統計数理（2017）
第 65 巻 第 1 号 5–20

特集「高頻度金融データに基づく統計的推測とモデリング」
［研究詳解］

拡散過程による日内株価データのモデリングと統計推測理論

荻原 哲平[1,2]

（受付 2016 年 8 月 8 日；改訂 11 月 9 日；採択 12 月 20 日）

要 旨

本稿では，拡散過程と呼ばれる連続的な path をもつ確率過程を用いた日内株価モデリングとリスク量の統計推測手法の理論研究を紹介する．特に日内株価データのモデリングで問題となる，「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれる仮想的な観測誤差の存在や，複数資産の観測時刻が一致しない「非同期観測」の問題を取り上げ，関連する研究を紹介する．まず，株価ボラティリティや複数資産の共変動のノンパラメトリック推定手法の研究の歴史を簡潔に振り返った後，パラメトリック推定法として最尤型推定量の漸近理論を取り扱う．その後，推定量の最適性の概念である「漸近有効性」を扱う．特に推定量の漸近有効性を議論する上で重要な役割を果たす，統計モデルの局所漸近混合正規性の概念について紹介し，最尤型推定量が漸近有効性を満たすことについて論ずる．最後にベイズ型推定量を構築し，その漸近理論を紹介する．

キーワード：高頻度データ，最尤型推定法，漸近有効性，非同期観測，ベイズ型推定法，マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ．

1. 高頻度データとその問題点

株式資産のリスク管理を行う際には，株価時系列の分散・共分散構造を特定することが重要であり，従来のリスク管理においては日次以上の株価データを用いてこれらのリスク量の推定が行われていた．一方で，近年各証券取引所における全ての取引の取引時刻・取引価格・売買高等の情報を記録したような「高頻度データ」の利用可能性が高まり，それらのデータを用いたリスク管理手法の研究も活発になっている．このようなデータは秒・ミリ秒単位のタイムスタンプを持っており，そのデータ量が膨大となるだけではなく，特有の構造からいくつかの問題が生じるため，従来の統計解析手法の適用が困難になっている．

例えば，ある証券の証券価格の観測時刻を $\{t_i\}_{i=0}^n$, 時刻 t_i における証券の対数価格を X_{t_i} と書くと，実現ボラティリティは

$$\mathrm{RV}_n = \sum_{i=1}^n (X_{t_i} - X_{t_{i-1}})^2$$

で定義される．証券対数価格 $X = \{X_t\}_{0\le t\le T}$ がブラウン運動 $\{W_t\}_{0\le t\le T}$ に対し，

[1] 統計数理研究所：〒 190–8562 東京都立川市緑町 10–3
[2] 国立研究開発法人科学技術振興機構（さきがけ）：〒 332–0012 埼玉県川口市本町 4–1–8

$$X_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s, \quad t \in [0, T] \tag{1.1}$$

を満たし，観測時刻 $\{t_i\}$ が $t_i = Ti/n$ $(0 \le i \le n)$ であるとすると，X の二次変分 $\langle X \rangle_T$ に対し，

$$\mathrm{RV}_n \to^p \langle X \rangle_T \quad (n \to \infty) \tag{1.2}$$

となることが知られている．(1.1)式は，証券対数価格 X_t が，時間とともに積みあがるトレンド成分 $\int_0^t \mu_s ds$ と，ランダムな W_t に駆動される拡散項 $\int_0^t \sigma_s dW_s$ で構成されていることを意味する．(1.2)の収束先である，

$$\langle X \rangle_T = \int_0^T \sigma_t^2 dt$$

は累積ボラティリティと呼ばれ，X の日内変動の大きさを測る重要なリスク量として，高頻度データの解析では分散に代わってよく用いられる．

しかし，高頻度観測データを用いた実証分析において，データの観測頻度を高くすると RV_n が急激に増加する現象が確認されている．この現象は，連続セミマルチンゲールで記述される潜在的な証券対数価格 X に対し，実際の証券価格の観測に仮想的な観測ノイズが混入していると解釈されている．このノイズは高頻度観測データを解析する際に現れる特有のものとして，「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」と呼ばれている．

また，複数証券の共変動の推定を考えると，売買取引データを用いる場合には，証券価格は証券の取引が起きた時にその取引価格として観測されるので，異なる証券の観測時刻が一致しないという「非同期観測」の問題が発生する．

本稿では，高頻度データの統計解析上の問題としてこの「マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ」の問題と「非同期観測」の問題を中心に取り上げ，現在までで研究が進んできた，累積ボラティリティ・共変動のノンパラメトリック推定の研究の概観を紹介した後，筆者が特に関わってきたパラメトリック推定手法，特に最尤型・ベイズ型推定法についての最近の結果を紹介する．

本稿では扱わないが，高頻度データのその他の話題として，time endogeneity と呼ばれる観測時刻の対数株価 X への依存性の問題や X がジャンプを含む確率過程で記述される場合の理論などがある．ジャンプを含む確率過程に関する研究は Aït-Sahalia and Jacod (2014)の四章に詳しく紹介されている．time endogeneity に関する研究としては，例えば，Li et al. (2014), Fukasawa and Rosenbaum (2012), Koike (2017)等を参照されたい．

2. 累積ボラティリティ・共変動のノンパラメトリック推定法

2.1 実現ボラティリティとマーケット・マイクロストラクチャー・ノイズ

上で紹介したように，証券対数価格 X が(1.1)を満たし，それがノイズ無しで規則的に観測されている状況では，実現ボラティリティ RV_n は $\langle X \rangle_T$ に確率収束する．このような状況において，推定誤差の漸近分布についても研究されている．X の定義される確率空間を $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と書くと，標準的な条件の下で，$A = 2\int_0^T \sigma_s^4 ds$ と $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の拡張上で定義された $\mathcal{F}$ と独立な標準正規乱数 ζ に対し，

$$\sqrt{n}(\mathrm{RV}_n - \langle X \rangle_T) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \sqrt{A}\zeta \quad (n \to \infty) \tag{2.1}$$

を満たす．ここで，$\to^{s\text{-}\mathcal{L}}$ は確率変数の stable convergence を表す．$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数列 Z_n と $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ のある拡張 $(\Omega', \mathcal{F}', P')$ 上の確率変数 Z に対して，$Z_n \to^{s\text{-}\mathcal{L}} Z$ とは，任意の $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の確率変数 V に対して，(Z_n, V) が (Z, V) に分布収束することを定義とする．その定義から

stable convergence は分布収束より強く，確率収束より弱い概念であるといえる．より詳しい stable convergence の性質等に関しては，Jacod and Protter (2012) の 2.2.1 節，または Jacod and Shiryaev (2003) の VIII 章 5c 節を参照せよ．

