $\{t_k\}$ は

$$(5.10) \quad \{t_k\} = \{0, 0.2 \times 10^{-3}, 0.4 \times 10^{-3}, \dots, 4.8 \times 10^{-3}, 5.0 \times 10^{-3}, 5.0 \times 10^{-3} \times e^{0.04}, \dots, 5.0 \times 10^{-3} \times e^6\}$$

となる。

続いて、主要な推定結果について述べる前に、推定したモデルの定常性を見るため、分析対象の各銘柄の推定結果が5.2.1節で述べた定常な増分をもつ条件を満たすかどうかを確認しておく。各銘柄についてカーネルの L^1 ノルムを $\|\phi^{ij}\|_1 = \int_0^{T_K} \phi^{ij}(t) dt$ で計算し、その行列のスペクトル半径を計算したところ、最大の銘柄でも 0.998 と 1 未満であり、全銘柄で条件を満たしていた。

以下では注文反応の挙動に注目するため、推定結果のうち、カーネル $\phi^{ij}(t)$ について議論する。多数の銘柄について分析を行っているため、個々の銘柄についてではなく、推定したカーネル $\phi^{ij}(t)$ の銘柄平均を示していく。また、カーネル $\phi^{ij}(t)$ は $9 \times 9 = 81$ 種類もあるため、売り成行注文を起点とするフローを中心に分析結果を見ていく。その準備として、モデルの推定結果の解釈方法を説明する。モデルの推定結果において、カーネル $\phi^{ij}(t)$ は注文タイプ j 発生から t 秒後の注文タイプ i の瞬間的な発生強度を表す。これが正の値をとると、注文タイプ j が出たことで、出ないときよりもタイプ i の注文が起きやすくなっていることを意味する。本稿では注文の出やすさの変化するタイミングを明示するため、カーネルの累積値 $\Phi^{ij}(t) = \int_0^t \phi^{ij}(t) dt$ を図示して見ていく。 $\Phi^{ij}(t)$ が正の傾きである間は、タイプ i の注文が起きやすいことを意味する。ただし、横軸が対数時間のため、傾きの大きさが同じでも瞬間の発生強度は時点により異なることに注意されたい。また $\Phi^{ij}(t)$ の大きさは、注文タイプ j が出てから t 秒後までに、注文タイプ i が平均で何件発生しやすくなるかを表す。

以上を踏まえて分析結果を見ていく。図6は、売り成行注文を起点とする8種類のフローについて、それぞれの累積カーネル $\Phi^{ij}(t)$ を図示したものである。ここで、Pre期間の方がグラフの微小変動が激しいのは、時刻の計測単位がPre期間では 0.001 秒単位、Post期間では 0.0001

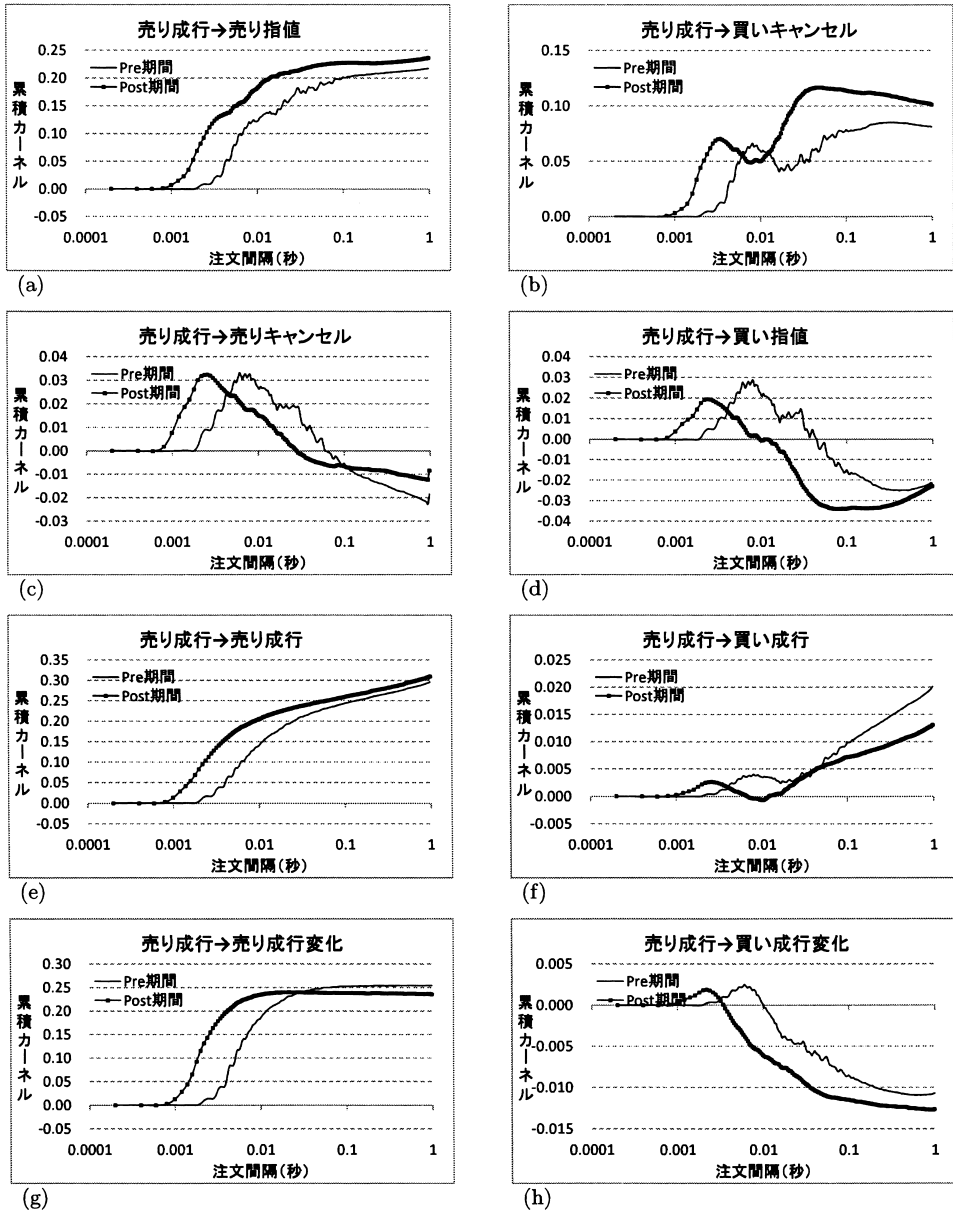


図 6. 売り成行注文 → 各タイプ注文の累積カーネル。横軸は対数時間、縦軸は累積カーネルである。

秒単位と 10 倍異なるためである。また、カーネルの形状に注目するため、各グラフのスケールは一致させていない。

まず、前節で注文タイプのもメンタム性が見られた売り成行注文 → 売り指値注文、売り成行 → 買いキャンセルのカーネルである図 6(a), 図 6(b) に注目すると、図 6(b) で示されている売り成行 → 買いキャンセルのカーネルが、上昇してから一度マイナス方向に動いた後に、0.01 秒

(10 ミリ秒)程度経過してから再度上昇する動きを示している。すなわち、買いキャンセル注文が一度出にくくなった後、0.01 秒程度経過してから再度出やすくなったことを意味している。また、Pre 期間と Post 期間を比較すると、Post 期間の方が再上昇のタイミングが速い。一方で、図 6(a) で示されている売り成行 → 売り指値のカーネルでは、2 段階の挙動は見られない。このような 2 段階の挙動は、図 5 で見たタイプ別の注文間隔分布でははっきりと観察されなかったものであり、注文タイプ別に注文反応を分解することで、このような挙動を検出できるようになった。

このようにカーネルの挙動が 2 段階になる原因として、2.1 節で述べた売買参加者による注文反応速度の違いの影響が考えられる。売買参加者のうち、コロケーションを利用している参加者は、ある注文に数マイクロ秒で反応することができ、このような参加者が図 6(b) の 1 段階目の上昇の原因の 1 つとなっている。また、注文が集中する際には注文処理が順に行われるため、数マイクロ秒の反応でなくとも注文間隔は最小時間に近くなりうる。これも 1 段階目の上昇の原因だと考えられる。一方、コロケーションを用いない一般参加者は、ある注文に反応して注文を出すまでに最低でも数ミリ秒かかる。カーネルが再上昇しているタイミングは、Pre 期間で約 0.02 秒、Post 期間で約 0.01 秒の時点であり、コロケーションを用いない参加者の注文所要時間と概ね整合的である。このことから、コロケーションを用いない参加者が図 6(b) の 2 段階目の再上昇の原因となっているという仮説が立てられる。Post 期間で再上昇のタイミングが速い原因も、情報伝達時間の高速化、1 件 1 件が高速に処理されることによる注文集中時の待ち時間の短縮などで説明でき、仮説と整合的である。この仮説が成り立っているならば、注文反応速度の違いから各売買参加者の注文行動をより詳細に分析することが可能となる。以下では、注文反応速度が異なる売買参加者の存在を仮定して議論を進める。また、注文反応が 10 ミリ秒程度遅れる参加者をラグ参加者と呼んで区別する。

図 6 の残りのグラフを見ると、売り成行 → 買い成行のカーネルを表す図 6(f) では同様にラグ参加者の存在が見られる。それ以外のグラフでは、はっきりとしたラグ参加者の反応は見られない。これは、ラグ参加者が発注する注文のタイプに偏りがある可能性を意味している。また、コロケーションを利用する参加者の注文が多く 1 段階目の反応が長く持続する注文タイプでは、1 段階目の挙動に隠れてラグ参加者の影響が見えなくなっている可能性も考えられる。

次に、売り買いの対称性を確認する。注文行動に関する先行研究の多くでは、注文行動について売り買いの対称性が観察される。では、ラグ参加者の注文行動についても対称性は成り立っているのだろうか。これを確認するために、図 6 の各注文タイプの売り買いを反転させたケースについて累積カーネル $\Phi^{ij}(t)$ を図示したのが図 7 である。図 6 と図 7 のグラフを比較すると、売り買いでグラフの形状が同じであり、図 6(b) の売り成行 → 買いキャンセルで見られた 2 段階の注文反応が、図 7(b) の買い成行 → 売りキャンセルでも観察される。すなわち、ラグ参加者の注文行動でも売り買いの対称性は成り立っており、ラグ参加者は、平均的には売り買い同一の基準で発注しているといえる。

ここまで、全銘柄を平均した結果について述べてきた。一方で、5.1 節で、短間隔注文の頻度や連続しやすさは板の厚さ・サイズといった銘柄の特徴量により異なることを見た。上で見たようなラグ参加者の注文行動も、銘柄の特徴量により異なる可能性が考えられる。そこで、デプス(板の厚さ)、ティック数の 2 つの特徴量について、それぞれ銘柄を分割して分析を行う。各特徴量の分析では、銘柄を特徴量についてソートした後に 10 分割し、一番特徴量が大きな銘柄群と小さな銘柄群についてそれぞれカーネルの平均値を計算する。またカーネルの注文タイプは、売り成行 → 売り指値、売り成行 → 買いキャンセルに絞って結果を確認する。

ティック数についての分析結果を示したのが図 8 である。比較のために、左右のグラフで縦軸のスケールを揃えている。まず図 8(c) と図 8(d) を比較すると、1 段階目の反応が同程度の大き

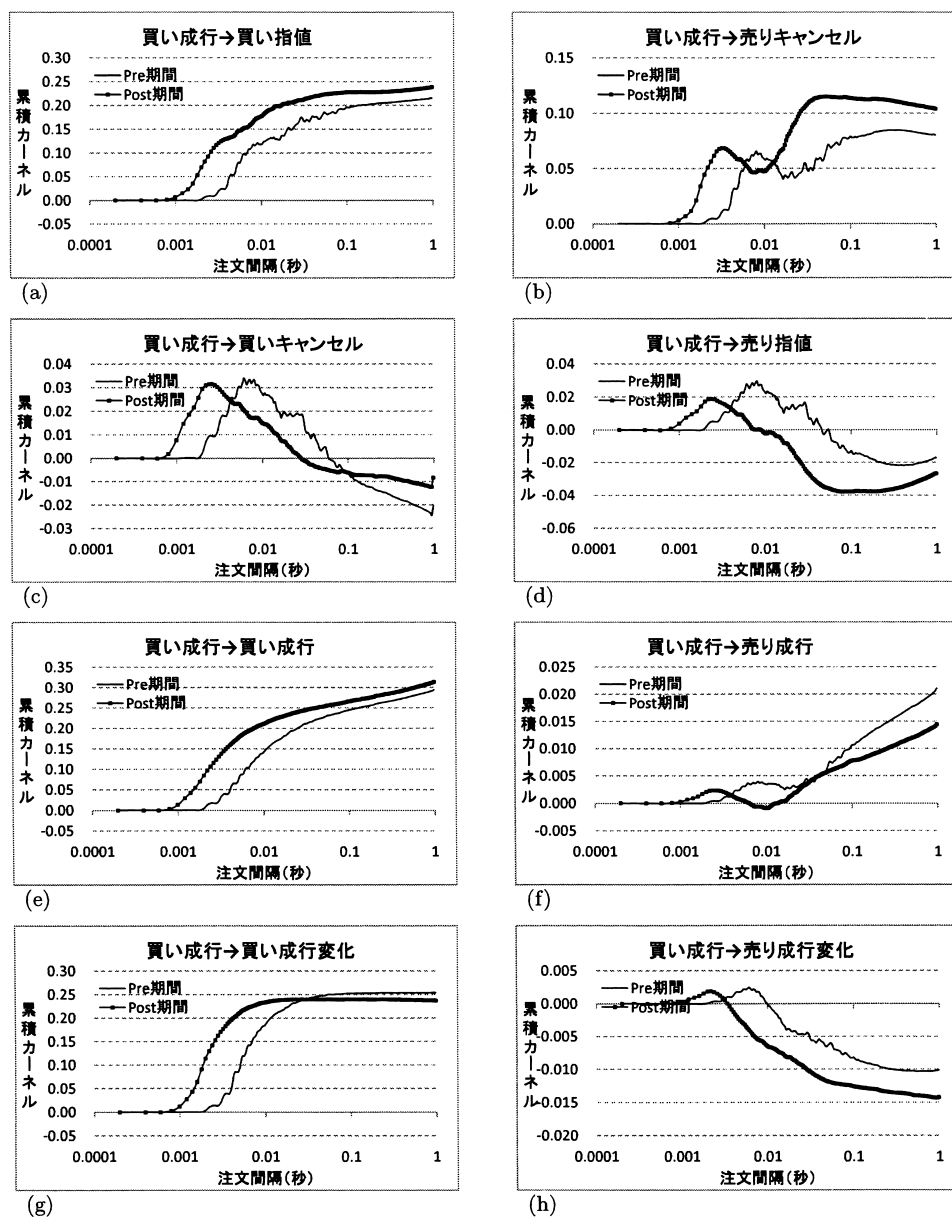


図 7. 買い成行注文 → 各タイプ注文の累積カーネル。横軸は対数時間、縦軸は累積カーネルである。

きさなのに対し、ティック数が少ない銘柄において、2段階目の反応がより強いことが見てとれる。また、図 8(a)と図 8(b)を比較すると、図 8(a)では2段階目の反応がわずかに見えるのに対し、図 8(b)ではそのような反応は見られない。これらの結果から、ラグ参加者の注文は、ティック数が少ない銘柄で相対的に多いといえる。ラグ参加者は、ティック数が多く参加者が多い銘柄を避けて売買している可能性がある。

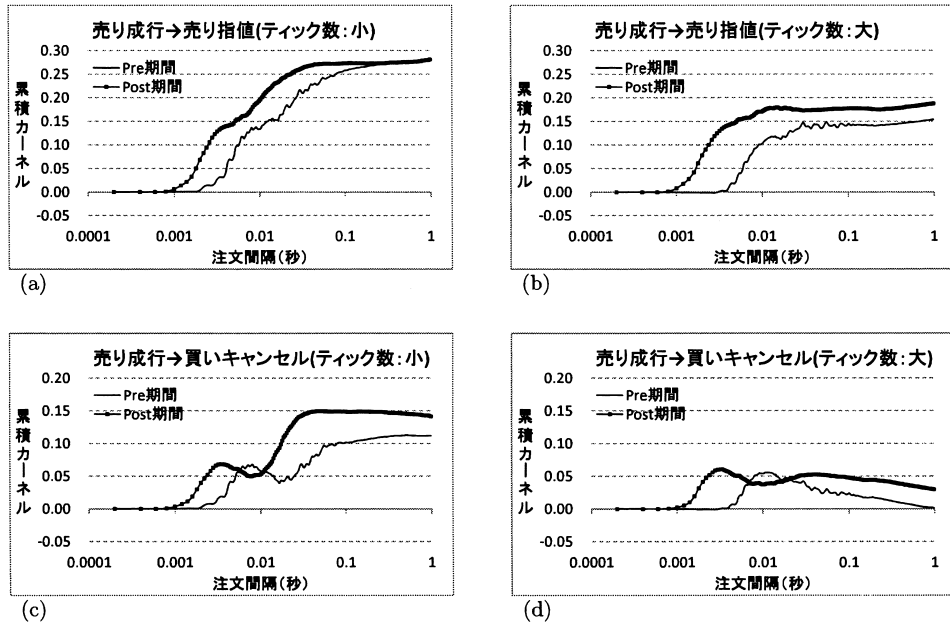


図 8. ティック数が特徴的な銘柄群における、売り成行注文後の売り指値注文、買いキャンセル注文の累積カーネル。横軸は対数時間、縦軸は累積カーネルである。「ティック数：大」はティック数の上位 10%銘柄、「ティック数：小」はティック数の下位 10%銘柄について、それぞれカーネルの平均を計算している。

続いて、デプスについての分析結果を示したのが図 9 である。まず図 9(c) と図 9(d) を比較すると、デプスが小さい銘柄において、2 段階目の反応がより強いことが見てとれる。デプスが大きな銘柄では、2 段階目の反応は弱く、特に Pre 期間においてはほぼ横ばいである。また、図 9(b) を見ると、デプスが大きな銘柄では、売り成行 → 売り指値の注文行動にも、2 段階の反応が弱いながらも見られる。一方、デプスが小さな銘柄では図 9(a) のように 2 段階の反応はほぼ見られない。このように、デプスの大小に応じて、ラグ参加者の注文行動は異なっているといえる。以上から、ラグ参加者はティック数やデプスなど銘柄特性を踏まえた注文行動をとっているといえる。

なお、図 9(c) と図 9(d) のカーネル再上昇のタイミングを比較すると、図 9(c) では 0.01 秒付近なのに対し、図 9(d) では 0.01 秒よりも後ろであり、デプスが小さい図 9(c) の方が再上昇が若干速いことが見てとれる。これは、デプスが厚い銘柄で短間隔注文が連続しやすいことが原因だと考えられる。短間隔注文が連続しやすい銘柄では、注文の集中による注文処理の順番待ちもまた発生しやすいと考えられる。そのためデプスが大きい銘柄では、ラグ参加者の注文の処理がデプスが小さい銘柄よりも遅れやすく、図 9(c) と図 9(d) のようなタイミングの違いが生まれるのであろう。

最後に、本節での分析結果を通して Pre 期間と Post 期間を比較すると、Post 期間において売り成行 → 買いキャンセルにおけるラグ参加者の反応が Pre 期間より大きくなっていることが、図 6(b)、図 8(c)、図 8(d)、図 9(c)、図 9(d) 全てから確認できる。前節での短間隔注文の連続性分析において、表 9 のように売り成行注文後の短間隔での買いキャンセル注文の比率の上昇が見られたが、その原因の 1 つにラグ参加者の注文行動があったことが分かる。この行動の理由

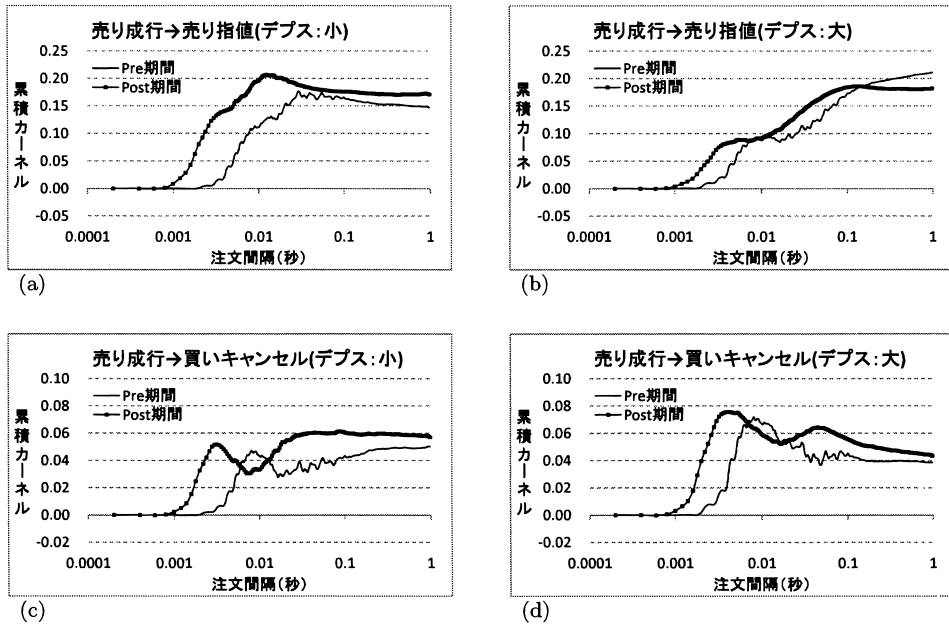


図 9. デプスが特徴的な銘柄群における、売り成行注文後の売り指値注文、買いキャンセル注文の累積カーネル。横軸は対数時間、縦軸は累積カーネルである。「デプス：大」はデプスの上位 10%銘柄、「デプス：小」はデプスの下位 10%銘柄について、それぞれカーネルの平均を計算している。

は明確ではないが、1つの可能性として、リニューアルでの注文応答時間短縮により数ミリ秒の間により多くの注文が処理可能になったことで、短時間での意図せぬ約定可能性を回避するためにラグ参加者がキャンセル注文の発注頻度を高めたことが考えられる。

6. おわりに

本稿では、注文間の時間間隔に注目して東京証券取引所の注文行動を分析した。

まず、直前の注文との時間間隔が短い短間隔注文について分析した。短間隔注文は一度発注されると連続して起こりやすい特徴がある。短間隔注文の連続性は板が厚くティック数が多い銘柄で生じやすく、また成行注文、成行変化注文が出た後に生じやすい。売買システムのリニューアル前後を比較すると、リニューアル後は、成行注文、成行変化注文時に対する短間隔注文の連続性が高まり、また売り成行注文の後の買いキャンセル注文の発注頻度が高まるなど、特定の注文タイプに対する参加者の反応がリニューアル前より強まる傾向が観察された。

次に、注文タイプに対する反応をより詳しく調べるために、多次元 Hawkes モデルを用いて注文タイプ別の注文間隔に関する分析を行った。その結果、市場に発注された注文に対して、瞬時に反応する参加者と 10 ミリ秒程度遅れて反応する参加者がいることが示唆された。このうち、遅れて反応する参加者について、売りと買いで対称的な行動をとっていること、銘柄のデプスやティック数に応じて注文タイプに対する反応が異なっていること、リニューアル後に売り成行注文後の買いキャンセル注文の発注頻度を高めていることなどが分かった。これらの結果は、注文タイプ間の時間間隔に注目することで、高頻度な注文行動を参加者別に精緻に捉えられる可能性を示唆している。

今後の課題としては、遅れて反応する参加者の注文行動が、どのような戦略によるものなのか、また価格形成にどのような影響を及ぼすのかを明らかにすることが挙げられる。注文行動と価格形成の反応が明らかになれば、売買システムの高速化が価格形成に与える影響について新たな知見を得ることができる。

また、注文タイプを細分化し、注文行動をより詳細に明らかにするのも課題といえる。本稿では全ての成行注文を同一に扱っており、成行注文のサイズや板の状態を考慮していない。成行注文のサイズについては、Rambaldi et al. (2016)でカーネルの大きさへの影響が述べられている。また、成行注文後の板の偏り(オーダーインバランス)もカーネルに影響すると考えられる。これらの影響も考慮したモデル化・分析を行うことで、より精緻に注文行動を捉えることができるだろう。

謝 辞

本稿を作成するにあたり、2名の査読者から多くの有益なコメントをいただいた。ここに感謝いたします。

参 考 文 献

- 新井亮一 (2012). アローヘッド導入による株式市場の流動性と取引コストの変化—機関投資家の視点からの分析—, 証券アナリストジャーナル, **50**, 17–24.
- Bacry, E. and Muzy, J. F. (2014). Second order statistics characterization of Hawkes processes and non-parametric estimation, Preprint, <http://arxiv.org/abs/1401.0903>.
- Bacry, E., Jaisson, T. and Muzy, J. F. (2016). Estimation of slowly decreasing Hawkes kernels: Application to high-frequency order book dynamics, *Quantitative Finance*, **16**, 1179–1201.
- Bellia, M., Pelizzon, L., Subrahmanyam, M.G., Uno, J. and Yuferova, D. (2016). Low-latency trading and price discovery: Evidence from the Tokyo Stock Exchange in the pre-opening and opening periods, Preprint, <http://people.stern.nyu.edu/msubrahm/papers/Pre-Open.pdf>.
- Cont, R., Arseniy, K. and Sasha, S. (2014). Price impact of order book events, *Journal of Financial Econometrics*, **12**, 47–88.
- Eisler, Z., Bouchaud, J. P. and Kockelkoren, J. (2012). The price impact of order book events: Market orders, limit orders and cancellations, *Quantitative Finance*, **12**, 1395–1419.
- Gomber, P., Arndt, B., Lutat, M. and Uhle, T. (2011). High-frequency trading, Preprint, <http://ssrn.com/abstract=1858626>.
- Hasbrouck, J. (1991). Measuring the information content of stock trades, *Journal of Finance*, **46**, 179–207.
- Hasbrouck, J. and Saar, G. (2013). Low-latency trading, *Journal of Financial Markets*, **16**, 646–679.
- 保坂豪 (2014). 東京証券取引所における High-Frequency Trading の分析, JPX ワーキングペーパー, Vol.04, 日本取引所グループ, 東京.
- 川口宗紀, 田代雄介 (2015). 注文間隔の違いに基づく株式売買行動の分析, 行動経済学, **8**, 73–76.
- Latza, T., Marsh, I. and Payne, R. (2014). Fast aggressive trading, Preprint, <http://ssrn.com/abstract=2542184>.
- Martins, R. and Hendricks, D. (2016). The statistical significance of multivariate Hawkes processes fitted to limit order book data, Preprint, <https://arxiv.org/abs/1604.01824>.
- 中山興, 藤井崇史 (2013). 株式市場における高速・高頻度取引の影響, 日銀レビュー, 2013-J-2, 日本銀行, 東京.
- Rambaldi, M., Bacry, E. and Lilio, F. (2016). The role of volume in order book dynamics: A multivariate

- Hawkes process analysis, Preprint, <http://arxiv.org/abs/1602.07663>.
- 杉原慶彦 (2011). 取引コストの削減を巡る市場参加者の取組み：アルゴリズム取引と代替市場の活用, 金融研究, **30**(2), 29–87.
- Taranto, D.E., Bormetti, G., Bouchaud, J.P., Lillo, F. and Toth, B. (2016a). Linear models for the impact of order flow on prices I. Propagators: Transient vs. history dependent impact, Preprint, <http://arxiv.org/abs/1602.02735>.
- Taranto, D.E., Bormetti, G., Bouchaud, J.P., Lillo, F. and Toth, B. (2016b). Linear models for the impact of order flow on prices II. The mixture transition distribution model, Preprint, <http://arxiv.org/abs/1604.07556>.
- Toke, I. M. and Pomponio, F. (2012). Modelling trades-through in a limit order book using Hawkes processes, *Economics: The Open-access, Open-assessment E-journal*, **6**, 1–23.
- 宇野淳, 柴田舞 (2012). 取引スピードと流動性：東証アローヘッドのケース, 現代ファイナンス, **31**, 87–107.

Analysis of High Frequency Reactions on Tokyo Stock Exchange

Yusuke Tashiro and Muneki Kawaguchi

Mitsubishi UFJ Trust Investment Technology Institute Co., Ltd.

In recent stock markets, the presence of high-frequency trading (HFT) has globally increased. In the Tokyo Stock Exchange (TSE), the market share of high-frequency trading increases year after year and market players can trade stocks faster than before due to the renewal of the trading system in September 2015.

In this paper, we analyze the high-frequency order book dynamics on TSE. For this purpose, we focus on the “short interval order”, which is submitted immediately after an order submission, and discuss its characteristics. We also analyze whether the high-frequency reaction to the order changes or not with the renewal. We find that “short interval order” is likely to be submitted continuously after the submission of an order that has a large impact, such as market order, and continuity is more remarkable after the renewal on TSE. Moreover, we estimate multivariate Hawkes models that represent order interval among the different order types, and we observe two kinds of players: one that immediately reacts to an order and the other that reacts about 10 milliseconds behind. We then find that the latter players increase the aggressiveness of the order submission of the specific order type after the renewal and change their order activity depending on the characteristics of limit order books.

高頻度注文板データの統計解析： 異市場・同一株式価格間の先行遅行関係

林 高樹^{1,2,3}

(受付 2016 年 10 月 9 日；改訂 2017 年 3 月 15 日；採択 3 月 16 日)

要 旨

本研究は、東京証券取引所(主市場)と 2 つの私設証券取引所—チャイエックス、ジャパンネクスト PTS—の国内 3 市場にて同時に取引されている現物株式について、注文板形成の先行遅行関係の大きさやその特徴を実証的に調査することを目的とする。

先行遅行時間の推定方法として、本稿は Dobrev and Schaumburg (2015) が最近提案した方法を採用する。分析対象銘柄は、東京証券取引所において時価総額および流動性の高い 100 銘柄から成る TOPIX100 構成銘柄、分析期間は 2013 年 1 月 4 日から 2014 年 12 月 30 日(489 営業日)であり、東証における 2 回のティックサイズ変更のタイミングも含んでいる。まず、個別銘柄ごとに異取引市場間での市場価格の先行遅行時間を推定し、次に、これらの推定値を多変量時系列データ(銘柄×データ期間)に配置し、パネル回帰分析を行い、銘柄に共通な特徴や相違点を抽出し先行遅行要因を探る。

キーワード：高頻度データ、高頻度トレード、先行遅行分析、Hoffman-Rosenbaum-Yoshida 推定量、Dobrev-Schaumburg 推定量、マーケット・マイクロストラクチャ。

1. 導入

世界の株式市場において近年取引所間の提携や合併が進み、また電子市場が相次いで設立されるなど市場間競争が激化する中、我が国では、現在、東京証券取引所(東証)、2 大私設取引所(PTS)—チャイエックス(運営会社チャイエックス・ジャパン)、ジャパンネクスト PTS (運営会社 SBI ジャパンネクスト証券)の 3 市場において、高速・高頻度の取引が行われている。

本研究は、国内株式市場間の短時間での連動性について焦点を当て、高頻度の注文板データから観察される現象について報告する。分析に用いるデータは、東証、チャイエックス、ジャパンネクスト PTS の 3 市場より提供を受けた気配更新や約定を全て記録した高頻度注文板データで、タイムスタンプの時間解像度はミリ秒、データ期間は 2013 年 1 月 4 日～12 月 28 日(245 営業日)、および 2014 年 1 月 6 日～同 12 月 30 日(244 営業日)、計 489 営業日である。当該期間は東証における 2 回のティックサイズ変更のタイミング(1 月 14 日、7 月 22 日)を含んでいる。分析対象銘柄は、東証において時価総額および流動性の高い「TOPIX100」構成銘柄である。

¹ 慶應義塾大学大学院 経営管理研究科：〒 223-8526 神奈川県横浜市港北区日吉 4-1-1 協生館；
takaki@kbs.keio.ac.jp

² 首都大学東京大学院 社会科学部研究科経営学専攻

³ 独立行政法人科学技術振興機構 戦略的創造事業(JST-CREST)

本研究では、特に 3 市場間の先行運行関係(異市場・同一銘柄間分析)に興味がある。ベースとなる統計的方法論は、Dobrev and Schaumburg (2015)による先行運行関係推定法である。実証分析の流れは林 (2016)で行ったものを概ね踏襲する。すなわち、まずデータ期間内一日毎・時間帯内毎、銘柄毎に、先行運行時間を推定し、推定値の日次推移や時間推移を図示し、要約統計量等を計算することで、市場ペア間の先行運行時間の全体的傾向を把握する。さらに、個々に計測された先行運行時間を多変量時系列データ(銘柄×データ期間)に配置し、パネル回帰分析を行い、銘柄に共通な特徴や相違点を抽出し先行運行要因を探る。その際に採用する説明変数には、例えば、“売り方向”、“買い方向”の違いによる先行運行時間の相違など、林 (2016)とは異なる視点も導入する。

本研究は、林 (2016)と同様、データの解像度やデータの発生頻度(データ間隔)の制約により、ミリ秒以下の先行運行関係を定量化することはできない。また、各注文データには市場参加者を特定する情報が付与されていないため、近年市場での存在感を増している高頻度トレード(High-frequency Trading, HFT)の行動を直接分析することはできない。このようなデータ仕様に起因する制約はあるものの、分析を通じて HFT の注文行動を理解する一助となることが期待される。

筆者による 2 つの実証研究(林, 2015, 2016)からの分析の方法論上の主要な改良点としては、(i) Hoffmann et al. (2013)の代替的方法論として Dobrev and Schaumburg (2015)によるアプローチを採用して同一銘柄異市場間の先行運行時間を推定したこと、(ii)説明変数の見直しを行うことで先行運行時間の生成要因に関する回帰分析の精度の向上を図ったことが挙げられる。価格変動幅の情報を使わない後者のアプローチは価格変動に含まれるジャンプやマイクロストラクチャ・ノイズの直接の影響を受けないことから、よりロバストな推定となることが期待される。特に、林 (2015, 2016)で行った前者による推定結果はバラツキが非常に大きく、精度の向上が課題であった。

Dobrev らのアプローチは本稿で示すようにはるかに安定的な結果をもたらす。それでもなお、統計理論が未整備な状況の中、本稿の分析結果はあくまで暫定的なものであることに注意が必要である。¹⁾

高頻度・高速市場での先行運行分析自体が近年始まった新しい研究領域であり、実証分析自体が殆ど行われていない。本分析では林 (2015, 2016)と同様、HFT を中心とする高頻度・高速で取引を行う市場参加者の行動やその帰結としての市場クオリティ等に関する特定の仮説を事前に持たず、探索的データ解析を行い、実証的知見を得ることが目的である。

2. 国内高速 3 市場の概要およびデータセット

2.1 3 市場と東証ティックサイズ変更

3 市場の概要については、宇野 (2012, 2014)、林 (2015)を参照せよ。2008 年 10 月のジャパンネクスト PTS (以下、“JNX”), 2010 年 7 月のチャイエックス(以下、“ChiX”)の開設以降、PTS 二市場の売買高シェアは次第に上昇し、本分析のデータ期間開始の 2013 年前半において 5-7% 程度を占めていた(大崎, 2014, 図表 2)。²⁾

東証は、2014 年 1 月 14 日と 7 月 22 日の 2 回にわたり、投資家の“利便性の向上”を目的として、“流動性が高い銘柄について細かい呼値の単位を導入することで、約定価格の改善や、指値注文における値段の選択枝の広がりによる板での順番待ちの緩和”を図った。³⁾ 第 1 回目の変更(フェーズ 1)では対象銘柄群(TOPIX100 構成銘柄)の内の呼値が 3000 円超に対して導入され、第 2 回目(フェーズ 2)では対象銘柄群の残りの全て(呼値 3000 円以下)の銘柄にまで拡大された。その結果該当銘柄のティックサイズは PTS 二市場と競合する水準にまで引き下げられ

表 1. 国内 3 市場のティックサイズ.

| 東証 (TOPIX100 構成銘柄) | | ChiX | JNX |
|--------------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 変更前 | フェーズ 2 導入後 | | |
| ≤3,000 円, 1 円 | ≤1,000 円, 0.1 円 | ≤5,000 円, 0.1 円 | 東証 (変更前) の 1/10 |
| ≤5,000 円, 5 円 | ≤5,000 円, 0.5 円 | ≤100,000 円, 1 円 | |
| ≤30,000 円, 10 円 | ≤10,000 円, 1 円 | >100,000 円, 10 円 | |
| ... | ... | ... | |

た. 表 1 に変更前後のティックサイズ的具体例を, PTS 二市場の値と共に示す.

東証ティックサイズ変更の影響については, 林 (2015) による 3 市場間比較の他, 近藤 (2015) が東証にフォーカスした詳細な分析を行っている.

高速化が進む我が国の株式市場に関する実証分析として, その他, Bellia et al. (2016), 太田 (2013, 2016), 保坂 (2014) などがあるが, 市場内外の急激な変化に実証研究が追いついていないのが現状である. 高頻度注文板データの分析を行う意義は大きい.

2.2 分析データセット

3 市場から入手した高頻度注文板データを使用する. 分析データセットの時間解像度はいずれの市場ともミリ秒単位である. 各市場とも, データに記録されているタイムスタンプは, 個別注文が各々のマッチング・エンジンに到着した時刻とされる.

分析対象銘柄は, 東証の公表する「規模別株価指数・TOPIX ニューインデックスシリーズ」の一つ, “TOPIX 算出対象のうち, 時価総額および流動性の特に高い 30 銘柄”である「TOPIX Core30」と“TOPIX Core30 について時価総額, 流動性の高い 70 銘柄”である「TOPIX Large70」を合わせた「TOPIX100」の構成銘柄である (2013 年 10 月末選定分).⁴⁾ これらは, 2014 年の東証ティックサイズ変更の対象銘柄群である. データ期間は, 2013 年 (245 営業日), および 2014 年 (244 営業日) の 2 年間計 489 営業日である. なお, 分析対象銘柄はデータ期間の 2 年間固定し, 期間内に 2 回実施された「TOPIX100」の銘柄入替は反映させない.⁵⁾

PTS 二市場には昼休みによる中断時間がないが, PTS と東証間の同一銘柄価格の先行運行関係をみるため, 東証の立会時間中のデータのみを分析に使用する.

3. 分析の方法論

3.1 タイムスタンプの生成

本分析で採用する Dobrev and Schaumburg (2015) によるオリジナルのアプローチは, 2 つ価格系列のタイムスタンプ情報のみを使用する. 彼らは約定価格系列のタイムスタンプを使用した, 本分析では注文板上の価格形成に興味があることから, マイクロ・プライス系列のタイムスタンプを使用する.

まず, 筆者の行った実証分析 (林, 2016) にならう, 注文板上の売買両サイドの最良気配値および注文枚数より各気配レコードにおける “マイクロ・プライス” を計算する (例, Gatheral and Oomen, 2010).

$$(3.1) \quad X := \frac{B \cdot Q^A + A \cdot Q^B}{Q^A + Q^B},$$

但し, B (A) は最良買 (売) 気配値, Q^B (Q^A) は最良買 (売) 注文に関する注文枚数合計 (“デブス”) である.