一方，マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下では実現ボラティリティは一致性を持たず(つまり $\langle X\rangle_T$ に確率収束せず)，別の推定量を考える必要がある．マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズのモデルで最もシンプルなものとしては，(1.1) を満たす確率過程 $\{X_t\}_{0\le t\le 1}$ の観測 $\{Y_i\}_{i=0}^n$ が，

$$Y_i = X_{i/n} + U_i$$

で与えられる設定が考えられている．ただし，ノイズ $\{U_i\}_{i=0}^n$ は X と独立な平均 0 の独立同分布列である．

マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下での累積ボラティリティ推定に関しては近年活発に研究されており，例えば Bandi and Russell (2008) では，ノイズによる推定誤差と観測の少なさによる推定誤差のトレードオフから最適な観測頻度を選択する方法を研究している．また，ノイズを除去するいくつかの手法が提案されており，代表的なものとしては，Barndorff-Nielsen et al. (2008) のカーネル法や，Podolskij and Vetter (2009) のプレ・アベレージング法が挙げられる．

例えばプレ・アベレージング法は，観測データの部分的な平均をとることでノイズを除去する方法であり，Jacod et al. (2009) では，正の実数 θ, 正整数列 k_n と，連続かつ区分的に滑らかな重み関数 $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ で，$g(0)=g(1)=0$, $\int_0^1 g(s)^2ds>0$, $k_n=\theta n^{1/2}+o(n^{1/4})$ となるものを用いて，観測 $\{Y_i\}_{i=0}^n$ を

$$\overline{\Delta Y}_i^n = \sum_{p=1}^{k_n-1} g\left(\frac{p}{k_n}\right)(Y_{i+p}-Y_{i+p-1})$$

で平均化した．そして $s\in[0,1]$ に対し，$\phi_1(s)=\int_s^1 g'(u)g'(u-s)du$, $\phi_2(s)=\int_s^1 g(u)g(u-s)du$, $\psi_j=\phi_j(0)$ $(j=1,2)$ と定めた時，累積ボラティリティの推定量を

$$\hat{C}_n = \frac{n^{-1/2}}{\theta\psi_2}\sum_{i=0}^{n-k_n+1}(\overline{\Delta Y}_i^n)^2 - \frac{\psi_1}{2\theta\psi_2 n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-Y_{i-1})^2$$

で定義し，ノイズ U_i の 8 次モーメントの存在や μ_t,σ_t の標準的な条件の下で $n\to\infty$ の時，

$$n^{1/4}(\hat{C}_n-\langle X\rangle_1) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \int_0^1 \gamma_t dB_s \tag{2.2}$$

となることを示した．ただし，$v=E[U_0^2]$, $1\le i,j\le 2$ に対し，$\Phi_{ij}=\int_0^1\phi_i(s)\phi_j(s)ds$,

$$\gamma_t^2 = \frac{4}{\psi_2^2}\left(\Phi_{22}\theta\sigma_t + 2\Phi_{12}\frac{\sigma_t^2 v}{\theta} + \Phi_{11}\frac{v^2}{\theta^3}\right)$$

で $\{B_t\}_{0\le t\le 1}$ は $\mathcal{F}$ と独立な標準ブラウン運動である．

また，

$$\begin{aligned}\Gamma_n =& \frac{4\Phi_{22}}{3\theta\psi_2^4}\sum_{i=0}^{n-k_n+1}(\overline{\Delta Y}_i^n)^4 + \frac{4}{n\theta^3}\left(\frac{\Phi_{12}}{\psi_2^3}-\frac{\Phi_{22}\psi_1}{\psi_2^4}\right)\sum_{i=0}^{n-2k_n+1}(\overline{\Delta Y}_i^n)^2\sum_{j=i+k_n}^{i+2k_n-1}(Y_j-Y_{j-1})^2\\ &+\frac{1}{n\theta^3}\left(\frac{\Phi_{11}}{\psi_2^2}-2\frac{\Phi_{12}\psi_1}{\psi_2^3}+\frac{\Phi_{22}\psi_1^2}{\psi_2^4}\right)\sum_{i=1}^{n-2}(Y_i-Y_{i-1})^2(Y_{i+2}-Y_{i+1})^2\end{aligned}$$

と定めた時，

$$\Gamma_n \to^p \int_0^1 \gamma_t^2 dt$$

となることを示した．よって，

$$n^{1/4}\Gamma_n^{-1/2}(\hat{C}_n - \langle X\rangle_1) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} B_1$$

となる．B_1 は標準正規分布に従うので，$\alpha = 0.01, 0.05$ 等に対して，Z_α を正規分布の上側 100α パーセント点を Z_α とすると，$\langle X\rangle_T$ の信頼係数 $1-\alpha$ の信頼区間は近似的に

$$[\hat{C}_n - n^{-1/4}\Gamma_n^{1/2} Z_{\alpha/2}, \hat{C}_n + n^{-1/4}\Gamma_n^{1/2} Z_{\alpha/2}]$$

と計算される．

(2.2)より，$\hat{C}_n$ の $\langle X\rangle_1$ への収束レートは $n^{-1/4}$ となり，(2.1)におけるレート $1/\sqrt{n}$ よりも悪くなっている．これはノイズの存在により $\langle X\rangle_1$ の推定効率が落ちることを意味している．Gloter and Jacod (2001a)では，ノイズの存在下で $\langle X\rangle_1$ の任意の推定量の収束レートは $n^{-1/4}$ が最適であるということを証明しているので，$\hat{C}_n$ は最適な収束レートを達成していることになる．

2.2　共変動の推定と非同期観測

金融資産のリスク管理を行う際には，単一資産の累積ボラティリティだけではなく，複数資産の共分散・共変動の計測も重要である．証券価格 $X^1 = \{X_t^1\}_{0\le t\le T}, X^2 = \{X_t^2\}_{0\le t\le T}$ とその観測時刻 $\{t_i\}_{i=0}^n$ に対して，実現ボラティリティの自然な拡張として実現共分散 RCV_n が以下のように定義される：

$$\mathrm{RCV}_n = \sum_{i=1}^n (X_{t_i}^1 - X_{t_{i-1}}^1)(X_{t_i}^2 - X_{t_{i-1}}^2).$$

実現ボラティリティと同様，X^1, X^2 が(1.1)に対応する式を満たし，$t_i = Ti/n$ の時，X^1, X^2 の二次変分 $\langle X^1, X^2\rangle_T$ に対し，$\mathrm{RCV}_n \to^p \langle X^1, X^2\rangle_T$ となることが知られている．$\langle X^1, X^2\rangle_T$ は高頻度データの解析において，X^1, X^2 の共分散に代わり，X^1 と X^2 の連動性を測る指標として用いられる．