ここでは、林 (2016) と同様に、市場参加者の注文・キャンセルおよび売買行動の結果としての高速での注文板の変化に興味がある。マイクロ・プライスは、約定はもちろん、キャンセルを含めた市場参加者の動きを直接に反映することから、本分析においても使用が妥当と考える。本稿全体を通して、マイクロ・プライス X の動きを“値動き”と呼ぶことにする。

各市場、各銘柄毎に、マイクロ・プライスが更新される時刻を集めてタイムスタンプ・データを作る。Dobrev and Schaumburg (2015) のオリジナルの提案では売買方向の区別のないタイムスタンプ系列が使われるが、本研究では、それに少し手を加え、売買の方向性によって二分割したタイムスタンプ系列を使用する(詳細は後述)。

タイムスタンプ・データ生成に使われる代替的な価格系列としては、最良買気配/最良売気配や、それらの平均値である仲値があるが、気配値水準の更新遅れ・鮮度劣化(staleness)は良く知られた現象であることから、これらの更新時点そのまま使用するのは適切でない可能性がある。⁶⁾ 一方、約定値も代替的系列として考えられるが、気配更新データに比べデータ量が大幅に減少することや、約定価格の変化しないゼロ・リターンの割合も高いことから、今回は採用しない。なお、Dobrev and Schaumburg (2015) の実証分析においては、流動性の極めて高い E-Mini (S&P500 先物) や米国 10 年債 (T-Note) の現物や先物に関する約定系列のタイムスタンプを使用している。

3.2 時系列データ間の先行運行時間

2 変量の時系列データの先行・運行関係を分析するのに標準的な道具は、両者の相互共分散(cross-covariance)/相互相関係数(cross-correlation)を計測することである。Hoffmann et al. (2013) は、Hayashi and Yoshida (2005) によって提案された非同期共分散推定法(以下、“HY 推定法”)を応用して、離散観測される連続セミマルチンゲール過程間の先行運行関係を推定する方法を提案した。⁷⁾ すなわち、2 つの対数価格系列 X^1, X^2 が、それぞれ不規則、不等間隔に並ぶ時点 $\{\tau_i^1\}, \{\tau_j^2\}$ において観測された時、予め定めた有限個の探索範囲 \mathcal{G} に関して、対数収益率間の相互共分散の絶対値を最大化するようなラグ h の値

$$\hat{\theta} := \arg \max_{h \in \mathcal{G}} |CV(h)|$$

を先行運行推定量とした(以下、“HRY 推定量”)。ここで、

$$CV(h) := \sum_{i,j} (X_{\tau_i^1}^1 - X_{\tau_{i-1}^1}^1) (X_{\tau_j^2}^2 - X_{\tau_{j-1}^2}^2) \mathbf{1}_{\{(\tau_{i-1}^1, \tau_i^1] \cap (\tau_{j-1}^2 - h, \tau_j^2 - h] \neq \emptyset\}}$$

は HRY 推定法による相互共分散関数である。彼らは、正則条件の下で、サンプル観測区間幅および探索グリッド間隔がゼロに縮小する時に、 $\hat{\theta}$ が X^1, X^2 間の真の先行運行時間パラメータ θ に対する一致推定量であることを示した。

相互共分散・相互相関係数の大きさを評価しそれを先行運行分析に用いる方法論自体は時系列解析の古典的なアプローチでありマクロ経済分析やファイナンス分野などにおいて古くから行われているが、Hoffmann et al. (2013) はそれを近年の高頻度データに対する統計学の進展を踏まえて、連続時間セミマルチンゲールの離散高頻度観測の枠組の中での先行運行時間の統計的推測問題として定式化し、それに対する一致推定量を初めて提案したという点で、統計学における新たな研究テーマを開拓したと言えるだろう。

筆者は、林 (2015, 2016) において、HRY の枠組みを利用して、本稿と同様国内 3 市場のデータセットを用いて、マイクロ・プライス系列間のクロス相関を介した 3 市場間の先行運行時間の計測を試みてきた。しかしながら、得られた個別の HRY 推定値は、ばらつきが大きく、必ずしも信頼できる分析結果が得られたとは言い難かった。特に、前論文では価格系列を直接使

用した目的関数(相互相関の絶対値)を最大化するアプローチであったため、価格系列に含まれる種々の要因、とりわけ、ジャンプやマイクロストラクチャ効果が影響を及ぼしていた可能性が高い。

そこで、HRY 推定量の代替的方法として、以下で示すように、より安定的な推定をもたらすことが期待される Dobrev and Schaumburg (2015)の方法を採用することにする。

3.3 Dobrev and Schaumburg (2015)の方法とその改良

本稿では、マイクロ・プライスに変化をもたらすようなイベントを“注文”や“取引”等と呼ぶことにする。したがって、最良気配に関する新規注文やキャンセル、約定は全て含まれる。なお、Dobrev and Schaumburg (2015)においては、約定イベントのみを分析の対象としている。

以下に、必要な記号を導入する。対数価格(マイクロ・プライスの対数值)系列 X^1, X^2 のサンプル時点 $\{\tau_i^1\}, \{\tau_j^2\}$ に対応する計数過程(点過程) $\mathcal{N}^1, \mathcal{N}^2$ を考える。一方、最小時間解像度 $\Delta > 0$ を単位とする等間隔離散グリッドを $\mathcal{T} := \{t_i = i\Delta, i = 0, \dots, N\}$ とする。ここで、 N は市場閉場時間に対応する最大グリッド点(定数)である(開場時間 $[0, T]$ として、 $N = \lceil T/\Delta \rceil$)。次に \mathcal{T} の中から、各計数過程が変化した時点(注文が直前の Δ 間に到来した)のみを取り出したサンプル時点を $\mathcal{T}^k := \{t_i \in \mathcal{T}; \Delta_i \mathcal{N}^k > 0\}$ ($k = 1, 2$)と書く。ここで、連続時間確率過程 Z に対して、 $\Delta_i Z = Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}}$ と書く。また、 \mathcal{T}^k の全要素を一律に $\theta \in \mathbb{R}$ だけ負方向へシフトした集合を $\mathcal{T}_{-\theta}^k := \{t_i - \theta; t_i \in \mathcal{T}^k\}$ ($k = 1, 2$)と書く。さらに、集合 A の要素数を $\# \{A\}$ と書く。

この時、先行運行時間を探すための目的関数として、2つの点過程間の、ラグ h (Δ の整数倍)だけずらした後の同時発生の相対頻度

$$(3.2) \quad A(h) := \frac{1}{\underline{A}} \# \{ \mathcal{T}^1 \cap \mathcal{T}_{-h}^2 \}$$

を考える。ここで、 $\underline{A} := \# \{ \mathcal{T}^1 \} \wedge \# \{ \mathcal{T}^2 \}$ である。定義より、離散観測グリッド間隔 Δ 内 (Dobrev and Schaumburg, 2015 の実証分析例では 1 ミリ秒)に複数の注文が発生しても、1件とカウントされる。すなわち、本稿で用いるタイムスタンプのデータセットは、元々の $\{\tau_i^1\}, \{\tau_j^2\}$ ではなく、それを区間幅 Δ で離散時間化し注文件数の情報も落とした \mathcal{T}^k である。本稿では、便宜上、 $A(h)$ を“相互共起強度関数”と呼ぶことにする。

Dobrev and Schaumburg (2015)は、偶然に発生した共起の割合をベースラインとして(3.2)より差引いた

$$(3.3) \quad \tilde{A}(h) := A(h) - \bar{A}$$

の使用を提案している。ここで、 $\bar{A} := \frac{1}{\# \{ \mathcal{G} \}} \sum_{h \in \mathcal{G}} A(h)$ 、予め定めた探索範囲 \mathcal{G} における $A(h)$ の平均値である。さらに、(3.2)を目的関数として \mathcal{G} 上で最大化する値

$$\hat{\theta} := \arg \max_{h \in \mathcal{G}} \tilde{A}(h)$$

が Dobrev and Schaumburg (2015)の提案した先行運行推定量である。

本稿では、相互共起強度関数の絶対値の大きさ自体には関心を持たず、先行運行関係の計測にフォーカスすることから、(3.3)ではなく(3.2)の最大化を図る。以下では、データより計算された先行運行時間推定値 $\hat{\theta}$ を“DS 指標”と呼ぶことにする。定義から明らかなように、DS 指標においては、タイムスタンプのみを使用して目的関数 $A(h)$ を計算することから、価格情報に含まれるマイクロストラクチャ効果などの要因には直接は影響されず、HRY 指標に比してロバストな先行運行推定結果を与えることが期待される。

次に、本研究における工夫について述べる。先述のように Dobrev and Schaumburg (2015)

では全約定データのタイムスタンプを使用していたが、本研究は注文板データから計算されるマイクロ・プライスを使用することで、注文板の動き(マイクロ・プライスの変化時点)に関する先行運行時間を調べる。さらに、彼らの提案方法は相場の方向性に関する情報が欠落していることから、全タイムスタンプ \mathcal{T}^k を使うのではなく、価格変化が正であったもの $\mathcal{T}_B^k := \{t_i \in \mathcal{T}^k; \Delta_i X^k > 0\}$ 、負であったもの $\mathcal{T}_S^k := \{t_i \in \mathcal{T}^k; \Delta_i X^k < 0\}$ の 2 つのサブデータセットを抽出し、各々に対して DS 指標を計算することにする。ここで、マイクロ・プライスが上昇するケース($t_i \in \mathcal{T}_B^k$)とは、定義(3.1)より、最良買気配値または最良売気配値の少なくとも一方が上昇するか(例えば、ある時点の最良売気配がキャンセルまたは成行買約定により消滅することで、最良売気配値が上昇)、最良売気配の数量が減少するか、最良買気配の数量が増加するかのいずれかである。すなわち、相場における買い意欲が勝った“強気”の時点と解釈される。後者はその逆の場合である。このように相場の上下別に DS 指標を算出することで、先行運行関係の(相場の方向性に関する)非対称性についても調べることが可能になる。

なお、現在のところ、Dobrev and Schaumburg (2015)による推定量に関しては統計理論が整備されていない。本研究では、 X^1, X^2, τ^1, τ^2 に特定の確率過程モデルを仮定せず、記述統計の立場を取りながら分析を進める。

3.4 データ加工

先行運行分析は、3市場(東証, JNX, ChiX)の中から3組のペア X^1-X^2 を作り、各ペア毎に行った。使用するデータの時間解像度が $\Delta = 0.001$ 秒であることから、 N の大きさは、東証の立会時間長 $T = 5$ 時間(9:00-11:30, 12:30-15:00)に相当する、 $N = 5 \times 60 \times 60 \times 1000 = 18,000,000$ である。一方、 $A(h)$ の最大値の探索範囲は、 $\mathcal{G} = \{-0.250, -0.249, \dots, 0, \dots, 0.249, 0.250\}$ (0.001秒刻み)と設定した。

1日内の先行運行時間が時間の推移と共に変化する現象は、林(2015, 2016)において指摘された。よって、そのような一日内変化を反映させるために、東証の立会時間計5時間=300分を30分毎に10個の時間帯に分割し、第1時間帯(9:00-9:30)、第2時間帯(9:30-10:00)、...、第10時間帯(14:30-15:00)、のように設定する。PTSは昼休み等東証の立会時間外に取引可能な時間帯はあるが、先行運行時間を見るという目的に照らし、以上の10個の時間帯以外のレコードは全て分析対象から除去した。

分析の前のデータ前処理として、元データのタイムスタンプはミリ秒刻みであるが、同一タイムスタンプに複数の気配レコードある場合には、最後尾のレコードのみを採用してマイクロ・プライスを計算した(最小時間解像度内につき最大1件のデータを使用)。さらに、今回はマイクロ・プライスの更新時点をイベントの発生時点と捉えることから、マイクロ・プライスの計算不能な最良気配が売買両サイドにないレコードは排除した。

つぎに、上記のような改良型の DS 指標を計算するために、マイクロ・プライス系列の変化の方向によって、タイムスタンプのデータセットを、変化が正であったもの、負であったものの2つのデータセットに分割した。なお、変化を伴わない(ゼロ・リターン)のタイムスタンプは除去した。DS 指標は定義上タイムスタンプのみを使用して計算されるため、今回の分析では大きな変化(ジャンプ)の除去、マイクロ・ストラクチャの除去等は行わなかった。

また、回帰分析の際に共変量として用いる観測量の算出の際には、2013年時点の東証ティックサイズの定数倍(今回は20倍)以上のビッド・アスク・スプレッドを持つレコードは、市場実勢から乖離した注文であると見なし計算時のデータセットから除去した。⁸⁾

実証分析は2つのステップから成る。ステップ1として、まず、各銘柄別、各日毎各時間帯毎に、両市場のマイクロ・プライス系列を使って、売り買い2種類のタイムスタンプのデータセット $\mathcal{T}_S, \mathcal{T}_B$ を生成し、各々より売り方向、買い方向の DS 指標 $\hat{\theta}$ を計算する。得られた、DS

指標についてプロットや要約統計量を計算して全体的傾向を観察する。ステップ2として、ステップ1で得られた $\hat{\theta}$ を多変量時系列データ(銘柄×データ期間)として構成し、パネル回帰分析により、先行運行時間の日次変動や銘柄固有の変動をコントロールしながら、銘柄に共通な特徴や相違点を抽出し先行運行要因を探る。

4. 実証分析結果

4.1 先行運行時間推定値の時系列プロットおよび要約統計量

前節の手順に従って、TOPIX100構成銘柄について、売買方向別に、データ期間内の日別、時間帯別にDS指標 $\hat{\theta}$ を計算した。参考までに、図1は、2014年1月14日におけるみずほFG(8411)について計算された、東証(X^1)-JNX(X^2)間の相互共起強度関数 $A(h)$ を、 h ($= -0.050, \dots, 0.050$; 0.001秒刻み)に対してプロットしたものである。タイムスタンプ・データは買い方向 T_B のみ使用し、見やすさを確保するため第2時間帯(t_2)と第6時間帯(t_6)のケースのみを一前者は実線で後者は破線で一表示する。2本の折れ線グラフとも周辺領域の凹凸の他、原点付近に鋭く尖った頂点(群)が見られる。時間帯2は最高点が負の領域に、(1番目とは高さ差のある)2番目の頂点が正の領域に存在する一方、第6時間帯はほぼ単峰が負領域に存在していると言ってよい。幾つかのデータセットについて目視した限りにおいては、ここで紹介するものと同様に、原点付近に急峻な峰が1個または若干個集中しているような形状となった。この中で最高点をもたらす h の値がDS指標である。

TOPIX100の中でも特に流動性の高いCore30銘柄について、DS指標の日次での時系列推移を調べた。全データ期間485営業日毎に、売買方向別、銘柄別に一日内に(各時間帯毎に得られた)10個ある推定値のメジアンを計算して得られた日次時系列プロットを作成した。以下では東証を“TSE”と表記する。図2-4は、その中の6銘柄(三菱UFJFG(8306)-三井不動産(8801))についての、順に、TSE-JNX, TSE-ChiX, JNX-ChiXの市場ペアのものである。実線は買い方向、破線は売り方向を示す。さらに、2本の水平鎖線は下から0秒、0.004秒、2本の垂直点線は左からフェーズ1導入日(251日目)、フェーズ2導入日(380日目)を示す。売買両方向のプロットは重なりが大きく識別が難しい。

各図の縦軸はDSによる先行運行推定値(単位は秒)、横軸はデータ期間内の日付の通し番号である。各図内には、縦軸0秒には水平の実線、東証ティックサイズ変更の実施された日(1月

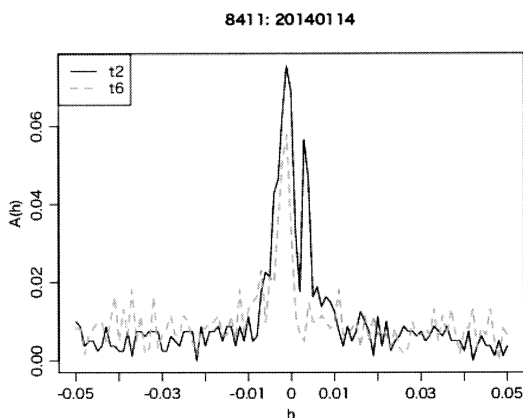


図1. 相互共起強度関数 $A(h)$ の計算例。第2時間帯(実線)と第6時間帯(破線)。

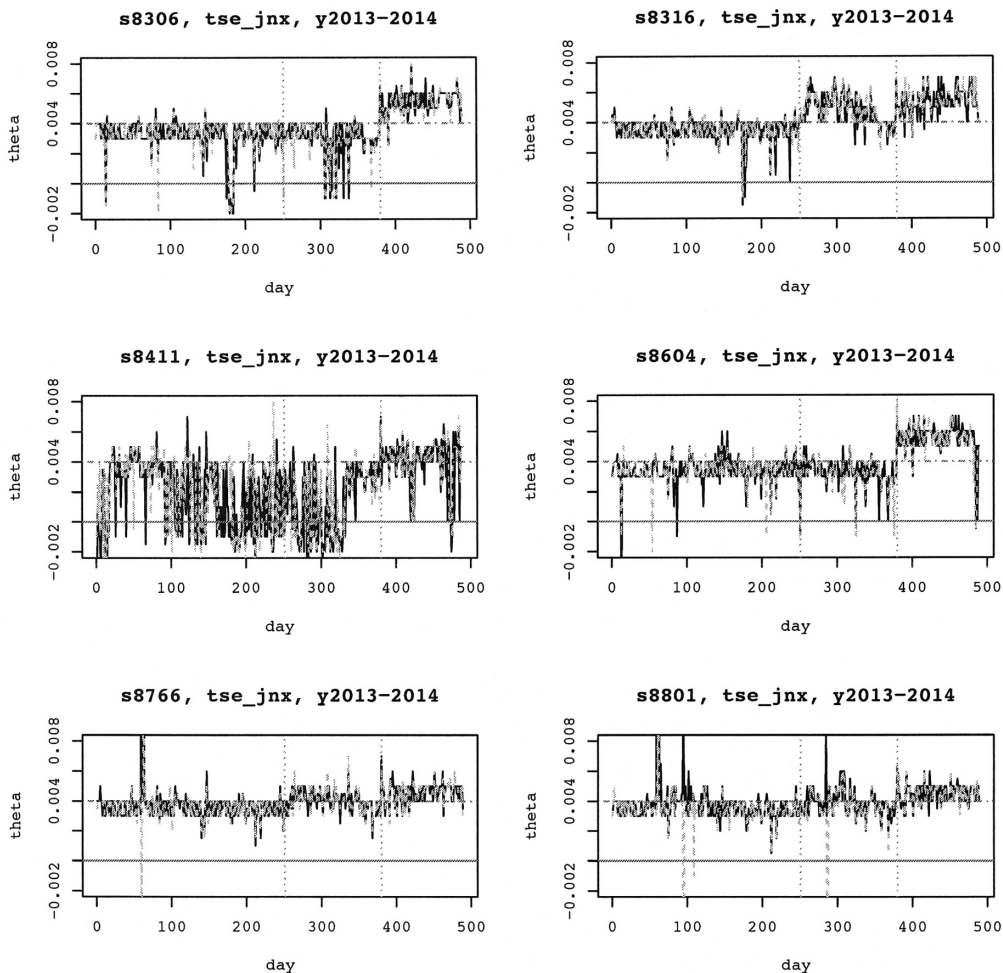


図 2. DS 指標の日次推移(実線は買い方向, 破線は売り方向): 三菱 UFJ フィナンシャルグループ(8306)-三井不動産(8801): TSE-JNX. 2本の水平鎖線は下から 0 秒, 0.004 秒, 2本の垂直点線は左からフェーズ 1 導入日(251 日目), フェーズ 2 導入日(380 日目)を示す.

14 日, 7 月 22 日)に垂直の点線を付している. さらに, 図 2 と図 3 においては, 0.004 秒の位置には水平の点線を付している.

両図より, いずれの銘柄とも, 4 ミリ秒付近を中心に変動していることが観察される. これは, TSE-JNX, TSE-ChiX のペアにおいて, 東証が PTS に対しておおよそ 4 ミリ秒先行していたことを示している. また, 林 (2015, 2016)で報告したのと同様に, フェーズ 1 以前(-2014 年 1 月 10 日), フェーズ 1 適用期間(2014 年 1 月 14 日-7 月 18 日), フェーズ 2 適用期間(7 月 22 日-12 月 30 日)と, 変動の様子に変化の見られることが確認される.

さらに, みずほ FG (8411)の変動の大きさは他銘柄と比べて圧倒的に大きい. 特に, フェーズ 2 導入以前においては, 推定値が負の値を取る日が頻繁に観測される. これは, データ期間中 100 円台で推移していたみずほ FG 株のティックサイズが, フェーズ 2 が実施される前まで

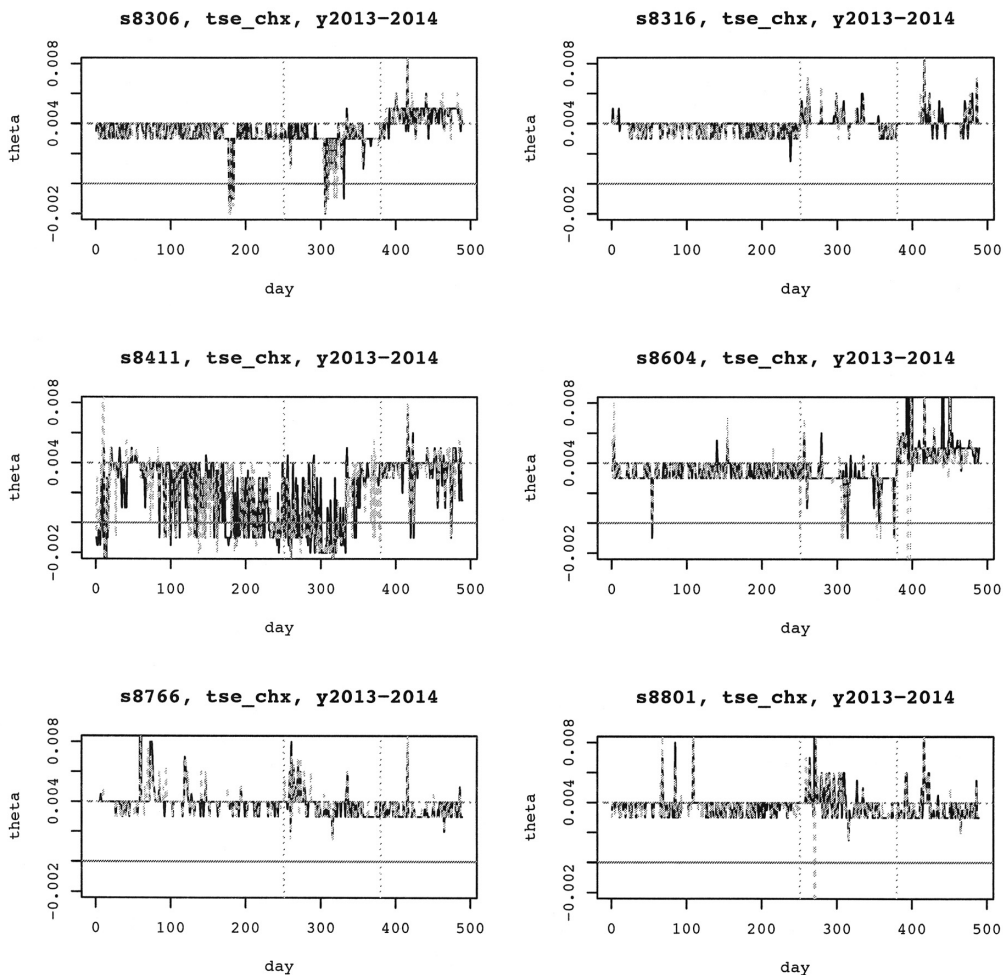


図 3. DS 指標の日々推移(実線は買い方向, 破線は売り方向)：三菱 UFJ フィナンシャルグループ(8306)–三井不動産(8801)：TSE-ChiX. 2本の水平鎖線は下から0秒, 0.004秒, 2本の垂直点線は左からフェーズ1導入日(251日目), フェーズ2導入日(380日目)を示す。

1円に設定されていたことに呼応している。

一方, 図4のJNX-ChiXの組み合わせにおいては, より小さな変動幅で, おおよそ0.000秒(水平実線)の周りを変動している。さらに, よく見ると, フェーズ1ないしはフェーズ2開始後に変動の中心が0.000秒から, -0.001 秒へ変化していることも分かる。すなわち, 東証のティックサイズ縮小により, ChiXはJNXよりも値動きが速くなったことを表している。

表2-4に, スペース節約のためCore30構成銘柄に限定して, 時間帯や売買方向性の区別をせずに, 各銘柄について先行運行推定値のデータ期間内平均と標準偏差を計算した結果を示す。

フェーズ1期間は過渡期のためか結果は必ずしも安定していない。銘柄間の相違はあるが, TSEティックサイズ変更前後(フェーズ1導入前とフェーズ2導入以降)を比較すると, 上の結果は大雑把に次のように要約できる。

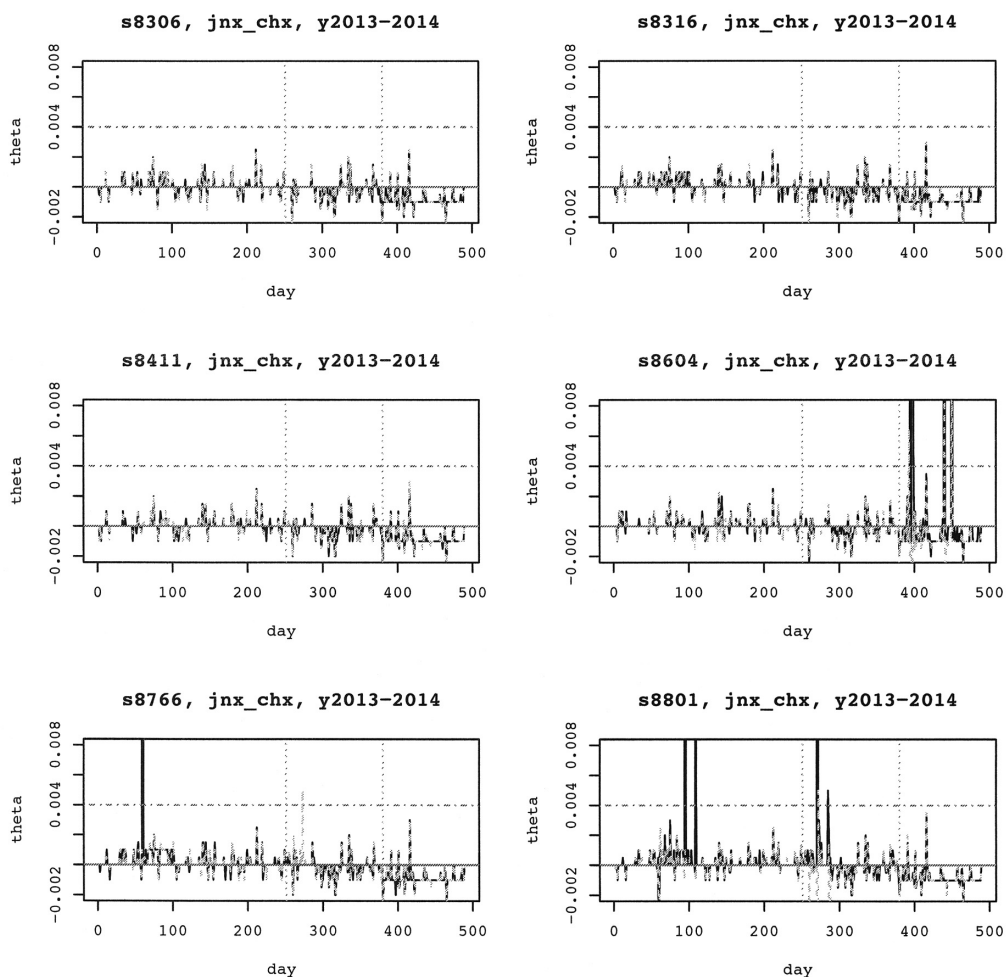


図 4. DS 指標の日次推移(実線は買い方向, 破線は売り方向): 三菱 UFJ フィナンシャルグループ(8306)-三井不動産(8801): JNX-ChiX. 2本の水平鎖線は下から 0 秒, 0.004 秒, 2本の垂直点線は左からフェーズ 1 導入日(251 日目), フェーズ 2 導入日(380 日目)を示す.

- TSE-JNX, TSE-ChiX においては, TSE が PTS 二市場に対して, おおよそ 4 ミリ秒先行している.
- TSE のティックサイズ変更により, 特に TSE-JNX において, TSE の先行度合いが増した.
- JNX-ChiX においては, 先行運行時間の差は 1 ミリ秒未満(計測限界以下)である.
- TSE のティックサイズ変更により, JNX-ChiX は JNX の先行から ChiX の先行へと変化した.

これらは, 筆者が先に林(2016)で示した HRY 指標の計測結果とおおむね整合的である. 東証が国内市場シェアの 9 割超を占める中, おそらく全ての市場参加者が東証の値動きを見ながら行動しているであろうことから, 東証が PTS 二市場に先行するという今回の結果は自然であ

表 2. DS 指標の要約統計量(Core30 構成銘柄別, 単位: 秒): TSE-JNX.

| code | Period 1 20130104–20140110 | | Period 2 20140114–20140718 | | Period 3 20140722–20141230 | |
|-------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|
| | mean | stdev | mean | stdev | mean | stdev |
| s2914 | 0.0036 | 0.0040 | 0.0045 | 0.0063 | 0.0050 | 0.0011 |
| s3382 | 0.0036 | 0.0082 | 0.0044 | 0.0066 | 0.0047 | 0.0011 |
| s4063 | 0.0033 | 0.0013 | 0.0043 | 0.0043 | 0.0046 | 0.0010 |
| s4502 | 0.0034 | 0.0016 | 0.0046 | 0.0068 | 0.0052 | 0.0013 |
| s4503 | 0.0033 | 0.0011 | 0.0037 | 0.0061 | 0.0044 | 0.0011 |
| s5401 | 0.0032 | 0.0019 | 0.0032 | 0.0033 | 0.0043 | 0.0012 |
| s6301 | 0.0040 | 0.0062 | 0.0038 | 0.0010 | 0.0050 | 0.0012 |
| s6501 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0030 | 0.0015 | 0.0048 | 0.0011 |
| s6752 | 0.0032 | 0.0081 | 0.0037 | 0.0011 | 0.0047 | 0.0011 |
| s6758 | 0.0038 | 0.0028 | 0.0039 | 0.0012 | 0.0052 | 0.0011 |
| s6902 | 0.0033 | 0.0043 | 0.0042 | 0.0012 | 0.0046 | 0.0010 |
| s6954 | 0.0046 | 0.0208 | 0.0043 | 0.0082 | 0.0045 | 0.0011 |
| s7201 | 0.0036 | 0.0010 | 0.0033 | 0.0013 | 0.0048 | 0.0016 |
| s7203 | 0.0031 | 0.0016 | 0.0051 | 0.0022 | 0.0054 | 0.0016 |
| s7267 | 0.0033 | 0.0015 | 0.0046 | 0.0014 | 0.0055 | 0.0012 |
| s7751 | 0.0035 | 0.0014 | 0.0046 | 0.0089 | 0.0054 | 0.0013 |
| s8031 | 0.0037 | 0.0010 | 0.0036 | 0.0015 | 0.0050 | 0.0011 |
| s8058 | 0.0039 | 0.0088 | 0.0039 | 0.0012 | 0.0052 | 0.0011 |
| s8306 | 0.0029 | 0.0020 | 0.0027 | 0.0018 | 0.0053 | 0.0010 |
| s8316 | 0.0034 | 0.0012 | 0.0049 | 0.0066 | 0.0054 | 0.0011 |
| s8411 | 0.0019 | 0.0090 | 0.0014 | 0.0099 | 0.0039 | 0.0021 |
| s8604 | 0.0033 | 0.0025 | 0.0029 | 0.0028 | 0.0054 | 0.0018 |
| s8766 | 0.0035 | 0.0209 | 0.0037 | 0.0102 | 0.0045 | 0.0010 |
| s8801 | 0.0031 | 0.0276 | 0.0018 | 0.0289 | 0.0044 | 0.0014 |
| s8802 | 0.0040 | 0.0221 | 0.0037 | 0.0011 | 0.0044 | 0.0009 |
| s9020 | 0.0036 | 0.0024 | 0.0044 | 0.0071 | 0.0047 | 0.0010 |
| s9432 | 0.0034 | 0.0014 | 0.0044 | 0.0053 | 0.0049 | 0.0010 |
| s9433 | 0.0033 | 0.0022 | 0.0047 | 0.0070 | 0.0045 | 0.0010 |
| s9437 | 0.0041 | 0.0158 | 0.0038 | 0.0014 | 0.0048 | 0.0011 |
| s9984 | 0.0035 | 0.0011 | 0.0061 | 0.0021 | 0.0059 | 0.0014 |

る。一方、今回計測された市場間の全般的な時間差(東証対 PTS は 4 ミリ秒差, PTS 間は 0 ミリ秒差)は何か物理的な大きさを表しているのだろうか。

Dobrev and Schaumburg (2015)において、実証分析の事例として米国 10 年国債現物と S&P500 指数先物(E-Mini)は、約 5 ミリ秒後者が前者に対して先行していると報告している。前者は BrokerTech (New Jersey 州 Secaucus)の、後者は CME (Illinois 州 Aurora)のデータである。光速で 4.7 ミリ秒かかる距離(理論的な下限値)であり、彼らの計測値がそれに近いことを示している。一方、国内 3 市場のマッチング・エンジンは、所在地はセキュリティ上公開されていないが、地理的に互いに近い場所に設置されており、広大な国土を有する米国市場とは状況は異なる。よって恐らく、ブローカーが TSE のマッチング・エンジンより出入するのに経路せねばならない東証のネットワーク(arrownet)に起因する遅延が主要因ではないかと筆者は考える。一方、PTS 二市場間にはそのようなネットワーク上の制約がない。また、東証に届く多

表 3. DS 指標の要約統計量(Core30 構成銘柄別, 単位: 秒): TSE-ChiX.

| code | Period 1 20130104–20140110 | | Period 2 20140114–20140718 | | Period 3 20140722–20141230 | |
|-------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|
| | mean | stdev | mean | stdev | mean | stdev |
| s2914 | 0.0039 | 0.0009 | 0.0042 | 0.0047 | 0.0040 | 0.0009 |
| s3382 | 0.0039 | 0.0065 | 0.0038 | 0.0043 | 0.0038 | 0.0009 |
| s4063 | 0.0033 | 0.0010 | 0.0040 | 0.0060 | 0.0036 | 0.0009 |
| s4502 | 0.0037 | 0.0011 | 0.0043 | 0.0015 | 0.0043 | 0.0012 |
| s4503 | 0.0035 | 0.0013 | 0.0036 | 0.0016 | 0.0034 | 0.0008 |
| s5401 | 0.0034 | 0.0019 | 0.0033 | 0.0069 | 0.0034 | 0.0040 |
| s6301 | 0.0041 | 0.0040 | 0.0037 | 0.0017 | 0.0040 | 0.0009 |
| s6501 | 0.0035 | 0.0006 | 0.0030 | 0.0013 | 0.0039 | 0.0012 |
| s6752 | 0.0035 | 0.0081 | 0.0034 | 0.0009 | 0.0038 | 0.0009 |
| s6758 | 0.0040 | 0.0043 | 0.0037 | 0.0009 | 0.0043 | 0.0009 |
| s6902 | 0.0037 | 0.0019 | 0.0039 | 0.0031 | 0.0037 | 0.0009 |
| s6954 | 0.0041 | 0.0101 | 0.0041 | 0.0047 | 0.0035 | 0.0012 |
| s7201 | 0.0038 | 0.0007 | 0.0031 | 0.0011 | 0.0040 | 0.0011 |
| s7203 | 0.0034 | 0.0012 | 0.0047 | 0.0015 | 0.0045 | 0.0019 |
| s7267 | 0.0037 | 0.0012 | 0.0041 | 0.0014 | 0.0044 | 0.0009 |
| s7751 | 0.0039 | 0.0009 | 0.0042 | 0.0015 | 0.0044 | 0.0009 |
| s8031 | 0.0039 | 0.0005 | 0.0035 | 0.0014 | 0.0041 | 0.0009 |
| s8058 | 0.0041 | 0.0049 | 0.0037 | 0.0010 | 0.0042 | 0.0008 |
| s8306 | 0.0032 | 0.0014 | 0.0026 | 0.0017 | 0.0045 | 0.0009 |
| s8316 | 0.0036 | 0.0023 | 0.0042 | 0.0010 | 0.0043 | 0.0009 |
| s8411 | 0.0019 | 0.0081 | 0.0016 | 0.0154 | 0.0030 | 0.0055 |
| s8604 | 0.0034 | 0.0020 | 0.0027 | 0.0057 | 0.0059 | 0.0437 |
| s8766 | 0.0042 | 0.0079 | 0.0038 | 0.0023 | 0.0034 | 0.0008 |
| s8801 | 0.0039 | 0.0060 | 0.0039 | 0.0164 | 0.0038 | 0.0047 |
| s8802 | 0.0040 | 0.0131 | 0.0036 | 0.0011 | 0.0034 | 0.0049 |
| s9020 | 0.0035 | 0.0006 | 0.0043 | 0.0060 | 0.0037 | 0.0013 |
| s9432 | 0.0036 | 0.0012 | 0.0044 | 0.0096 | 0.0040 | 0.0009 |
| s9433 | 0.0035 | 0.0009 | 0.0042 | 0.0013 | 0.0035 | 0.0008 |
| s9437 | 0.0043 | 0.0199 | 0.0035 | 0.0020 | 0.0036 | 0.0009 |
| s9984 | 0.0037 | 0.0009 | 0.0056 | 0.0016 | 0.0051 | 0.0014 |

種・大量の注文を処理する際に発生する待ち行列の処理時間も遅延要因になっているかもしれない。

次に、表 5 は、TOPIX100 の個別銘柄毎に(時間帯区別なく)計算されたデータ期間内平均値を使って、さらに 100 銘柄全体の平均値と標準偏差を計算したものである(単位ミリ秒)。

さらに、売買方向の相違による先行運行推定時間の差異を、1 日以内での時間帯別に調べる。図 5 は、売買方向別に、各時間帯毎に、DS 指標推定値の全平均(各銘柄の期間内平均の、全銘柄平均)をプロットしたものである。同図内は、上から順に、TSE-JNX, TSE-ChiX, JNX-ChiX, 買い方向は左列、売り方向は右列に配置されている。各プロット内で、3 つのデータ期間の平均値を重ねて表示している。点線がフェーズ 1 導入前(“prd1”), 破線がフェーズ 1 導入期間中(“prd2”), 実線がフェーズ 2 導入後(“prd3”)である。

同図から読み取ることのできる全体的な傾向は次の通りである。

表 4. DS 指標の要約統計量(Core30 構成銘柄別, 単位: 秒): JNX-ChiX.

| code | Period 1 20130104–20140110 | | Period 2 20140114–20140718 | | Period 3 20140722–20141230 | |
|-------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|-------------------------------|--------|
| | mean | stdev | mean | stdev | mean | stdev |
| s2914 | 0.0002 | 0.0028 | 0.0003 | 0.0075 | -0.0008 | 0.0009 |
| s3382 | 0.0004 | 0.0112 | 0.0004 | 0.0085 | -0.0008 | 0.0009 |
| s4063 | 0.0002 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0099 | -0.0008 | 0.0009 |
| s4502 | 0.0002 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0087 | -0.0008 | 0.0010 |
| s4503 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0081 | -0.0008 | 0.0009 |
| s5401 | 0.0001 | 0.0009 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0007 | 0.0024 |
| s6301 | 0.0004 | 0.0085 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s6501 | 0.0001 | 0.0008 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0006 | 0.0037 |
| s6752 | -0.0001 | 0.0087 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s6758 | 0.0001 | 0.0047 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s6902 | 0.0004 | 0.0053 | 0.0001 | 0.0051 | -0.0008 | 0.0011 |
| s6954 | 0.0010 | 0.0219 | 0.0004 | 0.0085 | -0.0009 | 0.0030 |
| s7201 | 0.0001 | 0.0009 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s7203 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0022 | -0.0008 | 0.0009 |
| s7267 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0001 | 0.0049 | -0.0008 | 0.0009 |
| s7751 | 0.0001 | 0.0009 | 0.0008 | 0.0137 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8031 | 0.0002 | 0.0008 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8058 | 0.0004 | 0.0095 | -0.0001 | 0.0010 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8306 | 0.0001 | 0.0008 | -0.0001 | 0.0009 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8316 | 0.0002 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0102 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8411 | 0.0002 | 0.0026 | 0.0000 | 0.0022 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8604 | 0.0003 | 0.0058 | 0.0001 | 0.0065 | 0.0009 | 0.0452 |
| s8766 | 0.0001 | 0.0213 | 0.0002 | 0.0132 | -0.0008 | 0.0009 |
| s8801 | 0.0002 | 0.0291 | -0.0017 | 0.0334 | -0.0002 | 0.0112 |
| s8802 | 0.0004 | 0.0242 | 0.0000 | 0.0013 | -0.0008 | 0.0009 |
| s9020 | 0.0002 | 0.0009 | 0.0000 | 0.0094 | -0.0008 | 0.0009 |
| s9432 | 0.0002 | 0.0009 | 0.0003 | 0.0107 | -0.0008 | 0.0009 |
| s9433 | 0.0002 | 0.0021 | 0.0002 | 0.0091 | -0.0008 | 0.0009 |
| s9437 | 0.0035 | 0.0325 | -0.0001 | 0.0010 | -0.0008 | 0.0009 |
| s9984 | 0.0002 | 0.0009 | -0.0001 | 0.0011 | -0.0007 | 0.0036 |

表 5. DS 指標の要約統計量(TOPIX100 構成銘柄全体の要約, 単位: ミリ秒).

| Period | TSE vs JNX | | TSE vs ChiX | | JNX vs ChiX | |
|----------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| | Buy orders | Sell orders | Buy orders | Sell orders | Buy orders | Sell orders |
| Period 1 | | | | | | |
| mean | 4.320 | 2.990 | 4.410 | 3.880 | 1.590 | -0.470 |
| stdev | 2.150 | 2.010 | 2.430 | 1.510 | 2.650 | 1.610 |
| Period 2 | | | | | | |
| mean | 3.860 | 3.360 | 3.680 | 3.570 | 0.360 | -0.360 |
| stdev | 0.860 | 1.650 | 0.720 | 0.590 | 0.980 | 1.600 |
| Period 3 | | | | | | |
| mean | 4.530 | 4.560 | 3.690 | 3.600 | -0.630 | -0.820 |
| stdev | 0.530 | 0.520 | 0.810 | 0.490 | 0.600 | 0.350 |

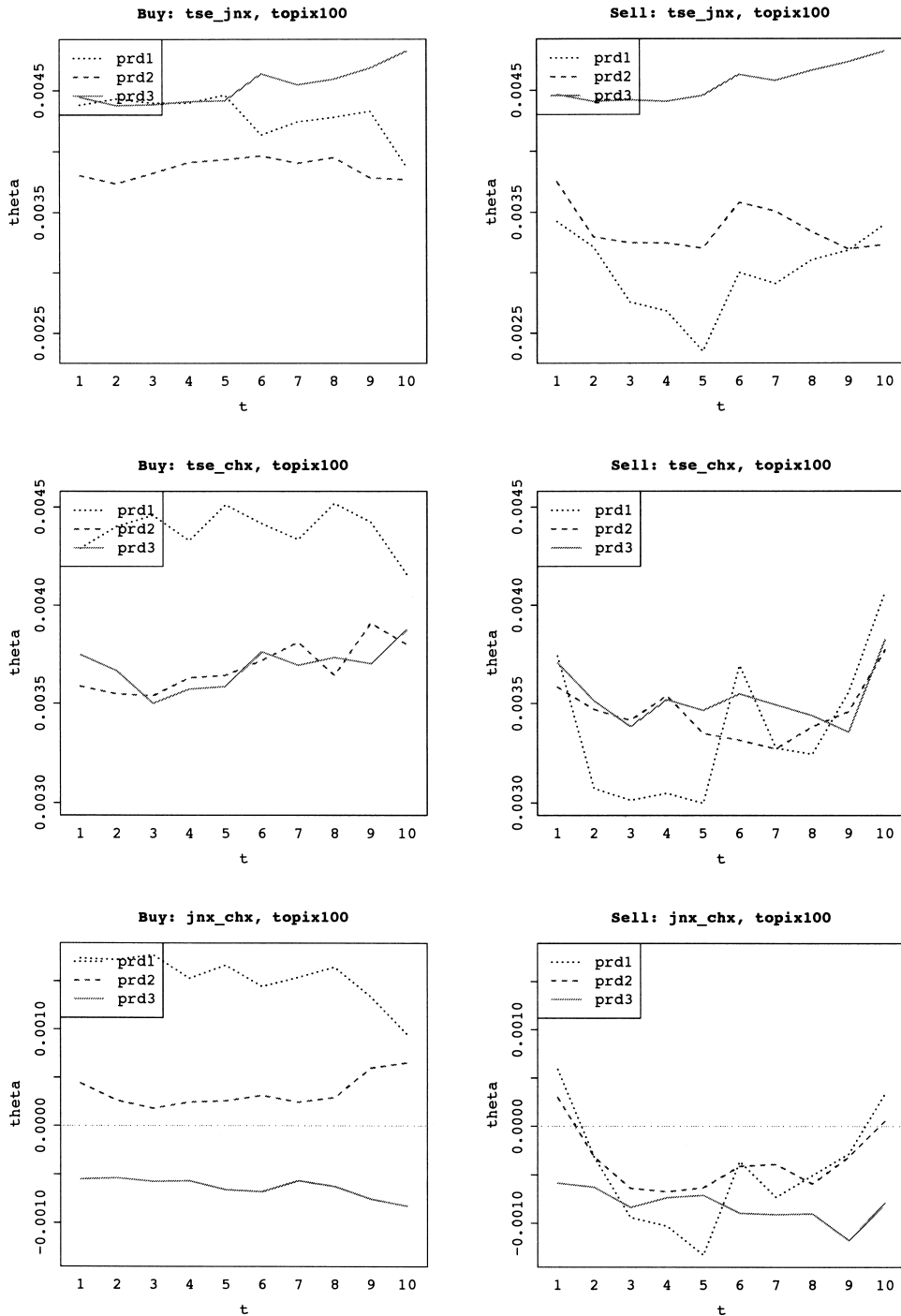


図 5. 個別銘柄 DS 指標の、各時間帯(横軸)におけるデータ期間内の銘柄全体平均値(縦軸) (TOPIX100 銘柄): TSE-JNX(上段), TSE-ChiX(中段), JNX-ChiX(下段). 買い方向(左列), 売り方向(右列).

- フェーズ 1 導入前は、売買方向間の非対称性が大きい。特に、売り方向は買い方向に比べて先行度合いがマイナス方向に位置していた。
- フェーズ 2 導入後は、先行度合いの売買方向差は縮小し、ほぼ類似の 1 日内推移パターンを示すようになった。

また、

- TSE-JNX では、TSE のティックサイズ変更後、TSE の先行度合いが、特に売り方向側で大幅に増加した。
- TSE-ChiX では、TSE のティックサイズ変更後、TSE の先行度合いが、特に買い方向側で減少した(または、ChiX の運行度合いが、買い方向側で減少した)。
- JNX-ChiX では、TSE のティックサイズ変更後、買い方向では ChiX が運行から先行に変化し、売り方向では ChiX の先行度合いが増加した。

さらに、一日内推移を見ると、

- 売り方向では“U字型”が見られる(寄付後と大引け前において、TSE-PTS 間は TSE の先行度大、JNX-ChiX 間は両者の差小)。フェーズ 1 導入以前は時間帯による差異がより顕著だった。
- 買い方向は、売り方向ほど顕著ではない。フェーズ 1 導入以前は、上下しながら右肩下がりの“逆 U 字(または逆 J 字)型”を示していた(3つのペアとも、大引けにかけて先行市場側の先行度縮小)。一方、フェーズ 2 以降は、TSE-PTS 間において右肩上がり、すなわち、大引けに向かいむしろ TSE の先行度が増加する様子が見られる。

確認のため、売買方向の違いによる先行度合いの相違に関して、市場ペア別/データ期間別/時間帯別に、平均値の差に関する Wilcoxon 符号順位和検定(ペア検定)を行ったところ(全部で $3 \times 3 \times 10 = 90$ 通り)、有意に差が見られるケースが随所に見られた(ここでは省略)。

なお、図 2-4 でも現れたような、稀に発生する極端な値(外れ値)が平均値に大きな影響を与えている可能性がある。実際、平均値の代わりにメジアンを使ったプロットではここで観察されたような時間帯推移は殆ど見られなかった。一方、ロットサイズの大きな注文の執行には時間がかかるはずで、そのような先行運行時間が適切に反映された数値の評価も意義がある。このような極端な値を考慮したきめ細かい分析は今後の課題であるが、東証のフェーズ 2 導入によって、先行運行時間に関する売買の方向性間の非対称性は大きく減少したとは言えそうだ。

4.2 回帰分析

変数とモデル

前節では DS 指標による市場ペア間の先行運行時間の推定結果について報告した。DS 指標はジャンプやマイクロストラクチャ・ノイズを除去しないプレーンな HRY 指標に比べて安定した計測結果を与えることが確認された。

本節では、DS 指標を被説明変数、各銘柄の取引に関する市場観測量を説明変数とする回帰分析を行うことで、市場ペア間での価格形成の先行運行関係の要因を調べることにする。その際、銘柄固有の要因や日次の要因による影響は除去して考える。

銘柄のカバレッジとして、上記 Core30 銘柄を包含する TOPIX100 構成銘柄(2013 年末)を用いる。これらは、全て 2014 年の東証ティックサイズ変更の対象である。

先に、データ期間内中央値に集約した先行運行関係において 1 日内変化が見られたことから、ここでも、東証の立会時間全 5 時間を 30 分毎に 10 個の時間帯に分割したデータセットを

用いる。

また、上述のように、売り方向(“S”)と買い方向(“B”)での先行運行推定時間の差が見られることから、2つのDS指標データセットを縦方向に並べ、相場の方向性を識別する2水準の固定因子を導入する。

パネルデータ分析のためのアプローチとして、銘柄固有の要因や日次要因に起因するDS指標間の相関の影響可能性を考慮するために、林(2015, 2016)と同様に線形混合効果モデル(linear mixed effects model)を用いることにする。

被説明変数として、第*i*銘柄($i = 1, \dots, 100$), 第*j*日($j = 1, \dots, 489$), 第*t*時間帯($t = 1, \dots, 10$)におけるDS指標を使用し、 y_{ijt} と書く。 $y_{ijt} > 0$ は、市場 X^1 が市場 X^2 に先行することを、 $y_{ijt} < 0$ は逆を示す。今回の報告では、東証の開場閉場前後の“非定常”な変動を除くため、全10個のうち、前場後場の寄付後30分および引け前30分の時間帯を除去し、それ以外の6個の時間帯のデータのみを使用する($t = 2, 3, 4, 7, 8, 9$)。従って、BまたはSの一方方向のデータをパネルデータとして、全期間分を行方向に時間、列方向に銘柄を(仮想的に)配置すると、行数 $2934 (= 1 \text{日} \times 6 \text{時間帯} \times 489 \text{営業日}) \times \text{列数} \times 100$ の大きさを持つ行列データとなる。

説明変数については、ボラティリティや約定件数など個別銘柄の市場特徴量を、データ期間内の各日において、ペアを組む2つの市場について計算し固定効果として与える。林(2015, 2016)で報告したように、2014年の東証ティックサイズ変更は対象群であるTOPIX100銘柄を中心に個別銘柄の挙動に大きな変化をもたらしたことから、図5と同様に、データセットを(I)期間1:フェーズ1適用前(20130104-20140110, 250営業日)、(II)期間2:フェーズ1適用後フェーズ2適用前(20140114-20140722, 129営業日)、(III)期間3:フェーズ2適用後(20140722-20141230, 110営業日)の3つの期間に分割して分析を行う。

質的説明変数(固定因子)としては、1日内時間変化を捉えるための6水準因子、売買の方向性を示す2水準因子を加える。さらに、日次効果を表す変数と、銘柄間の違いを表現するため銘柄固有要因を表す変数の2変数を変量効果(random effect)として導入することにする。

量的説明変数としては、各個別銘柄の最良気配値、最良気配枚数、最良気配更新時刻のタイムスタンプ、約定価格、約定枚数、約定時刻のタイムスタンプから計算される、市場のクオリティや流動性を表すと考えられる代表的な指標を選ぶ。次に説明するように、2種類の量的変数のグループを導入する。

グループ1として、林(2015, 2016)と同様に、今回の分析では、市場間の先行運行時間は二つの市場間の相対的な特徴の差異によって生成されると見る立場から、両市場の特徴量の対数比を取ることで新たな変数を定義する。例えば、第*i*銘柄、第*j*日の第*t*時間帯における二つの市場 X^1, X^2 における実現ボラティリティが RV_{ijt}^1, RV_{ijt}^2 であれば、 $RVr_{ijt} = \ln(RV_{ijt}^1/RV_{ijt}^2)$ と言った具合である。すなわち、 $RVr_{ijt} > 0$ (< 0)であれば、市場 X^1 で計測された実現ボラティリティが、市場 X^2 よりも大きかった(小さかった)ことを示す。なお、グループ1の変数群は対数比を取っていることから、かりに市場ペア X^1 と X^2 の役割を入れ替えて変数を作り回帰を行っても、結果は変わらない。

一方、このような市場ペア間の相対的な特徴量以外の、その時点におけるマクロ的な、市場全体の要因が先行運行時間に影響を与えていることも想定される。そこで、それらをコントロールするために、グループ2として各銘柄の3市場横断的な相場状況を表す指標を導入する。

本稿では、これら全ての量的変数に対し、期間毎、銘柄毎に標準化を行ったものを報告する。これは、期間毎、銘柄毎に各変数の中心の値やバラツキの大きさに差異が見られたことに対する措置であるが、異なる標準化処理を施したものは、ここでの報告とは異なる回帰分析結果となっており、異なる結果の解釈が必要となる。ここでの中心化の処理により、*y*-切片の値の解釈は、全ての共変量の値が同時にゼロとなるような仮定の銘柄に対するベースライン効果(第

2時間帯，買い方向)を秒単位で示したものである(共変量の値がゼロとなるとは，グループ1の量的変数群においては，市場1と市場2の観測量の比が，グループ2の量的変数群においては，3市場全体あるいは東証の観測量が，各々の平均値に等しい)．この時，各固定因子の効果はベースラインからの変化量として捉えることができる。⁹⁾

分析の実行には，統計パッケージRのパッケージ‘lme4’内にある関数lmer()を使用した．複数の候補変数群の中から，変数間の相関係数の大きさ，回帰係数の有意性やAICの値を確認しつつ，さらに解釈容易性も勘案しながら，モデル選択，変数選択を行った．その結果，次のモデルを選択し，パラメータの推定を行った。¹⁰⁾

$$(4.1) \quad y \sim \underbrace{(1|Code) + (1|Ymd)}_{\text{random effects}} + \underbrace{T}_{\text{6-level factor}} + \underbrace{Dir}_{\text{2-level factor}} \\ * \underbrace{(RVr + NQr + LTSr + SPRr + QBr + QAr + RVag + RETts + TVag)}_{\text{covariates}}$$

ここで， $RVr, \dots, TVag$ は固定効果(fixed effects)， $Code$ は個別銘柄効果， Ymd は日次効果であり共に変量効果(random effects)である．但し， RVr は，各市場の仲値より計算される実現ボラティリティの(市場ペア間の)対数比， NQr は最良気配更新数(ミリ秒単位に集約後の)対数比， $LTSr$ は平均約定枚数(約定枚数÷約定回数)の対数比， $SPRr$ はスプレッド率(ビッド・アスク・スプレッド÷仲値)の対数比， QBr (QAr)は，最良買気配(売気配)の数量(“デブス”)の対数比である．これらはグループ1の量的変数群である．

また，市場ペア間の相対比を取らない各個別銘柄の量的変数(グループ2の変数群)として， $RVag$ は3市場を一つの市場と見た場合の最良売買気配値(買いサイドは3市場の最良買気配値の最大値，売りサイドは最良売気配値の最小値)間の仲値より計算された実現ボラティリティ， $RETts$ は東証仲値の各時間帯始値と終値を使って計算される対数収益率， $TVag$ は3市場全体の約定枚数合計の対数値である。¹¹⁾なお，スプレッド率比($SPRr$)および2つのデブス比(QBr, QAr)については，対数比を取るのに使用した各市場でのスプレッドやデブスの値は，当該時間帯内における時間加重平均値(次の気配更新までの経過時間がウェイト)である。¹²⁾

T は時間帯を表す6水準固定因子($T = 2, 3, 4, 7, 8, 9$ ．例えば，水準2は，第2時間帯(9時半-10時))である． Dir は売買の方向性を示す2水準因子($Dir = B, S$)である．さらに，相場方向性による回帰係数の違いの有無を捉えるため， Dir と各共変量の交互作用項(interaction terms)もモデルに加えた．その他の交互作用項はモデル構築の段階で除去した。¹³⁾

分析結果

回帰分析の結果は，表6-8に記載する．表6は，データ期間1(20130104-20140110)，表7は，データ期間2(20140114-20140720)，表8はデータ期間3(20140722-20141230)の推定結果である．得られた幾つの特徴的な観察結果について言及したい．全般に，3市場ペア，TSE-JNX(左列)，TSE-ChiX(中央列)，JNX-ChiX(右列)に共通する幾つかのパターンが見られる．但し，林(2015, 2016)でも指摘したように，PTS同士であるJNX-ChiXペアにおける推定結果は，他の市場ペアとはやや乖離している．また，例えば，データ期間3におけるTSE-JNXの共変量の回帰係数の値は，前2期間に比べ桁が一つ小さくなっているなど，同じ市場ペアであってもデータ期間の相違による変化も認められる．

先述のように， y -切片の値は，全ての共変量の値が同時にゼロとなるような仮想銘柄に關する，ベースライン(「第2時間帯($T = 2$)」かつ「買い方向($Dir = B$)」)のデータ群に対する先行運行時間を示している．表内の「 $DirS$ 」は，「売り方向($Dir = S$)」の固定因子効果(y -切片の変化値)，「 $t3$ 」-「 $t9$ 」は第3時間帯($T = 3$)から第9時間帯($T = 9$)までの各固定因子効果の大

表 6. 回帰分析結果：期間 1 (20130104–20140110).

| Period 1 | (I) | TSE-JNX | (II) | TSE-ChiX | (III) | JNX-ChiX |
|----------------|-------------|---------|-------------|----------|-------------|----------|
| Fixed effects | Estimate | t value | Estimate | t value | Estimate | t value |
| (Intercept) | 0.00341 | 20.722 | 0.00373 | 18.420 | 0.00090 | 5.719 |
| RVr | 0.00083 | 26.724 | 0.00100 | 32.399 | 0.00036 | 9.479 |
| NQr | 0.00001 | 0.302 | -0.00012 | -3.839 | -0.00050 | -12.881 |
| LTSr | -0.00033 | -9.412 | -0.00029 | -8.769 | 0.00007 | 2.185 |
| SPRr | -0.00068 | -18.460 | -0.00076 | -20.547 | -0.00047 | -12.004 |
| QBr | 0.00039 | 13.166 | 0.00012 | 3.815 | -0.00036 | -10.317 |
| QAr | 0.00050 | 16.254 | 0.00086 | 26.802 | 0.00044 | 12.208 |
| RVag | 0.00041 | 8.253 | 0.00051 | 10.417 | 0.00042 | 7.635 |
| RETts | -0.00003 | -1.136 | -0.00008 | -2.691 | -0.00003 | -0.842 |
| TVag | -0.00081 | -18.605 | -0.00112 | -26.327 | -0.00052 | -11.412 |
| DirS | 0.00000 | 0.055 | -0.00004 | -1.035 | -0.00006 | -1.381 |
| t3 | 0.00008 | 1.313 | 0.00002 | 0.304 | -0.00012 | -1.661 |
| t4 | 0.00008 | 1.246 | -0.00002 | -0.372 | -0.00024 | -3.173 |
| t7 | 0.00022 | 3.317 | 0.00018 | 2.765 | -0.00002 | -0.264 |
| t8 | 0.00032 | 4.817 | 0.00041 | 6.325 | 0.00003 | 0.400 |
| t9 | 0.00074 | 10.930 | 0.00069 | 10.558 | 0.00007 | 0.959 |
| RVr:DirS | -0.00002 | -0.568 | -0.00014 | -3.351 | -0.00022 | -4.153 |
| NQr:DirS | 0.00000 | 0.064 | 0.00005 | 1.098 | -0.00004 | -0.666 |
| LTSr:DirS | -0.00001 | -0.192 | 0.00010 | 2.156 | -0.00006 | -1.395 |
| SPRr:DirS | 0.00004 | 0.836 | 0.00010 | 1.927 | 0.00011 | 2.096 |
| QBr:DirS | 0.00008 | 1.837 | 0.00005 | 1.179 | -0.00002 | -0.450 |
| QAr:DirS | -0.00016 | -3.766 | -0.00020 | -4.521 | 0.00001 | 0.280 |
| RVag:DirS | 0.00003 | 0.408 | -0.00005 | -0.778 | -0.00003 | -0.438 |
| RETts:DirS | 0.00016 | 3.884 | 0.00013 | 3.349 | 0.00010 | 2.021 |
| TVag:DirS | 0.00001 | 0.187 | 0.00010 | 1.752 | 0.00008 | 1.290 |
| Random effects | Std.Dev. | | Std.Dev. | | Std.Dev. | |
| ynd | 0.00075 | | 0.00065 | | 0.00081 | |
| code | 0.00149 | | 0.00192 | | 0.00136 | |
| Resid. | 0.00973 | | 0.00949 | | 0.01148 | |
| Model fitness | | | | | | |
| AIC | -1829041.04 | | -1851469.30 | | -1759206.56 | |
| BIC | -1828745.38 | | -1851173.51 | | -1758910.51 | |
| logLik | 914548.52 | | 925762.65 | | 879631.28 | |
| deviance | -1829097.04 | | -1851525.30 | | -1759262.56 | |
| df.resid | 284665 | | 285999 | | 288660 | |

きさ(ベースラインとの差)を示している。時間効果については、期間 1, 期間 2 においては、TSE-JNX, TSE-ChiX とともに、後場の時間経過($T = 7, 8, 9$)と共に、推定値(ベースラインとの差)が正に拡大し、かつ有意性も高まる。TSE の PTS に対する先行度合いが第 2 時間帯と比べて高まることを示している。一方、データ期間 3 においては、TSE-JNX はデータ期間 1, 2 に見られるパターンを維持したが、TSE-ChiX では消滅した。期間 3 において、ChiX の市場参加者の行動、すなわち注文板形成が大きく変化した可能性がある。売買方向性に関しては、有意なケースは期間 3 の TSE-JNX のみであった(売り ($Dir = S$)) の場合が、買いの場合に比べて

表 7. 回帰分析結果：期間 2 (20140114–20140720).

| Period 2 | (I) | TSE-JNX | (II) | TSE-ChiX | (III) | JNX-ChiX |
|----------------|-------------|---------|-------------|----------|-------------|----------|
| Fixed effects | Estimate | t value | Estimate | t value | Estimate | t value |
| (Intercept) | 0.00359 | 36.315 | 0.00345 | 41.671 | 0.00019 | 2.148 |
| RVr | 0.00048 | 23.521 | 0.00046 | 21.170 | 0.00022 | 7.235 |
| NQr | 0.00022 | 10.074 | 0.00000 | -0.181 | 0.00007 | 2.291 |
| LTSr | -0.00009 | -3.807 | -0.00011 | -4.886 | -0.00004 | -1.515 |
| SPRr | -0.00037 | -15.019 | -0.00038 | -15.201 | -0.00023 | -6.895 |
| QBr | 0.00024 | 11.847 | -0.00002 | -1.184 | -0.00031 | -11.762 |
| QAr | 0.00021 | 10.228 | 0.00030 | 14.119 | 0.00030 | 10.982 |
| RVag | 0.00004 | 1.071 | -0.00004 | -1.031 | -0.00004 | -0.871 |
| RETts | 0.00000 | -0.058 | -0.00006 | -2.656 | -0.00005 | -1.706 |
| TVag | -0.00023 | -7.145 | -0.00011 | -3.435 | 0.00004 | 1.101 |
| DirS | 0.00002 | 0.675 | 0.00000 | -0.047 | -0.00005 | -1.370 |
| t3 | 0.00004 | 0.823 | -0.00002 | -0.406 | -0.00009 | -1.561 |
| t4 | 0.00009 | 2.154 | 0.00001 | 0.216 | -0.00009 | -1.586 |
| t7 | 0.00009 | 2.005 | 0.00007 | 1.676 | -0.00001 | -0.149 |
| t8 | 0.00018 | 4.030 | 0.00009 | 2.054 | 0.00001 | 0.084 |
| t9 | 0.00017 | 3.683 | 0.00021 | 4.688 | 0.00018 | 2.927 |
| RVr:DirS | -0.00004 | -1.447 | 0.00004 | 1.371 | 0.00005 | 1.210 |
| NQr:DirS | -0.00014 | -4.733 | -0.00004 | -1.314 | 0.00003 | 0.799 |
| LTSr:DirS | 0.00008 | 2.278 | 0.00004 | 1.106 | -0.00002 | -0.703 |
| SPRr:DirS | 0.00004 | 1.046 | 0.00001 | 0.310 | 0.00007 | 1.571 |
| QBr:DirS | -0.00005 | -1.720 | 0.00000 | -0.136 | 0.00003 | 0.786 |
| QAr:DirS | -0.00010 | -3.536 | 0.00006 | 1.904 | 0.00002 | 0.440 |
| RVag:DirS | 0.00000 | -0.058 | -0.00005 | -1.104 | 0.00002 | 0.339 |
| RETts:DirS | 0.00004 | 1.505 | 0.00008 | 2.726 | 0.00011 | 2.783 |
| TVag:DirS | 0.00005 | 1.127 | -0.00001 | -0.127 | 0.00000 | -0.047 |
| Random effects | Std.Dev. | | Std.Dev. | | Std.Dev. | |
| ynd | 0.00062 | | 0.00056 | | 0.00068 | |
| code | 0.00075 | | 0.00057 | | 0.0005 | |
| Resid. | 0.00474 | | 0.00471 | | 0.00641 | |
| Model fitness | | | | | | |
| AIC | -1158093.51 | | -1160800.89 | | -1089535.44 | |
| BIC | -1157816.30 | | -1160523.65 | | -1089257.71 | |
| logLik | 579074.76 | | 580428.44 | | 544795.72 | |
| deviance | -1158149.51 | | -1160856.89 | | -1089591.44 | |
| df.resid | 147313 | | 147416 | | 150087 | |

TSE の対 JNX 先行度が微かながら (0.05 ミリ秒) 大きい。但し、他のデータ期間や他の組み合わせでは有意な結果が得られている訳ではなく、解釈やモデルの改良も含め追加の調査検証が必要である。

共変量に対する推定結果は、ベースライン(特に、買いサイド)のデータ群についてのものである。細部に差異はあるものの、データ期間の違いによらず、概ね回帰係数の符号や大きさ、 t 値の大きさに類似性が見られる。特にデータ期間 1 とデータ期間 2 の類似性は高く、データ期間 3 はこれらとは若干の乖離が認められる。

表 8. 回帰分析結果：期間 3 (20140722-20141230).

| Period 3 | (I) | TSE-JNX | (II) | TSE-ChiX | (III) | JNX-ChiX |
|----------------|-------------|---------|-------------|----------|-------------|----------|
| Fixed effects | Estimate | t value | Estimate | t value | Estimate | t value |
| (Intercept) | 0.00436 | 57.539 | 0.00357 | 43.634 | -0.00058 | -7.113 |
| RVr | 0.00002 | 2.069 | 0.00029 | 16.534 | 0.00028 | 14.527 |
| NQr | -0.00007 | -7.245 | 0.00024 | 12.706 | 0.00023 | 11.331 |
| LTSr | 0.00001 | 0.742 | -0.00007 | -3.549 | -0.00004 | -2.204 |
| SPRr | -0.00002 | -1.980 | -0.00012 | -5.451 | -0.00010 | -4.229 |
| QBr | 0.00007 | 8.673 | -0.00001 | -0.436 | 0.00001 | 0.755 |
| QAr | 0.00007 | 8.002 | 0.00039 | 22.371 | 0.00027 | 14.960 |
| RVag | 0.00015 | 10.606 | 0.00013 | 4.656 | 0.00004 | 1.492 |
| RETts | 0.00000 | -0.249 | -0.00004 | -2.201 | -0.00003 | -1.683 |
| TVag | 0.00001 | 0.902 | -0.00014 | -5.147 | -0.00002 | -0.575 |
| DirS | 0.00005 | 3.867 | 0.00002 | 0.664 | -0.00004 | -1.718 |
| t3 | 0.00007 | 4.021 | -0.00003 | -0.751 | -0.00002 | -0.649 |
| t4 | 0.00012 | 6.913 | 0.00000 | 0.061 | -0.00005 | -1.334 |
| t7 | 0.00028 | 15.498 | -0.00001 | -0.411 | -0.00018 | -4.654 |
| t8 | 0.00034 | 18.516 | 0.00004 | 1.040 | -0.00017 | -4.417 |
| t9 | 0.00039 | 21.275 | 0.00001 | 0.352 | -0.00026 | -6.838 |
| RVr:DirS | -0.00002 | -1.115 | -0.00014 | -5.809 | -0.00007 | -2.492 |
| NQr:DirS | 0.00002 | 1.889 | -0.00010 | -4.068 | -0.00013 | -4.783 |
| LTSr:DirS | 0.00003 | 1.900 | 0.00003 | 0.947 | 0.00002 | 0.705 |
| SPRr:DirS | 0.00000 | -0.251 | 0.00001 | 0.197 | -0.00005 | -1.379 |
| QBr:DirS | -0.00004 | -3.578 | 0.00008 | 3.235 | 0.00001 | 0.537 |
| QAr:DirS | -0.00001 | -1.151 | -0.00024 | -9.728 | -0.00004 | -1.682 |
| RVag:DirS | -0.00007 | -3.590 | -0.00006 | -1.689 | 0.00001 | 0.147 |
| RETts:DirS | 0.00002 | 1.734 | 0.00008 | 3.380 | 0.00003 | 1.193 |
| TVag:DirS | 0.00005 | 2.451 | 0.00010 | 2.804 | 0.00000 | 0.048 |
| Random effects | Std.Dev. | | Std.Dev. | | Std.Dev. | |
| ynd | 0.00055 | | 0.00053 | | 0.00067 | |
| code | 0.00053 | | 0.00058 | | 0.00040 | |
| Resid. | 0.00177 | | 0.00342 | | 0.00374 | |
| Model fitness | | | | | | |
| AIC | -1236026.56 | | -1069524.74 | | -1047396.14 | |
| BIC | -1235753.79 | | -1069251.98 | | -1047123.38 | |
| logLik | 618041.28 | | 534790.37 | | 523726.07 | |
| deviance | -1236082.56 | | -1069580.74 | | -1047452.14 | |
| df.resid | 125684 | | 125644 | | 125656 | |

回帰係数の絶対値が大きい(すなわち被説明変数への影響度の大きい)、あるいは、有意性の高い変数としてまず主効果の中から幾つか挙げてみよう。まず、実現ボラティリティ比(RVr)は、いずれの期間、いずれの市場ペアの組み合わせ(全9通り)においても、有意に正である。すなわち、一方の市場でのボラティリティが相対的に高まる状況では、その市場の板形成の速さ(価格変化スピード)がもう一つの市場に対して相対的に高まることを示唆している。例えば、期間 1, TSE (市場 X^1)-ChiX(市場 X^2)のペアのケースにおいて、 RVr の値が $+1\sigma$ だけ平均値より大きくなると、 $+0.001$ 秒(1 ミリ秒)、 X^1 の X^2 に対する先行時間が増す(または、運行

表 9. 売買の方向 ($Dir = B, S$) 別, 東証リターン ($RETts$) と被説明変数 y の変化の関係。

| | 買い方向 (“B”) | 売り方向 (“S”) |
|-------------------------|----------------|----------------|
| 東証上昇時間帯 ($RETts > 0$) | $\Delta y < 0$ | $\Delta y > 0$ |
| 東証下落時間帯 ($RETts < 0$) | $\Delta y > 0$ | $\Delta y < 0$ |

時間が減る)。上述のように、市場ペア X^1 と X^2 の役割を入れ替えても解釈は変わらない。

ところで、今回は、実現ボラティリティに関する変数として、 RVr と $RVag$ の 2 つの変数を採用した。もし実現ボラティリティが潜在的な企業価値変化の大きさを表す量 (の推定値) であるとの立場にたてば、市場に依らない共通の値 (後者) のみの採用が適切であろう。¹⁴⁾ しかしながら、今回の分析では、注文板形成の背後にある注文フローの先行運行関係に興味があり、マイクロストラクチャ・プロセス自体が重要である。よって、筆者による先の分析 (林, 2015, 2016) と同様に、市場間の実現ボラティリティの比 RVr を変数に加えるのは適切であると考えられる。実際、今回の分析でも RVr は先行運行時間に対して有意に影響していることが示された。

アスク側デプス比 (QAr) も、全てのケースにおいて、正に有意であり、かつ、影響度の大きさは RVr と同程度である。一方、ビッド側デプス比 (QBr) の符号や有意性は組み合わせによって安定していない。相対的にアスク側、すなわち売り希望の指値注文量 (デプス) が多い方が先行度合いが高い (運行度合いが低い) と言える。

1 取引当り約定枚数 (ロットサイズ) 比 ($LTSr$) は、1 つの組み合わせ (期間 3, TSE-JNX) を除き、いずれも負に有意である。即時執行取引の注文サイズが相対的に大きい方が先行度合いが低い (運行度合いが高い) ことを示す。影響度の大きさは RVr の 1/3-1/7 程度である。

スプレッド率比 ($SPRr$) は、1 ケースを除き、負に有意である。スプレッドが相対的に広い方が先行度合いが低い (運行度合いが高い) ことを示す。インパクトの大きさは RVr と同程度である。

グループ 2 の変数は、 X^1 と X^2 の指定順序に係数が依存する変数であり解釈に留意が必要であるが、9 ケースを通じて、係数の符号や大きさが安定しているとは言いがたい。データ期間 1, 2, TSE-JNX, TSE-ChiX において、3 市場全体の約定枚数 (TVr) の係数が有意に負である。実質的に、東証の約定枚数が大きい状況では、TSE の先行度合いが減少すること (すなわち、PTS の価格形成が通常に比べて早まる) を示していると思われる。時間帯内の東証リターン ($RETts$) は、有意なのは TSE-ChiX の 3 ケースのみであるが、全てのケースにおいて負の係数を持つ。すなわち、買い方向 (ベースライン) に関しては、TSE の上昇率が高いほど、TSE-JNX, TSE-ChiX 間では PTS 側の、他方 JNX-ChiX 間では ChiX 側の先行度合いが増す (または、運行度合いが減る) 傾向を示していると考えられる。

次に、相場方向性 (Dir) と共変量間の交互作用項であるが、主効果に比べ、安定的なパターンは見い出せない。そもそも DS 指標の、買い方向 (“B”) と売り方向 (“S”) の値の差が小さいために、売買方向性 (Dir) の違いが回帰係数の変化に現れにくかったのかもしれない。全般に、主効果に (売買方向性との) 交互作用効果を加えて得られる売りサイドの係数の解釈は、買いサイドのものと同様と言える。

唯一特筆すべき共通パターンとして、東証リターン ($RETts$) との交互作用項は 9 ケースとも正 (内 6 ケースで有意) である。交互作用の絶対値の大きさを考慮すると、売り方向の $RETts$ の回帰係数 (主効果) は、1 ケース (JNX-ChiX, 期間 3) を除き全て正に反転することが確認される。先の買い方向の結果と合わせると、表 9 のようにまとめられる。

すなわち、“順張り” 方向 (相場上昇時間帯の買い方向、相場下落時間帯の売り方向) では、 X^1 の先行度合い減 (または運行度合い増) の、“逆張り” 方向 (相場上昇時間帯の売り方向、相場下

落時間帯の買い方向)では、 X^1 の先行度合い増(または遅行度合い減)の、ある意味対称な現象が観察される。相対的に注文板の薄いPTS市場においては、よりマーケット・メイキングを行うHFTの注文の割合が高く、よって、相場の方向性に対するマイクロ・プライスの感応度が高いことを表しているのかもしれない。

その他の有意な交互作用効果も含め、解釈は今後の課題である。

以上の結果は、林(2015, 2016)と係数の符号が異なるものも含まれる。例えば、林(2016)ではスプレッド率比の回帰係数が正であった。同論文では留意点として、“一般に流動性の高い市場はスプレッド率が低いことが期待される。本分析で扱っている市場間の先行遅行度と相対的流動性の関係は明白でないものの、 S_{pr} の符号は負であるべきとの見方も可能であろう”と述べた。

もとよりモデルが違うのであり回帰係数の符号が異なること自体は不自然ではない。そもそも、被説明変数は先の報告では異なる方法が採用されていた。先の報告で採用したHoffmann et al. (2013)の方法論によって計算されるHRY指標は大きな価格変動(ジャンプ)に影響されやすいことが分かっている。しかしながら、林(2015, 2016)においては、HRY指標を計測するために計算したマイクロ・プライス系列に対して、ジャンプを除去する処理は行っていなかった。DS指標においても、データ前処理方法に対する依存性は依然として課題ではあるが、その影響はHRY指標よりも小さいと思われる。

いずれにせよ、今回の分析における変数選択は最終的なものではない。例えば、他変数との相関性等を考慮して採用しなかったが、市場間の“ティックサイズ対仲値比”や“出来高比”は、結果の解釈に有用な変数とも考えられる。¹⁵⁾

本論文の結果に関する検証作業や、分析方法の見直し・改善作業は、今後とも継続的に行う必要がある。

今後の課題

現実には、一方の市場での価格形成が他方よりも常に先行していると言った単純な図式ではなく、2つの市場のそれぞれにおいて他方に先行するような変動要因を持っていると想定される。このような“マルチラグ・モデル”は加藤 他(2011)においてHRYの枠組みの拡張として検討された。筆者は、目下、ウェーブレット分析を応用した、異なる時間解像度に同時に存在する複数の先行遅行時間を同時推定する新たな手法を開発中である(Hayashi and Koike, 2016)。

今回の分析結果を実際の市場参加者の行動と関連付ける作業は残されている。今後既存のファイナンス/マイクロストラクチャ分野の先行研究との関連性についても調査せねばならない。特に、今回、売買注文の方向性による先行遅行時間の非対称性が観察された。売買注文の偏りは、市場の価格発見機能、情報トレーダーとノイズトレーダーの割合(PIN)、市場の効率性やクオリティ等に関わる重要な概念であり、注文板上の注文枚数の不均衡(quote imbalance)、約定の不均衡(trade imbalance)等の数量を用いた理論研究や実証研究が盛んに行われている(例、Chung and Hrazdil, 2010; Chen et al., 2013; Lipton et al., 2013; Bechler and Ludkovski, 2014)。今回の観察は、これらの分野における本研究で採用した手法の適用可能性を示していると考えられる。

今回の分析では、マイクロ・プライスの更新時間から作られるタイムスタンプ・データを使って先行遅行時間を推定した。一方、筆者の行った予備分析では、約定時点のみから成るタイムスタンプ・データを使って計算された先行遅行時間は、今回のものとは大きく異なるものとなった。これについては目下分析作業中であり、別の機会に報告することとしたい。

実務への応用も研究上の課題である。

5. 結言

本研究は、東京証券取引所(主市場)と2つの私設証券取引所-チャイェックス(ChiX)、ジャパンネクストPTS(Japannext PTS)-の3市場にて同時に取引されている国内株式について、注文板形成の先行運行関係の存在やその大きさを実証分析した。

まず、各市場の注文板データを使ってマイクロ・プライス系列を生成し、Dobrev and Schaumburg (2015)による先行運行関係推定法の改良版を用いて、銘柄別時間帯別に先行運行時間を推定し、時系列プロットを作成すると共に、要約統計量を計算した。次に、個々に計測された先行運行時間を多変量時系列データ(銘柄×データ期間)として構成し、パネル回帰分析を行い、個別銘柄要因や日次要因を除去しながら、銘柄に共通な特徴や相違点を抽出し先行運行要因を探った。分析対象銘柄は、東京証券取引所において時価総額および流動性の高い100銘柄から成るTOPIX100構成銘柄、分析期間は2013年1月4日~2014年12月30日の489日間、使用データの時間解像度はミリ秒単位である。

主な実証的発見として、平均的には、銘柄や時間帯による違いはあるものの、3市場間の先行運行関係として、全般に東証はPTS二市場に4ミリ秒程度前後の大きさで先行する傾向が見られた。2014年の東証における二度のティックサイズ変更は、特に東証-JNXにおいて東証の先行度合いを若干高めた。またJNX-ChiX間ではJNXの先行からChiXの先行へと平均で1ミリ秒未満だが先行運行関係が変化した。

パネル回帰分析により、先行運行関係を説明する要因として、ボラティリティ比やアスク側のデプス比が有意に正の係数、スプレッド率比が有意に負な係数を持つ等の結果が得られた。これらは、今回の回帰分析の結果は先に林(2015, 2016)で報告したものと必ずしも整合的ではなかった。JNX-ChiXペアは他の市場ペアから、東証ティックサイズ変更フェーズII以降(データ期間3)は、それまでの期間から乖離した特徴を示した。

課題点として、データ前処理方法に対する分析結果の頑強性の問題が挙げられる。適切なデータ前処理方法や分析方法について検証・検討を重ねる必要がある。採用した先行運行推定に関する統計的方法論は提唱されて日が浅く理論的に未整備な状況にある。今回の分析結果は報告としてはあくまで暫定的なものに過ぎず、今後検証が必要である。本報告の知見を深化・発展させるためには、分析手法の改良や代替の手法の開発が必要である。

今回得られた結果は特定の期間、特定の銘柄群を分析して得られた暫定的なものに過ぎないことから、他の期間や銘柄データを用いた実証分析が行われねばならない。得られた結果をマイクロストラクチャ研究と関連付ける作業も推し進めねばならない。

先述の通り、図2-3において、みずほFG(8411)がフェーズ2導入以前にPTSがTSEに先行する状況が観察されたように、取引ルールその他のマイクロストラクチャ要因が、異市場・同一銘柄間の先行運行時間の決定に重要な役割を果たしているのは明らかである。Renò(2003)は、高頻度データの実証的特徴(stylized facts)の一つである“Epps効果”¹⁶⁾を説明する要因として、証券価格間の非同期性に加えて先行運行関係を挙げている。今後さらに売買の高速化、市場データの高頻度化、データ量の増大化が進む中、推定方法に改良を重ねることで証券間の先行運行時間がより正確に推定できるようになれば、高頻度データより計算される先行運行時間推定値の大きさやその時間変動が、高速化の進む今日の注文板市場のマイクロストラクチャ効果の評価に活用できるようになることも期待される。

注.