複数証券の共分散推定の際には，マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの問題に加え，X^1, X^2 の観測時刻が一致しないという「非同期観測」の問題が発生する．非同期観測の問題を解決するために考えられる最もシンプルな方法としては，価格データを線形補完するか，RCV_n 計算の基準となる時刻を設定し，各基準時刻に対して X^1, X^2 の直前の観測データを用いる等の方法により，観測を「同期化」して RCV_n を計算することが考えられる．しかし，Hayashi and Yoshida (2005)では，このようなシンプルな同期化により計算された RCV_n には深刻なバイアスが存在することが指摘されている．さらに，彼らは非同期観測下における二次変分 $\langle X^1, X^2\rangle_T$ の推定量 HY_n を提案している．X^1 の観測時刻 $\{s_i\}_{i=0}^{\ell_1}$ と X^2 の観測時刻 $\{t_j\}_{j=0}^{\ell_2}$ に対して，

$$\mathrm{HY}_n = \sum_{i,j} (X_{s_i}^1 - X_{s_{i-1}}^1)(X_{t_j}^2 - X_{t_{j-1}}^2) 1_{\{[s_{i-1}, s_i)\cap[t_{j-1}, t_j)\neq\emptyset\}}$$

と定義される．観測時刻 $\{s_i\}, \{t_j\}$ と X^1, X^2 が独立で $\max_{i,j}(s_i - s_{i-1}) \vee (t_j - t_{j-1}) \to^p 0$ の時，

$$\mathrm{HY}_n \to^p \langle X^1, X^2\rangle_T$$

が示されている．

Hayashi and Yoshida (2008, 2011) では，推定誤差の漸近分布が研究されている．Hayashi and Yoshida (2008) では，証券価格過程 $X=(X^1,X^2)$ がブラウン運動 $(W_t^l)_{t\geq 0}$ に対して確率微分方程式：

$$dX_t^l=\mu_t^l dt+\sigma_t^l dW_t^l,\quad t\in[0,T],\quad l=1,2,$$

$d\langle W^1,W^2\rangle_t=\rho_t dt$ を満たし，$\{\sigma_t^l\}_{0\leq t\leq T}$ と $\{\rho_t\}_{0\leq t\leq T}$ が deterministic で観測時刻が X と独立の時，ある正数列 $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}, p_n\to 0$ に対し，以下を示した：

$$p_n^{-1/2}(\mathrm{HY}_n-\langle X^1,X^2\rangle_T)\to^d N(0,c)\quad(n\to\infty).$$

ただし，$K_{i,j}=1_{\{[s_{i-1},s_i)\cap[t_{j-1},t_j)\neq\emptyset\}}$，$v_i^1=\int_{s_{i-1}}^{s_i}(\sigma_t^1)^2dt$，$v_j^2=\int_{t_{j-1}}^{t_j}(\sigma_t^2)^2dt$，$v_{i,j}=\int_{[s_{i-1},s_i)\cap[t_{j-1},t_j)}\sigma_t^1\sigma_t^2\rho_t dt$ に対し，

$$c=\text{P-lim}_{n\to\infty}p_n^{-1}\left(\sum_{i,j}v_i^1v_j^2K_{i,j}+\sum_i(v_i^1)^2+\sum_j(v_j^2)^2-\sum_{i,j}(v_{i,j})^2\right).$$

Hayashi and Yoshida (2011) では，σ_t が random で $\{s_i\},\{t_j\}$ の X の従属性を許したようなより広いモデル設定において，$\{s_i\},\{t_j\}$ に対する strong predictability と呼ばれる条件等を仮定した下で，

$$p_n^{-1/2}(\mathrm{HY}_n-\langle X^1,X^2\rangle_T)\to^{s\text{-}\mathcal{L}} C\zeta\quad(n\to\infty)$$

が示されている．ただし，C は X^1,X^2 の拡散係数に依存する確率変数である．

マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズと非同期観測の問題が同時に存在する場合の共変動推定法の研究も近年活発に研究されている．例えば，Christensen et al. (2010) ではプレ・アベレージング法と Hayashi–Yoshida 推定量を組み合わせた pre-averaged Hayashi–Yoshida estimator が研究されている．他にもカーネル法を用いた Barndorff-Nielsen et al. (2011) や multiscale estimator を用いた Bibinger (2011, 2012) 等がある．

2.3 リード・ラグ推定

共分散推定に関連する研究として，Hoffmann et al. (2013) では，非同期観測された二証券間において一方が他方に対する価格変化の先行性があるかどうかを測るリード・ラグが研究されている．簡単のため，二証券対数価格 X^1,X^2 が実数 θ_* と二次元標準ブラウン運動 $W_t=(W_t^1,W_t^2)$ に対し，

$$\begin{aligned}X_t^1&=\sigma_1W_{t+\theta_*}^1\\X_t^2&=\rho\sigma_2W_t^1+\sqrt{1-\rho^2}\sigma_2W_t^2\end{aligned}$$

を満たすとする．この時，X^2 は X^1 に対して時間 θ_* だけ遅れていると考えることができる．また，X^1,X^2 の観測が $\{X_{s_i}^1\}_i,\{X_{t_j}^2\}_j$ で与えられているとする．彼らはコントラスト関数 $\mathcal{U}^n(\theta)$ を

$$\mathcal{U}^n(\theta)=\sum_{i,j}(X_{s_i}^1-X_{s_{i-1}}^1)(X_{t_j}^2-X_{t_{j-1}}^2)1_{\{[s_{i-1},s_i)\cap[t_{j-1}-\theta,t_j-\theta)\neq\emptyset\}}$$

で定め，時間のラグ（リード）θ_* の推定量 $\hat{\theta}_n$ を $\hat{\theta}_n=\mathrm{argmax}_\theta\ |\mathcal{U}^n(\theta)|$ と定めた．この時彼らは，$v_n\to 0$ かつ $v_n^{-1}\max_{i,j}(s_i-s_{i-1})\vee(t_j-t_{j-1})\to^p 0$ となる正数列 $\{v_n\}_n$ に対して，$v_n^{-1}(\hat{\theta}_n-\theta_*)\to^p 0$ を示した．

Huth and Abergel (2014) は $\mathcal{U}^n(\theta)$ を用いて，lead-lag ratio と呼ばれる指標を作り，フランス株価市場の高頻度個別株データに対する分析から，流動性の高い銘柄が他の銘柄をリードする

傾向があることを確認した．ただし，リードは数秒単位の非常に短い期間となっている．また，Koike (2016)では，マーケット・マイクロストラクチャー・ノイズの存在下におけるリード・ラグの推定手法が研究されている．

3. パラメトリック推定法

上の研究はパラメトリック・モデルを仮定しないノンパラメトリック推定量の研究であるが，パラメトリック・モデルの下での最尤型推定量・ベイズ型推定量に関する研究もなされている．最尤型推定量を考えるメリットとしては，様々なモデルにおいて，推定誤差の漸近分散を最小にすることが示されることや尤度比検定，one-step 推定量，情報量基準によるモデル選択などへの応用が可能であることである．

フィルター付確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{0\le t\le T}, P)$ 上の二次元確率過程 $\{X_t\}_{0\le t\le T}$ が確率微分方程式：

$$dX_t = \mu(t, X_t, \sigma_*)dt + b(t, X_t, \sigma_*)dW_t \tag{3.1}$$

を満たすとする．この時，X_t は拡散過程と呼ばれる確率過程のクラスに属する．ここで，W_t は二次元標準ブラウン運動，$\mu(t,x,\sigma)$ は未知 $\mathbb{R}^2$-値関数，$b(t,x,\sigma)$ は 2×2 行列値の既知関数で，未知パラメータ σ_* は $\sigma_*\in\Lambda$ を満たし，$\Lambda\subset\mathbb{R}^d$ は Lipschitz boundary をもつ開集合である．σ_* の値が推定できれば，累積ボラティリティ等のリスク量の推定が可能となる．最尤推定量を計算するには尤度関数を計算する必要があるが，拡散過程に対して尤度関数を計算することは一般に困難であるため，疑似尤度関数を構築することを考える．

本章以後，いくつかの仮定は弱めることが可能だが，煩雑さを避けるため比較的簡易な仮定を採用する．$\mathrm{clos}(\Lambda)$ は Λ の閉包を表すとする．まずは X のドリフト項 μ と拡散項 b に対する以下の条件を仮定する．

[A1] 関数 $(t,x)\mapsto\mu(t,x,\sigma_*)$ は局所有界で，b は (t,x,σ) に関して十分なめらか，$bb^\top$ は各点で正定値で b は $[0,T]\times\mathbb{R}^2\times\mathrm{clos}(\Lambda)$ 上の連続関数に拡張される．

[A2] 任意の (t,x) に対し，$\inf_{\sigma_1\neq\sigma_2}(|bb^\top(t,x,\sigma_1)-bb^\top(t,x,\sigma_2)|/|\sigma_1-\sigma_2|)>0$.

(3.1)の dt 項は高頻度極限で dW_t 項より速く零に収束するため，漸近理論で無視することができ，仮定があまり必要にならない．[A2] 条件は統計モデルの分離性に関するもので，ラフに言えば，データ $\{X_t\}$ の(ノイズ付)観測からパラメータを推定するためには，違うパラメータに対して違うデータが生成される必要があり，$bb^\top$ の水準が異なる必要があるということである．

3.1 同期観測・ノイズ無しの場合

まずは $t_k = kT/n$ に対し，$\{X_{t_k}\}_{k=0}^n$ が観測されている(同期観測でノイズがない)場合を考える．この時，

$$\Delta X_k := X_{t_k} - X_{t_{k-1}} \approx b_k(\sigma_*)(W_{t_k} - W_{t_{k-1}})$$

となる．ただし，$b_k(\sigma) = b(t_{k-1}, X_{t_{k-1}}, \sigma)$. よって ΔX_k は $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ の条件付の下，近似的に平均 0, 分散 $b_k b_k^\top(\sigma_*)(t_k - t_{k-1})$ の正規分布に従う．このことから，疑似対数尤度関数 $H_n^0(\sigma)$ を

$$H_n^0(\sigma) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n\left(\Delta X_k^\top\left(\frac{b_k b_k^\top(\sigma)T}{n}\right)^{-1}\Delta X_k + \log\det(b_k b_k^\top(\sigma))\right) \tag{3.2}$$

で定める(局所ガウス近似)．ただし，定数項は σ の最適化に影響を与えないため除外している．最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^0$ を $\hat{\sigma}_n^0 = \mathrm{argmax}_\sigma H_n^0(\sigma)$ で定める．

同期観測・ノイズ無しの場合の最尤型推定量の漸近的性質は Genon-Catalot and Jacod (1994), Uchida and Yoshida (2013) で研究されており，$\Gamma_0 = P\text{-}\lim_{n\to\infty}(-n^{-1}\partial_\sigma^2 H_n^0(\sigma_*))$ と書くと，以下の定理が成立する．

定理 3.1. [A1], [A2] の下，ある d 次元標準正規乱数 ζ で $\mathcal{F}$ と独立なものがあって，$\Gamma_0 > 0$ a.s. かつ $n \to \infty$ の時，

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^0 - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_0^{-1/2}\zeta.$$

3.2 非同期・ノイズ無しの場合

Ogihara and Yoshida (2014) では，X^1, X^2 の (random な) 観測時刻をそれぞれ $\{S_i^{n,1}\}_{i=0}^{\ell_{1,n}}$, $\{S_j^{n,2}\}_{j=0}^{\ell_{2,n}} \subset [0,T]$ で与え，

$$0 = S_0^{n,p} < S_1^{n,p} < \cdots < S_{\ell_{p,n}}^{n,p} = T, \quad (p=1,2)$$

$$\max_{i,p}(S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) \to^p 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty \quad (\text{高頻度観測極限})$$

の条件の下，最尤型推定量を構築し，その漸近挙動を調べた．

同期観測の場合と同様，局所ガウス近似から疑似対数尤度関数を構築することを考える．$\delta_{i,j}$ をクロネッカーのデルタとし，$b_i^1(\sigma), b_j^2(\sigma)$ は拡散係数 b の行ベクトル b^1, b^2 に対して，それぞれ時刻 $S_{i-1}^{n,1}, S_{j-1}^{n,2}$ における最新の X^1, X^2 の値を代入して得られるものとし，区間 $K=[a,b)$ に対し $|K| = b-a$, $I_i^p = [S_{i-1}^{n,p}, S_i^{n,p})$ と置く．この時，X^1, X^2 の規格化された増分 $(\Delta X_i^1 |I_i^1|^{-1/2})_i$, $(\Delta X_j^2 |I_j^2|^{-1/2})_j$ に対し，その条件付共分散は，

$$E\left[\frac{\Delta X_i^p}{|I_i^p|^{1/2}}\frac{\Delta X_j^p}{|I_j^p|^{1/2}}\middle|\mathcal{F}_{S_{i-1}^{n,p}\wedge S_{j-1}^{n,p}}\right] \approx |b_i^p|^2\delta_{i,j},$$

$$E\left[\frac{\Delta X_i^1}{|I_i^1|^{1/2}}\frac{\Delta X_j^2}{|I_j^2|^{1/2}}\middle|\mathcal{F}_{S_{i-1}^{n,1}\wedge S_{j-1}^{n,2}}\right] \approx b_i^1 \cdot b_j^2 \frac{|I_i^1 \cap I_j^2|}{|I_i^1|^{1/2}|I_j^2|^{1/2}}$$

と近似される．よって $G_{ij} = |I_i^1 \cap I_j^2||I_i^1|^{-1/2}|I_j^2|^{-1/2}$,

$$Z = \begin{pmatrix} (\Delta X_i^1 |I_i^1|^{-1/2})_i \\ (\Delta X_j^2 |I_j^2|^{-1/2})_j \end{pmatrix}, \quad S(\sigma) = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}((|b_i^1|^2(\sigma))_i) & \{b_i^1(\sigma)\cdot b_j^2(\sigma)G_{ij}\}_{ij} \\ \{b_i^1(\sigma)\cdot b_j^2(\sigma)G_{ij}\}_{ji} & \mathrm{diag}((|b_j^2|^2(\sigma))_j) \end{pmatrix}$$