1) 現時点において本研究における計測・分析対象である(“マイクロ・プライス”をベースにした)注文板形成の先行度合いと市場“クオリティ”の関連性は明確ではない。計測値の

精度の検証も残されている中、今回の先行遅行度合いに関する分析結果が市場間の優劣を直接示唆するものではないことに注意されたい。

- 2) 本稿執筆時点(2017年1月)の市場規模として2017年1月10-13日(4営業日)の実績を見ると、週間売買代金は東証11兆433億円、JNX2570億円、ChiX1353億円、一方、取引件数は東証816万件、JNX150万件、ChiXは40万件である。地方三市場(名証、札証、福証)も含めた国内売買代金シェアでは、東証96.5%、JNX2.3%、ChiX1.2%である。(出所：<http://fragmentation.fidessa.com/jp/>)。
- 3) 東証作成リーフレット(2013年12月1日付)より。
- 4) <http://www.jpx.co.jp/markets/indices/line-up/index.html>。
- 5) 2013年10月末の入れ替えでは、富士重工(7270)が入り、ヤマダ電機(9831)が外れ、2014年10月末には、楽天(4755)、マツダ(7261)が入り、旭硝子(5201)、ニコン(7731)が外れた。
- 6) 鮮度劣化した気配値(stale quote)とは、最新の情報を反映していない、更新されずに注文板に残っている(発注されてから時間の経過した)古い気配値を指す。参考文献としては、例えば、Budish et al. (2015)を参照。
- 7) なお、セミマルチングールの枠組ではないが、非同期観測された2つの高頻度時系列データ間の相互相関係数を計測し、先行遅行関係を調べた先駆的研究としてde Jong and Nijman (1997)がある。
- 8) フィルターを厳しく設定すると、分析に使用可能な気配レコードが減少することになるが、逆に緩過ぎると市場実勢から乖離したレコードが分析対象に含まれることになる。データ前処理の方法が分析結果に影響を与えることから、より適正な方法については今後検討の余地がある。
- 9) 分母や分子の値にゼロが入ることで対数比が発散したり不定となった説明変数を持つレコードは、パネル回帰から除去した。例えば、みずほFG(8411)は2014年のティックサイズ変更以前は、東証において取引は活発だったものの、最良気配数量が極めて多く(板が厚く)仲値の変化が乏しい日が多く、仲値ベースの実現ボラティリティの値がゼロとなるケースが多発した。
- 10) ここでは、 \mathbf{R} にならない、例えば被説明変数 y の説明変数 x と z に対する回帰モデルを $y \sim x+z$ と表現する。また、 x と y の主効果に加えて、 x と z との交互作用項を変数に加えたモデルを $y \sim x*z$ または $y \sim x+z+x:z$ と表現する。ここで、 $x:z$ が交互作用項である。表記上は質的変数と量的変数は区別しない。さらに、今回使用した `lmer()` にならない、変数効果項 r が加わった混合モデルは、 $y \sim x*z+(1|r)$ 等と表現する。詳しくは、 \mathbf{R} やパッケージ '`lme4`' のマニュアルを参照されたい。
- 11) もとより、東証の出来高シェアは日経平均採用銘柄を中心に概ね全体の9割を超えているともされていることから、 $TVag$ の値は東証の約定枚数に置き換えても以下の結果は本質的に変わらないと思われる。
- 12) 各変数の入力となる市場観測量として、3.4で述べたデータ加工処理後の計測量を使用した。
- 13) 例えば、 Dir と T との交互作用項はモデルに加えた方が図5とは整合的であろう。今後の課題としたい。
- 14) 匿名レフリーからコメントを頂戴した。林(2016), p.148も参照せよ。
- 15) 匿名レフリーから指摘を頂戴した。
- 16) Epps (1979)により報告された、高頻度の証券リターン間の相関係数の絶対値の大きさが、リターン計測間隔を小さくするにつれ、低減していく現象。

謝 辞

本研究遂行にあたり、Dobrislav Dobrev 氏および Ernst Schaumburg 氏より、未刊行のワーキングペーパーを送付して頂いた。吉田朋広教授(東京大学)、小池祐太氏(首都大学東京)、Frédéric Abergel 教授(CentraleSupélec)、Marc Hoffmann 教授(Université Paris IV)、Jean Jacod 教授(同)、Mathieu Rosenbaum 教授(同)より貴重なコメントを頂いた。匿名の二名のレフェリーには原稿を丁寧に読んで頂き、有益なコメントを多数頂いた。株式会社日本取引所グループ、チャイエックス・ジャパン株式会社、SBI ジャパンネクスト証券株式会社よりデータをご提供頂いた。本研究は、日本学術振興会科学研究費(基盤研究(c)、課題番号:16K03601、研究代表者:林 高樹)、ならびに科学技術振興機構(JST)CREST プロジェクト『先端的確率統計学が開く大規模従属性モデリング』(研究代表者:吉田朋広)による研究成果の一部である。ここに謝意を表します。当然ながら、論文に含まれる誤りは全て筆者に帰属します。

参 考 文 献

- Bechler, K. and Ludkovski, M. (2014). Optimal execution with dynamic order flow imbalance, arXiv:1409.2618v2.
- Bellia, M., Subrahmanyam, M. G., Yuferova, D. and Uno, J. (2016). Low-latency trading and price discovery without trading: Evidence from the Tokyo Stock Exchange pre-opening period, available at SSRN: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2705962>.
- Budish, E., Cramton, P. and Shim, J. (2015). The high-frequency trading arms race: Frequent batch auctions as a market design response, *Quarterly Journal of Economics*, **130**(4), 1547–1621.
- Chen, Z., Lin, W. T., Ma, C. and Zheng, Z. (2013). The impact of individual investor trading on stock returns, *Emerging Markets Finance & Trade*, **49**, Supplement 3, 62–69.
- Chung, D. and Hrazdil, K. (2010). Liquidity and market efficiency: A large sample study, *Journal of Banking & Finance*, **34**, 2346–2357.
- de Jong, F. and Nijman, T. (1997). High frequency analysis of lead-lag relationships between financial markets, *Journal of Empirical Finance*, **4**(2-3), 259–277.
- Dobrev, D. and Schaumburg, E. (2015). High-frequency cross-market trading: Model free measurement and applications, unpublished manuscript.
- Epps, T. W. (1979). Comovements in stock prices in the very short run, *Journal of the American Statistical Association*, **74**(366), 291–298.
- Gatheral, J. and Oomen, R. C. (2010). Zero-intelligence realized variance estimation, *Finance and Stochastics*, **14**, 249–283.
- 林高樹 (2015). 高頻度注文板データによる 2014 年東証ティックサイズ変更の国内株式市場への影響分析, *証券アナリストジャーナル*, **53**(4), 29–39.
- 林高樹 (2016). 国内高速 3 株式市場間の注文板形成の先行遅延関係分析, 『ファイナンスにおける数値計算法の新展開(ジャフィー・ジャーナル: 金融工学と市場計量分析)』(日本金融・証券計量・工学会 編), 128–155, 朝倉書店, 東京.
- Hayashi, T. and Koike, Y. (2016). Wavelet-based methods for high-frequency lead-lag analysis, arXiv:1612.01232v1.
- Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**(2), 359–379.
- Hoffmann, M., Rosenbaum, M. and Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data, *Bernoulli*, **19**(2), 426–461.
- 保坂豪 (2014). 東京証券取引所における High-Frequency Trading の分析, *証券アナリストジャーナル*, **52**(6), 73–82.

- 加藤宏典, 佐藤整尚, 吉田朋広 (2011). Lead-lag 推定量を用いた為替データの分析, 2011 年度統計関連学会連合大会予稿集.
- 近藤真史 (2015). 東証立会市場における呼値の単位の変更の影響, JPX ワーキング・ペーパー, **7**, 日本取引所グループ, 東京.
- Lipton, A., Pesavento, U. and Sotiropoulos, M. G. (2013). Trade arrival dynamics and quote imbalance in a limit order book, arXiv:1312.0514v1.
- 大崎貞和 (2014). グローバルな市場間競争と日本取引所グループ, 証券アナリストジャーナル, **52**(2), 6-15.
- 太田亘 (2013). 取引システム高速化の流動性に対する長期的影響, 日本ファイナンス学会第 21 回大会予稿集 CD-ROM.
- 太田亘 (2016). 取引システム高速化とティックサイズの制約, 現代ファイナンス, No.38, 27-59.
- Renò, R. (2003). A closer look at the Epps effect, *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, **6**(1), 87-102.
- 宇野淳 (2012). 株式取引の市場間競争—上場株取引の市場分散と価格形成—, 証券アナリストジャーナル, **50**(9), 6-16.
- 宇野淳 (2014). 株式市場統合の現状と課題, 証券アナリストジャーナル, **52**(2), 16-23.

Statistical Analysis of High-frequency Limit-order Book Data:
 On Cross-market, Single-asset Lead-lag Relationships
 in the Japanese Stock Market

Takaki Hayashi^{1,2,3}

¹Graduate School of Business Administration, Keio University

²Graduate School of Social Sciences, Tokyo Metropolitan University

³JST-CREST

We are concerned with very short-term, lead-lag relationships between market prices of identical stocks traded concurrently on multiple trading venues in Japan, specifically the Tokyo Stock Exchange and two Proprietary Trading Systems, namely Japannext PTS and Chi-X Japan. In this paper, we conduct an empirical analysis with a modified version of the methodology recently proposed by Dobrev and Schaumburg (2015). This methodology focuses on the arrival times of the “events” for the paired point processes. That is, it utilizes (irregularly-spaced) timestamp records of the trading activities alone, and hence is not (directly) influenced by “microstructure noise” pertaining to the behavior of the observed, “inefficient” prices. As in our previous work (Hayashi, 2015, 2016) based on the methodology by Hoffmann et al. (2013), we empirically measure the magnitudes of the lead-lag times using high-frequency, limit-order book data for major Japanese stocks with milli-second time resolution obtained from the three venues.

切断実現ボラティリティの推定と観測時間間隔

—日本株式による実証分析—

吉田 靖[†]

(受付 2016 年 7 月 26 日 ; 改訂 11 月 8 日 ; 採択 11 月 29 日)

要 旨

株式市場の高頻度データの分析において、ジャンプの存在は多くの研究が指摘しており、ジャンプを考慮したボラティリティの推計が課題となっている。解決策の一つとして、切断実現ボラティリティがあり、本稿では、2014 年 7 月 22 日から 10 月 27 日までの東京証券取引所の TOPIX100 構成銘柄の高頻度データを使用して、切断実現ボラティリティの計測を行った。観測時間間隔は 5 秒から 1800 秒としている。その結果、大半の株式において、実現ボラティリティに占める切断実現ボラティリティの比率は半分未満であり、株価の変動にはジャンプの影響が大きいことを示す結果となった。しかし、観測時間間隔を短くするに従って切断実現ボラティリティが小さくなる現象も同時に観測され、この要因の一つとしてゼロリターンによる影響を示唆する結果も得られた。さらに、その他の構造的な要因が残されている可能性も大きく、切断実現ボラティリティを正確に計測するための観測時間間隔と閾値の最適な選択には課題があることを指摘した。

キーワード：切断実現ボラティリティ、高頻度データ、ジャンプ拡散過程、観測時間間隔、マイクロ・プライス、TOPIX100。

1. はじめに

分析対象の統計モデルにどのような前提をおくかは極めて基本的かつ重要な問題であり、結論にも大きな影響を与える。古くは Bachelier (1900) により証券価格がランダムウォークするとしてオプション価格が導かれたが、ファイナンス分野では暫く顧みられなかった。その後、Osborne (1959) は金融・証券・為替市場におけるデータを用いて、価格の対数がランダムウォークに従っていることを実証し、理論的にも Black and Scholes (1973) および Merton (1973) による Black-Scholes-Merton モデルが広がった。その後、Merton (1976) により、ジャンプを含んだ確率過程を前提とするオプション価格理論が展開され、ボラティリティ・スマイルと呼ばれる現象の説明に寄与した。このボラティリティ・スマイルは、実際の市場で恒常的に観測される現象であり、市場のオプション価格からインプライド・ボラティリティを算出すると、オプションの権利行使価格によりボラティリティが異なるという Black-Scholes-Merton モデルでは説明ができない現象である。この現象を観測するには、高頻度データは必ずしも必要ではなく、オプション価格決定モデルのボラティリティ以外の変数が同時点で観測できればよく、ジャンプの存在を仮定したオプション価格決定モデルの適用により、現実のオプション価格に対する説

[†] 東京経済大学 経営学部：〒 185-8502 東京都国分寺市南町 1-7-34

明力が向上することをもって、ジャンプの存在を間接的に示すものである。久田 (2003) は、これらのサーベイと日経平均オプション市場に関する実証分析を行っている。

一方で近年は、市場の取引時間中の高頻度データを分析することが可能になり、高頻度データから実現ボラティリティ (realized volatility) を算出して、それまでは直接的には計測できなかった1日毎のボラティリティを計測することが可能になった。証券価格のボラティリティはオプション価格との関係のみならず、資産配分やリスク管理において重要な指標であるため、高頻度データの利用を含め、より正確な計測方法の提案と実証研究が多数報告されている。また、高頻度データそのものも研究の対象となり、林 (2010) が、「市場リスクの計測」、「最適執行戦略」、「最適トレーディング戦略」、「市場リスクのモニタリング・ポジション管理」、「市場秩序・機能の維持」、「市場制度、構造、ルールなどの改革の提言」、「市場取引メカニズムの理解・知識発見」などの研究目的を列挙しているように、高頻度データを分析する際の正確なモデリングが重要となってきている。

高頻度データによるボラティリティの推計に関しては、ジャンプの他に、観測値にマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズと呼ばれるノイズを含む場合のボラティリティの推定量の性質も議論されている (Andersen et al., 2003; Zhang et al., 2005; Bandi and Russell, 2006; Hansen and Lunde, 2006; Bandi and Russell, 2008)。マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの具体的な発生要因としては、売り気配値と買い気配値の間で約定価格が変動するために起きるビット・アスク・バウンスがあるが、これらの先行研究により、実現ボラティリティに関する推定上の問題点が明らかとなり、それらの検証や解決方法が提案されている。その中で、マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズに関しては約定価格よりも仲値を使用することや、観測頻度の調節などにより改善することが示されているが、これらの方法によっても市場の価格変動にジャンプが含まれる結果が報告されている。例えば、Barndorff-Nielsen and Shephard (2006) は、為替レート市場における5分間隔のデータから実現バイパワー・バリエーション (realized bipower variation, RBPV) を算出し、マクロ経済指標の発表などによるジャンプをノンパラメトリック手法により検出している。Andersen et al. (2007) は同様にジャンプの存在を示し、さらにジャンプの成分を分解することがボラティリティの予測を向上することを示している。また日本市場において、増田・森本 (2009) は東証株価指数、日本の株式個別銘柄および円ドルレートなどの5分間隔のデータおよび日次の原油価格により RBPV を算出し、Lee and Mykland (2008) によるノンパラメトリック手法を用いて、ジャンプを検出している。以上はジャンプの存在あるいは発生時期を検証するものであるが、ジャンプの検出に関しては観測頻度が影響する可能性があり、前述の増田・森本 (2009) は先行研究を引用する形で5分間隔を採用している。柴田 (2008) は実現ボラティリティ計測に関するモデルおよび実証分析のサーベイを行う中で、先行研究の観測頻度の選択についても比較し、マイクロストラクチャー・ノイズや日中リターンの自己相関の存在などを指摘しているものの、日経平均株価指数、日経平均先物、東証株価指数の実現ボラティリティの実証分析を行うにあたっては、先行研究を引用する形で5分間隔のみを採用している。

一方、Mancini (2001) は価格変動過程にはブラウン運動とジャンプが含まれるものとして、その上でブラウン運動成分のボラティリティを正確に推計するために、ジャンプを取り除いたデータに対して実現ボラティリティを計測することを提案している。ここでは、得られたサンプルの1件毎に、ブラウン運動によるものとジャンプによるものに分離することはできないため、閾値を設けて、その閾値より絶対値が大きい変動はジャンプによるものとして除外し、絶対値が閾値内の変動であれば、ブラウン運動によるものとしてブラウン運動部分のボラティリティを計測しようとしている。また Shimizu (2003) も同時期に Mancini (2001) とは独立に閾値を用いる方法を提案している。このような推計方法によるボラティリティを Ait-Sahalia and Jacod

(2012)は切断実現ボラティリティ (truncated realized volatility) とし、ニューヨークダウ構成銘柄について検証している。さらに Ait-Sahalia and Jacod (2014) では、計測における観測時間間隔と閾値の関係を明示的に取り扱い、次章で述べるボラティリティの計測方法を提案している。しかし、Ait-Sahalia and Jacod (2014) は、方法を示しているのみで実証はしていないため、実際にこの方法による切断実現ボラティリティの計測を行うことは、今後の価格変動を研究する上の基礎として大きな意義があると考えられる。したがって、本稿では、Ait-Sahalia and Jacod (2014) に沿った切断実現ボラティリティの推計に関して日本株式を対象として実証分析を行い、その問題点を検討する。

本稿の構成として、続く第2章では、Ait-Sahalia and Jacod (2014) に基づいて計測方法を紹介し、第3章ではデータについて述べる。第4章は計測結果であり、第5章においてまとめを述べる。

2. 切断実現ボラティリティの計測方法

本章では切断実現ボラティリティの計測手順を Ait-Sahalia and Jacod (2014) を簡略化して述べる。一部の記述では Ait-Sahalia and Jacod (2012) による表記方法なども用いることとする。

まず X_t を時刻 $t(0 \leq t \leq T)$ における証券価格の対数値とし、次の(2.1)式のジャンプ拡散過程に従っているとす。

$$(2.1) \quad dX_t = b_t dt + \sigma_t dW_t + dJ_t$$

ここで、第1項は単位時間あたり b_t で成長するドリフト項、第2項は連続的な確率変動であり、 σ_t は t 時点における瞬間的なボラティリティの平方根で、 W_t は標準ブラウン運動である。第3項は不連続なジャンプを表している。

(2.1)式の σ_t について、 $\sigma_t^2 = c_t$ とするとこれは t 時点における瞬間的なボラティリティであり、これを(2.2)式のように積分したものを積分ボラティリティと呼ぶ。

$$(2.2) \quad C_t = \int_0^t c_s ds$$

次に、証券価格に関して、観測時間間隔 Δ_n による第 i 番目の対数差分を(2.3)式で定義する。

$$(2.3) \quad \Delta_i^n X = X_{i\Delta_n} - X_{(i-1)\Delta_n}$$

このとき、全ての $\Delta_i^n X$ を用いた実現ボラティリティは(2.4)式により定義される。

$$(2.4) \quad \hat{C}(\Delta_n)_t = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (\Delta_i^n X)^2$$

ここで $[\]$ は、この括弧内の実数の整数部分を意味する。(2.1)式の第3項がない場合、すなわち確率的な変動は連続的なブラウン運動のみによる場合、(2.4)式による推定量は(2.2)式の積分ボラティリティの一致推定量になるが、(2.1)式の第3項のように不連続なジャンプ部分があるときは一致推定量にならないことが示されている。

この解決方法としては、前述のRBPVもあるが、本稿では(2.5)式で定義される切断実現ボラティリティを分析の対象とする。

$$(2.5) \quad \hat{C}(\Delta_n, u_n)_t = \sum_{i=1}^{[t/\Delta_n]} (\Delta_i^n X)^2 1_{\{|\Delta_i^n X| \leq u_n\}}$$

ここで、 u_n は閾値で正の定数であり、 $1_{\{\cdot\}}$ は括弧内の条件が成り立つときは1、そうでないと

きは 0 の値を取る関数である。つまり、 $\Delta_i^n X$ のうち、その絶対値が u_n 以下のもののみを加算の対象とし、それを超えるものは除外して実現ボラティリティを算出するものである。この基本的な考え方は、 $\Delta_i^n X$ のうちジャンプによるものをできるだけ捨ててブラウン運動によるもののみを算出対象にして、正確な積分ボラティリティを算出しようとするものである。そのため、 u_n の決定方法としては、ブラウン運動による増分部分を多く捨て過ぎないようにするための大きさを考慮しつつ、ジャンプを除外するためにできるだけ小さくすることも必要であり、この二つのバランスが現実的には重要である。本稿は u_n の決定にあたって Ait-Sahalia and Jacod (2014) が提案している方法に従うこととする。具体的には以下のとおりである。

まず、 X が全くジャンプのない確率過程に従っているとし、 u_n を決定して切断実現ボラティリティを算出するとき、実現ボラティリティと切断実現ボラティリティの推計量の差 A_T は (2.6) 式のようになる。

$$(2.6) \quad A_T = \int_0^T c_s g\left(\frac{u_n}{\sqrt{c_s \Delta_n}}\right) ds$$

ここで、 $g(u) = \int_{\{|x|>u\}} x^2 \phi(x) dx$ であり、 $\phi(x)$ は標準正規変数の確率密度関数である。

また、実現ボラティリティと切断実現ボラティリティの推計量の分散は共に $2\Delta_n \int_0^T c_s^2 ds$ であるので、 A_T の大きさはこれを標準偏差にしたものの一定割合 θ 以内に抑えることとすると、(2.7) 式のようになる。

$$(2.7) \quad \int_0^T c_s g\left(\frac{u_n}{\sqrt{c_s \Delta_n}}\right) ds \leq \theta \left(2\Delta_n \int_0^T c_s^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ait-Sahalia and Jacod (2014) では θ を 0.1 としており、本稿も同様に 0.1 とする。

次に

$$c_{\max} = \sup(c_s : s \in [0, T])$$

$$c_{\min} = \inf(c_s : s \in [0, T])$$

$$c_{\text{aver}} = \frac{1}{T} \int_0^T c_s ds$$

$$\zeta \geq \frac{c_{\max}}{c_{\min}}$$

とすると、 g は減少関数であるので (2.7) 式は

$$(2.8) \quad g\left(u_n \sqrt{\frac{\zeta}{c_{\text{aver}} \Delta_n}}\right) \leq \frac{\theta}{\zeta} \sqrt{\frac{2\Delta_n}{T}}$$

とすることができる。 ζ の値は、Ait-Sahalia and Jacod (2014) ではその中の第 6 章で示している IBM 株式の 2008 年の第 2 四半期の推定結果などから 2 または 3 とされているが本稿では 3 とする。

さらに、標準正規分布の両側確率が η となる値を z_η とする。Ait-Sahalia and Jacod (2014) では η の例として 0.25 としているので本稿でも 0.25 とする。そして、(2.2) 式で算出される増分のうち η を捨てることになる閾値を u_η とし、 c_{aver} の推定値として (2.9) 式の \hat{c}_{aver} を用いる。

$$(2.9) \quad \hat{c}_{\text{aver}} = \frac{1}{T(1-g(z_\eta))} \hat{C}(\Delta_n, u_\eta)_T$$

以上に加えて、 T はサンプルの期間であり、観測時間間隔 Δ_n は次章で述べるような複数の設定をすると、(2.8) 式の u_n を除く全てのパラメータの値が定まるので、(2.8) 式を満たす最大

の u_n を求める。このように、各観測時間間隔に対応した u_n を決定し、最終的に (2.5) 式を用いて切断実現ボラティリティを算出する。

3. 本稿で使用するデータ

本稿では、東京証券取引所第1部に上場されている株式の中から、時価総額が大きく流動性が高い100銘柄で構成される指数であるTOPIX100構成銘柄のすべてを対象とする。分析期間はTOPIX100構成銘柄の呼び値の単位がそれ以前よりも小さい値に変更された2014年7月22日を開始日とし、約3か月後の同年10月27日を終了日とする。この期間は市場の取引日ベースで67日間である。また、この期間の現物株式の取引時間は9時から11時30分までの前場と、休憩後の12時30分から15時までの後場があり、合計5時間である。日中のリターンはAit-Sahalia and Jacod (2012)に従い5秒を最短間隔とする。前場と後場および、後場と翌取引日の前場に跨がるリターンは算出しない。すなわち、取引所の立会時間外は分析の対象とせず、立会時間中のみを対象とする。したがって、ToSTNeTシステム(Tokyo Stock Exchange Trading Network System)による、立会外取引は対象としない。データは、日本経済新聞社によるNEEDS TICKデータから取得している。価格は最良気配値から算出するが、単純な仲値ではなく、(3.1)式で定義される注引量で加重するGatheral and Oomen (2010)のマイクロ・プライス(micro-price)を使用する。

$$(3.1) \quad p_v = \frac{v_a p_b + v_b p_a}{v_a + v_b}$$

ここで、 p_v はマイクロ・プライス、 v_a は最良売り気配の数量、 v_b は最良買い気配の数量、 p_a は最良売り気配値、 p_b は最良買い気配値である。Ait-Sahalia and Jacod (2012)は約定データおよび最良気配値による仲値を用いており、本稿でマイクロ・プライスを用いている点とは異なっている。

前述のように本稿の最短の観測時間間隔は5秒であり、Ait-Sahalia and Jacod (2012)も5秒間を最小観測時間間隔としてその間の平均価格を算出している。しかし、本稿では5秒間の平均価格ではなく、対象の5秒間の中で最後に更新されたデータのみを使用する。これは、不連続な変動をより検出しやすくするためである。5秒間にデータの更新がなかった場合は前値と同じ価格とする。したがって、このときのリターンはゼロとなる。その他の観測時間間隔での価格はこの5秒間隔のデータを間引くことにより算出する。本稿では、5秒、10秒、15秒、20秒、30秒、45秒、60秒、90秒、120秒、180秒、240秒、300秒、420秒、600秒、900秒、1200秒、1800秒の17パターンとする。

なお、本稿で表示する実現ボラティリティおよび切断実現ボラティリティは1日あたりの値とする。

4. 分析結果

まず、比較のために実現ボラティリティの計測結果を表1に示す。表1は紙幅の節約のため17パターンの観測時間間隔のうち5パターンを抜粋している。以降の表4までも同様である。図1は、縦軸が実現ボラティリティであり、横軸は観測時間間隔の対数表示としていて、実現ボラティリティの推移として典型的な特徴のある6銘柄について、全ての観測時間間隔における実現ボラティリティの値を折れ線グラフとして表示したものである。これら表1および図1を見ると、ソフトバンクグループのように例外はあるものの、総じて1分以下の観測時間間隔では、間隔が短いほど実現ボラティリティは上昇する傾向にある。その一方で5分間隔以上の領域では横這いになっている銘柄が多いが、住友商事のようにほぼ右上がりになっている銘柄

表 1. 実現ボラティリティの主な計測結果. TOPIX100 構成銘柄を株式コード順に並べている. 計測期間: 2014 年 7 月 22 日~10 月 27 日. (単位: $\times 10^{-4}$)

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-----------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| 国際石油開発帝石 | 2.388 | 1.991 | 1.860 | 1.717 | 1.625 |
| 大東建託 | 1.722 | 1.372 | 1.300 | 1.367 | 1.242 |
| 大和ハウス工業 | 2.318 | 1.816 | 1.453 | 1.347 | 1.307 |
| 積水ハウス | 1.103 | 0.953 | 0.954 | 0.970 | 0.972 |
| 日揮 | 1.751 | 1.220 | 1.130 | 1.114 | 0.990 |
| アサヒGHD | 1.484 | 1.152 | 1.181 | 1.061 | 1.046 |
| キリンHD | 1.153 | 0.919 | 0.851 | 0.839 | 0.821 |
| 味の素 | 1.494 | 1.082 | 1.074 | 1.128 | 1.158 |
| 日本たばこ産業 | 1.352 | 1.054 | 0.867 | 0.840 | 0.767 |
| セブン&アイHD | 1.198 | 0.928 | 0.821 | 0.802 | 0.740 |
| 東レ | 1.028 | 0.705 | 0.619 | 0.615 | 0.529 |
| 旭化成 | 1.577 | 1.146 | 1.225 | 1.401 | 1.239 |
| 信越化学工業 | 1.450 | 1.004 | 0.902 | 0.900 | 0.822 |
| 三菱ケミカルHD | 2.286 | 1.649 | 1.646 | 1.609 | 1.450 |
| 花王 | 1.304 | 1.080 | 1.033 | 0.982 | 0.954 |
| 武田薬品工業 | 0.615 | 0.492 | 0.417 | 0.397 | 0.354 |
| アステラス製薬 | 2.025 | 1.762 | 1.663 | 1.563 | 1.446 |
| エーザイ | 1.331 | 0.900 | 0.805 | 0.796 | 0.787 |
| 第一三共 | 1.035 | 0.830 | 0.788 | 0.767 | 0.685 |
| 大塚HD | 2.189 | 1.712 | 1.669 | 1.480 | 1.589 |
| オリエンタルランド | 1.356 | 1.058 | 0.987 | 1.025 | 0.957 |
| 富士フイルムHD | 3.566 | 3.558 | 3.392 | 3.411 | 2.910 |
| 資生堂 | 1.713 | 1.452 | 1.270 | 1.220 | 1.080 |
| JXHD | 1.348 | 1.177 | 1.035 | 0.967 | 0.888 |
| ブリヂストン | 1.069 | 0.910 | 0.847 | 0.780 | 0.788 |
| 旭硝子 | 1.397 | 0.996 | 0.922 | 0.940 | 0.868 |
| 新日鉄住金 | 1.339 | 1.066 | 1.043 | 1.061 | 1.076 |
| JFEHD | 1.598 | 1.320 | 1.303 | 1.316 | 1.290 |
| 住友金属鉱山 | 2.378 | 1.945 | 2.049 | 1.932 | 1.773 |
| 住友電気工業 | 1.468 | 1.185 | 1.205 | 1.161 | 1.012 |
| SMC | 2.539 | 1.991 | 1.675 | 1.700 | 1.553 |
| コマツ | 1.345 | 1.078 | 0.987 | 0.946 | 0.809 |
| クボタ | 2.126 | 1.709 | 1.998 | 2.191 | 2.113 |
| ダイキン工業 | 1.657 | 1.318 | 1.321 | 1.380 | 1.300 |
| 日立製作所 | 1.778 | 1.493 | 1.490 | 1.577 | 1.363 |
| 東芝 | 1.543 | 1.203 | 1.102 | 1.129 | 1.028 |
| 三菱電機 | 2.029 | 1.425 | 1.318 | 1.314 | 1.430 |
| 日本電産 | 1.491 | 1.303 | 1.324 | 1.282 | 1.186 |
| 富士通 | 2.407 | 1.938 | 1.706 | 1.775 | 1.831 |
| パナソニック | 1.320 | 1.084 | 1.033 | 1.081 | 1.056 |
| ソニー | 2.408 | 2.232 | 2.419 | 2.571 | 3.715 |
| キーエンス | 1.825 | 1.334 | 1.054 | 1.065 | 1.022 |
| デンソー | 1.597 | 1.262 | 1.257 | 1.229 | 1.067 |
| ファナック | 1.479 | 1.175 | 1.152 | 1.236 | 1.145 |
| 京セラ | 1.312 | 1.018 | 0.931 | 0.918 | 0.803 |
| 村田製作所 | 2.004 | 1.777 | 1.835 | 1.646 | 1.584 |
| 日東電工 | 1.876 | 1.476 | 1.461 | 1.508 | 1.285 |
| 三菱重工業 | 1.831 | 1.375 | 1.335 | 1.462 | 1.411 |
| 日産自動車 | 1.082 | 0.928 | 0.847 | 0.879 | 0.932 |
| いすゞ自動車 | 2.329 | 2.103 | 2.000 | 2.032 | 1.796 |

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-------------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| トヨタ自動車 | 0.745 | 0.693 | 0.647 | 0.683 | 0.758 |
| 本田技研工業 | 1.074 | 0.886 | 0.792 | 0.801 | 0.747 |
| スズキ | 2.486 | 1.838 | 1.761 | 1.595 | 1.556 |
| 富士重工業 | 2.049 | 1.835 | 1.771 | 1.756 | 1.552 |
| ニコン | 1.711 | 1.327 | 1.197 | 1.285 | 1.403 |
| HOYA | 2.309 | 1.794 | 1.452 | 1.363 | 1.202 |
| キヤノン | 0.637 | 0.476 | 0.393 | 0.389 | 0.369 |
| リコー | 1.354 | 1.123 | 1.157 | 1.056 | 1.062 |
| 大日本印刷 | 1.327 | 0.980 | 0.858 | 0.873 | 0.725 |
| 任天堂 | 2.277 | 1.680 | 1.516 | 1.701 | 1.690 |
| 伊藤忠商事 | 1.254 | 1.097 | 0.955 | 0.909 | 0.750 |
| 丸紅 | 1.036 | 0.779 | 0.736 | 0.865 | 0.807 |
| 三井物産 | 0.979 | 0.860 | 0.739 | 0.772 | 0.630 |
| 東京エレクトロン | 1.846 | 1.385 | 1.359 | 1.590 | 1.774 |
| 住友商事 | 1.251 | 1.197 | 1.485 | 1.593 | 2.530 |
| 三菱商事 | 1.017 | 0.859 | 0.826 | 0.848 | 0.813 |
| ユニ・チャーム | 1.832 | 1.493 | 1.408 | 1.328 | 1.244 |
| イオン | 0.709 | 0.622 | 0.656 | 0.726 | 0.817 |
| 三菱UFJFG | 0.983 | 0.835 | 0.836 | 0.912 | 0.951 |
| りそなHD | 2.260 | 1.776 | 1.494 | 1.369 | 1.368 |
| 三井住友トラストHD | 2.017 | 1.493 | 1.315 | 1.336 | 1.341 |
| 三井住友FG | 1.031 | 0.911 | 0.895 | 0.929 | 0.880 |
| 横浜銀行 | 1.856 | 1.314 | 1.109 | 1.041 | 1.003 |
| みずほFG | 0.430 | 0.401 | 0.401 | 0.413 | 0.429 |
| オリックス | 1.880 | 1.701 | 1.448 | 1.412 | 1.290 |
| 大和証券G | 1.721 | 1.142 | 1.045 | 1.128 | 1.010 |
| 野村HD | 1.472 | 1.143 | 1.115 | 1.160 | 1.198 |
| 損保ジャパンHD | 2.278 | 1.602 | 1.372 | 1.287 | 1.254 |
| MS&AD | 2.311 | 1.693 | 1.373 | 1.270 | 1.209 |
| 第一生命 | 1.635 | 1.311 | 1.133 | 1.125 | 1.114 |
| 東京海上HD | 1.671 | 1.213 | 1.020 | 0.980 | 0.917 |
| T&DHD | 2.262 | 1.689 | 1.519 | 1.546 | 1.645 |
| 三井不動産 | 1.757 | 1.310 | 1.131 | 1.128 | 1.163 |
| 三菱地所 | 1.705 | 1.287 | 1.180 | 1.192 | 1.239 |
| 住友不動産 | 1.932 | 1.450 | 1.346 | 1.308 | 1.354 |
| 東日本旅客鉄道 | 1.100 | 0.821 | 0.758 | 0.738 | 0.652 |
| 西日本旅客鉄道 | 1.181 | 0.843 | 0.794 | 0.763 | 0.684 |
| 東海旅客鉄道 | 1.290 | 0.919 | 0.926 | 0.923 | 0.827 |
| ヤマトHD | 1.600 | 1.194 | 1.107 | 1.122 | 1.007 |
| ANAHD | 1.283 | 1.020 | 1.146 | 1.289 | 1.180 |
| 日本電信電話 | 1.476 | 1.220 | 1.134 | 1.195 | 1.176 |
| KDDI | 1.785 | 1.414 | 1.309 | 1.253 | 1.263 |
| NTTドコモ | 1.143 | 0.989 | 0.865 | 0.875 | 0.751 |
| 中部電力 | 1.254 | 1.097 | 0.955 | 0.909 | 0.750 |
| 関西電力 | 2.990 | 2.154 | 2.022 | 2.007 | 1.771 |
| 東京ガス | 1.770 | 1.291 | 1.135 | 1.092 | 0.914 |
| 大阪ガス | 1.691 | 1.274 | 1.202 | 1.190 | 0.969 |
| セコム | 1.327 | 0.912 | 0.799 | 0.762 | 0.709 |
| ファーストリテイリング | 1.640 | 1.140 | 1.072 | 1.009 | 0.967 |
| ソフトバンクG | 1.569 | 1.726 | 1.745 | 1.657 | 1.596 |

や、富士フイルムのように右下がりになっている銘柄もあるなど様々であることがわかる。

次にこれに対して、第 2 章で述べた方法により計測した切断実現ボラティリティを表 2 および図 2 に示す。実現ボラティリティとの大きな違いとして、第 1 に概ね 2 から 3 分以下の観測時間間隔では、全ての銘柄で観測時間間隔が短くなるほど切断実現ボラティリティの値が小さくなっていることがわかる。しかし、それよりも観測時間間隔が長い領域では、住友商事のようにほぼ横這いとなる銘柄、ニコンのようにピークを迎えて下降する株式、日揮のようにほぼそのまま上昇する銘柄、三菱 UFJ フィナンシャル・グループやソフトバンクグループのように

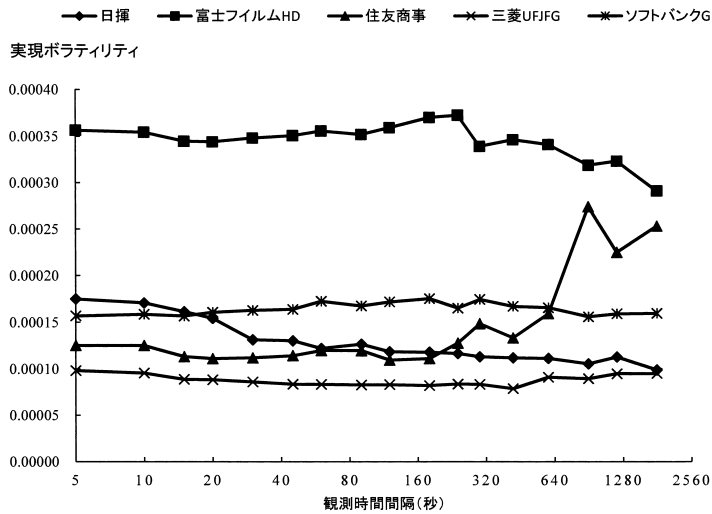


図 1. 実現ボラティリティの計測結果. 計測期間：2014 年 7 月 22 日～10 月 27 日.