と置いて, 疑似対数尤度関数 $H_n^1(\sigma)$ を

$$H_n^1(\sigma) = -\frac{1}{2}Z^\top S^{-1}(\sigma)Z - \frac{1}{2}\log\det S(\sigma) \tag{3.3}$$

と定める．この時最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ を $\hat{\sigma}_n^1 = \mathrm{argmax}_\sigma H_n^1(\sigma)$ で定める．

非同期観測のケースで最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ の漸近挙動を調べるには, 確率過程 X の条件 [A1], [A2] だけではなく，観測時刻列 $\{S_i^{n,p}\}$ の漸近挙動に関する仮定が必要になる．Ogihara and Yoshida (2014) では，$\{S_i^{n,p}\}$ のある汎関数の極限の存在を仮定しているが，ここではより簡易な十分条件として以下の仮定を置く．

[A3] ある exponential α-mixing simple point process $(N_t^1, N_t^2)_{t\ge 0}$ で増分が定常となるものがあって，任意の $q>0$ に対し，

$$E[|N_1|^q] < \infty, \quad \limsup_{n\to\infty}\max_{p=1,2} u^q P[N_u^p = 0] < \infty \tag{3.4}$$

かつ

$$S_i^{n,p} = \inf\{t \ge 0; N_{nt}^p \ge i\}. \tag{3.5}$$

例えば，$(N_t^1, N_t^2)_{t\geq 0}$ が独立なポアソン過程でパラメータを λ_1, λ_2 とすると，増分定常な exponential α-mixing simple point process となり，(3.4) の最初の条件も明らかに満たす．二番目の条件に関しては，

$$\lim_{u\to\infty} u^q P[N_u^p = 0] = \lim_{u\to\infty}(u^q e^{-\lambda_p u}) = 0$$

より満たされる．よって，観測時刻列を (3.5) で定めれば [A3] 条件を満たすことがわかる．

定理 3.2.（Ogihara and Yoshida, 2014）[A1]–[A3] を仮定する．この時，

$$\Gamma_1 = P\text{-}\lim_{n\to\infty}(-n^{-1}\partial_\sigma^2 H_n^1(\sigma_*))$$

が存在し，最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$ に対して，$\mathcal{F}$ と独立な d 次元標準正規乱数 ζ があって，$\Gamma_1 > 0$ a.s. かつ

$$\sqrt{n}(\hat{\sigma}_n^1 - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_1^{-1/2}\zeta \quad (n\to\infty).$$

Ibragimov and Has'minskiĭ（1972, 1973, 1981）の尤度比確率場の理論を用いると，$j = 0, 1$ に対し，最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^j$ の漸近的性質を調べる上で，疑似対数尤度比 $\partial_\sigma^k(H_n^j(\sigma) - H_n^j(\sigma_*))$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$ の極限の性質を調べることが本質的になる．(3.2) 式では，$H_n^0(\sigma)$ は，各 k に対する ΔX_k の疑似対数尤度を足し合わせたシンプルな関数であるが，非同期・ノイズ無しの $H_n^1(\sigma)$ では，S^{-1} の全ての要素が非零となり得る上に，$\Delta X_k \Delta X_l$ の係数が遠い先の時刻まで参照しているため，マルチンゲールに対する極限定理などを使いづらくなるため，定理 3.2 の証明には，Itô 解析と線型代数を組み合わせて係数の時刻ずらしを行ってからマルチンゲールの極限定理を適用するなどのより複雑な解析が必要となる．

3.3　非同期・ノイズ付の場合

次に非同期観測でノイズがあるモデルを考える．$p = 1, 2$ に対し，ノイズを $\{\epsilon_i^{n,p}\}_{i=0}^\infty$ と書き，独立同分布で，未知の $v_{p,*} > 0$ と任意の $q > 0$ に対し，$E[\epsilon_i^{n,p}] = 0$, $E[(\epsilon_i^{n,p})^2] = v_{p,*}$, $E[(\epsilon_i^{n,p})^q] < \infty$ を満たすとする．観測は $Y_i^p = X_{S_i^{n,p}}^p + \epsilon_i^{n,p}$ で与えられるとし，$\{S_i^{n,p}\}_{n,p,i}$, $\{\epsilon_i^{n,p}\}_{n,p,i}$, $(X_t, W_t)_t$ は独立とする．

自然数列 $\{l_n\}_{n=1}^\infty$ をある $\epsilon > 0$ に対し，$l_n \to \infty$, $l_n n^{-1/2+\epsilon} \to 0$ かつ $n^{1/3+\epsilon} l_n^{-1} \to 0$ となるようにとり，$s_m = T l_n^{-1} m$ $(0 \leq m \leq l_n)$ に対し，観測を l_n 個の区間 $\{[s_{m-1}, s_m)\}_{m=1}^{l_n}$ に分けて疑似対数尤度関数を構築することを考える．この疑似対数尤度関数構築の手法は同期観測・ノイズ無しの最尤型推定量を研究している Gloter and Jacod（2001b）のアイディアに基づいており，疑似対数尤度関数の漸近挙動を制御するための技術的な理由によりこのような操作が必要になるが，ℓ_n の取り方は最尤型推定量の漸近分布に影響を与えないことが示される．

区間 $[s_{m-1}, s_m)$ の間の Y^1, Y^2 の観測数をそれぞれ $k_m^1 + 1, k_m^2 + 1$ とし，$\Delta Y_i^p = Y_i^p - Y_{i-1}^p$, $b_m^k(\sigma) = b^k(s_{m-1}, ((k_{m-1}^p)^{-1}\sum_{i; I_i^p \subset [s_{m-2}, s_{m-1})} Y_i^p)_p, \sigma)$, $k_m^p \times k_m^p$ 行列 $M_{p,m}$ を

$$(M_{p,m})_{ij} = \begin{cases} 2 & (i = j) \\ -1 & (|i-j| = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定める．

まずノイズ項 $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従うとすると，$[s_{m-1}, s_m)$ 内の観測 $\Delta Y_i^p, \Delta Y_{i'}^{p'}$ に対し，$p = p'$ の時，

$$E[\Delta Y_i^p \Delta Y_{i'}^{p'} | \mathcal{F}_{s_{m-1}}] \approx |b_m^p(\sigma_*)|^2 (\mathrm{diag}(|I_i^p|)_i)_{ii'} + v_{p,*}(M_{p,m})_{ii'},$$

$p = 1$, $p' = 2$ の時，

$$E[\Delta Y_i^1 \Delta Y_{i'}^2 | \mathcal{F}_{s_{m-1}}] \approx b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma_*) |I_i^1 \cap I_{i'}^2|.$$

よって $Z_m = ((\Delta Y_i^1)_{i;I_i^1 \subset [s_{m-1}, s_m)}, (\Delta Y_j^2)_{j;I_j^2 \subset [s_{m-1}, s_m)})$,

$$\begin{aligned} S_m(\sigma, v) \;=\; & \begin{pmatrix} |b_m^1|^2(\sigma)\mathrm{diag}((|I_i^1|)_i) & b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma)\{|I_i^1 \cap I_j^2|\}_{i,j} \\ b_m^1 \cdot b_m^2(\sigma)\{|I_i^1 \cap I_j^2|\}_{j,i} & |b_m^2|^2(\sigma)\mathrm{diag}((|I_j^2|)_j) \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} v_1 M_{1,m} & 0 \\ 0 & v_2 M_{2,m} \end{pmatrix} \qquad (v = (v_1, v_2)) \end{aligned}$$

に対し，疑似対数尤度関数 $H_n^2(\sigma, v)$ を以下で定める:

$$H_n^2(\sigma, v) = -\frac{1}{2} \sum_{m=2}^{l_n} (Z_m^\top S_m^{-1}(\sigma, v) Z_m + \log\det S_m(\sigma, v)).$$

$v_* = (v_{1,*}, v_{2,*})$ は未知だが，v_* の推定量 $\{\hat{v}_n\}_{n=1}^\infty$ で $\{\sqrt{n}(\hat{v}_n - v_*)\}_{n=1}^\infty$ が tight となるものに対し，σ_* の最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ を

$$\hat{\sigma}_n^2 = \mathrm{argmax}_\sigma H_n^2(\sigma, \hat{v}_n)$$

で与える．上の疑似対数尤度関数の導出ではノイズ項 $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従うことを仮定したが，上のように σ_* と v_* の推定を分離することにより，ノイズ項が非正規でも，H_n^2 を用いて計算される $\hat{\sigma}_n^2$ に対して，ノイズ項が正規の場合と同様の漸近的性質を導くことができる．

観測頻度が高くなれば各 ΔY_i^p におけるノイズ項の寄与が支配的になるので，ノイズ分散 $v_{p,*}$ の一致推定量を作るのは容易である．例えば

$$\hat{v}_{p,n} = (2\ell_{p,n})^{-1} \sum_{i=1}^{\ell_{p,n}} (\Delta Y_i^p)^2$$

ととれば上の条件を満たす．

また，観測時刻列 $\{S_i^{n,p}\}$ に関する以下の条件を仮定する．

[A4] 任意の $\delta > 0$ に対し，$\max_{p,i}(S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}) = O_p(n^{-1+\delta})$ かつ $(\min_{p,i}(S_i^{n,p} - S_{i-1}^{n,p}))^{-1} = O_p(n^{1+\delta})$.

[A5] ある $\eta \in (0, 1/2)$ と連続正値確率過程 $\{a_t^p\}_{0 \le t \le T, p=1,2}$ があって，$\sup_{t \ne s}(|a_t^j - a_s^j|/|t-s|) < \infty$ a.s. かつ $n \to \infty$ の時，

$$n^{1/2} \ell_n^{-1} \max_{1 \le l \le L_n} \left| n^{-1}(s''_{n,l} - s'_{n,l})^{-1} \#\{i; I_i^p \subset [s'_{n,l}, s''_{n,l})\} - a_{s'_{n,l}}^p \right| \to^p 0.$$

ただし，$\{[s'_{n,l}, s''_{n,l})\}_{1 \le l \le L_n} \subset [0, T]$ は任意の disjoint な区間列で

$$0 < \inf_{n,l}(n^{1-\eta}(s''_{n,l} - s'_{n,l})) \le \sup_{n,l}(n^{1-\eta}(s''_{n,l} - s'_{n,l})) < \infty.$$

[A5] は観測数に関して，局所的な大数の法則が成り立つことを意味している．

定理 3.3.（Ogihara, 2015b）[A1], [A2], [A4], [A5] を仮定する．この時，

$$\Gamma_2 = P\text{-}\lim_{n \to \infty} (-n^{-1/2} \partial_\sigma^2 H_n^2(\sigma_*, v_*))$$

が存在し，$\Gamma_2 > 0$ a.s. また，$\mathcal{F}$ と独立な d 次元標準正規分布 ζ に対して，$n \to \infty$ の時，

$$n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2 - \sigma_*) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} \Gamma_2^{-1/2} \zeta, \quad -n^{-1/2} \partial_\sigma^2 H_n^2(\hat{\sigma}_n^2, \hat{v}_n) \to^p \Gamma_2.$$

$\mathcal{Y}(\sigma) = P\text{-}\lim_{n\to\infty}(n^{-1/2}(H_n^2(\sigma,v_*) - H_n^2(\sigma_*,v_*)))$ と置き，$b_t = b(t,X_t,\sigma)$, $\tilde{a}_t^j = a_t^j/v_{j,*}$, $b_{t,*} = b(t,X_t,\sigma_*)$, $B_t = \sqrt{\det(b_t b_t^\top)}$, $B_{t,*} = \sqrt{\det(b_{t,*}b_{t,*}^\top)}$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{Y}(\sigma)\\
&= \int_0^T \left[\frac{\sum_{j=1}^2(|b_t^j|^2 - |b_{t,*}^j|^2)(|b_t^{3-j}|^2\sqrt{\tilde{a}_t^1\tilde{a}_t^2} + \tilde{a}_t^j B_t) - 2(b_t^1\cdot b_t^2 - b_{t,*}^1\cdot b_{t,*}^2)b_t^1\cdot b_t^2\sqrt{\tilde{a}_t^1\tilde{a}_t^2}}{4B_t(\tilde{a}_t^1|b_t^1|^2 + \tilde{a}_t^2|b_t^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1\tilde{a}_t^2}B_t)^{1/2}} \right.\\
&\qquad \left. - \frac{(\tilde{a}_t^1|b_t^1|^2 + \tilde{a}_t^2|b_t^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1\tilde{a}_t^2}B_t)^{1/2} - (\tilde{a}_t^1|b_{t,*}^1|^2 + \tilde{a}_t^2|b_{t,*}^2|^2 + 2\sqrt{\tilde{a}_t^1\tilde{a}_t^2}B_{t,*})^{1/2}}{2} \right] dt.
\end{aligned}
$$

また，この時 $\Gamma_2 = -\partial_\sigma^2\mathcal{Y}(\sigma_*)$ となる．

非同期・ノイズ付のケースでも S_m^{-1} の各要素が非零になり得るということに加え，ノイズ項の共分散行列 $M_{p,m}$ の存在により S_m^{-1} の漸近挙動が非自明となり，H_n^2 の漸近的性質の導出がより困難になる．Gloter and Jacod (2001b) では，同期(等間隔)観測・ノイズ付のケースを扱っており，この場合，X の共分散行列に対応する部分が単位行列のスカラー倍になるので，あるスカラー確率変数 c と単位行列 I に対して，S_m に対応する共分散行列は，

$$cI + vM_{1,m}$$

と書ける．$M_{1,m}$ の固有値は

$$\left\{2\left(1-\cos\left(\frac{i\pi}{k_m^1+1}\right)\right)\right\}_{i=1}^{k_m^1}$$