ピークアウトした後に再び上昇する銘柄等様々である。

第 2 の違いとして、切断実現ボラティリティは、実現ボラティリティよりも小さいことは当然ではあるが、その差は比較的大きく、高頻度データで見ると、全ての銘柄で価格変動にはジャンプが含まれていると考えられる。

これらの 2 点について、さらに検討を加える。まず、後者に関しては、株式毎に実現ボラティリティに占める切断実現ボラティリティの比率を算出すると、表 3 のようになる。観測時間間隔が 5 秒での比率を見ると、最大のソフトバンクグループが 14.8% であり、それに三井住友フィナンシャルグループの 12.4%、野村ホールディングスの 10.4% などが続いているが、その他は 10% 未満である。観測時間間隔を拡大するとその比率は急速に上昇し始めるが、5 分間隔以上のところでは横這いとなり、最大でも関西電力の 30 分間隔の 55.4% である。さらに、富士フイルムホールディングスや住友商事のように全ての観測時間間隔で 20% 未満となっている株式もある。このように日中のボラティリティの要因としては、ブラウン運動によるものよりも、ジャンプによる部分の方が大半を占めていると考えることができる。

次に、観測時間間隔の短い領域で切断実現ボラティリティが減少する原因を探る。このような現象の原因の一つとして、観測時間間隔を短くすると現実に観測される価格が変動せず、リターンが 0 となる標本が増加し、閾値が小さくなり過ぎて結果的に除外される比率が高まることが考えられる。このため、各株式の各観測時間間隔における標本のゼロリターン比率を算出すると表 4 のようになった。これをみると、株式によってその水準は大きく異なり、三菱 UFJ フィナンシャル・グループのように 5 秒間隔でも 1.8% と僅かな株式がある一方で、同じ 5 秒間隔でも、日揮のように 65.3% と半数以上がゼロリターンになっているものもある。しかし、120 秒であれば同じく日揮の 2.4% を最大値として大半が 1% 未満となり、120 秒以上の観測時間間隔であれば計測上の問題は小さいことが考えられる。

この要因を検証するために、被説明変数を切断実現ボラティリティとし、説明変数を観測時間間隔とゼロリターン比率とする回帰分析を各株式に対して行った。すなわち、推計式は (4.1) 式のとおりである。

表 2. 切断実現ボラティリティの主な計測結果. TOPIX100 構成銘柄を株式コード順に並べている. 計測期間: 2014 年 7 月 22 日~10 月 27 日. (単位: $\times 10^{-4}$)

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-----------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| 国際石油開発帝石 | 0.027 | 0.595 | 0.685 | 0.625 | 0.661 |
| 大東建託 | 0.009 | 0.229 | 0.511 | 0.496 | 0.406 |
| 大和ハウス工業 | 0.048 | 0.562 | 0.596 | 0.553 | 0.523 |
| 積水ハウス | 0.008 | 0.271 | 0.414 | 0.433 | 0.376 |
| 日揮 | 0.007 | 0.280 | 0.458 | 0.471 | 0.512 |
| アサヒGHD | 0.038 | 0.328 | 0.406 | 0.418 | 0.398 |
| キリンHD | 0.009 | 0.278 | 0.424 | 0.374 | 0.383 |
| 味の素 | 0.013 | 0.278 | 0.468 | 0.458 | 0.452 |
| 日本たばこ産業 | 0.055 | 0.330 | 0.345 | 0.329 | 0.268 |
| セブン&アイHD | 0.069 | 0.309 | 0.324 | 0.347 | 0.364 |
| 東レ | 0.021 | 0.172 | 0.241 | 0.254 | 0.231 |
| 旭化成 | 0.047 | 0.299 | 0.385 | 0.376 | 0.374 |
| 信越化学工業 | 0.046 | 0.321 | 0.351 | 0.369 | 0.358 |
| 三菱ケミカルHD | 0.056 | 0.559 | 0.734 | 0.724 | 0.658 |
| 花王 | 0.069 | 0.354 | 0.395 | 0.357 | 0.378 |
| 武田薬品工業 | 0.029 | 0.131 | 0.153 | 0.136 | 0.179 |
| アステラス製薬 | 0.029 | 0.434 | 0.523 | 0.465 | 0.457 |
| エーザイ | 0.038 | 0.234 | 0.285 | 0.270 | 0.281 |
| 第一三共 | 0.012 | 0.250 | 0.335 | 0.330 | 0.354 |
| 大塚HD | 0.082 | 0.426 | 0.521 | 0.523 | 0.509 |
| オリエンタルランド | 0.017 | 0.197 | 0.296 | 0.309 | 0.317 |
| 富士フイルムHD | 0.190 | 0.471 | 0.498 | 0.494 | 0.417 |
| 資生堂 | 0.024 | 0.495 | 0.612 | 0.527 | 0.575 |
| JXHD | 0.037 | 0.414 | 0.439 | 0.383 | 0.343 |
| ブリヂストン | 0.050 | 0.278 | 0.321 | 0.279 | 0.274 |
| 旭硝子 | 0.020 | 0.285 | 0.414 | 0.389 | 0.392 |
| 新日鉄住金 | 0.018 | 0.340 | 0.480 | 0.463 | 0.420 |
| JFEHD | 0.052 | 0.475 | 0.564 | 0.508 | 0.542 |
| 住友金属鉱山 | 0.033 | 0.471 | 0.709 | 0.746 | 0.708 |
| 住友電気工業 | 0.023 | 0.392 | 0.526 | 0.551 | 0.514 |
| SMC | 0.026 | 0.285 | 0.595 | 0.544 | 0.583 |
| コマツ | 0.051 | 0.392 | 0.415 | 0.400 | 0.352 |
| クボタ | 0.036 | 0.495 | 0.640 | 0.665 | 0.642 |
| ダイキン工業 | 0.092 | 0.414 | 0.494 | 0.510 | 0.495 |
| 日立製作所 | 0.079 | 0.350 | 0.414 | 0.402 | 0.402 |
| 東芝 | 0.056 | 0.370 | 0.457 | 0.454 | 0.431 |
| 三菱電機 | 0.028 | 0.421 | 0.528 | 0.539 | 0.574 |
| 日本電産 | 0.076 | 0.346 | 0.470 | 0.425 | 0.486 |
| 富士通 | 0.124 | 0.721 | 0.742 | 0.684 | 0.527 |
| パナソニック | 0.013 | 0.304 | 0.443 | 0.372 | 0.416 |
| ソニー | 0.102 | 0.537 | 0.638 | 0.578 | 0.624 |
| キーエンス | 0.022 | 0.175 | 0.380 | 0.382 | 0.379 |
| デンソー | 0.065 | 0.333 | 0.373 | 0.384 | 0.350 |
| ファナック | 0.037 | 0.367 | 0.458 | 0.500 | 0.537 |
| 京セラ | 0.042 | 0.284 | 0.319 | 0.292 | 0.295 |
| 村田製作所 | 0.029 | 0.404 | 0.509 | 0.468 | 0.455 |
| 日東電工 | 0.069 | 0.426 | 0.528 | 0.519 | 0.452 |
| 三菱重工業 | 0.092 | 0.422 | 0.460 | 0.462 | 0.479 |
| 日産自動車 | 0.016 | 0.204 | 0.254 | 0.260 | 0.213 |
| いすゞ自動車 | 0.058 | 0.478 | 0.687 | 0.683 | 0.770 |

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-------------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| トヨタ自動車 | 0.040 | 0.179 | 0.222 | 0.199 | 0.192 |
| 本田技研工業 | 0.067 | 0.288 | 0.299 | 0.287 | 0.289 |
| スズキ | 0.123 | 0.557 | 0.575 | 0.555 | 0.521 |
| 富士重工業 | 0.176 | 0.577 | 0.645 | 0.666 | 0.647 |
| ニコン | 0.014 | 0.349 | 0.487 | 0.436 | 0.391 |
| HOYA | 0.070 | 0.442 | 0.569 | 0.502 | 0.558 |
| キヤノン | 0.022 | 0.163 | 0.177 | 0.166 | 0.149 |
| リコー | 0.010 | 0.368 | 0.552 | 0.530 | 0.551 |
| 大日本印刷 | 0.002 | 0.151 | 0.327 | 0.367 | 0.334 |
| 任天堂 | 0.026 | 0.369 | 0.529 | 0.551 | 0.540 |
| 伊藤忠商事 | 0.009 | 0.248 | 0.312 | 0.302 | 0.266 |
| 丸紅 | 0.053 | 0.247 | 0.279 | 0.281 | 0.217 |
| 三井物産 | 0.015 | 0.228 | 0.263 | 0.290 | 0.216 |
| 東京エレクトロン | 0.025 | 0.256 | 0.336 | 0.325 | 0.341 |
| 住友商事 | 0.007 | 0.154 | 0.231 | 0.217 | 0.209 |
| 三菱商事 | 0.022 | 0.258 | 0.296 | 0.304 | 0.252 |
| ユニ・チャーム | 0.040 | 0.315 | 0.457 | 0.412 | 0.474 |
| イオン | 0.004 | 0.108 | 0.204 | 0.215 | 0.209 |
| 三菱UFJFG | 0.095 | 0.312 | 0.363 | 0.335 | 0.393 |
| りそなHD | 0.127 | 0.640 | 0.627 | 0.627 | 0.558 |
| 三井住友トラストHD | 0.048 | 0.534 | 0.651 | 0.591 | 0.640 |
| 三井住友FG | 0.128 | 0.343 | 0.391 | 0.379 | 0.407 |
| 横浜銀行 | 0.019 | 0.380 | 0.524 | 0.483 | 0.457 |
| みずほFG | 0.002 | 0.074 | 0.144 | 0.141 | 0.153 |
| オリックス | 0.031 | 0.604 | 0.745 | 0.673 | 0.615 |
| 大和証券G | 0.097 | 0.434 | 0.482 | 0.486 | 0.417 |
| 野村HD | 0.153 | 0.433 | 0.497 | 0.463 | 0.469 |
| 損保ジャパンHD | 0.061 | 0.621 | 0.666 | 0.568 | 0.509 |
| MS&AD | 0.073 | 0.648 | 0.641 | 0.609 | 0.538 |
| 第一生命 | 0.025 | 0.430 | 0.559 | 0.498 | 0.465 |
| 東京海上HD | 0.097 | 0.501 | 0.474 | 0.414 | 0.359 |
| T&DHD | 0.030 | 0.606 | 0.734 | 0.711 | 0.795 |
| 三井不動産 | 0.082 | 0.417 | 0.506 | 0.478 | 0.486 |
| 三菱地所 | 0.073 | 0.486 | 0.533 | 0.549 | 0.591 |
| 住友不動産 | 0.082 | 0.425 | 0.564 | 0.578 | 0.515 |
| 東日本旅客鉄道 | 0.043 | 0.273 | 0.312 | 0.301 | 0.304 |
| 西日本旅客鉄道 | 0.037 | 0.236 | 0.306 | 0.297 | 0.279 |
| 東海旅客鉄道 | 0.012 | 0.255 | 0.420 | 0.430 | 0.397 |
| ヤマトHD | 0.025 | 0.433 | 0.515 | 0.504 | 0.514 |
| ANAHD | 0.007 | 0.177 | 0.307 | 0.312 | 0.288 |
| 日本電信電話 | 0.076 | 0.420 | 0.425 | 0.388 | 0.419 |
| KDDI | 0.099 | 0.514 | 0.546 | 0.444 | 0.445 |
| NTTドコモ | 0.020 | 0.313 | 0.363 | 0.313 | 0.311 |
| 中部電力 | 0.009 | 0.248 | 0.312 | 0.302 | 0.266 |
| 関西電力 | 0.100 | 0.638 | 0.877 | 0.906 | 0.981 |
| 東京ガス | 0.031 | 0.376 | 0.537 | 0.500 | 0.432 |
| 大阪ガス | 0.015 | 0.297 | 0.530 | 0.536 | 0.460 |
| セコム | 0.032 | 0.276 | 0.320 | 0.273 | 0.240 |
| ファーストリテイリング | 0.065 | 0.291 | 0.370 | 0.365 | 0.415 |
| ソフトバンクG | 0.232 | 0.513 | 0.585 | 0.535 | 0.588 |

(4.1)

$$TRV_n = \beta_0 + \beta_1 \Delta_n + \beta_2 R_n + e_n$$

ここで, TRV_n は観測時間間隔 Δ_n における切断実現ボラティリティ, R_n は観測時間間隔 Δ_n における標本のうちリターンがゼロである標本数の比率(%), e_n は誤差項である.

この結果を表 5 に示す. 表中の P 値は回帰係数=0 を帰無仮説, 回帰係数 $\neq 0$ を対立仮説としたときの t 検定に対応する値である. 回帰分析の結果, 決定係数は最低でも JX ホールディングスの 0.631, 平均では 0.851 であった. 有意水準を 5% として回帰係数の推定値を見ると, 観測時間間隔はプラス, ゼロリターン比率はマイナスの値で有意になっている株式が大半となっ

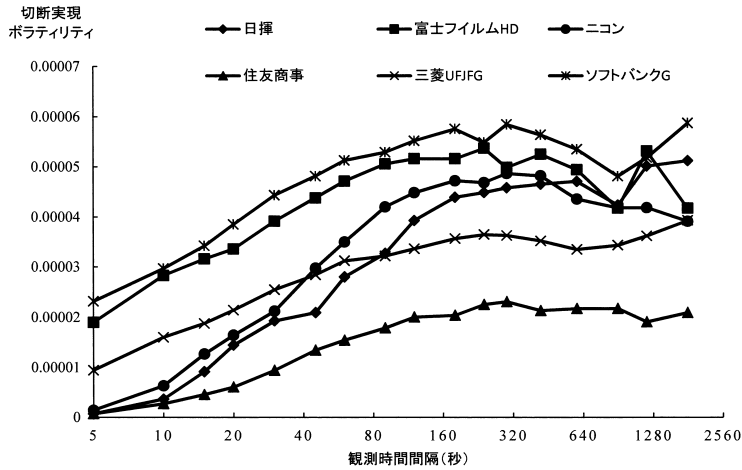


図 2. 切断実現ボラティリティの計測結果. 計測期間：2014 年 7 月 22 日～10 月 27 日.

ている。本稿では理論的な考察を行っていないが、このことは、要因としてはゼロリターン比率だけではなく、観測時間間隔が何らかの構造的な影響を与えていることを示している。特に一貫してゼロリターン比率が小さい三菱 UFJ フィナンシャル・グループやソフトバンクグループにおいても、これら二つの回帰係数は有意であることは、ゼロリターン比率以外に観測時間間隔による構造的な影響があることを示唆している。

5. おわりに

本稿では、2014 年 7 月 22 日から 10 月 27 日までの東京証券取引所の TOPIX100 構成銘柄の高頻度データを使用して、切断実現ボラティリティの計測を行い、日中の株価変動に含まれるブラウン運動のボラティリティを推計した。切断実現ボラティリティの計測の際に必要な閾値の設定に関しては Ait-Sahalia and Jacod (2014)の方法を用いた。その結果、大半の株式で実現ボラティリティに占める切断実現ボラティリティの比率は半分未満であり、ジャンプの影響が大きいことを示す結果となった。しかし、切断実現ボラティリティが観測時間間隔を短くするに従って小さくなる現象も同時に観測され、ゼロリターンによる影響を示唆する結果も得られたものの、その構造的な原因の解明と最適な観測時間間隔の決定には至っていない。切断実現ボラティリティの計測をする上で、これらは今後の課題である。

謝 辞

本稿は統計数理研究所公募型共同利用(課題番号 28-共研-1004), 科研費(15H03402)および東京経済大学共同研究助成 D16-01 の助成を受けたものである。また、匿名レフリーからは多くの有益な指摘を頂いた。記して感謝の意を表します。

表 3. 切断実現ボラティリティ比率の主な計測結果. TOPIX100 構成銘柄を株式コード順に並べている. 計測期間: 2014 年 7 月 22 日~10 月 27 日.

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-----------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| 国際石油開発帝石 | 0.011 | 0.299 | 0.368 | 0.364 | 0.407 |
| 大東建託 | 0.005 | 0.167 | 0.393 | 0.363 | 0.327 |
| 大和ハウス工業 | 0.021 | 0.309 | 0.410 | 0.411 | 0.400 |
| 積水ハウス | 0.008 | 0.284 | 0.434 | 0.446 | 0.386 |
| 日揮 | 0.004 | 0.229 | 0.405 | 0.423 | 0.517 |
| アサヒGHD | 0.026 | 0.285 | 0.344 | 0.394 | 0.381 |
| キリンHD | 0.008 | 0.303 | 0.498 | 0.446 | 0.466 |
| 味の素 | 0.008 | 0.257 | 0.435 | 0.406 | 0.390 |
| 日本たばこ産業 | 0.041 | 0.313 | 0.398 | 0.392 | 0.349 |
| セブン&アイHD | 0.057 | 0.333 | 0.394 | 0.433 | 0.493 |
| 東レ | 0.021 | 0.244 | 0.389 | 0.413 | 0.438 |
| 旭化成 | 0.030 | 0.261 | 0.315 | 0.268 | 0.302 |
| 信越化学工業 | 0.032 | 0.320 | 0.389 | 0.410 | 0.436 |
| 三菱ケミカルHD | 0.025 | 0.339 | 0.446 | 0.450 | 0.454 |
| 花王 | 0.053 | 0.328 | 0.382 | 0.363 | 0.396 |
| 武田薬品工業 | 0.047 | 0.267 | 0.367 | 0.342 | 0.506 |
| アステラス製薬 | 0.014 | 0.247 | 0.315 | 0.297 | 0.316 |
| エーザイ | 0.029 | 0.260 | 0.355 | 0.339 | 0.357 |
| 第一三共 | 0.011 | 0.301 | 0.426 | 0.430 | 0.517 |
| 大塚HD | 0.037 | 0.249 | 0.312 | 0.353 | 0.320 |
| オリエンタルランド | 0.013 | 0.186 | 0.300 | 0.301 | 0.331 |
| 富士フイルムHD | 0.053 | 0.133 | 0.147 | 0.145 | 0.143 |
| 資生堂 | 0.014 | 0.341 | 0.482 | 0.432 | 0.532 |
| JXHD | 0.027 | 0.351 | 0.424 | 0.396 | 0.386 |
| ブリヂストン | 0.047 | 0.306 | 0.379 | 0.358 | 0.347 |
| 旭硝子 | 0.014 | 0.286 | 0.449 | 0.415 | 0.452 |
| 新日鉄住金 | 0.014 | 0.319 | 0.460 | 0.436 | 0.390 |
| JFEHD | 0.033 | 0.360 | 0.433 | 0.386 | 0.420 |
| 住友金属鉱山 | 0.014 | 0.242 | 0.346 | 0.386 | 0.399 |
| 住友電気工業 | 0.016 | 0.331 | 0.436 | 0.474 | 0.508 |
| SMC | 0.010 | 0.143 | 0.355 | 0.320 | 0.376 |
| コマツ | 0.038 | 0.363 | 0.420 | 0.423 | 0.435 |
| クボタ | 0.017 | 0.289 | 0.320 | 0.303 | 0.304 |
| ダイキン工業 | 0.055 | 0.314 | 0.374 | 0.369 | 0.381 |
| 日立製作所 | 0.044 | 0.235 | 0.278 | 0.255 | 0.295 |
| 東芝 | 0.036 | 0.308 | 0.415 | 0.402 | 0.420 |
| 三菱電機 | 0.014 | 0.296 | 0.401 | 0.410 | 0.401 |
| 日本電産 | 0.051 | 0.266 | 0.355 | 0.332 | 0.410 |
| 富士通 | 0.052 | 0.372 | 0.435 | 0.385 | 0.288 |
| パナソニック | 0.010 | 0.280 | 0.429 | 0.344 | 0.394 |
| ソニー | 0.042 | 0.240 | 0.264 | 0.225 | 0.168 |
| キーエンス | 0.012 | 0.131 | 0.361 | 0.358 | 0.371 |
| デンソー | 0.041 | 0.264 | 0.297 | 0.312 | 0.328 |
| ファナック | 0.025 | 0.312 | 0.398 | 0.405 | 0.469 |
| 京セラ | 0.032 | 0.279 | 0.342 | 0.318 | 0.367 |
| 村田製作所 | 0.015 | 0.227 | 0.278 | 0.284 | 0.288 |
| 日東電工 | 0.037 | 0.289 | 0.362 | 0.344 | 0.352 |
| 三菱重工業 | 0.050 | 0.307 | 0.344 | 0.316 | 0.339 |
| 日産自動車 | 0.015 | 0.220 | 0.300 | 0.296 | 0.229 |
| いすゞ自動車 | 0.025 | 0.227 | 0.343 | 0.336 | 0.428 |

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-------------|------------|-------|-------|-------|-------|
| | 5 | 60 | 300 | 600 | 1800 |
| トヨタ自動車 | 0.053 | 0.259 | 0.343 | 0.291 | 0.253 |
| 本田技研工業 | 0.062 | 0.325 | 0.378 | 0.358 | 0.387 |
| スズキ | 0.049 | 0.303 | 0.326 | 0.348 | 0.335 |
| 富士重工業 | 0.086 | 0.314 | 0.364 | 0.379 | 0.417 |
| ニコン | 0.008 | 0.263 | 0.407 | 0.339 | 0.279 |
| HOYA | 0.030 | 0.246 | 0.392 | 0.368 | 0.464 |
| キヤノン | 0.034 | 0.342 | 0.450 | 0.426 | 0.404 |
| リコー | 0.008 | 0.327 | 0.477 | 0.502 | 0.519 |
| 大日本印刷 | 0.001 | 0.154 | 0.381 | 0.420 | 0.461 |
| 任天堂 | 0.012 | 0.220 | 0.349 | 0.324 | 0.319 |
| 伊藤忠商事 | 0.007 | 0.226 | 0.327 | 0.332 | 0.355 |
| 丸紅 | 0.052 | 0.317 | 0.379 | 0.324 | 0.269 |
| 三井物産 | 0.016 | 0.265 | 0.355 | 0.376 | 0.342 |
| 東京エレクトロン | 0.013 | 0.185 | 0.247 | 0.204 | 0.192 |
| 住友商事 | 0.006 | 0.129 | 0.156 | 0.137 | 0.083 |
| 三菱商事 | 0.022 | 0.301 | 0.358 | 0.358 | 0.310 |
| ユニ・チャーム | 0.022 | 0.211 | 0.325 | 0.310 | 0.381 |
| イオン | 0.006 | 0.173 | 0.312 | 0.296 | 0.256 |
| 三菱UFJFG | 0.096 | 0.374 | 0.434 | 0.367 | 0.413 |
| リソなHD | 0.056 | 0.360 | 0.420 | 0.458 | 0.408 |
| 三井住友トラストHD | 0.024 | 0.357 | 0.495 | 0.443 | 0.477 |
| 三井住友FG | 0.124 | 0.377 | 0.436 | 0.408 | 0.463 |
| 横浜銀行 | 0.010 | 0.289 | 0.473 | 0.464 | 0.456 |
| みずほFG | 0.005 | 0.185 | 0.360 | 0.341 | 0.356 |
| オリックス | 0.016 | 0.355 | 0.515 | 0.477 | 0.477 |
| 大和証券G | 0.056 | 0.381 | 0.461 | 0.431 | 0.413 |
| 野村HD | 0.104 | 0.379 | 0.446 | 0.399 | 0.391 |
| 損保ジャパンHD | 0.027 | 0.388 | 0.485 | 0.441 | 0.406 |
| MS&AD | 0.032 | 0.383 | 0.467 | 0.479 | 0.445 |
| 第一生命 | 0.015 | 0.328 | 0.494 | 0.443 | 0.417 |
| 東京海上HD | 0.058 | 0.413 | 0.465 | 0.422 | 0.392 |
| T&DHD | 0.013 | 0.359 | 0.484 | 0.460 | 0.483 |
| 三井不動産 | 0.047 | 0.318 | 0.448 | 0.423 | 0.417 |
| 三菱地所 | 0.043 | 0.378 | 0.452 | 0.460 | 0.477 |
| 住友不動産 | 0.042 | 0.293 | 0.419 | 0.442 | 0.381 |
| 東日本旅客鉄道 | 0.039 | 0.333 | 0.412 | 0.408 | 0.467 |
| 西日本旅客鉄道 | 0.031 | 0.280 | 0.386 | 0.389 | 0.407 |
| 東海旅客鉄道 | 0.009 | 0.278 | 0.453 | 0.466 | 0.480 |
| ヤマトHD | 0.016 | 0.362 | 0.465 | 0.450 | 0.510 |
| ANAHD | 0.005 | 0.173 | 0.268 | 0.242 | 0.244 |
| 日本電信電話 | 0.051 | 0.344 | 0.375 | 0.325 | 0.356 |
| KDDI | 0.055 | 0.364 | 0.417 | 0.355 | 0.353 |
| NTTドコモ | 0.018 | 0.317 | 0.419 | 0.358 | 0.414 |
| 中部電力 | 0.007 | 0.226 | 0.327 | 0.332 | 0.355 |
| 関西電力 | 0.033 | 0.296 | 0.434 | 0.451 | 0.554 |
| 東京ガス | 0.018 | 0.291 | 0.473 | 0.458 | 0.472 |
| 大阪ガス | 0.009 | 0.233 | 0.441 | 0.450 | 0.474 |
| セコム | 0.024 | 0.303 | 0.401 | 0.358 | 0.339 |
| ファーストリテイリング | 0.039 | 0.255 | 0.345 | 0.362 | 0.429 |
| ソフトバンクG | 0.148 | 0.297 | 0.335 | 0.323 | 0.368 |

表 4. ゼロリターン比率, TOPIX100 構成銘柄を株式コード順に並べている. 計測期間: 2014 年 7 月 22 日~10 月 27 日. (単位: %)

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-----------|------------|-------|-------|------|------|
| | 5 | 15 | 30 | 60 | 120 |
| 国際石油開発帝石 | 16.18 | 2.00 | 0.29 | 0.05 | 0.04 |
| 大東建託 | 50.65 | 27.48 | 13.70 | 3.80 | 0.54 |
| 大和ハウス工業 | 25.02 | 6.65 | 1.88 | 0.60 | 0.19 |
| 積水ハウス | 18.69 | 2.95 | 0.29 | 0.01 | 0.01 |
| 日揮 | 65.03 | 42.61 | 19.50 | 8.16 | 2.74 |
| アサヒGHD | 27.05 | 5.66 | 1.01 | 0.15 | 0.08 |
| キリンHD | 25.51 | 5.45 | 0.64 | 0.05 | 0.01 |
| 味の素 | 56.11 | 31.20 | 11.70 | 3.95 | 1.45 |
| 日本たばこ産業 | 15.56 | 1.78 | 0.26 | 0.03 | 0.03 |
| セブン&アイHD | 20.14 | 3.39 | 0.65 | 0.14 | 0.06 |
| 東レ | 44.11 | 17.56 | 5.54 | 1.22 | 0.18 |
| 旭化成 | 39.35 | 14.34 | 4.64 | 0.99 | 0.14 |
| 信越化学工業 | 30.46 | 8.59 | 2.60 | 0.50 | 0.16 |
| 三菱ケミカルHD | 18.07 | 2.25 | 0.18 | 0.06 | 0.05 |
| 花王 | 21.34 | 3.71 | 0.71 | 0.16 | 0.03 |
| 武田薬品工業 | 22.86 | 4.04 | 0.81 | 0.10 | 0.01 |
| アステラス製薬 | 11.47 | 0.90 | 0.12 | 0.06 | 0.04 |
| エーザイ | 34.22 | 10.46 | 2.92 | 0.60 | 0.21 |
| 第一三共 | 26.14 | 6.17 | 0.98 | 0.11 | 0.02 |
| 大塚HD | 23.81 | 5.15 | 1.24 | 0.50 | 0.07 |
| オリエンタルランド | 51.86 | 24.35 | 11.31 | 3.50 | 1.08 |
| 富士フイルムHD | 15.15 | 2.40 | 0.53 | 0.16 | 0.12 |
| 資生堂 | 24.40 | 4.90 | 0.75 | 0.03 | 0.02 |
| JXHD | 10.62 | 0.65 | 0.06 | 0.03 | 0.03 |
| ブリヂストン | 15.08 | 1.74 | 0.24 | 0.07 | 0.02 |
| 旭硝子 | 45.71 | 19.23 | 4.94 | 0.88 | 0.15 |
| 新日鉄住金 | 18.33 | 2.41 | 0.21 | 0.01 | 0.00 |
| JFEHD | 17.07 | 2.00 | 0.28 | 0.03 | 0.00 |
| 住友金属鉱山 | 47.54 | 21.45 | 6.89 | 1.88 | 0.51 |
| 住友電気工業 | 20.39 | 3.06 | 0.34 | 0.04 | 0.03 |
| SMC | 56.80 | 34.01 | 18.83 | 9.02 | 2.12 |
| コマツ | 14.27 | 1.81 | 0.23 | 0.05 | 0.03 |
| クボタ | 34.51 | 11.65 | 3.03 | 0.72 | 0.20 |
| ダイキン工業 | 22.29 | 4.66 | 1.12 | 0.22 | 0.11 |
| 日立製作所 | 19.09 | 3.09 | 0.61 | 0.16 | 0.10 |
| 東芝 | 21.44 | 4.14 | 0.89 | 0.17 | 0.05 |
| 三菱電機 | 36.14 | 12.69 | 3.11 | 0.71 | 0.13 |
| 日本電産 | 24.14 | 5.39 | 1.32 | 0.44 | 0.10 |
| 富士通 | 23.37 | 4.43 | 0.97 | 0.18 | 0.08 |
| パナソニック | 11.16 | 0.75 | 0.07 | 0.02 | 0.02 |
| ソニー | 5.35 | 0.32 | 0.13 | 0.10 | 0.08 |
| キーエンス | 58.48 | 35.43 | 21.20 | 9.83 | 2.32 |
| デンソー | 20.40 | 3.49 | 0.81 | 0.23 | 0.13 |
| ファナック | 27.99 | 7.87 | 1.91 | 0.45 | 0.11 |
| 京セラ | 27.97 | 6.93 | 1.69 | 0.33 | 0.12 |
| 村田製作所 | 30.19 | 8.42 | 2.89 | 0.49 | 0.19 |
| 日東電工 | 26.06 | 6.07 | 1.38 | 0.32 | 0.16 |
| 三菱重工業 | 22.06 | 3.99 | 0.80 | 0.16 | 0.10 |
| 日産自動車 | 8.28 | 0.50 | 0.12 | 0.08 | 0.07 |
| いすゞ自動車 | 27.58 | 7.29 | 1.99 | 0.89 | 0.09 |

| 株 式 名 | 観測時間間隔 (秒) | | | | |
|-------------|------------|-------|-------|------|------|
| | 5 | 15 | 30 | 60 | 120 |
| トヨタ自動車 | 5.47 | 0.44 | 0.12 | 0.07 | 0.07 |
| 本田技研工業 | 10.05 | 0.90 | 0.18 | 0.08 | 0.07 |
| スズキ | 22.27 | 4.72 | 1.39 | 0.32 | 0.11 |
| 富士重工業 | 11.57 | 1.45 | 0.37 | 0.17 | 0.12 |
| 日産 | 24.37 | 4.56 | 0.50 | 0.04 | 0.01 |
| HOYA | 29.23 | 8.10 | 2.05 | 1.30 | 0.04 |
| キヤノン | 16.48 | 2.07 | 0.32 | 0.05 | 0.03 |
| リコー | 18.66 | 2.35 | 0.16 | 0.01 | 0.01 |
| 大日本印刷 | 64.81 | 41.65 | 23.62 | 8.41 | 1.72 |
| 任天堂 | 39.53 | 14.24 | 4.52 | 0.80 | 0.19 |
| 伊藤忠商事 | 13.73 | 1.17 | 0.12 | 0.03 | 0.03 |
| 丸紅 | 15.99 | 2.66 | 0.54 | 0.11 | 0.05 |
| 三井物産 | 8.29 | 0.50 | 0.05 | 0.02 | 0.02 |
| 東京エレクトロン | 41.09 | 16.63 | 4.28 | 1.11 | 0.41 |
| 住友商事 | 17.62 | 2.53 | 0.27 | 0.06 | 0.04 |
| 三菱商事 | 14.26 | 1.52 | 0.17 | 0.03 | 0.02 |
| ユニ・チャーム | 32.76 | 10.90 | 3.06 | 0.88 | 0.24 |
| イオン | 15.57 | 1.41 | 0.13 | 0.01 | 0.00 |
| 三菱UFJFG | 1.83 | 0.09 | 0.06 | 0.05 | 0.05 |
| リソナHD | 9.22 | 0.66 | 0.18 | 0.11 | 0.09 |
| 三井住友トラストHD | 26.03 | 5.99 | 1.33 | 0.23 | 0.10 |
| 三井住友FG | 6.77 | 0.60 | 0.15 | 0.08 | 0.06 |
| 横浜銀行 | 50.40 | 23.88 | 7.39 | 1.85 | 0.38 |
| みずほFG | 2.35 | 0.01 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| オリックス | 9.53 | 0.79 | 0.14 | 0.06 | 0.05 |
| 大和証券G | 30.12 | 8.70 | 2.28 | 0.37 | 0.09 |
| 野村HD | 5.46 | 0.25 | 0.08 | 0.05 | 0.05 |
| 損保ジャパンHD | 32.69 | 9.45 | 2.59 | 0.52 | 0.12 |
| MS&AD | 25.76 | 5.12 | 1.07 | 0.21 | 0.06 |
| 第一生命 | 13.52 | 1.38 | 0.14 | 0.04 | 0.04 |
| 東京海上HD | 19.31 | 3.00 | 0.53 | 0.08 | 0.05 |
| T&DHD | 23.04 | 4.50 | 0.53 | 0.10 | 0.04 |
| 三井不動産 | 39.06 | 14.54 | 4.76 | 1.27 | 0.40 |
| 三菱地所 | 36.95 | 12.77 | 3.88 | 0.91 | 0.33 |
| 住友不動産 | 47.10 | 22.33 | 8.78 | 2.66 | 0.82 |
| 東日本旅客鉄道 | 30.79 | 8.35 | 2.19 | 0.49 | 0.10 |
| 西日本旅客鉄道 | 35.95 | 10.93 | 3.19 | 0.81 | 0.11 |
| 東海旅客鉄道 | 46.05 | 20.24 | 5.38 | 1.36 | 0.36 |
| ヤマトHD | 31.25 | 8.27 | 1.57 | 0.22 | 0.07 |
| ANAHD | 32.20 | 9.60 | 1.57 | 0.14 | 0.04 |
| 日本電信電話 | 16.90 | 2.53 | 0.51 | 0.16 | 0.11 |
| KDDI | 16.50 | 2.40 | 0.50 | 0.15 | 0.09 |
| NTTドコモ | 13.30 | 1.23 | 0.17 | 0.02 | 0.01 |
| 中部電力 | 13.73 | 1.17 | 0.12 | 0.03 | 0.03 |
| 関西電力 | 25.86 | 5.51 | 0.77 | 0.09 | 0.04 |
| 東京ガス | 40.59 | 14.24 | 4.59 | 0.78 | 0.12 |
| 大阪ガス | 46.59 | 18.89 | 6.88 | 1.46 | 0.26 |
| セコム | 38.71 | 14.20 | 4.88 | 1.15 | 0.29 |
| ファーストリテイリング | 43.41 | 19.06 | 6.96 | 2.21 | 0.67 |
| ソフトバンクG | 3.13 | 0.47 | 0.22 | 0.14 | 0.09 |

表 5. 切断実現ボラティリティに対する回帰分析の結果. TOPIX100 構成銘柄を株式コード順に並べている. 各回帰係数は 1 万倍して表示している.

| 株 式 名 | 定数項 | | 観測時間間隔 | | ゼロリターン比率 | | 決定 | |
|-------------|--------|----------|--------|----------|----------|----------|-------|----------|
| | 回帰係数 | ρ 値 | 回帰係数 | ρ 値 | 回帰係数 | ρ 値 | 回帰係数 | ρ 値 |
| 国際石油開発帝石 | 11.478 | 0.144 | 5.279 | 0.002 | -1.394 | 0.035 | 0.784 | |
| 大東建託 | 3.438 | 0.640 | 4.481 | 0.003 | -0.295 | 0.058 | 0.877 | |
| 大和ハウス工業 | 23.231 | 0.005 | 2.719 | 0.052 | -1.181 | 0.004 | 0.803 | |
| 積水ハウス | -3.024 | 1.520 | 4.825 | 0.000 | -0.348 | 0.240 | 0.858 | |
| 日揮 | 6.474 | 0.141 | 3.843 | 0.000 | -0.230 | 0.002 | 0.962 | |
| アサヒGHD | 7.942 | 0.012 | 3.005 | 0.000 | -0.441 | 0.004 | 0.908 | |
| キリンHD | -0.283 | 1.049 | 4.280 | 0.000 | -0.346 | 0.137 | 0.835 | |
| 味の素 | 6.488 | 0.144 | 3.698 | 0.000 | -0.262 | 0.003 | 0.942 | |
| 日本たばこ産業 | 14.219 | 0.001 | 1.243 | 0.079 | -0.935 | 0.007 | 0.705 | |
| セブン&アイHD | 11.082 | 0.000 | 1.960 | 0.000 | -0.544 | 0.000 | 0.922 | |
| アール | 5.551 | 0.007 | 1.603 | 0.000 | -0.174 | 0.001 | 0.929 | |
| 旭化成 | 9.349 | 0.014 | 2.542 | 0.001 | -0.324 | 0.005 | 0.897 | |
| 信越化学工業 | 11.713 | 0.000 | 1.958 | 0.001 | -0.459 | 0.000 | 0.915 | |
| 三菱ケミカルHD | 11.486 | 0.064 | 5.453 | 0.000 | -1.057 | 0.022 | 0.851 | |
| 花王 | 12.653 | 0.000 | 2.027 | 0.001 | -0.629 | 0.002 | 0.865 | |
| 武田薬品工業 | 4.699 | 0.000 | 0.907 | 0.000 | -0.203 | 0.002 | 0.896 | |
| アステラス製薬 | 10.422 | 0.050 | 3.573 | 0.002 | -1.452 | 0.023 | 0.787 | |
| エーザイ | 8.579 | 0.001 | 1.560 | 0.001 | -0.289 | 0.001 | 0.910 | |
| 第一三共 | 3.272 | 0.297 | 2.998 | 0.000 | -0.362 | 0.023 | 0.880 | |
| 大塚HD | 15.810 | 0.000 | 2.990 | 0.000 | -0.748 | 0.000 | 0.919 | |
| オリエンタルランド | 2.343 | 0.242 | 2.933 | 0.000 | -0.129 | 0.005 | 0.968 | |
| 富士フイルムHD | 24.116 | 0.000 | 1.389 | 0.069 | -1.022 | 0.007 | 0.733 | |
| 資生堂 | 12.980 | 0.057 | 4.046 | 0.004 | -0.910 | 0.013 | 0.814 | |
| JXHD | 14.374 | 0.016 | 2.083 | 0.056 | -1.632 | 0.029 | 0.631 | |
| ブリヂストン | 10.551 | 0.001 | 1.470 | 0.010 | -0.731 | 0.007 | 0.776 | |
| 旭硝子 | 10.231 | 0.038 | 2.477 | 0.008 | -0.343 | 0.006 | 0.861 | |
| 新日鉄住金 | 4.093 | 0.341 | 4.198 | 0.000 | -0.650 | 0.043 | 0.853 | |
| JFEHD | 12.247 | 0.015 | 3.892 | 0.000 | -1.019 | 0.010 | 0.848 | |
| 住友金属鉱山 | 5.450 | 0.355 | 6.789 | 0.000 | -0.371 | 0.012 | 0.942 | |
| 住友電気工業 | 3.920 | 0.343 | 4.872 | 0.000 | -0.628 | 0.025 | 0.894 | |
| SMC | 10.088 | 0.191 | 4.313 | 0.004 | -0.356 | 0.012 | 0.924 | |
| コソツ | 17.075 | 0.000 | 1.459 | 0.049 | -1.282 | 0.002 | 0.775 | |
| ケボラ | 13.615 | 0.034 | 4.654 | 0.001 | -0.669 | 0.004 | 0.898 | |
| ダイキン工業 | 12.532 | 0.001 | 3.254 | 0.000 | -0.606 | 0.002 | 0.919 | |
| 日立製作所 | 10.625 | 0.001 | 2.649 | 0.000 | -0.589 | 0.005 | 0.886 | |
| 東芝 | 11.052 | 0.004 | 3.069 | 0.000 | -0.662 | 0.004 | 0.887 | |
| 三菱電機 | 9.111 | 0.051 | 4.518 | 0.000 | -0.493 | 0.003 | 0.928 | |
| 日本電産 | 10.280 | 0.000 | 3.106 | 0.000 | -0.486 | 0.001 | 0.939 | |
| 富士通 | 34.167 | 0.001 | 1.931 | 0.231 | -1.493 | 0.005 | 0.701 | |
| パナソニック | 0.658 | 0.883 | 4.198 | 0.000 | -0.750 | 0.178 | 0.794 | |
| ソニー | 17.172 | 0.001 | 3.723 | 0.000 | -3.322 | 0.007 | 0.845 | |
| キーンズ | 5.473 | 0.205 | 2.973 | 0.001 | -0.190 | 0.013 | 0.941 | |
| デンソー | 11.416 | 0.001 | 1.124 | 0.001 | -0.606 | 0.003 | 0.864 | |
| ファナック | 8.843 | 0.003 | 3.698 | 0.000 | -0.503 | 0.000 | 0.954 | |
| 京セラ | 12.464 | 0.001 | 1.277 | 0.027 | -0.494 | 0.001 | 0.835 | |
| 村田製作所 | 10.994 | 0.079 | 3.457 | 0.006 | -0.652 | 0.015 | 0.827 | |
| 日東電工 | 12.703 | 0.006 | 3.485 | 0.000 | -0.618 | 0.005 | 0.885 | |
| 三菱重工業 | 16.643 | 0.000 | 2.352 | 0.003 | -0.747 | 0.002 | 0.851 | |
| 日産自動車 | 1.508 | 0.582 | 2.402 | 0.000 | -0.636 | 0.171 | 0.776 | |
| いすゞ自動車 | 8.682 | 0.104 | 5.859 | 0.000 | -0.660 | 0.010 | 0.919 | |
| トヨタ自動車 | 6.399 | 0.001 | 1.170 | 0.001 | -1.128 | 0.011 | 0.808 | |
| 本田技研工業 | 12.612 | 0.000 | 1.098 | 0.020 | -1.107 | 0.002 | 0.780 | |
| スズキ | 26.290 | 0.000 | 1.822 | 0.029 | -1.109 | 0.000 | 0.857 | |
| 富士重工業 | 22.257 | 0.000 | 3.136 | 0.000 | -1.517 | 0.002 | 0.874 | |
| ニコン | 6.843 | 0.204 | 3.608 | 0.002 | -0.613 | 0.035 | 0.798 | |
| HOYA | 23.793 | 0.000 | 2.031 | 0.025 | -0.905 | 0.000 | 0.877 | |
| キヤノン | 7.373 | 0.000 | 0.617 | 0.035 | -0.465 | 0.001 | 0.802 | |
| リコー | -5.302 | 1.659 | 6.601 | 0.000 | -0.401 | 0.298 | 0.861 | |
| 大日本印刷 | -1.125 | 1.208 | 3.678 | 0.000 | -0.126 | 0.055 | 0.940 | |
| 任天堂 | 7.633 | 0.095 | 4.373 | 0.000 | -0.411 | 0.005 | 0.924 | |
| 伊藤忠商事 | 2.451 | 0.538 | 2.895 | 0.001 | -0.613 | 0.123 | 0.744 | |
| 丸紅 | 12.131 | 0.000 | 0.851 | 0.072 | -0.704 | 0.002 | 0.771 | |
| 三井物産 | 4.647 | 0.120 | 2.033 | 0.002 | -0.979 | 0.052 | 0.749 | |
| 東京エレクトロン | 9.634 | 0.003 | 1.989 | 0.001 | -0.315 | 0.001 | 0.914 | |
| 住友商事 | 0.265 | 0.903 | 2.214 | 0.000 | -0.257 | 0.123 | 0.842 | |
| 三菱商事 | 7.771 | 0.015 | 1.878 | 0.003 | -0.752 | 0.012 | 0.790 | |
| ユニ・チャーム | 9.502 | 0.003 | 3.103 | 0.000 | -0.421 | 0.001 | 0.943 | |
| イオン | -6.271 | 2.000 | 3.132 | 0.000 | -0.079 | 1.540 | 0.951 | |
| 三菱UFJFG | 8.860 | 0.000 | 2.434 | 0.000 | -3.698 | 0.019 | 0.886 | |
| りそなHD | 27.405 | 0.000 | 2.280 | 0.042 | -2.755 | 0.004 | 0.740 | |
| 三井住友トラストHD | 15.924 | 0.009 | 4.087 | 0.001 | -0.900 | 0.003 | 0.875 | |
| 三井住友FG | 13.403 | 0.000 | 1.882 | 0.000 | -1.297 | 0.007 | 0.852 | |
| 横浜銀行 | 17.479 | 0.031 | 2.510 | 0.073 | -0.501 | 0.005 | 0.830 | |
| みずほFG | -4.265 | 1.995 | 2.192 | 0.000 | 0.354 | 1.353 | 0.879 | |
| オリックス | 11.685 | 0.169 | 5.458 | 0.003 | -2.363 | 0.057 | 0.741 | |
| 大和証券G | 22.898 | 0.000 | 1.248 | 0.122 | -0.714 | 0.001 | 0.827 | |
| 野村HD | 16.124 | 0.000 | 2.592 | 0.000 | -1.986 | 0.007 | 0.858 | |
| 損保ジャパンHD | 35.347 | 0.000 | 0.729 | 0.612 | -1.196 | 0.001 | 0.763 | |
| MS&AD | 31.284 | 0.001 | 1.556 | 0.262 | -1.326 | 0.002 | 0.739 | |
| 第一生命 | 10.128 | 0.090 | 3.743 | 0.003 | -1.286 | 0.032 | 0.766 | |
| 東京海上HD | 28.924 | 0.000 | -0.010 | 1.009 | -1.336 | 0.001 | 0.692 | |
| TE&DH | 9.661 | 0.172 | 6.355 | 0.000 | -0.988 | 0.016 | 0.870 | |
| 三井不動産 | 19.364 | 0.000 | 2.131 | 0.011 | -0.517 | 0.001 | 0.893 | |
| 三菱地所 | 19.107 | 0.000 | 2.974 | 0.002 | -0.597 | 0.000 | 0.914 | |
| 住友不動産 | 18.164 | 0.001 | 3.005 | 0.002 | -0.436 | 0.001 | 0.931 | |
| 東日本旅客鉄道 | 10.857 | 0.000 | 1.623 | 0.002 | -0.404 | 0.001 | 0.895 | |
| 西日本旅客鉄道 | 6.950 | 0.012 | 2.100 | 0.000 | -0.264 | 0.005 | 0.900 | |
| 東海旅客鉄道 | 1.498 | 0.697 | 3.982 | 0.000 | -0.213 | 0.030 | 0.920 | |
| ヤマHD | 12.448 | 0.007 | 3.480 | 0.000 | -0.618 | 0.001 | 0.905 | |
| ANAHD | -2.030 | 1.553 | 3.382 | 0.000 | -0.147 | 0.141 | 0.909 | |
| 日本電信電話 | 18.653 | 0.000 | 1.488 | 0.036 | -1.090 | 0.001 | 0.807 | |
| KDDI | 24.917 | 0.000 | 1.307 | 0.162 | -1.432 | 0.002 | 0.744 | |
| NTTドコモ | 9.602 | 0.034 | 1.989 | 0.022 | -1.040 | 0.024 | 0.697 | |
| 中部電力 | 2.451 | 0.538 | 2.895 | 0.001 | -0.613 | 0.123 | 0.744 | |
| 関西電力 | 11.383 | 0.048 | 7.576 | 0.000 | -0.749 | 0.010 | 0.929 | |
| 東京ガス | 12.773 | 0.065 | 3.275 | 0.013 | -0.507 | 0.014 | 0.824 | |
| 大阪ガス | 2.629 | 0.705 | 4.983 | 0.001 | -0.295 | 0.091 | 0.855 | |
| セコム | 16.942 | 0.000 | 0.479 | 0.471 | -0.477 | 0.001 | 0.818 | |
| ファーストリテイリング | 10.095 | 0.000 | 2.471 | 0.000 | -0.235 | 0.000 | 0.974 | |
| ソフトバンクG | 23.431 | 0.000 | 2.148 | 0.005 | -4.227 | 0.013 | 0.797 | |

参 考 文 献

- Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2012). Analyzing the spectrum of asset returns: Jump and volatility components in high frequency data, *Journal of Economic Literature*, **50**(4), 1007–1050.
- Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2014). *High-frequency Financial Econometrics*, Princeton University Press, New Jersey.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, **71**(2), 579–625.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Diebold, F. X. (2007). Roughing it up: Including jump components in the measurement, modeling and forecasting of return volatility, *The Review of Economics and Statistics*, **89**(4), 701–720.
- Bachelier, L. (1900). Théorie de la spéculation, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, **3**(17), 21–86.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2006). Separating microstructure noise from volatility, *Journal of Financial Economics*, **79**(3), 655–692.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008). Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling, *Review of Economic Studies*, **75**(2), 339–369.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2006). Econometrics of testing for jumps in financial eco-

- nomics using bipower variation, *Journal of Financial Econometrics*, **4**(1), 1–30.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities, *The Journal of Political Economy*, **81**(3), 637–654.
- Gatheral, J. and Oomen, R.C.A. (2010). Zero-intelligence realized variance estimation, *Finance and Stochastics*, **14**(2), 249–283.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2006). Realized variance and market microstructure noise, *Journal of Business and Economic Statistics*, **24**(2), 127–161.
- 林高樹 (2010). 高頻度データとはなにか, 証券アナリストジャーナル, **48**(1), 56–66.
- 久田祥史 (2003). ジャンプ拡散過程を用いたオプション価格付けモデルについて, 金融研究, **22**(別冊 1), 51–85.
- Lee, S. and Mykland, P. A. (2008). Jumps in financial markets: A new nonparametric test and jump dynamics, *The Review of Financial Studies*, **21**(6), 2535–2563.
- Mancini, C. (2001). Disentangling the jumps of the diffusion in a geometric jumping brownian motion, *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **64**(1), 19–47.
- 増田弘毅, 森本孝之 (2009). 高頻度データ系列におけるジャンプ検出の実証分析, 日本統計学会誌, **39**(1), 33–63.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing, *Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**(1), 141–183.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**(1-2), 125–144.
- Osborne, M. F. M. (1959). Brownian motion in the stock market, *Operations Research*, **7**(2), 145–173.
- 柴田舞 (2008). 高頻度データによるボラティリティの推定: Realized volatility のサーベイと日本の株価指数および株価指数先物の実証分析, 金融研究, **27**(1), 1–54.
- Shimizu, Y. (2003). Estimation of diffusion processes with jumps from discrete observations, Master Thesis, Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo.
- Zhang, L., Mykland, P. A. and Ait-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high-frequency data, *Journal of the American Statistical Association*, **100**(472), 1394–1411.

Estimating Truncated Realized Volatility and Time Interval: Evidence from Japanese Stock Market

Yasushi Yoshida

Faculty of Business Administration, Tokyo Keizai University

Many studies document jumps that are significant in asset returns by analyzing high-frequency data. The estimator of realized volatility is biased by the jumps. Truncated realized volatility is proposed to solve this problem. In this paper, the realized volatilities and the truncated realized volatilities of 100 Japanese stocks are estimated using high-frequency data from July 22nd to October 27th, 2014 at a sampling interval of from 5 to 1800 seconds. The conclusion is that Brownian motion does not dominate each stock price process. However, the truncated realized volatility become progressively smaller with decreasing sampling interval. Zero return is only one factor affecting the decreasing truncated realized volatility. Choosing the optimal sampling interval and threshold level to estimate accurate truncated realized volatility is a remaining issue.

経験類似度に基づくボラティリティ予測

森本 孝之¹・川崎 能典^{2,3}

(受付 2016 年 7 月 25 日；改訂 10 月 20 日；採択 10 月 28 日)

要 旨

事例ベース意思決定理論に基礎を置いた経験類似度(ES, Empirical Similarity)という概念を適用することにより、異なるモデルから生じるボラティリティ予測値を結合する。経験類似度の枠組みでは、意思決定者が予測モデルや予測値の尤もらしさに関する確率評価を行わずに、専ら類似性のみによって将来を予測することができる。具体的には、過去のモデル予測値と対応するボラティリティの実現値との距離を定量化することによって、予測の組合せの重みを決定する。そして、決定された重みを用い将来のボラティリティを予測する。本稿では、この経験類似度モデルから得られたボラティリティの予測値とその他時系列モデルの予測値とを実証的に比較する。モデルの予測力比較については、誤差関数に基づくモデル信頼集合(Model Confidence Set, MCS)を用いることにより、複数の銘柄と推定予測期間におけるモデルの予測力を順位付けし、最良モデルの累積頻度を分析し評価する。

キーワード：経験類似度、実現測度、HARQ、ESQ、モデル信頼集合。

1. はじめに

類推による推論は、過去の経験に基づき、未来の出来事を予測する基本的な方法の 1 つである(Gilboa et al., 2011)。帰納的推論の論理的妥当性に疑問を持ち、また類推的推論を議論したことで有名な Hume (1748)は、将来について過去から学ぶ基本思想である。一般的に、不確実あるいは無知な状況において、意思決定者は将来の確率を評価できない、あるいは評価したがらないが、将来について過去から学びその類似性に基づき思考することは可能である。より現代的に表現すれば、不確実性下の意思決定におけるフォンノイマン・モルゲンシュテルンの期待効用理論では、意思決定者は起こりうる状態をすべて列挙しつくした状態空間と、その上の確率分布から計算される期待効用を最大化すべく行動すると想定されている(尾山, 2012)。しかし、意思決定者が状態空間を完全に把握していると想定するにはあまりにも無理がある状況も多々あり、そのような状況での意思決定についての 1 つの考え方は、人々は過去の経験からの類推に基づいて現時点での行動を決めるであろう、というものである。これが Gilboa and Schmeidler (1995, 2001)の提唱する事例ベース意思決定理論である(尾山, 2012)。この類似性に基づく推論は、医学、法律、ビジネス、政治、あるいは人工知能における意思決定に幅広く応用されている(Gilboa and Schmeidler, 2001)。この事例ベース意思決定理論は、以前経験した過去の状況との類似性を考慮することによって、現状を評価するという類推的思考を意思決定者に仮定している

¹ 関西学院大学 理工学部：〒 669-1337 兵庫県三田市学園 2-1

² 統計数理研究所：〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3

³ 総合研究大学院大学 複合科学研究科統計科学専攻：〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3

(Gilboa and Schmeidler, 2001). 現在の状況に類似した事例は、あまり類似していない事例と比較して、より大きい重みが与えられる。この考え方が事例ベース意思決定理論に基づく経験類似度 (ES, Empirical Similarity) の概念 (Gilboa et al., 2006, 2011) であり、Gilboa and Schmeidler (2012) によりデータから類似度関数を推定する計量経済学的枠組みが提供された。これにより、意思決定者によって認識される事例 (問題, 状況) 間の距離を計測することが可能となった。本稿では、非確率的な手法で異なるモデルから得られる予測値を組み合わせるために、Golosnoy et al. (2014) の提案した経験類似度の概念を利用する方法を用いる。ここでの設定では、競合するモデルから得られた異なる予測値は、現在観測された状態あるいは実現値にある程度類似している事例として評価される。直近でより正確な点予測値を与えるモデルには、その他のモデルと比較して、より大きい現在の重みを与える。Golosnoy et al. (2014) の核となるアイデアは、現在の観測値と、異なるモデルから得られる直近の 1 期先予測値との間の経験類似度距離を計測することである。この類似度距離により、次の期のモデルの重みが決定される。したがって、この経験類似度によるモデル組合せ手法は、予測モデルの組合せの重みを決定するために、異なるモデルの直近の予測力に関する情報を利用する。Golosnoy et al. (2014) によれば、その他の確率的な手法と比較して、この経験類似度によるモデル組合せ手法を用いる利点として、以下の 3 点が考えられる。

- (1) モデルの事後確率や予測値の平均二乗誤差 (Mean Squared Error, MSE) などを算出する必要がない。
- (2) 経済主体の選好に予測モデルの重みを関連づけられる。
- (3) 意思決定者が予測値と実現値間の類似度をどのように評価するかをデータから明らかにできる。

本稿の実証研究では、前述の Golosnoy et al. (2014) により提案された経験類似度によるモデル組合せ手法を、日次実現ボラティリティ過程をモデル化することにより分析する。この目的のために、先行研究同様、Corsi (2009) によって提案された、過去の異なる投資期間における推定結果をボラティリティの予測に反映できる HAR (Heterogeneous AutoRegressive) モデルの組合せに対する経験類似度を評価する。この実証研究において予測力評価に利用されるデータは、1999 年 1 月から 2013 年 12 月まで 15 年分の株価指数 6 銘柄と東京証券取引所 1 部上場の個別 24 銘柄の 1 分間隔高頻度データから得られた日次実現ボラティリティである。データの標本期間については、1999 年から 2013 年までの、インサンプル、アウトオブサンプルを含む計 225 通りの推定予測期間を分析対象とする。この 225 通りの組合せの内訳は、インサンプル 120 通り、アウトオブサンプル 105 通りである。これらインサンプルとアウトオブサンプルにおける予測を行うことにより、複数の一般的なボラティリティモデルに対して、この経験類似度によるモデル組合せ手法の予測力を比較する。予測力の比較に関しては、インサンプルとアウトオブサンプルにおいて得られた各モデルの誤差関数値を統計的仮説検定の枠組みで適切に予測力の評価を行うため、ここでは Hansen et al. (2011) が提案するモデル信頼集合 (Model Confidence Set, 以下 MCS) を用いる。MCS により、特定の真のモデルを仮定すること無しに、所与の有意水準での最良なモデル選択が可能となる。最後に、Mincer and Zarnowitz (1969) により提案された予測力を評価する一般的な手法の 1 つである Mincer-Zarnowitz (MZ) 回帰を、各モデルの予測値に対して実行し、得られた自由度調整済み決定係数の値を比較する。

本稿は、次のように構成される。第 2 節では、本稿の理論的背景となる経験類似度の統計モデルを詳細に解説する。第 3 節では、実証分析に用いるデータを説明した後、モデルの予測力比較を MCS および MZ 回帰により行う。第 4 節では、本稿における実証分析の結果を纏め、将来の研究に対する方向付けを示唆し結論とする。

2. 理論的背景

ここでは、Gilboa et al. (2011) および Golosnoy et al. (2014) に基づき、本稿で用いられる経験類似度の理論的背景について解説する。

2.1 経験類似度

ある変数 y_t の値を、関連する変数の値 $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$ によって構成されるデータベースに基づき評価する。例えば、 y_t は、家具の骨董品の価格であるとしよう。ここで x_t はそのスタイル、製造年、大きさなどといった特性値を表すとする。 y_t を評価するために、過去の観測値 x_i と現在の値 x_t とをいかにして結合すべきであろうか？もし Hume (1748) のアイデアに従うならば、過去の条件 $x_i = (x_i^1, \dots, x_i^d)$ が x_t と似ているか、あるいは似ていないかを表す類似度の考えが必要となる。ここでは y_t の予測において、より似ていない条件の下で得られた観測値よりも、より似ている条件の下で得られた観測値により高い重みを与えたい。上の例では、最近売られた同様の骨董品の価格によって、この骨董品の価格を評価することは、道理にかなっている。さらに、「スタイル、製造年、大きさ、および売りだされた時期」に関して過去の観測値が現在の観測値により似ているほど、現在の評価において、この観測値により大きい重みを置きたいと考える。

形式的に、類似度関数 $s: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{++} = (0, \infty)$ を仮定し、データベース $(x_i, y_i)_{i \leq n}$ と新しいデータ点 $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d) \in \mathbb{R}^d$ が与えられたならば、 y_t の類似度予測子は

$$(2.1) \quad y_t^s = \frac{\sum_{i < t} s(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i < t} s(x_i, x_t)}$$

と定式化できる。あるいは、もし $(x_t, y_t)_{t \leq n}$ におけるデータ点の順序が任意ならば

$$(2.2) \quad y_t^s = \frac{\sum_{i \neq t} s(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i \neq t} s(x_i, x_t)}$$

と定義することもできる。類似度関数 s については、いくつかの弱い仮定を満たすならば (Lieberman, 2010)、任意の関数形で表すことが可能である。例えば Billot et al. (2008) は、次の形をとる類似度関数と同値な類似度加重平均についての条件を与えている。

$$s(x, x') = \exp(-\|x - x'\|)$$

ここで $\|\cdot\|$ は \mathbb{R}^d におけるノルムである。具体的には、ここでは加重ユークリッド距離によって定義されたノルムの族に焦点を当てると

$$s_w(x, x') = \exp(-d_w(x, x'))$$

となる。ここで $w \in \mathbb{R}_+^d$ は、次式で与えられる 2 つのベクトル $x, x' \in \mathbb{R}^d$ 間の距離の加重ベクトルである。

$$(2.3) \quad d_w(x, x') = \sum_{j=1}^d w_j (x_j - x'_j)^2$$

従ってこの定式化では、類似度関数は各予測子を含めたパラメータの d -次元ベクトルとなる。

統計的推論を実行し、仮説検定により定性的結果を得るために、(2.1)式と(2.2)式は統計モデルに組み込むことができる。すなわち、それぞれ

$$(2.4) \quad y_t = \frac{\sum_{i < t} s_w(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i < t} s_w(x_i, x_t)} + \varepsilon_t$$

および

$$(2.5) \quad y_t = \frac{\sum_{i \neq t} s_w(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i \neq t} s_w(x_i, x_t)} + \varepsilon_t$$

というモデルを考える．ここで $\{\varepsilon_t\}$ は $\text{iid}(0, \sigma^2)$ である．(2.4) 式は，ある種の因果モデルとして解釈できる．例えば，経済主体による価格形成過程を考えてみると，この経済主体は，過去において既に価格が決定されている他の商品との類似度に応じて，不動産や美術品のような商品の価格を決定するだろう．したがって，(2.4) 式は，価格を決定する際の経済主体が関与する思考過程のモデルとして考えることができる．モデル (2.5) 式は，同様の方法で直接的に解釈することができない．各 y_t の分布が他のすべての y_t に依存するので，(2.5) 式は，その過程の時間的進展を説明することができない．しかしながら，そのような相互依存性は，空間統計学の応用分野として一般的な地理学，社会学，あるいは政治学データでは自然に解釈できる．

2.2 経験類似度とカーネル推定量の関係

ここでは，説明を簡明にするため 1 次元，すなわち $d = 1$ の変数として X が存在する場合を考える．ノンパラメトリック回帰モデルでは，通常次のようなデータ生成過程を仮定する．

$$y_i = m(x_i) + \varepsilon_i, \quad (i = 1, \dots, n), \quad \varepsilon_i \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

ここで $m: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は x と y を関係づける未知の関数である．広く用いられている $m(\cdot)$ のノンパラメトリック推定量は，ナダラヤ・ワトソン推定量であり

$$\hat{m}(x_t) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x_t}{h}\right) y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x_t}{h}\right)}$$

のように定義される．ここで $K(x)$ は，カーネル関数，すなわち，他の正則条件と同様に $\int K(z) dz = 1$ を満たす非負の関数であり， h は，バンド幅パラメータである．たとえば，もしガウシアンカーネルを選択すれば

$$(2.6) \quad \frac{1}{h} K\left(\frac{x_i - x_t}{h}\right) = (2\pi h^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x_i - x_t)^2}{2h^2}\right)$$

が得られる．分散とバイアス間のトレード・オフ関係があるので， h の選択はノンパラメトリック統計学における重要な論点である．最適バンド幅の選択に対して最も一般的な基準の一つは，平均積分二乗誤差を最小化することである．すなわち，最適な h は

$$h^* = \arg \min_h E_{f_0} \int (\hat{m}(x) - m(x))^2 dx$$

を満たす．ここで期待値 E_{f_0} は， y の真の分布 f_0 の下での期待値を意味する．もし x が可算であり， $m(x)$ を y に置き換えるならば，誤差の二乗和の期待値を最小化するという基準で h^* を決めることになる．

いま，カーネルを基にした推定と経験類似度間との関係を議論することにしよう．上で説明されたように，経験類似度法は

$$y_t = \frac{\sum_{i=1}^n s_w(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i=1}^n s_w(x_i, x_t)}$$

によって y_t を予測することを提案している．ここで

$$s_w(x_i, x_t) = \exp(-dw) = (\pi/w)^{1/2} \left[\frac{1}{(1/\sqrt{2w})} K\left(\frac{x_i - x_t}{1/\sqrt{2w}}\right) \right]$$

であり、 d_w は(2.3)式において定義され、 K は(2.6)式において与えられる。そして

$$\frac{\sum_{i=1}^n s_w(x_i, x_t) y_i}{\sum_{i=1}^n s_w(x_i, x_t)} = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x_t}{1/\sqrt{2w}}\right) y_i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_i - x_t}{1/\sqrt{2w}}\right)}$$

であり、この設定では $h = 1/\sqrt{2w}$ という結果となる。

2.3 モデル結合のための経験類似度

関心のある変数 y_t を予測するために組み合わせられた d 個のモデル $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$ があると仮定する。Bates and Granger (1969)によれば予測の線形結合とは

$$(2.7) \quad \hat{y}_t = \sum_{j=1}^d a_{t-1}^j x_{t-1}^j$$

によって与えられる。ここで非負の a_t^j は、 $\sum_{j=1}^d a_t^j \equiv 1$ となる j 番目のモデルの比率を表す。(2.7)式における重み a_t^j は、モデルや予測値の尤もらしさに関する(確率等の)定量的評価に関連づけた解釈が可能だが、何らかの目的関数を考えることによって、より適切な重み a_t^j を選択できるかもしれない。Elliott and Timmermann (2004)ではモデルから導かれる MSE の小ささが重み係数に対応している。この重み a_t^j を適切に選択するために、いくつかの接近法が提案されているが、どれも一般的な方法とまではなっていない。そこで Golosnoy et al. (2014)は、Gilboa et al. (2006)による ES 概念に基づいた予測の線形結合を、次のように定式化した。

$$y_t = \sum_{j=1}^p \phi[y_{t-1}, x_{t-2}^j] x_{t-1}^j + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$$

この定式化の特徴は、重み $\phi[y_{t-1}, x_{t-2}^j]$ を得るために必要な一期前の予測値 x_{t-2}^j と対応する実現値 y_t 間の距離を計測できることにある。そして、予測値 $x_t = (x_t^1, \dots, x_t^d)$ の加重和である予測の線形結合は

$$\hat{y}_t = \sum_{j=1}^d \phi[y_{t-1}, x_{t-2}^j] x_{t-1}^j$$

によって与えられる。

また、重み $\phi[\cdot, \cdot]$ は、観測されたデータの過去の値に依存し、現在の実現値の代理変数と j 番目のモデルの予測値間の距離は

$$\phi[y_t, x_{t-1}^j] = \frac{\theta[y_t, x_{t-1}^j]}{\sum_{k=1}^d \theta[y_t, x_{t-1}^k]}$$

のように算出される。重み $\phi[y_t, x_{t-1}^j] \in [0, 1]$ は、 $\sum_{k=1}^d \phi[y_t, x_{t-1}^k] \equiv 1$ という性質を持つ正規化された相対経験類似度として解釈できる。右辺の $\theta[y_t, x_{t-1}^j]$ は類似度関数であり、もし y_t と x_{t-1}^j 間の距離が短ければ、 $\theta[y_t, x_{t-1}^j]$ は高い類似度を示唆する。本稿では前節で導入した次のような Billot et al. (2008)による指数型関数を類似度関数として用いる。

$$\theta[y_t, x_{t-1}^j] = \exp(-\omega_j (y_t - x_{t-1}^j)^2), \quad \omega_j \in \mathbb{R}$$

3. 実証分析

実証分析の目的は、東京証券取引所上場の株価指数および個別銘柄の日次ボラティリティの予測を通じて、前節で導入した経験類似度モデルの予測力を評価することにある。この目的の

表 1. 実証研究における分析対象銘柄 (30 銘柄).

| 株価指数 | 個別銘柄 | |
|-------------|-----------|---------|
| TOPIX | 日本たばこ産業 | 本田技研工業 |
| 日経株価指数 300 | 信越化学工業 | キヤノン |
| 日経平均 | 武田薬品工業 | 任天堂 |
| 東証電気機器株価指数 | アステラス製薬 | 三井物産 |
| 東証輸送用機器株価指数 | 富士フイルム HD | 三菱商事 |
| 東証銀行業株価指数 | 新日本製鐵 | 野村 HD |
| | 小松製作所 | 三菱地所 |
| | 日立製作所 | 東日本旅客鉄道 |
| | 松下電器産業 | 日本電信電話 |
| | ソニー | KDDI |
| | 日産自動車 | NTT ドコモ |
| | トヨタ自動車 | 東京電力 |

ために、ここでは日経メディアマーケティング株式会社より提供された各株価指数と個別銘柄のティックデータを 1 分間隔の高頻度データに加工し用いている。標本期間は、1999 年 1 月 4 日から 2013 年 12 月 30 日までの 15 年分であり、使用した株価指数および個別銘柄は下記の通りである。まず株価指数に関しては、TOPIX、日経株価指数 300、日経平均、東証電気機器株価指数、東証輸送用機器株価指数、東証銀行業株価指数、の計 6 銘柄である。また個別銘柄に関しては、2009 年 4 月 1 日時点での TOPIX Core30 に含まれる銘柄から、1999 年から 2013 年まで継続的に市場で取引された計 24 銘柄を用いる。除外された 6 銘柄については、セブン & アイ HD (1999–2005 年)、JFE-HD (1999–2002 年)、三菱 UFJ-FG (1999–2001 年)、三井住友 FG (1999–2002 年)、みずほ FG (1999–2003 年)、東京海上 HD (1999–2002 年)、である (括弧内は欠損期間)。ここでの実証研究の分析対象に採用された株価指数 6 銘柄と個別 24 銘柄については、表 1 にまとめてある。

本研究における実証分析において用いられる日次時系列データは、株価原系列、その対数収益率、実現ボラティリティ (Realized Volatility, RV)、および Realized Quarticity (RQ) である。なお、 RV および RQ の対数および平方根を後述する HAR モデルで定式化し分析を行なったが、特に予測力に大きな変化は見られなかったため、これらの結果については割愛した。次に、これらのうち RV および RQ という 2 つの実現測度について解説する。

3.1 実現測度

金融市場における最も一般的なりスク指標の一つであるボラティリティは、対数収益率の分散あるいは標準偏差として定義される。これまで、ボラティリティを推定するために多くのモデルが提唱されたが、これらのモデルは、基本的にパラメトリックであり、日次、週次、月次といったボラティリティを同じ頻度で取られたデータを用いて推定するよう設計されている。しかし、近年、金融資産価格の日内データが広範に利用可能となり、その日の日次ボラティリティを事後的に算出するために、秒あるいは分刻みに取られた非常に高頻度なデータを利用することが可能となった。

そこで、ここでは日内高頻度データを利用した日次ボラティリティの推定手法の概略を以下に解説する。まず Bollerslev et al. (2016) に従い、ここでは確率微分方程式

$$d \log(P_t) = \mu_t dt + \sigma_t dW_t,$$

によって決定される金融資産価格過程 P_t を考える。ここで μ_t と σ_t は、それぞれドリフトと瞬

時的ボラティリティ過程を表し、 W_t は標準ブラウン運動である。なお、ここでのモデルは、理解を容易にするために、ジャンプを含んでいないものとする。本論文の主要な目的は、潜在する日次ボラティリティ、つまり Integrated Variance (IV) を推定し予測することにある。具体的に、日次の IV は形式的に

$$IV_t = \int_{t-1}^t \sigma_s^2 ds$$

によって定義される。この IV は金融市場において直接的に観測できないが、次式で与えられる RV は日内高頻度収益率の二乗和として算出できる。時点 $t = 1, 2, \dots, T$ における株価を S_t 、その対数収益率を $r_t = \log S_t - \log S_{t-1}$ 、そして実現ボラティリティは RV_t と表している。RV については、1 分間隔で標本抽出された日内収益率の 2 乗和として下記のように定義される (Andersen et al., 2001)。

$$RV_t = \sum_{i=1}^{n_t} r_{t,i}^2$$

ここで $r_{t,i}$ は t 日における i 番目の観測された対数収益率であり、 n_t は t 日における標本数を表す。対数価格過程をセミマルチンゲールにおける連続マルチンゲール部分と考えることにより、この RV は IV の代理変数とみなすことができる。また RV は、IV の一致かつ不偏推定量であることが知られている (McAleer and Medeiros, 2008)。従って、日次 RV の推定には、24 時間の完全な高頻度データが必要となるが、東京証券取引所の取引時間は、前場 9:00–11:00 (2011 年 11 月 21 日以降は 11:30 まで) と後場 12:30–15:00 であり、昼休みと夜間の情報を無視した RV は「1 日分」のボラティリティ測度としては適切ではない。そこで、本稿では Hansen and Lunde (2005) の改良版である Masuda and Morimoto (2012) の手法を推定された RV に適用する。この手法は、前場、昼休み、後場、夜間それぞれに適した重み $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ および λ_4 を用い

$$RV_t^{weighted} = \lambda_1 Y_{t,1}^2 + \lambda_2 RV_{t,2} + \lambda_3 Y_{t,3}^2 + \lambda_4 RV_{t,4},$$

を定義する。ここで $Y_{t,1}^2$ と $Y_{t,3}^2$ は、それぞれ t 日の夜間と昼休みにおける収益率の 2 乗を表し、 $RV_{t,2}$ と $RV_{t,4}$ は、それぞれ t 日の前場と後場における RV を表す。以上の修正は、モデルや予測法の構成にかかわらず必ず行う処置であるので、今後、表記の簡略化のため $RV^{weighted}$ は RV と表す。

さらに、RV は 1 分間隔という比較的短い時点でサンプリングされた日内収益率を用いた場合、マイクロストラクチャーノイズと呼ばれる市場のミクロ構造に起因する観測誤差の影響を受けてしまうことが知られている。このバイアスを緩和するための方法としては、低頻度時間間隔の RV (例えば Andersen and Bollerslev (1997) や Bandi and Russell (2004) など)、サブサンプル法 (Zhang et al., 2005)、あるいはカーネル法を用いることなどが考えられているが、本稿では Hansen and Lunde (2005) に従い Bartlett カーネルを用いた Newey-West (NW) 推定量を用いる。この NW 推定量は前述のサブサンプル法とほぼ同一の推定量であることが Barndorff-Nielsen et al. (2008) によって示されている。

Bollerslev et al. (2016) によれば、上述の RV における推定誤差は、Barndorff-Nielsen and Shephard (2002) の $\Delta \rightarrow 0$ における漸近分布理論により下記のように特徴づけられる。

$$(3.1) \quad RV_t = IV_t + \eta_t, \quad \eta_t \sim MN(0, 2\Delta IQ_t)$$

ここで $IQ_t \equiv \int_{t-1}^t \sigma_s^4 ds$ は、Integrated Quarticity (IQ) を表し、MN は混合正規すなわち IQ_t の実現値に条件付けられた正規分布である。また、IV に対する RV と同様に考えることにより、Realized Quarticity (RQ) は

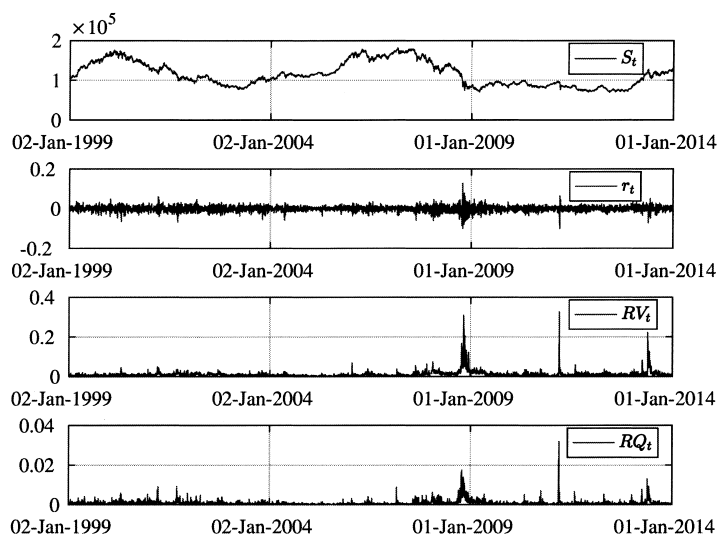


図 1. 株価, 収益率, 実現ボラティリティ, および RQ (TOPIX).

$$RQ_t \equiv \frac{M}{3} \sum_{i=1}^M r_{t,i}^4$$

によって与えられ, この RQ は, IQ の一致推定量となることが知られている. しかし, IQ の推定には, 測定誤差等多くのノイズを含む日内収益率の 4 次モーメントの推定を含んでいるため, ジャンプの大きさが小さくても RQ 推定量は不安定にならざるを得ない. そこで, 例えば Andersen et al. (2012) は, ジャンプの影響を少しでも低減させるため, 隣接する各収益率の最小値あるいは中央値を使った 2 つの頑健な IQ の推定量として $MinRQ$ および $MedRQ$ を提案しているが, 本稿では RV と同様に Bartlett カーネルを用いた Newey-West (NW) 推定量を RQ の推定に用いている.