と求まるので，S_m の固有値は

$$\left\{c + 2v\left(1-\cos\left(\frac{i\pi}{k_m^1+1}\right)\right)\right\}_{i=1}^{k_m^1}$$

となる．この性質が疑似対数尤度関数の漸近的性質を導く上で本質的な役割を果たす．非同期・ノイズ付の場合では，X の共分散行列が非同期性から複雑になり，S_m の固有値を簡単な関数で表すことができないので解析はより困難になる．しかし，$M_{p,m}$ の特殊な漸近的性質を用いることにより，X の共分散行列が単位行列のスカラー倍のケースに帰着して，漸近理論を展開することが可能となる．詳しくは，Ogihara (2015b) の五章を参照されたい．

例として，X が

$$\begin{cases} dX_t^1 = \sigma_{1,*}dW_t^1 \\ dX_t^2 = \sigma_{3,*}dW_t^1 + \sigma_{2,*}dW_t^2 \end{cases}$$

を満たすシンプルなケースを考える．この時，パラメータは $\sigma_* = (\sigma_{1,*},\sigma_{2,*},\sigma_{3,*})$ であり，X は相関付ブラウン運動になる．また，$\langle X^1,X^2\rangle_T = T\sigma_{1,*}\sigma_{3,*}$ となるので，最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2 = (\hat{\sigma}_{1,n}^2,\hat{\sigma}_{2,n}^2,\hat{\sigma}_{3,n}^2)$ を用いた自然な推定量 $T\hat{\sigma}_{1,n}^2\hat{\sigma}_{3,n}^2$ を考えることができ，定理 3.3 の仮定の下，デルタ法を用いることで，

$$n^{1/4}(T\hat{\sigma}_{1,n}^2\hat{\sigma}_{3,n}^2 - \langle X^1,X^2\rangle_T) \to^{s\text{-}\mathcal{L}} V\zeta$$

が示される．ここで Γ_2^{-1} の行列要素を $(\Gamma_2^{-1})_{ij}$ と書く時，

$$V = T^2(\sigma_{3,*}^2(\Gamma_2^{-1})_{11} + 2\sigma_{1,*}\sigma_{3,*}(\Gamma_2^{-1})_{13} + \sigma_{1,*}^2(\Gamma_2^{-1})_{33})$$

である．

次章では，X が一般の (3.1) を満たす拡散過程のケースで，最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^2$ の漸近的な最良

性を議論する．上の相関付ブラウン運動の例では，パラメータ変換を用いることで，$T\hat{\sigma}_{1,n}^2\sigma_{3,n}^2$ が $\langle X^1, X^2\rangle_T$ の推定量として漸近的に最良であることも示される．また，Ogihara (2015b) の三章では，シミュレーションにより，$T\hat{\sigma}_{1,n}^2\sigma_{3,n}^2$ を $\langle X^1, X^2\rangle_T$ の既存の代表的なノンパラメトリック推定量と比較し，高頻度観測において，推定誤差の標本標準偏差が最も小さいことを確認している．そのため，最尤型推定法は漸近理論における最適性が保証されるだけではなく，実際の数値シミュレーションにおいても有用であると言える．

4. 統計モデルの局所漸近混合正規性と推定量の漸近有効性

最尤型推定量の一つのメリットとして，様々なモデルで推定誤差の漸近分散が最小になること (漸近有効性) がある．これは統計モデルの局所漸近混合正規性 (local asymptotic mixed normality, LAMN) と呼ばれる性質から証明される．

定義 4.1. 可測空間 $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)$ 上の確率分布の族 $\{P_{\sigma,n}\}_{\sigma,n}$ が以下を満たすとき，$\sigma = \sigma_*$ で局所漸近混合正規であるという：ある正数列 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と $d\times d$ 対称正定値確率行列 Γ_n, Γ と d 次元確率ベクトル $\mathcal{N}_n, \mathcal{N}$ があって，任意の $u\in\mathbb{R}^d$ に対し，$n\to\infty$ の時，$e_n\to 0$,

$$\log\frac{dP_{\sigma_*+e_nu,n}}{dP_{\sigma_*,n}} - \left(u^\top\sqrt{\Gamma_n}\mathcal{N}_n - \frac{1}{2}u^\top\Gamma_n u\right)\to 0$$

in $P_{\sigma_*,n}$-probability, $\mathcal{N}$ は Γ と独立な d 次元標準正規乱数で

$$(\mathcal{N}_n, \Gamma_n)\to^d(\mathcal{N}, \Gamma).$$

さらに Γ が deterministic の時，$\{P_{\sigma,n}\}$ は局所漸近正規 (locally asymptotic normal, LAN) であるという．

定理 4.1. (Jeganathan, 1983) 確率分布族 $\{P_{\sigma,n}\}_{\sigma,n}$ が $\sigma=\sigma_*$ で LAMN を満たすとする．この時任意の推定量列 $\{V_n\}$ と任意の非減少関数 $l:[0,\infty)\to[0,\infty)$ で $l(0)=0$ を満たすものに対し，

$$\lim_{\alpha\to\infty}\liminf_{n\to\infty}\sup_{|u|\leq\alpha}E_{\sigma_*+e_nu,n}[l(|e_n^{-1}(V_n-\sigma_*-e_nu)|)]\geq E[l(|\Gamma^{-1/2}\mathcal{N}|)]. \tag{4.1}$$

ただし，$E_{\sigma,n}$ は $P_{\sigma,n}$ に関する期待値を表す．

この不等式は minimax 不等式と呼ばれ，パラメータ推定量列 $\{V_n\}$ の推定誤差のリスク量に対する漸近的下界を与える．特に $l(x)=x^2$ の時，上の式は推定誤差の漸近分散の下界を与える．$\sigma=\sigma_*$ におけるリスク量 $E_{\sigma_*,n}[l(|e_n^{-1}(V_n-\sigma_*)|)]$ は自明な推定量 $V_n\equiv\sigma_*$ により最小化される．しかし，実際にはパラメータの真値 σ_* を事前に知ることはできないので，この推定量はたまたま真値を当てただけになる．このような自明な推定量を取り除くために，minimax 不等式ではパラメータの摂動に対する局所的な supremum がとられている．minimax 不等式において等号を満たすような推定量列 $\{V_n\}$ は漸近有効であると言われる．

同期観測でノイズ無しのケースでは，Gobet (2001) により統計モデルの LAMN が示されている．また，同期観測・ノイズ付のケースでは，Gloter and Jacod (2001a) において，拡散係数 $b(t,x,\sigma)$ が x に依存しないケースでの LAN が示されている．非同期観測の場合の LAMN (LAN) に関する結果としては以下がある．