ここでは紙幅の関係上, 上述の 30 銘柄のうち株価指数と個別銘柄から各 1 銘柄に関する時系列データの特徴を概観する. まず, 図 1 および図 2 は, それぞれ TOPIX, 日立製作所の 1999 年 1 月から 2013 年 12 月までの 15 年間分の株価, 対数収益率, 実現ボラティリティ, および RQ を図示したものである. これらの図の特徴を見ると, 期間後半に 3 回の大きな変動が見られる. 特に実現ボラティリティの図を見ると, その山を捉えやすい. これらの大きな変動は, 古い方から順に 2008 年 9 月のリーマン・ショック, 2011 年 3 月に発生した東北地方太平洋沖地震, そして 2013 年 5 月 23 日の日経平均大暴落がそれぞれ対応している.

さらに, 表 2 および表 3 は, それぞれ TOPIX, 日立製作所の 1999 年 1 月から 2013 年 12 月までの 15 年間分の株価, 対数収益率, および実現ボラティリティから計算された基本統計量である. これらの表から分かることは, 両者とも対数収益率 r_t の尖度が 3 以上となっており一般的な金融時系列の持つ特徴が表れている. 歪度は両者とも負の値を示しており, これは収益率分布の山が右側つまり正の方向に偏っていることになり, 興味深い結果である. また, 両者とも最大値と最小値は絶対値で 10% を超えており, 平均値はほぼ 0 に等しくなっている.

3.2 モデル

ここでは, 実証分析に用いる 15 個の時系列モデルを紹介する. まず, Corsi (2009) によって

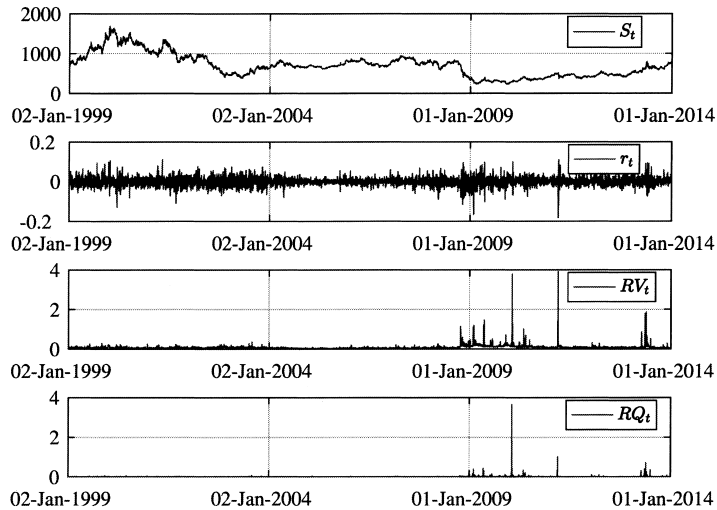


図 2. 株価, 収益率, 実現ボラティリティ, および RQ (日立製作所).

表 2. 基本統計量 (TOPIX) 1999–2013.

| | S_t | r_t | RV_t | $\sqrt{RQ_t}$ |
|------|-------------|---------|----------|---------------|
| 平均 | 115815.4168 | 0.0001 | 0.0114 | 0.0008 |
| 中央値 | 111634.0000 | 0.0003 | 0.0080 | 0.0005 |
| 最大値 | 181697.0000 | 0.1286 | 0.3255 | 0.0318 |
| 最小値 | 69551.0000 | -0.1001 | 0.0012 | 0.0000 |
| 標準偏差 | 30461.9413 | 0.0141 | 0.0155 | 0.0013 |
| 歪度 | 0.4294 | -0.3543 | 9.7217 | 8.9328 |
| 尖度 | 1.9932 | 8.8653 | 144.9977 | 143.5033 |
| 標本数 | 3685 | 3684 | 3664 | 3664 |

表 3. 基本統計量 (日立製作所) 1999–2013.

| | S_t | r_t | RV_t | $\sqrt{RQ_t}$ |
|------|-----------|---------|----------|---------------|
| 平均 | 701.3720 | 0.0000 | 0.0884 | 0.0095 |
| 中央値 | 683.0000 | 0.0000 | 0.0686 | 0.0051 |
| 最大値 | 1690.0000 | 0.1105 | 3.9003 | 3.6477 |
| 最小値 | 233.0000 | -0.1827 | 0.0203 | 0.0015 |
| 標準偏差 | 286.7948 | 0.0233 | 0.1249 | 0.0668 |
| 歪度 | 0.7732 | -0.1371 | 18.2170 | 45.8112 |
| 尖度 | 3.3460 | 6.7904 | 481.5358 | 2424.5612 |
| 標本数 | 3685 | 3684 | 3663 | 3663 |

提案された HAR (Heterogeneous AutoRegressive) モデルは, 単純な線形回帰の枠組みにおいて, 異なる周期において標本されたボラティリティ測度を組み合わせる. 日次ボラティリティ過程 v_t に対する標準的 HAR モデルは

$$v_t = \alpha_0 + \omega_1 v_{t-1}^{(d)} + \omega_2 v_{t-1}^{(w)} + \omega_3 v_{t-1}^{(m)} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

によって与えられる。ここで $v_{t-1}^{(d)} = v_{t-1}$ は日次、 $v_{t-1}^{(w)}$ および $v_{t-1}^{(m)}$ は、それぞれ週次平均と月次平均ボラティリティ測度である。これらは、 $v_t^{(w)} = 5^{-1} \sum_{i=1}^5 v_{t-i+1}$ and $v_t^{(m)} = 22^{-1} \sum_{i=1}^{22} v_{t-i+1}$ として定義される。HAR モデルは、観測できない真の v_t を実現ボラティリティ rv_t で代用することにより、OLS 回帰の枠組みで推定できる。ボラティリティ成分に経済学的解釈を与えるとすれば、 $v^{(m)}$ はファンダメンタルなマクロ経済に起因する長期的な不確実性因子、 $v^{(w)}$ は新しくもたらされた情報が市場に浸透するまでの中期的な不確実性因子、 $v^{(d)}$ は投機的活動を反映する短期的な不確実性因子とそれぞれみなすことができるかもしれない (Golosnoy et al., 2014)。

次に、Golosnoy et al. (2014) において 1/3 モデルと呼ばれた HAR モデルの定数項を 0 とし、その他 3 つのパラメータを全て 1/3 の値に固定したモデル

$$v_t = \frac{1}{3}v_{t-1}^{(d)} + \frac{1}{3}v_{t-1}^{(w)} + \frac{1}{3}v_{t-1}^{(m)} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

を、本稿内では ES0 モデルと言及する。この ES0 モデルは直接的に経験類似度を用いてはいないが、経験類似度 ES1 モデルのパラメータを $\theta[v_{t-1}, v_{t-2}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] = \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}] = 1/3$ とした場合と考え ES の名前を冠している。ES0 モデルは、上述のようにパラメータが 1/3 と定数であるのでデータから値を推定する必要が無く、予測力評価の段階においてのみ登場する。

3 つ目のモデルは、本稿において中心的役割を果たす経験類似度モデル ES1 である。ES1 モデルは、経験類似度の概念により、直接的に観測された過去のデータに基づき、ボラティリティモデル成分の予測値に対する重みを推定する。モデル集合 \mathcal{H} に属するモデル h から得られるボラティリティの予測値を $v_t^{(h)}$ によって表すならば、ボラティリティ予測のための経験類似度モデルは

$$v_t = \sum_{h \in \mathcal{H}} \phi[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] \cdot v_{t-1}^{(h)} + \varepsilon_t = \frac{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] \cdot v_{t-1}^{(h)}}{\sum_{h \in \mathcal{H}} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}]} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

と与えられる。ここで $\sum_{h \in \mathcal{H}} \phi[v_{t-1}, v_{t-2}^{(h)}] \equiv 1$ であり、 $\theta[v_t, v_{t-1}^{(h)}] = e^{-w_h(v_t - v_{t-1}^{(h)})^2}$ によって定義される類似度関数は、現在のボラティリティの状態 v_t と h 番目のモデルの予測値 $v_{t-1}^{(h)}$ 間の距離を計測する。こうして、重み $\phi[v_t, v_{t-1}^{(h)}] \in [0, 1]$ とモデルの予測値 $v_{t-1}^{(h)}$ を用いることにより v_{t+1} が予測できる。

本稿では Golosnoy et al. (2014) と同様、ベンチマークとして HAR モデルを用いるので、その 3 つの成分と経験類似度モデルを組み合わせることに焦点を合わせる。ここでの目的は、現在のボラティリティと、異なる期間で標本されたボラティリティの加重和との相対距離が、どのように観測された過去のデータから決定されるかを評価することにある。つまり、異なる投資期間を持つ経済主体がこれらのボラティリティ過程の重みについて、どのように評価しているのか経験類似度を用いて分析したい。今後 ES1 モデルとして表される HAR 成分を持つ経験類似度モデルは

$$(3.2) \quad v_t = \frac{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}]v_{t-1} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}]v_{t-1}^{(w)} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}]v_{t-1}^{(m)}}{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}]} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim (0, \sigma^2)$$

と与えられる。ここで

$$\begin{aligned} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}] &= \exp(-\omega_1(v_{t-1} - v_{t-2})^2) \\ \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] &= \exp(-\omega_2(v_{t-1} - v_{t-2}^{(w)})^2) \\ \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}] &= \exp(-\omega_3(v_{t-1} - v_{t-2}^{(m)})^2) \end{aligned}$$

である。

ES1 モデルは、異なるボラティリティの単純な重み付き平均を仮定している予測モデルの組合せとして解釈できる。成分 v_{t-1} は 1 日前のボラティリティから得られる予測値である一方、 $v_{t-1}^{(w)}$ と $v_{t-1}^{(m)}$ 直近 1 週間および 1 ヶ月における移動平均の予測値に他ならない。結局のところ、(3.2)式における日次ボラティリティ v_t は、過去の日次実現ボラティリティの加重平均として表される。(3.2)式より明らかなように、ES1 モデルは HAR モデルよりパラメータが 1 つ少ない、すなわち定数項が無いことに特徴がある。

次に、前節で導入した RQ を組み入れた 3 つのモデルを紹介する。まず、Bollerslev et al. (2016) は IV における動的依存関係を、次のようなラグ次数 1 の自己回帰モデルによって記述できると仮定した。

$$IV_t = \phi_0 + \phi_1 IV_{t-1} + u_t$$

ここでは、 $u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$ であり、 IV_t の観測誤差 $\eta_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\eta^2)$ とする。この観測誤差 η_t を考慮した IV_t の AR(1) モデルは

$$(3.3) \quad IV_t + \eta_t = \beta_0 + \beta_1 (IV_{t-1} + \eta_{t-1}) + u_t$$

となる。 RV に対して自己回帰モデルを適用することの形式的な理論的正当化は Andersen et al. (2003) によって与えられた。また Andersen et al. (2004) は、 RV に対して連続時間に基づくモデルではなく単純な離散時間自己回帰モデルを用いる方が IV の予測力が顕著に向上することを示している。もし u_t と η_t が両方共 i.i.d. であると仮定するならば、 $\text{Cov}(RV_t, RV_{t-1}) = \phi_1 \text{Var}(IV_t)$ および $\text{Var}(RV_t) = \text{Var}(IV_t) + 2\Delta IQ$ が成り立つので、 β_1 は

$$\beta_1 = \phi_1 \left(1 + \frac{2\Delta IQ}{\text{Var}(IV_t)} \right)^{-1}$$

と表すことができる。したがって、いわゆる希釈バイアス (attenuation bias) により、 RV の係数 β_1 は IV の係数 ϕ_1 よりも小さい値となる。希釈バイアスの詳細については、例えば Wooldridge (2015) が詳しい。(3.2)式より、 β_1 は観測誤差の分散 $2\Delta IQ$ に依存して変化する。つまり、もし $2\Delta IQ = 0$ ならば $\beta_1 = \phi_1$ となるが、もし $2\Delta IQ$ が大きければ β_1 は 0 に近づく。一般的には、(3.2)式の β_1 は観測誤差の分散が定数であるという仮定に基づいているが、実際には RV の推定誤差に関する分散は時間と共に変化する。 IQ が小さい日には、 RV は (3.1)式より IV に対して高い予測力を持ち、逆に IQ が大きい日では、 RV は IV に対して相対的に弱い予測力しか持たない。よって、AR の係数が一定であると仮定するよりも、 $\beta_{1,t}$ といった時間と共に変化する自己回帰係数を仮定する方がより現実的である。

ここで (3.1) 式の $RV_t = IV_t + \eta_t$ という関係から、上の (3.3) 式は、 RV についての AR(1) モデル $RV_t = \beta_0 + \beta_1 RV_{t-1} + u_t$ と考えることができる。この定式化において、 β_1 を $IQ^{1/2}$ の推定値 $RQ_{t-1}^{1/2}$ に線形依存させることにより、 RV の AR パラメータを時間と共に変化させることができる。

$$RV_t = \beta_0 + \underbrace{(\beta_1 + \beta_{1Q} RQ_{t-1}^{1/2})}_{\beta_{1,t}} RV_{t-1} + u_t$$

この定式化は、AutoRegressive Quarticity (ARQ) モデルと呼ばれる。このモデルは、標準的な最小二乗法を用いることにより容易に推定でき、自己回帰パラメータ $\beta_{1,t}$ の値が、 IV_t の観測誤差 η の分散の推定値である RQ と共に変化する。もし RQ が定数であるならば、ARQ モデルは標準的な AR(1) モデルに帰着することは自明である。

しかし、(3.3)式のような AR(1) モデルでは単純過ぎて、大部分の RV 系列に存在する長期依存構造を満足に記述することができない可能性がある。そこで、Bollerslev et al. (2016) は、

上で解説した Corsi (2009) の HAR モデルを用いて, ARQ モデルを次のように拡張した.

$$RV_t = \beta_0 + \underbrace{(\beta_1 + \beta_{1Q} RQ_{t-1}^{1/2})}_{\beta_{1,t}} RV_{t-1} + \beta_2 RV_{t-1|t-5} + \beta_3 RV_{t-1|t-22} + u_t$$

このモデルは, Heterogeneous AutoRegression Quarticity (HARQ) モデルと呼ばれる. ここでは, 日次の RV の係数のみ $RQ^{1/2}$ の関数として時間と共に変化させている. 週次, 月次の RV の時変係数を含むモデルについては, Bollerslev et al. (2016) を参照していただきたい. さらに, 自然な拡張として上述の HARQ モデルの説明変数に $RQ_{t-1|t-5}^{1/2}, RQ_{t-1|t-22}^{1/2}$ を加えることも考えられる. しかし, 先行研究 Bollerslev et al. (2016) において, HARQ-Full モデルと参照されているこのモデルは, 週次, 月次の観測誤差の分散を正確に推定することは実際上困難であるため, 上述の HARQ モデルと比較して一概に予測力が向上するわけではないという結果を報告している. その結果を踏まえ, 本論文では HARQ-Full モデルの分析は割愛した.

ところで, Golosnoy et al. (2014) によれば, ES モデルは, どんなボラティリティ予測子の組合せに対しても用いることができる. そこで, 過去の日次ボラティリティ v_{t-1} , HAR 予測子 $v_{t-1}^{(har)}$, および上述の HARQ 予測値 $v_{t-1}^{(harq)}$ を組み合わせた新しいモデルを考えることも可能となる. このモデルをここでは ESQ モデルと呼ぶ. その表現は

$$v_t = \frac{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}]v_{t-1} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(har)}]v_{t-1}^{(har)} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(harq)}]v_{t-1}^{(harq)}}{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(har)}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(harq)}]} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim (0, \sigma^2).$$

として与えられる. 先に定義したように, ここでは

$$\begin{aligned} \theta[v_{t-1}, v_{t-2}] &= \exp(-\omega_1(v_{t-1} - v_{t-2})^2) \\ \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(har)}] &= \exp(-\omega_2(v_{t-1} - v_{t-2}^{(har)})^2) \\ \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(harq)}] &= \exp(-\omega_3(v_{t-1} - v_{t-2}^{(harq)})^2) \end{aligned}$$

である.

また, モデル比較の分析の一貫性の観点から, 日次ボラティリティ v_t と HAR 予測子 $v_t^{(har)}$ のみを組み合わせたモデル

$$v_t = \frac{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}]v_{t-1} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(har)}]v_{t-1}^{(har)}}{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(har)}]} + \epsilon_t$$

および $v_t, v_t^{(w)}, v_t^{(m)}, q_t = RQ_t^{1/2} RV_t$ をモデルを介さずそのまま組み合わせたモデル

$$v_t = \frac{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}]v_{t-1} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}]v_{t-1}^{(w)} + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}]v_{t-1}^{(m)} + \theta[v_{t-1}, q_{t-2}]q_{t-1}}{\theta[v_{t-1}, v_{t-2}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(w)}] + \theta[v_{t-1}, v_{t-2}^{(m)}] + \theta[v_{t-1}, q_{t-2}]} + \epsilon_t$$

ここで

$$\theta[v_{t-1}, q_{t-2}] = \exp(-\omega_4(v_{t-1} - q_{t-2})^2)$$

についても分析を行う. これらのモデルをここでは ES1a および ES1b モデルと呼ぶ.

また, 分析の中心となる上述の 5 つのモデルに加え, 予測力のベンチマークとして AR(1) モデル

$$v_t = \alpha_0 + \omega_1 v_{t-1} + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \stackrel{iid}{\sim} (0, \sigma^2)$$

を導入し, さらに GARCH 型 8 モデル, GARCH(1,1), GJR(1,1,1), EGARCH(1,1,1), IGARCH(1,1), AGARCH(1,1), NAGARCH(1,1), APARCH(1,1,1), ZARCH(1,1,1) を分析対象に加える. ただし, GARCH 型 8 モデルに関しては, 直接 RV_t 系列を用い推定予測を行うの

ではなく、株価の対数収益率 r_t を用いての推定予測であるため、他の AR1, HAR, ES0, ES1, ES1a, ES1b, ARQ, HARQ, ESQ の各モデルに比べて圧倒的に不利な状況設定にある。そのため、ここでの GARCH 型 8 モデルと他の 9 モデルとの比較分析についての結果は、あくまで参考としていただきたいが、GARCH 型 8 モデル内での予測力比較は有益な情報となるであろう。

3.3 推定

本節では、前節で導入した標本期間 1999 年 1 月 4 日から 2013 年 12 月 30 日までの株価指数 6 銘柄、個別 24 銘柄の株価データを用い推定と予測を行う。まず、推定と予測に用いられた期間であるが、表 4 において示されているように、1999 年から 2013 年までのインサンプル、アウトオブサンプルを含む計 225 の推定予測期間を分析対象とする。ここでは紙幅の関係上、西暦の上 2 桁は省略して表記している。この 225 通りの組合せの内訳は、インサンプル 120 通り、アウトオブサンプル 105 通りである。さらに、インサンプルはそれぞれ 1 年間のインサンプル 15 通り、2 年以上 5 年未満のインサンプル 50 通り、5 年以上 15 年以下のインサンプル 55 通りに推定期間を分割している。アウトオブサンプルも同様に、推定期間 1 年のアウトオブサンプル 14 通り、推定期間 2 年以上 5 年未満のアウトオブサンプル 46 通り、推定期間 5 年以上 14 年以下のアウトオブサンプル 45 通りに推定期間を分割している。なお、アウトオブサンプルの予測期間に関しては、すべて推定期間の直近 1 年間のみとしている。

また、推定期間において外れ値が存在する場合、非線形モデルである ES1, ES1a, ES1b, ESQ モデルはその影響を受けやすい。そこで、ここでは RV 系列に Cook の距離を用いてその外れ値を検出し、モデルを推定する際にはその外れ値を除外したデータを用いている。外れ値が検出される頻度については、各銘柄ごとに差はあるものの概ね 5% 程度(最小値: 3.2%, 最大値: 6.6%)であった。Cook の距離の定義については例えば 竹内 他 (2000) が詳しい。

なお、今回のパラメータ推定に関して、ES1, ES1a, ES1b, HAR, AR1, ARQ, HARQ, ESQ の各モデルについては MATLAB の Statistics and Machine Learning Toolbox (<http://jp.mathworks.com/help/stats/>) を用い、GARCH 型 8 モデルについては Kevin Sheppard 氏が公開している MFE Toolbox (https://www.kevinsheppard.com/MFE_Toolbox) を用いている。

3.4 予測

本節では、本稿の中心的貢献となる経験類似度モデルとその他時系列モデルとのボラティリティ予測力の比較分析を行う。手順としては、まず表 4 で示された推定期間すべてにおいて分析対象の 30 銘柄の時系列データを用い、ES0 モデルを除く 16 モデルのパラメータを推定する。そして、それらのパラメータを用い、表 4 で対応する予測期間において、以下で述べる誤差関数を用いモデル間の予測力の比較を行う。なお、ES1a および ES1b モデルについては、紙幅の関係上、後述する MCS によるモデル順位と MZ 回帰の自由度調整済み決定係数の結果のみ掲載している。

アウトオブサンプルの予測値については、例えば推定期間 99-99 で 00-00 の場合、1999 年 1 年間のデータを用いてモデルのパラメータ推定し、その推定値を用い 2000 年の RV に対して 1 日ずつ 1 期先予測を 1 年分繰り返している。ただし、ここではパラメータ推定を逐次的に 1 日ごとに行うローリングウィンドウ予測を行っていない。その理由としては、次の 2 点が挙げられる。(1) まず一点目としては、単純に計算量が大きすぎることである。本研究での目標は、複数(15 種類)のモデルに対する多様な(30 種類の)株式指数と個別銘柄の長短期(225 通りの推定予測期間)に対するボラティリティの予測力比較にある。そのため、単純計算で $15 \times 30 \times 225 = 101250$ もの組合せに対して、1 日ごとにパラメータ推定を行い 1 日先予測を行うことは計算時間を考

表 4. 実証研究における全推定予測期間.

| 推定 | 予測 | 推定 | 予測 | 推定 | 予測 | 推定 | 予測 | 推定 | 予測 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 99-99 | 99-99 | 00-08 | 00-08 | 02-06 | 07-07 | 04-09 | 04-09 | 07-09 | 07-09 |
| 99-99 | 00-00 | 00-08 | 09-09 | 02-07 | 02-07 | 04-09 | 10-10 | 07-09 | 10-10 |
| 99-00 | 99-00 | 00-09 | 00-09 | 02-07 | 08-08 | 04-10 | 04-10 | 07-10 | 07-10 |
| 99-00 | 01-01 | 00-09 | 10-10 | 02-08 | 02-08 | 04-10 | 11-11 | 07-10 | 11-11 |
| 99-01 | 99-01 | 00-10 | 00-10 | 02-08 | 09-09 | 04-11 | 04-11 | 07-11 | 07-11 |
| 99-01 | 02-02 | 00-10 | 11-11 | 02-09 | 02-09 | 04-11 | 12-12 | 07-11 | 12-12 |
| 99-02 | 99-02 | 00-11 | 00-11 | 02-09 | 10-10 | 04-12 | 04-12 | 07-12 | 07-12 |
| 99-02 | 03-03 | 00-11 | 12-12 | 02-10 | 02-10 | 04-12 | 13-13 | 07-12 | 13-13 |
| 99-03 | 99-03 | 00-12 | 00-12 | 02-10 | 11-11 | 04-13 | 04-13 | 07-13 | 07-13 |
| 99-03 | 04-04 | 00-12 | 13-13 | 02-11 | 02-11 | 05-05 | 05-05 | 08-08 | 08-08 |
| 99-04 | 99-04 | 00-13 | 00-13 | 02-11 | 12-12 | 05-05 | 06-06 | 08-08 | 09-09 |
| 99-04 | 05-05 | 01-01 | 01-01 | 02-12 | 02-12 | 05-06 | 05-06 | 08-09 | 08-09 |
| 99-05 | 99-05 | 01-01 | 02-02 | 02-12 | 13-13 | 05-06 | 07-07 | 08-09 | 10-10 |
| 99-05 | 06-06 | 01-02 | 01-02 | 02-13 | 02-13 | 05-07 | 05-07 | 08-10 | 08-10 |
| 99-06 | 99-06 | 01-02 | 03-03 | 03-03 | 03-03 | 05-07 | 08-08 | 08-10 | 11-11 |
| 99-06 | 07-07 | 01-03 | 01-03 | 03-03 | 04-04 | 05-08 | 05-08 | 08-11 | 08-11 |
| 99-07 | 99-07 | 01-03 | 04-04 | 03-04 | 03-04 | 05-08 | 09-09 | 08-11 | 12-12 |
| 99-07 | 08-08 | 01-04 | 01-04 | 03-04 | 05-05 | 05-09 | 05-09 | 08-12 | 08-12 |
| 99-08 | 99-08 | 01-04 | 05-05 | 03-05 | 03-05 | 05-09 | 10-10 | 08-12 | 13-13 |
| 99-08 | 09-09 | 01-05 | 01-05 | 03-05 | 06-06 | 05-10 | 05-10 | 08-13 | 08-13 |
| 99-09 | 99-09 | 01-05 | 06-06 | 03-06 | 03-06 | 05-10 | 11-11 | 09-09 | 09-09 |
| 99-09 | 10-10 | 01-06 | 01-06 | 03-06 | 07-07 | 05-11 | 05-11 | 09-09 | 10-10 |
| 99-10 | 99-10 | 01-06 | 07-07 | 03-07 | 03-07 | 05-11 | 12-12 | 09-10 | 09-10 |
| 99-10 | 11-11 | 01-07 | 01-07 | 03-07 | 08-08 | 05-12 | 05-12 | 09-10 | 11-11 |
| 99-11 | 99-11 | 01-07 | 08-08 | 03-08 | 03-08 | 05-12 | 13-13 | 09-11 | 09-11 |
| 99-11 | 12-12 | 01-08 | 01-08 | 03-08 | 09-09 | 05-13 | 05-13 | 09-11 | 12-12 |
| 99-12 | 99-12 | 01-08 | 09-09 | 03-09 | 03-09 | 06-06 | 06-06 | 09-12 | 09-12 |
| 99-12 | 13-13 | 01-09 | 01-09 | 03-09 | 10-10 | 06-06 | 07-07 | 09-12 | 13-13 |
| 99-13 | 99-13 | 01-09 | 10-10 | 03-10 | 03-10 | 06-07 | 06-07 | 09-13 | 09-13 |
| 00-00 | 00-00 | 01-10 | 01-10 | 03-10 | 11-11 | 06-07 | 08-08 | 10-10 | 10-10 |
| 00-00 | 01-01 | 01-10 | 11-11 | 03-11 | 03-11 | 06-08 | 06-08 | 10-10 | 11-11 |
| 00-01 | 00-01 | 01-11 | 01-11 | 03-11 | 12-12 | 06-08 | 09-09 | 10-11 | 10-11 |
| 00-01 | 02-02 | 01-11 | 12-12 | 03-12 | 03-12 | 06-09 | 06-09 | 10-11 | 12-12 |
| 00-02 | 00-02 | 01-12 | 01-12 | 03-12 | 13-13 | 06-09 | 10-10 | 10-12 | 10-12 |
| 00-02 | 03-03 | 01-12 | 13-13 | 03-13 | 03-13 | 06-10 | 06-10 | 10-12 | 13-13 |
| 00-03 | 00-03 | 01-13 | 01-13 | 04-04 | 04-04 | 06-10 | 11-11 | 10-13 | 10-13 |
| 00-03 | 04-04 | 02-02 | 02-02 | 04-04 | 05-05 | 06-11 | 06-11 | 11-11 | 11-11 |
| 00-04 | 00-04 | 02-02 | 03-03 | 04-05 | 04-05 | 06-11 | 12-12 | 11-11 | 12-12 |
| 00-04 | 05-05 | 02-03 | 02-03 | 04-05 | 06-06 | 06-12 | 06-12 | 11-12 | 11-12 |
| 00-05 | 00-05 | 02-03 | 04-04 | 04-06 | 04-06 | 06-12 | 13-13 | 11-12 | 13-13 |
| 00-05 | 06-06 | 02-04 | 02-04 | 04-06 | 07-07 | 06-13 | 06-13 | 11-13 | 11-13 |
| 00-06 | 00-06 | 02-04 | 05-05 | 04-07 | 04-07 | 07-07 | 07-07 | 12-12 | 12-12 |
| 00-06 | 07-07 | 02-05 | 02-05 | 04-07 | 08-08 | 07-07 | 08-08 | 12-12 | 13-13 |
| 00-07 | 00-07 | 02-05 | 06-06 | 04-08 | 04-08 | 07-08 | 07-08 | 12-13 | 12-13 |
| 00-07 | 08-08 | 02-06 | 02-06 | 04-08 | 09-09 | 07-08 | 09-09 | 13-13 | 13-13 |

えると現実的ではない。(2)また一点目と関連するが、ここでの目標は2, 3のモデル間における厳密な予測力の比較ではなく、多種多様なデータと推定予測期間に対するモデルの順位付けである。よって、膨大な計算時間を費やしローリングウィンドウ予測を実行し結果を出すより

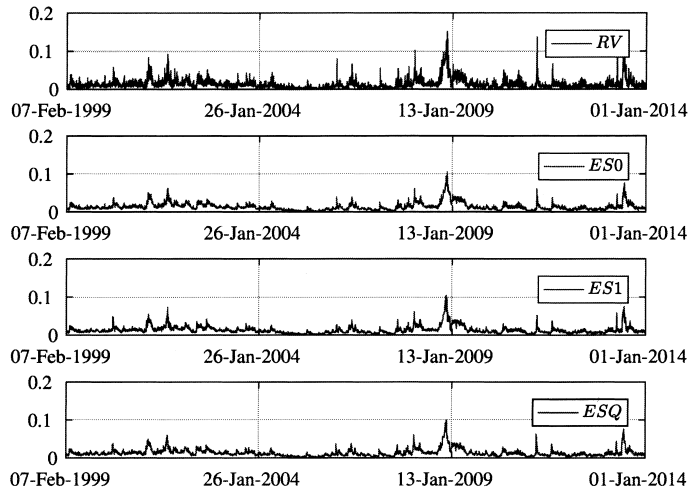


図 3. RV と各モデルの予測値(日経平均).

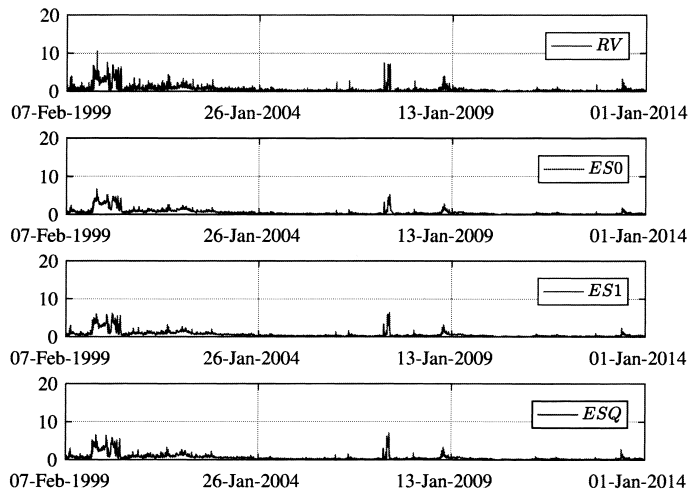


図 4. RV と各モデルの予測値(KDDI).

も、パラメータ推定値は固定し 1 期先予測を行なった方が費用対効果で考えるならば効率的な分析といえる。

図 3 および図 4 は、日経平均と KDDI の 1999 年 2 月から 2013 年 12 月までのインサンプルにおける RV と $ES0$, $ES1$, HAR , $HARQ$, ESQ の各モデルから計算されたボラティリティの予測値である。期間の開始が 1999 年 2 月からとなっているのは、 HAR モデルが直近 22 日間のボラティリティの平均値を予測に必要としているため、最初の 22 日間の予測値は除外しているからである。まず、図 3 を見ると、2008 年後半におけるリーマン・ショックによる大きな変動が目立つ。この変動における RV と各モデルによる予測値を比較すると、 $ES0$, $ES1$, HAR , $HARQ$, ESQ 共にボラティリティを過小評価していることが分かる。全体的に見ても、リーマン・ショック以外の期間においても RV より各モデルによる予測値が低い値となっていること

が分かる。次に、図 4 を見ると、ボラティリティの動きが日経平均と KDDI では大きく異なっていることが分かる。特に 1999 年から 2000 年にかけての長期間のボラティリティクラスタリングが目立つ。これは、1999 年 12 月の KDD と DDI と IDO が合併を正式発表してから、2000 年 10 月の実際の実際の合併までの期間がほぼ該当する。個別銘柄の動きは、各銘柄固有の事象がその動きに影響を及ぼすので、株価指数とは異なる動きになることは興味深い。RV と各モデルによる予測値を比較すると、日経平均のグラフと同様、ES0, ES1, HAR, HARQ, ESQ 共に、全体的にボラティリティを過小評価していることが分かる。日経平均のグラフにおける RV の y 軸の目盛が 0.2 までだったことを考えると、株価指数に比べて個別銘柄のボラティリティは非常に高い値となる場合があることが分かる。

3.4.1 誤差関数による基本統計量の分析

では、上で見た各モデルによる予測値の中で、どの予測値が最も高い予測力を持っているだろうか。この疑問に答えるため、ここでは Patton (2011) によって提案された誤差関数のクラスを利用し、予測力比較を行う。この誤差関数は、実現ボラティリティの代理変数におけるノイズの存在に頑健であり、他の予測モデルの順位付けに利用することができる。ある実数 b によってパラメータ化することにより、この誤差関数のクラスは

$$\mathcal{L}(rv, \hat{v}, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b+1)(b+2)}(rv^{b+2} - \hat{v}^{b+2}) - \frac{1}{b+1}\hat{v}^{b+1}(rv - \hat{v}) & \text{for } b \notin \{-1, -2\} \\ \hat{v} - rv + rv \cdot \log(rv/\hat{v}) & \text{for } b = -1 \\ \frac{rv}{\hat{v}} - \log \frac{rv}{\hat{v}} - 1 & \text{for } b = -2 \end{cases}$$

のように定義される。ここで rv は、ボラティリティ測度であり、 \hat{v} は対応する予測値である。この誤差関数は $b = -2$ のとき 擬似尤度誤差 (Quasi-LIKelihood, QLIKE) に対応する一方、 $b = 0$ のときは平均自乗誤差 (Mean Squared Error, MSE) 測度に対応している。Patton and Sheppard (2009) によれば、尤度に基づく誤差関数である QLIKE は、ノイズに対して頑健であるため、MSE と比較してボラティリティの予測力を比較する上でより好ましい誤差関数である。また、大きい正値の b に対しては、この誤差関数は真値の過大推定により重く罰則を与える一方、負値の b に対しては、真値を過小評価するほど誤差関数の値が大きくなる (Patton, 2011)。

本研究では、 $b \in \{1, 0, -1, -2\}$ という 4 種類の値を用いる。実際の計算された誤差関数の値は、表 4 における 225 通りの推定予測期間に銘柄数 30 と上述の 4 種類の b を組合せた数 $225 \times 30 \times 4 = 27000$ に及ぶ。表 5 は、これらの誤差関数のうち $b = -2$ つまり QLIKE を用いて算出された平均誤差の値の一部である。この表を見ると異なる推定予測期間では、結果が変わっていることが分かる。また、27000 通りにも及ぶ誤差関数の結果に対して、これらの値を一つ一つ比較しモデルを評価することは困難である。

そこで、ここでは推定予測期間をインサンプルとアウトオブサンプルに大別し、それらの各基本統計量を見ることにより全体的な誤差関数値の特徴を捉えることにする。表 6 はインサンプル、表 7 はアウトオブサンプルにおける各誤差関数の基本統計量である。まず平均値に注目すると、インサンプルの表 6 から、 $b = 1$ では ES1、それ以外の b では HARQ が最も低い値となっており、逆に最も高い値は $b = 0$ では ARQ、それ以外では AR1 となっている。この表から、インサンプルにおける誤差の平均値は、全体的な傾向として $\text{HARQ} < \text{ES1} < \text{HAR} \approx \text{ESQ} < \text{ES0} < \text{ARQ} < \text{AR1}$ となっていることが分かる。また、アウトオブサンプルの表 6 を見ると、 $b = 0$ では ES1、それ以外の b では ES0 が最も低い値となっており、逆に最も高い値は $b = 1$ では ARQ、それ以外では AR1 となっている。この表から、アウトオブサンプルにおける誤差の平均値は、全体的な傾向として $\text{ES0} < \text{ES1} < \text{HAR} \approx \text{HARQ} \approx \text{ESQ} < \text{ARQ} < \text{AR1}$ となっていることが分かる。次に最大値に着目すると、表 6 および表 7 共に、 b の値によって結果がまちまちであるが、一

表 5. 誤差関数 ($b = -2$) の結果 (抜粋).

| 日経平均株価 | 推定 | 予測 | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 99-11 | 99-11 | 0.156 | 0.156 | 0.154 | 0.186 | 0.180 | 0.153 | 0.153 |
| | 99-11 | 12-12 | 0.186 | 0.185 | 0.179 | 0.201 | 0.203 | 0.183 | 0.173 |
| | 99-12 | 99-12 | 0.159 | 0.159 | 0.156 | 0.187 | 0.183 | 0.156 | 0.155 |
| | 99-12 | 13-13 | 0.205 | 0.207 | 0.203 | 0.220 | 0.230 | 0.205 | 0.202 |
| | 99-13 | 99-13 | 0.162 | 0.162 | 0.160 | 0.190 | 0.186 | 0.160 | 0.159 |
| アステラス製薬 | 推定 | 予測 | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| | 99-11 | 99-11 | 0.025 | 0.025 | 0.025 | 0.032 | 0.032 | 0.025 | 0.025 |
| | 99-11 | 12-12 | 0.009 | 0.009 | 0.011 | 0.025 | 0.024 | 0.011 | 0.010 |
| | 99-12 | 99-12 | 0.024 | 0.024 | 0.024 | 0.031 | 0.030 | 0.024 | 0.024 |
| | 99-12 | 13-13 | 0.028 | 0.028 | 0.028 | 0.031 | 0.030 | 0.028 | 0.028 |
| | 99-13 | 99-13 | 0.024 | 0.024 | 0.023 | 0.030 | 0.029 | 0.023 | 0.024 |
| コマツ | 推定 | 予測 | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| | 99-11 | 99-11 | 0.176 | 0.175 | 0.173 | 0.223 | 0.211 | 0.171 | 0.171 |
| | 99-11 | 12-12 | 0.107 | 0.107 | 0.116 | 0.212 | 0.182 | 0.114 | 0.107 |
| | 99-12 | 99-12 | 0.174 | 0.173 | 0.170 | 0.219 | 0.208 | 0.168 | 0.169 |
| | 99-12 | 13-13 | 0.240 | 0.246 | 0.263 | 0.373 | 0.335 | 0.257 | 0.255 |
| | 99-13 | 99-13 | 0.180 | 0.179 | 0.177 | 0.227 | 0.214 | 0.175 | 0.176 |
| 日立製作所 | 推定 | 予測 | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| | 99-11 | 99-11 | 0.129 | 0.128 | 0.132 | 0.187 | 0.159 | 0.128 | 0.128 |
| | 99-11 | 12-12 | 0.030 | 0.030 | 0.030 | 0.030 | 0.032 | 0.029 | 0.031 |
| | 99-12 | 99-12 | 0.123 | 0.123 | 0.126 | 0.177 | 0.151 | 0.122 | 0.123 |
| | 99-12 | 13-13 | 0.212 | 0.207 | 0.212 | 0.230 | 0.211 | 0.205 | 0.212 |
| | 99-13 | 99-13 | 0.127 | 0.127 | 0.130 | 0.179 | 0.153 | 0.126 | 0.126 |
| トヨタ自動車 | 推定 | 予測 | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| | 99-11 | 99-11 | 0.079 | 0.079 | 0.079 | 0.101 | 0.094 | 0.078 | 0.079 |
| | 99-11 | 12-12 | 0.079 | 0.079 | 0.077 | 0.100 | 0.090 | 0.077 | 0.080 |
| | 99-12 | 99-12 | 0.083 | 0.083 | 0.083 | 0.105 | 0.098 | 0.082 | 0.083 |
| | 99-12 | 13-13 | 0.102 | 0.102 | 0.105 | 0.114 | 0.088 | 0.109 | 0.097 |
| | 99-13 | 99-13 | 0.100 | 0.099 | 0.097 | 0.117 | 0.108 | 0.096 | 0.097 |

つ言えることとしては AR1 でも他のモデルに比べて違いがそれ程極端に大きくはないことが分かる。

最後に標準偏差に関して見ると、インサンプルの表 6 では、すべての b において ARQ または AR1 が最も高い値となっているが、他の ES0, ES1, HAR, HARQ, ESQ については各 b においてそれ程大きな違いは見られない。そして、アウトオブサンプルの表 6 では驚くべきことに、ES0 がすべての b において最も低い標準偏差の値となっている。前述した通り、ES0 はパラメータを推定せず、HAR の定数項以外のパラメータを $1/3$ に固定したモデルであるが、最も分散が少なく安定的にアウトオブサンプルにおいて予測できているということである。この ES0 が、アウトオブサンプル予測において威力を発揮することは、先行研究において示唆された結果と整合的である。この ES0, すなわち $1/3$ 重み付けモデルがアウトオブサンプルにおいて良好な結果を示すことは、最適ポートフォリオの構成を選択する際に、無情報重み付け $1/N$ 手法を凌駕することが難しい (DeMiguel et al., 2009) という結果を想起させる。つまり、この結果は、無情報の意思決定者が、直近の日次、週次、月次ボラティリティの総体に均等な重み付けをすることにより、次の日のボラティリティを予測する傾向にあるという直観的洞察に対応している。

表 6. 誤差関数 ($b = 1, 0, -1, -2$) の基本統計量 (インサンプル).

| $b = 1$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
|----------|---------|---------|---------|--------|--------|---------|---------|
| 平均 | 0.0145 | 0.0142 | 0.0144 | 0.0162 | 0.0156 | 0.0147 | 0.0146 |
| 中央値 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 | 0.0001 |
| 最大値 | 0.8704 | 0.9900 | 0.9717 | 0.9532 | 0.9082 | 0.9982 | 0.9041 |
| 標準偏差 | 0.0743 | 0.0734 | 0.0747 | 0.0838 | 0.0801 | 0.0766 | 0.0758 |
| 歪度 | 6.6617 | 6.9163 | 6.9393 | 6.7303 | 6.7412 | 7.0681 | 6.7948 |
| 尖度 | 51.19 | 57.44 | 57.50 | 52.10 | 52.44 | 60.28 | 54.26 |
| 標本数 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 |
| $b = 0$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.0083 | 0.0080 | 0.0080 | 0.0092 | 0.0093 | 0.0079 | 0.0080 |
| 中央値 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0004 | 0.0005 | 0.0005 | 0.0004 | 0.0004 |
| 最大値 | 0.9818 | 0.9703 | 0.9486 | 0.6279 | 0.9609 | 0.9093 | 0.9434 |
| 標準偏差 | 0.0397 | 0.0384 | 0.0381 | 0.0411 | 0.0434 | 0.0377 | 0.0384 |
| 歪度 | 10.2256 | 10.4631 | 10.2925 | 7.6756 | 9.1738 | 9.9895 | 10.1998 |
| 尖度 | 163.47 | 172.57 | 166.33 | 77.96 | 125.25 | 154.31 | 161.72 |
| 標本数 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 | 3324 |
| $b = -1$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.0110 | 0.0107 | 0.0107 | 0.0129 | 0.0125 | 0.0106 | 0.0107 |
| 中央値 | 0.0042 | 0.0041 | 0.0041 | 0.0050 | 0.0049 | 0.0041 | 0.0041 |
| 最大値 | 0.7353 | 0.7070 | 0.6926 | 0.7427 | 0.7270 | 0.6898 | 0.6713 |
| 標準偏差 | 0.0272 | 0.0262 | 0.0261 | 0.0307 | 0.0303 | 0.0259 | 0.0261 |
| 歪度 | 10.1021 | 10.0234 | 9.7591 | 8.4654 | 8.3573 | 9.7409 | 9.4669 |
| 尖度 | 188.98 | 186.43 | 177.16 | 129.45 | 125.12 | 176.75 | 162.61 |
| 標本数 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 |
| $b = -2$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.1161 | 0.1153 | 0.1148 | 0.1375 | 0.1317 | 0.1138 | 0.1139 |
| 中央値 | 0.1090 | 0.1082 | 0.1077 | 0.1287 | 0.1229 | 0.1082 | 0.1074 |
| 最大値 | 0.6328 | 0.6067 | 0.9892 | 0.9444 | 0.9738 | 0.9847 | 0.9598 |
| 標準偏差 | 0.0747 | 0.0750 | 0.0757 | 0.0857 | 0.0839 | 0.0750 | 0.0739 |
| 歪度 | 1.0967 | 1.1221 | 1.7024 | 0.9060 | 1.2516 | 1.7417 | 1.4951 |
| 尖度 | 5.8412 | 5.9414 | 13.2327 | 5.9489 | 9.2506 | 13.8119 | 11.3362 |
| 標本数 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 | 3326 |

3.4.2 モデル信頼集合に基づく比較

上で見たインサンプルとアウトオブサンプルにおける誤差関数値の基本統計量を目視することにより, その結果を判断することはあくまで便宜的であり場当たりのなやり方である. 得られた誤差関数の結果を統計的仮説検定の枠組みの上で適切に判断することにより, 各モデルの予測力の比較を行うため, ここでは Hansen et al. (2011) が提案するモデル信頼集合 (Model Confidence Set, MCS) の考え方を導入する. MCS により, 特定のモデルを前提とせず, 所与の有意水準での最良なモデルを選択することが可能となる. MCS の一般的な手順は, Hamid and Heiden (2015) に従い下記の通り解説する. まず, 候補となるモデルの組 $\mathcal{M}_0 = \{1, \dots, m_0\}$ を用意する. 本研究では $m_0 = 15$ となる. すべてのモデルの組に対して, 各モデルから得られた誤差関数 L の差分に基づきモデルの優劣を評価する. つまり, モデル i とモデル j ($i, j = 1, \dots, m_0$) および, すべての時点 $t = 1, \dots, T$ に対して

$$d_{i,j,t} = L(rv_{it}, \hat{r}\hat{v}_{it}) - L(rv_{jt}, \hat{r}\hat{v}_{jt})$$

を評価する. そして, 各 $d_{i,j,t}$ において, 帰無仮説

表 7. 誤差関数 ($b = 1, 0, -1, -2$) の基本統計量 (アウトオブサンプル).

| $b = 1$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
|----------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 平均 | 0.0026 | 0.0028 | 0.0027 | 0.0035 | 0.0040 | 0.0029 | 0.0029 |
| 中央値 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 |
| 最大値 | 0.4941 | 0.4660 | 0.5605 | 0.6676 | 0.9178 | 0.4867 | 0.5220 |
| 標準偏差 | 0.0175 | 0.0179 | 0.0185 | 0.0228 | 0.0276 | 0.0190 | 0.0192 |
| 歪度 | 14.1394 | 12.9544 | 15.3115 | 14.7657 | 17.6783 | 12.7591 | 13.4480 |
| 尖度 | 286.85 | 232.25 | 349.62 | 322.32 | 472.63 | 223.54 | 256.69 |
| 標本数 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 |
| $b = 0$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.0050 | 0.0049 | 0.0056 | 0.0063 | 0.0058 | 0.0052 | 0.0054 |
| 中央値 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0002 | 0.0003 | 0.0003 | 0.0002 | 0.0002 |
| 最大値 | 0.5086 | 0.7682 | 0.8326 | 0.8262 | 0.8362 | 0.6840 | 0.8029 |
| 標準偏差 | 0.0344 | 0.0363 | 0.0422 | 0.0432 | 0.0388 | 0.0375 | 0.0399 |
| 歪度 | 12.3288 | 15.1551 | 13.2819 | 13.7566 | 15.3827 | 14.0863 | 13.9322 |
| 尖度 | 166.77 | 264.39 | 193.23 | 212.51 | 272.53 | 220.87 | 218.47 |
| 標本数 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 | 2840 |
| $b = -1$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.0091 | 0.0096 | 0.0098 | 0.0130 | 0.0129 | 0.0101 | 0.0098 |
| 中央値 | 0.0035 | 0.0037 | 0.0039 | 0.0054 | 0.0051 | 0.0037 | 0.0037 |
| 最大値 | 0.3381 | 0.5879 | 0.4847 | 0.5723 | 0.9602 | 0.6940 | 0.5902 |
| 標準偏差 | 0.0224 | 0.0286 | 0.0264 | 0.0318 | 0.0375 | 0.0302 | 0.0280 |
| 歪度 | 10.0364 | 13.3357 | 10.7361 | 9.3700 | 12.9680 | 13.2420 | 11.8349 |
| 尖度 | 131.31 | 225.72 | 147.35 | 118.62 | 239.53 | 238.43 | 181.30 |
| 標本数 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 |
| $b = -2$ | ES0 | ES1 | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
| 平均 | 0.1225 | 0.1243 | 0.1275 | 0.1697 | 0.1624 | 0.1276 | 0.1245 |
| 中央値 | 0.1003 | 0.1016 | 0.1035 | 0.1351 | 0.1291 | 0.1016 | 0.1016 |
| 最大値 | 0.5506 | 0.7121 | 0.5686 | 0.9904 | 0.9495 | 0.8868 | 0.7665 |
| 標準偏差 | 0.1004 | 0.1028 | 0.1042 | 0.1415 | 0.1367 | 0.1071 | 0.1026 |
| 歪度 | 1.2581 | 1.3651 | 1.2641 | 1.4917 | 1.5307 | 1.5091 | 1.3682 |
| 尖度 | 4.4922 | 5.2335 | 4.4802 | 5.6011 | 6.0364 | 6.4795 | 5.3569 |
| 標本数 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 | 2841 |

$$H_0 : E[d_{ij,t}] = 0, \quad \forall i, j \in \mathcal{M}, \quad i > j$$

を, モデル集合 $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_0$ に対して検定する. 初期値は $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0$ である. もし帰無仮説 H_0 が所与の有意水準 (たとえば 10%) で棄却されるならば, 予測力が最も低いモデルがこのモデル集合から除外される. この方法を, H_0 が棄却できなくなるまで継続する. ここでは Hansen et al. (2011) に従い, H_0 を評価するために以下のような範囲統計量を用いる.

$$T_{R,k} = \max_{i,j \in \mathcal{M}} |t_{ij}| = \max_{i,j \in \mathcal{M}} \frac{|\bar{d}_{ij}|}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\bar{d}_{ij})}}$$

ここで $\bar{d}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{ij}$ および $\widehat{\text{var}}(\bar{d}_{ij})$ は, ブロック・ブートストラップ法を用いることにより求められる. モデル集合 \mathcal{M} から除外される最も良くない予測力を持つモデル i^* は

$$i^* = \arg \max_{i \in \mathcal{M}} \frac{\bar{d}_i}{\sqrt{\widehat{\text{var}}(\bar{d}_i)}}$$

によって選ばれる. ここで $\bar{d}_i = \frac{1}{m-1} \sum_{j \in \mathcal{M}} \bar{d}_{ij}$ であり, m はモデル集合 \mathcal{M} に含まれるモデル

表 8. MCS によるモデル順位(日経平均, 抜粋).

| 推定期間 | 予測期間 | 1st | 2nd | 3rd | 4th | 5th | 6th |
|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1999-2004 | 2005-2005 | ES0 (1.000) | ES1 (0.945) | ES1b (0.572) | ESQ (0.141) | ES1a (0.053) | HARQ (0.024) |
| 2001-2004 | 2005-2005 | ES0 (1.000) | ES1 (0.066) | ES1b (0.047) | ESQ (0.047) | ES1a (0.047) | HARQ (0.047) |
| 2002-2003 | 2004-2004 | ES0 (1.000) | ES1b (0.226) | ES1 (0.226) | ESQ (0.203) | ES1a (0.160) | HAR (0.057) |
| 推定期間 | 予測期間 | 1st | 2nd | 3rd | 4th | 5th | 6th |
| 2000-2004 | 2005-2005 | ES1 (1.000) | ES0 (0.850) | ESQ (0.142) | ES1a (0.090) | ES1b (0.090) | HARQ (0.029) |
| 2001-2002 | 2003-2003 | ES1 (1.000) | ES1b (0.179) | ES0 (0.179) | ESQ (0.179) | ES1a (0.176) | HAR (0.097) |
| 2008-2008 | 2009-2009 | ES1 (1.000) | ES0 (0.816) | ES1b (0.313) | ESQ (0.313) | HAR (0.003) | ES1a (0.003) |
| 推定期間 | 予測期間 | 1st | 2nd | 3rd | 4th | 5th | 6th |
| 1999-2009 | 2010-2010 | HAR (1.000) | ES1b (0.939) | ES1 (0.250) | ESQ (0.250) | ES0 (0.225) | HARQ (0.017) |
| 2002-2009 | 2010-2010 | HAR (1.000) | ESQ (0.713) | ES0 (0.672) | HARQ (0.007) | ES1b (0.007) | ES1 (0.007) |
| 2009-2011 | 2012-2012 | HAR (1.000) | ESQ (0.498) | HARQ (0.438) | ES1b (0.438) | ES1 (0.135) | ES1a (0.135) |
| 推定期間 | 予測期間 | 1st | 2nd | 3rd | 4th | 5th | 6th |
| 1999-2006 | 2007-2007 | HARQ (1.000) | ESQ (0.924) | HAR (0.257) | ES1 (0.104) | ES0 (0.104) | ES1a (0.104) |
| 2001-2006 | 2007-2007 | HARQ (1.000) | ESQ (0.835) | HAR (0.388) | ES1a (0.388) | ES1b (0.388) | ES1 (0.388) |
| 2001-2012 | 2013-2013 | HARQ (1.000) | ESQ (0.963) | ES1a (0.963) | ARQ (0.963) | HAR (0.555) | ES1b (0.555) |
| 推定期間 | 予測期間 | 1st | 2nd | 3rd | 4th | 5th | 6th |
| 1999-2007 | 1999-2007 | ESQ (1.000) | HARQ (0.506) | HAR (0.391) | ES1 (0.034) | ES0 (0.028) | ES1a (0.001) |
| 2000-2007 | 2000-2007 | ESQ (1.000) | HARQ (0.340) | HAR (0.288) | ES1 (0.067) | ES1a (0.004) | ES0 (0.004) |
| 2001-2004 | 2001-2004 | ESQ (1.000) | HARQ (0.692) | HAR (0.692) | ES1a (0.044) | ES0 (0.044) | ES1b (0.044) |

の数である。本研究では、ブロックの長さは 15 とした 10000 回の繰り返しのブロック・ブートストラップ法を実行している。有意水準については 90% に設定し、実際の分析には前述の MFE Toolbox を用いている。

では、実際のデータを用いた MCS の結果を見ていくことにしよう。MCS は、誤差関数同様、225 通りの推定予測期間に銘柄数 30 と 4 種類の b を組合せた数 $225 \times 30 \times 4 = 27000$ 通り実行できる。そこで、ここでも実際に得られた結果の一部を抜粋して表 8 に紹介する。公平を期するために、ES0, ES1, HAR, HARQ, ESQ それぞれが最良であった期間を選んで掲載している。まず、この表 8 の最も左の列から順に、MCS によるモデルの予測力順位を 5 位まで掲載している。各モデル名の下にある括弧は P 値を表している。つまり、ここでは P 値が 1.00 であるモデルが最良であり、その後 P 値の高さによってモデルの予測力を順位付けしている。

次に、上述の MCS によって得られたモデルの予測力順位で P 値が 1.00 だったモデル、つまり MCS 基準で予測力が最良だったモデルの累積頻度を図 5 から図 7 に示す。まず、図 5 は、

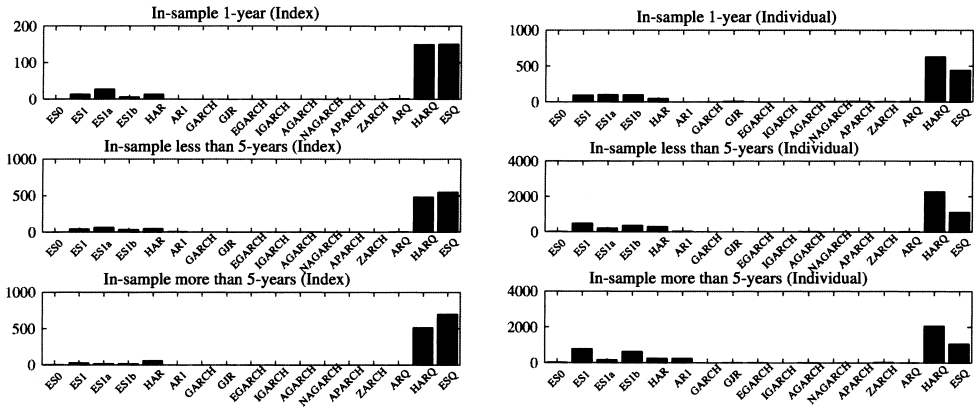


図 5. MCS 最良モデルの累積頻度(推定期間別, インサンプル).

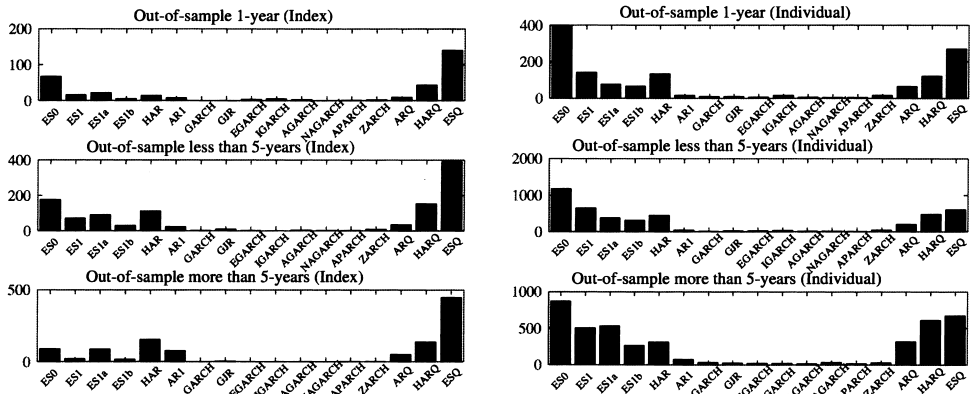


図 6. MCS 最良モデルの累積頻度(推定期間別, アウトオブサンプル).

列方向に左側が株式指数, 右側が個別銘柄, 行方向に上から推定期間が1年, 5年未満, 5年以上のデータセットから得られたインサンプルでのMCS最良モデルの累積頻度である。一見して分かることとして, 左側の株式指数では推定期間が1年ではESQ, その他ではHARQが最良モデルとしての頻度が最も高くなっており, いずれにせよHARQとESQが他のモデルを圧倒していることが分かる。ただし, 右側の個別銘柄では, 株式指数と同様の傾向ではあるが, 5年以上の推定期間ではES1が比較的健闘していることが分かる。

図6は, 図5と同様の設定でアウトオブサンプルでのMCS最良モデルの累積頻度である。ここで特徴的なこととして, 表7における誤差関数の結果により示唆されたように, アウトオブサンプルにおける個別銘柄のすべての推定期間においてES0の頻度が最も高くなっている。株式指数では, 推定期間が5年以上のデータセットではHAR, それ以外ではESQがそれぞれ最良モデルとしての頻度が最も高くなっている。

図7は, 図5および図6をインサンプル, アウトオブサンプル別と株式指数, 個別銘柄別にまとめたものである。列方向に左側が株式指数, 右側が個別銘柄, 行方向に上側がインサンプル, 下側がアウトオブサンプルの各データセットから得られたMCS最良モデルの累積頻度である。この図から分かることは, 左側の株式指数においてインサンプルではHARQ, アウトオ

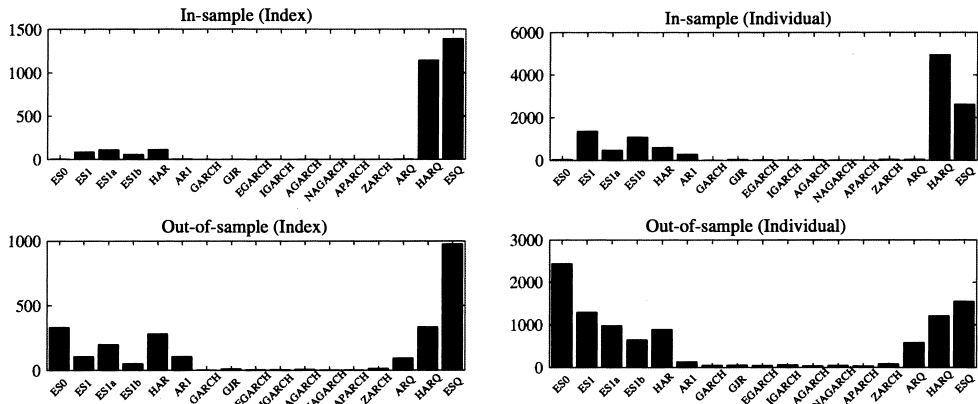


図 7. MCS 最良モデルの累積頻度(全推定期間).

ブサンプルでは ESQ が最良モデルとしての頻度が最も高くなっている。右側の個別銘柄については、インサンプルでは HARQ、アウトオブサンプルでは ES0 がそれぞれ最良モデルとしての頻度が最も高くなっている。なお、前述した通り、GARCH 型 8 モデルに関しては、直接 RV_t 系列を用い推定予測を行うのではなく、株価の対数収益率 r_t を用いての推定予測であるため、他の ES0, ES1, HAR, HARQ, ESQ の各モデルと予測力を直接比較することは適当でないことに留意すべきであろう。

3.4.3 Mincer-Zarnowitz 回帰に基づく比較

最後に、各モデルの予測値に対して Mincer-Zarnowitz (MZ) 回帰を行なった結果を報告する。Patton and Sheppard (2009)によれば、MZ 回帰は Mincer and Zarnowitz (1969)により提案された、予測力を評価する一般的な手法の 1 つである。この MZ 回帰は

$$\hat{\sigma}_t^2 = \alpha + \beta h_t + e_t$$

により定式化される。ここで、 $\hat{\sigma}_t^2$ はボラティリティの代理変数、 α および β はパラメータ、 h_t は各モデルから得られたボラティリティの予測値、そして e_t は誤差項である。 $\hat{\sigma}_t^2$ に関して、本研究では一貫して RV をボラティリティの代理変数として用いている。表 9 は、この MZ 回帰を株式指数および個別銘柄の各インサンプル、アウトオブサンプルにおける推定期間別のデータセットに対して実行した際の自由度調整済み決定係数 R^2 の結果である。この表中の下線を引いている値が、各行における最大の R^2 の値である。この表から分かることは、株式指数におけるインサンプルではすべての推定期間において ESQ の R^2 が最大であり、アウトオブサンプルでは推定期間 5 年以上を除けば、すべての推定期間において ES0 の R^2 が最大となっている。また、個別銘柄については、インサンプルでは推定期間 1 年を除いては ES1 の R^2 が最大であり、アウトオブサンプルではすべての推定期間において ES0 の R^2 が最大となっている。つまり、アウトオブサンプルにおいて、株式指数の推定期間 5 年以上を除けば、すべて ES0 の R^2 が最大となっている。このことは、先の誤差関数、MCS の結果とも整合的である。

MZ 回帰の結果に基づいて全体的傾向を縮約すれば、インサンプルでは 4 次モーメントの情報を使った方が予測が良いものの、アウトオブサンプルではそのような効果は認められない。収益率データにはしばしばボラティリティクラスタリングが観察される通り、荒れている時期もあれば風いでいる時期もある。インサンプル期間におけるそのような違いを説明するのに、RQ は重要な説明要素たりうるが、大きな変動性が将来的にいつ訪れるかに関しては、今回分

表 9. MZ 回帰による各モデルの自由度調整済み決定係数 R^2 .

| 株式指数 | ES0 | ES1 | ES1a | ES1b | HAR | AR1 | ARQ | HARQ | ESQ |
|------------|--------------|--------------|--------------|-------|-------|-------|-------|--------------|--------------|
| インサンプル | | | | | | | | | |
| 推定期間 1 年 | 0.293 | 0.320 | 0.323 | 0.313 | 0.312 | 0.250 | 0.269 | 0.322 | <u>0.330</u> |
| 推定期間 5 年未満 | 0.436 | 0.451 | 0.450 | 0.449 | 0.444 | 0.368 | 0.385 | 0.450 | <u>0.457</u> |
| 推定期間 5 年以上 | 0.547 | 0.554 | 0.554 | 0.552 | 0.552 | 0.468 | 0.485 | 0.557 | <u>0.560</u> |
| アウトオブサンプル | | | | | | | | | |
| 推定期間 1 年 | <u>0.302</u> | 0.254 | 0.270 | 0.259 | 0.291 | 0.258 | 0.191 | 0.247 | 0.263 |
| 推定期間 5 年未満 | <u>0.317</u> | 0.300 | 0.305 | 0.304 | 0.317 | 0.272 | 0.241 | 0.290 | 0.300 |
| 推定期間 5 年以上 | 0.324 | 0.308 | <u>0.326</u> | 0.312 | 0.325 | 0.294 | 0.277 | 0.316 | 0.325 |
| 個別銘柄 | | | | | | | | | |
| インサンプル | | | | | | | | | |
| 推定期間 1 年 | 0.284 | 0.308 | 0.305 | 0.304 | 0.299 | 0.240 | 0.259 | <u>0.309</u> | 0.308 |
| 推定期間 5 年未満 | 0.432 | <u>0.447</u> | 0.438 | 0.444 | 0.440 | 0.364 | 0.385 | 0.446 | 0.443 |
| 推定期間 5 年以上 | 0.538 | <u>0.548</u> | 0.540 | 0.546 | 0.543 | 0.456 | 0.480 | 0.547 | 0.545 |
| アウトオブサンプル | | | | | | | | | |
| 推定期間 1 年 | <u>0.289</u> | 0.265 | 0.261 | 0.268 | 0.275 | 0.245 | 0.208 | 0.244 | 0.261 |
| 推定期間 5 年未満 | <u>0.295</u> | 0.280 | 0.282 | 0.284 | 0.289 | 0.252 | 0.231 | 0.273 | 0.280 |
| 推定期間 5 年以上 | <u>0.286</u> | 0.275 | 0.280 | 0.278 | 0.281 | 0.249 | 0.236 | 0.273 | 0.277 |

析したモデル群は殆ど構造を持っていない。

外挿型の点予測を行う状況では、4 次モーメントを取り込んで広めに構えていても、ナイーブな方式で予測を形成しても大きな違いはなく、fat tail を想定しておいたメリットが活きるケースは低頻度と考えられる。予測ストレッチが短ければ、たまたまそういう想定が奏功して予測評価の尺度は上がるかもしれないが、ストレッチが長くなるほどそういうケースは率として低下してゆく。それが、アウトオブサンプルで ES0 が平均的に優越しているということの、ひとつの解釈たり得るのではないだろうか。

4. 結論

本稿では、事例ベース意思決定理論 (Gilboa and Schmeidler, 1995, 2001) に基礎を置いた Gilboa et al. (2006) を端緒とする経験類似度の枠組みに着目し、Golosnoy et al. (2014) の提案した経験類似度に基づく時系列モデルを用いボラティリティ予測の実証分析を行なった。

ここでの実証研究の中心的貢献は、経験類似度モデル ES0, ES1, ESQ とその他の時系列モデルとの予測力比較にある。モデルの予測力比較については、最初に 4 つの誤差関数による MCS を用いることにより、複数の銘柄と推定予測期間におけるモデルの予測力を順位付けし、最良モデルの累積頻度を分析した。分析結果としては、インサンプルでは株式指数、個別銘柄共に HARQ、アウトオブサンプルでは株式指数は ESQ、個別銘柄 ES0 がそれぞれ最良モデルとしての頻度が最も高いという結果となった。次に、複数の銘柄と推定予測期間におけるモデルの予測力を比較するために、MZ 回帰を実行した。この MZ 回帰の自由度調整済み決定係数 R^2 に基づく分析結果によれば、インサンプルでは株式指数は ESQ、個別銘柄は ES1、アウトオブサンプルでは株式指数、個別銘柄共に ES0 が最良という結果となった。MCS および MZ 回帰の結果において、アウトオブサンプルにおける ES0 の予測力が他のモデルと比較して高くなる傾向は、先行研究 Golosnoy et al. (2014) の結果と整合的である。また、HARQ, ESQ といった高頻度データから算出された実現測度 RQ を含むモデルが誤差関数、MCS, MZ 回帰において全般的に好評価であったことは、高頻度金融データの集約がもたらす情報量の多さを改めて確認さ

せられる結果となった。

また、本稿ではボラティリティの非対称性について特に考慮に入れていないが、非対称性はボラティリティを予測する上で非常に重要な因子であるため、この点については今後の研究課題としたい。

最後に、経験類似度モデルを日本の株式市場におけるボラティリティ分析に適用し、さらに、HARQ, ESQ といった実現測度 RQ を含むボラティリティモデルを体系的に扱った文献は、我々の知る限り、本研究が本邦初である。従って、経験類似度モデルの金融分野への適用および実現測度 RQ を含むボラティリティモデルの応用は始まったばかりであり、今後の研究の発展に期待したい。

謝 辞

本研究は、統計数理研究所公募型共同利用(課題番号 28-共研-2012)に基づくと同時に、科学研究費基盤研究(A)25245033, (A)15H01943, (B)15H03337, (C)16K00067, (C)26380279, (C)15K03406 による援助を受けています。また、改稿にあたって有益なコメントをくださった 2 人の査読者および Union Investment の Moritz Heiden 博士に感謝いたします。

参 考 文 献

- Andersen, T. G. and Bollerslev, T. (1997). Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets, *Journal of Empirical Finance*, **4**, 115–158.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F. X. and Ebens, H. (2001). The distribution of realized stock return volatility, *Journal of Financial Economics*, **61**, 43–76.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Diebold, F.X. and Labys, P. (2003). Modeling and forecasting realized volatility, *Econometrica*, **71**, 579–625.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T. and Meddahi, N. (2004). Analytical evaluation of volatility forecasts, *International Economic Review*, **45**, 1079–1110.
- Andersen, T. G., Dobrev, D. and Schaumburg, E. (2012). Jump-robust volatility estimation using nearest neighbor truncation, *Journal of Econometrics*, **169**, 75–93.
- Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2004). Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling, *Review of Economic Studies*, **75**, 339–369.
- Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)*, **64**, 253–280.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrica*, **76**, 1481–1536.
- Bates, J. M. and Granger, C. W. J. (1969). The combination of forecasts, *Operation Research Quarterly*, **20**, 451–468.
- Billot, A., Gilboa, I. and Schmeidler, D. (2008). An axiomatization of an exponential similarity function, *Mathematical Social Sciences*, **55**, 107–115.
- Bollerslev, T., Patton, A. J. and Quaedvlieg, R. (2016). Exploiting the errors: A simple approach for improved volatility forecasting, *Journal of Econometrics*, **192**, 1–18.
- Corsi, F. (2009). A simple long memory model of realized volatility, *Journal of Financial Econometrics*, **7**, 174–196.
- DeMiguel, V., Garlappi, L. and Uppal, R. (2009). Optimal versus naïve diversification: How inefficient

- is the $1/N$ portfolio strategy?, *Review of Financial Studies*, **22**, 1915–1953.
- Elliott, G. and Timmermann, A. (2004). Optimal forecast combinations under general loss functions and forecast error distributions, *Journal of Econometrics*, **122**, 47–79.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (1995). Case-based decision theory, *Quarterly Journal of Economics*, **110**, 605–639.
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (2001). *A Theory of Cased-based Decisions*, Cambridge University Press, Cambridge. (浅野貴央, 尾山大輔, 松井彰彦 共訳 (2005). 『決め方の科学—事例ベース意思決定理論』, 勁草書房, 東京.)
- Gilboa, I. and Schmeidler, D. (2012). *Case-based Predictions*, World Scientific, Singapore.
- Gilboa, I., Lieberman, O. and Schmeidler, D. (2006). Empirical similarity, *Review of Economics and Statistics*, **88**, 433–444.
- Gilboa, I., Lieberman, O. and Schmeidler, D. (2011). A similarity-based approach to prediction, *Journal of Econometrics*, **162**, 124–131.
- Golosnoy, V., Hamid, A. and Okhrin, Y. (2014). The empirical similarity approach for volatility prediction, *Journal of Banking & Finance*, **40**, 321–329.
- Hamid, A. and Heiden, M. (2015). Forecasting volatility with empirical similarity and Google trends, *Journal of Economic Behavior & Organization*, **117**, 62–81.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A realized variance for the whole day based on intermittent high-frequency data, *Journal of Financial Econometrics*, **3**, 525–554.
- Hansen, P. R., Lunde, A. and Nason, J. M. (2011). The model confidence set, *Econometrica*, **79**, 453–497.
- Hume, D. (1748). *Enquiry into the Human Understanding*, Clarendon Press, Oxford.
- Lieberman, O. (2010). Asymptotic theory for empirical similarity models, *Econometric Theory*, **26**, 1032–1059.
- Masuda, H. and Morimoto, T. (2012). Optimal weight for realized variance based on intermittent high-frequency data, *Japanese Economic Review*, **63**, 497–527.
- McAleer, M. and Medeiros, M. C. (2008). Realized volatility: A review, *Econometric Reviews*, **27**, 10–45.
- Mincer, J. A. and Zarnowitz, V. (1969). The evaluation of economic forecasts, *Economic Forecasts and Expectations: Analysis of Forecasting Behavior and Performance* (ed. J. A. Mincer), 3–46, National Bureau of Economic Research, New York.
- 尾山大輔 (2012). 事例ベース意思決定理論とは, オペレーションズ・リサーチ: 経営の科学, **57**, 557–559.
- Patton, A. J. (2011). Volatility forecast comparison using imperfect volatility proxies, *Journal of Econometrics*, **160**, 246–256.
- Patton, A. J. and Sheppard, K. (2009). Evaluating volatility and correlation forecasts, *Handbook of Financial Time Series* (eds. T. G. Andersen, R. A. Davis, J. P. Kreiss and T. Mikosch), 801–838, Springer, Berlin.
- 竹内秀一, 近河拓也, 篠崎信雄 (2000). 複数個の外れ値を検出するときの Cook の距離の検出力, 応用統計学, **29**, 83–99.
- Wooldridge, J. M. (2015). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*, 6th ed., Cengage Learning, Boston.
- Zhang, L., Mykland, P. A. and Aït-Sahalia, Y. (2005). A tale of two time scales: Determining integrated volatility with noisy high frequency data, *Journal of the American Statistical Association*, **100**, 1394–1411.

Volatility Forecasting with Empirical Similarity: Japanese Stock Market Case

Takayuki Morimoto¹ and Yoshinori Kawasaki^{2,3}

¹School of Science and Technology, Kwansai Gakuin University

²The Institute of Statistical Mathematics

³Department of Statistical Science, School of Multidisciplinary Sciences,
The Graduate University for Advanced Studies

In this research, we compare the forecasting ability of various volatility models through within-sample and out-of-sample forecasting simulations. Models considered here are heterogeneous auto regression models (HAR), a 1/3 model where the weight coefficients are all set to 1/3 in the HAR model (ES0), and an HAR model in which weight coefficients are determined by empirical similarity. We also try AR(1), ARCH/GARCH and their variants, and models incorporating the Realized Quarticity (RQ), which are referred to as ARQ, HARQ and ESQ. As stock data, we pick 6 index series from the Tokyo Stock Exchange, and 24 individual stock series all of which had enough liquidity from April 1st 1999 to December 30th 2013. Minute-by-minute data were created based on high-frequency data. Forecasting evaluation depends on what kind of evaluation function we employ. We make use of Patton's error function. Changing the length of the estimation period and the forecasting period, and also the parameter of Patton's error function, we try 27,000 patterns of forecasting simulations. We find that ESQ and HARQ are almost comparative in within-sample forecasting, whereas ES0 is outstanding in out-of-sample forecasting experiments. We also tried model comparison based on the pair-wise testing procedure proposed by Hansen et al. We see similar results but the details are a little bit different in index series and in individual stock series.