定理 4.2. (Ogihara, 2015a) [A1]–[A3] を仮定する．さらに μ は (t,x,σ) に関して十分なめらかで，$\partial_x\mu, \partial_x b$ は有界かつ，任意の $r\in[0,1], t_1, t_2, x_1, x_2, \sigma$ に対し，

$$(rb(t_1,x_1,\sigma)+(1-r)b(t_2,x_2,\sigma))(rb(t_1,x_1,\sigma)+(1-r)b(t_2,x_2,\sigma))^\top$$

が正定値であるとする．この時，5.2 節の非同期・ノイズ無しの統計モデルに対する LAMN が成立する．

定理 4.3.（Ogihara, 2015b）[A1], [A2], [A4], [A5] を仮定する．さらに $\mu\equiv 0$, $\epsilon_i^{n,p}$ が正規分布に従い，$b(t,x,\sigma)$ が (t,x) に依存しないとする．この時，5.3 節の非同期・ノイズ付の統計モデルに対する LAN が成立する．

定理 4.3 は X がブラウン運動になるようなやや強い仮定を置いている．X がより広い拡散過程のクラスに属する場合にも同様の結果が成り立つと予想されるが，そのような結果はまだ示されていない．X が一般の拡散過程の時，ΔX_k の確率密度関数の解析は困難であるが，Gobet (2001), Ogihara (2015a)では，Malliavin Calculus を用いたアプローチにより尤度比の挙動を解析している．非同期・ノイズ付のケースでも同等の技術が必要になると予想される．

定理 3.3 の stable convergence の結果は，(4.1)式の l が有界連続関数で $u=0$ の時の結果に対応する．最尤型推定量 $\hat{\sigma}_n^1$, $\hat{\sigma}_n^2$ の漸近有効性を示すには，$l(x)=x^2$ 等の l が多項式増大関数の場合や $u\neq 0$ の摂動に関する sup を扱う必要があり，定理 3.3 よりもやや強い仮定が必要となる．これらの結果は，次の章の推定量のモーメント収束の結果を用いることで示すことができる．

5. ベイズ型推定量とモーメント収束

この章における結果は，非同期・ノイズ無しの場合も同様のものが得られるが，ここでは非同期・ノイズ付のケースのみを扱う．

事前確率密度 $\pi(\sigma)$ が有界連続関数で $\inf_\sigma \pi(\sigma)>0$ を満たすとする．この時ベイズ型推定量 $\tilde{\sigma}_n^2$ を以下で定義する：

$$\tilde{\sigma}_n^2=\left(\int \exp(H_n^2(\sigma,\hat{v}_n))\pi(\sigma)d\sigma\right)^{-1}\int \sigma\exp(H_n^2(\sigma,\hat{v}_n))\pi(\sigma)d\sigma.$$

最尤型推定量の数値計算ではパラメータに関する非凸最小化問題を解くことになり，パラメータの次元を上げると困難になることがあるため，MCMC を用いた計算アルゴリズムが使えるベイズ型推定量の方が計算が容易なことがある．

一方，ベイズ型推定量はその定義にパラメータに関する積分を含むため，推定誤差が大きくなる事象に対するより精緻な評価が必要となる．Yoshida (2011)において，コントラスト推定量に対して，コントラスト関数のモーメント条件などの条件から推定量の大偏差の評価を得る手法が開発され，我々の疑似対数尤度関数に対しても適用できる．

以下の仮定を考える．

[B1] 1. ある正定数 C があって，任意の $0\le 2i+j\le 4$, $0\le k\le 4$, $x\in\mathbb{R}^2$ に対して，

$$\sup_{t\in[0,T],\sigma\in\Lambda}(|\partial_t^i\partial_x^j\partial_\sigma^k\mu(t,x,\sigma)|\vee|\partial_t^i\partial_x^j\partial_\sigma^k b(t,x,\sigma)|)\le C(1+|x|)^C.$$

2. $\inf_{t,x,\sigma}\det bb^\top(t,x,\sigma)>0$.
3. 任意の $q>0$ に対して，$E[|X_0|^q]<\infty$.

[B2] ある $\eta\in(0,1/2)$, $\delta>0$ と正値確率変数 $\{a_t^j\}_{t\in[0,T],j=1,2}$ があって，任意の $q>0$ に対して

$$E\left[\sup_{j,t>s}\frac{|a_t^j-a_s^j|^q}{|t-s|^q}\right]<\infty,\quad E\left[\sup_{j,t}|a_t^j|^q\right]\vee E\left[\sup_{j,t}(|a_t^j|^{-q})\right]<\infty,$$

かつ

$$\sup E\left[\left(n^{1/2+\delta}l_n^{-1}\max_{1\leq l\leq L_n}\left|n^{-1}(s''_{n,l}-s'_{n,l})^{-1}\#\{i; I_i^j\subset(s'_{n,l},s''_{n,l})\}-a^j_{s'_{n,l}}\right|\right)^q\right]<\infty.$$

ただし，最後の式における sup は，任意の自然数 n と [A5] と同じ区間列 $\{[s'_{n,l},s''_{n,l})\}_{1\leq l\leq L_n,n\in\mathbb{N}}$ の範囲に対してとる．さらに，ある正定数 γ があって，$b_n^{3/7+\gamma}l_n^{-1}\to 0$ かつ任意の $\epsilon>0$ と $q>0$ に対して $n\to\infty$ の時，

$$E\left[\left(n^{1-\epsilon}\max_{p,i}(S_i^{n,p}-S_{i-1}^{n,p})\right)^q\right]\to 0,\quad E\left[\left(n^{1+\epsilon}\min_{p,i}(S_i^{n,p}-S_{i-1}^{n,p})\right)^{-q}\right]\to 0.$$

[B3] $\inf_{t,x}\inf_{\sigma_1\neq\sigma_2}(|bb^\top(t,x,\sigma_1)-bb^\top(t,x,\sigma_2)|/|\sigma_1-\sigma_2|)>0.$

[B4] ノイズ分散 v_* の推定量 $\hat{v}_n$ に対して，$\hat{v}_n>0$ a.s. かつ任意の $q>0$ に対して

$$\limsup_n E[\hat{v}_n^{-q}]<\infty,\quad \text{and}\quad \sup_n E[|\sqrt{n}(\hat{v}_n-v_*)|^q]<\infty.$$

定理 5.1.（多項式型大偏差不等式，Ogihara, 2015b）[B1]–[B4] を仮定する．この時，任意の $L>0$ に対して，ある正定数 C_L があって，任意の $r>0$ と $n\in\mathbb{N}$ に対し，

$$P\left[\sup_{u\in V_n(r)}\exp(H_n^2(\sigma_*+n^{-1/4}u,\hat{v}_n)-H_n^2(\sigma_*,\hat{v}_n))\geq e^{-r/2}\right]\leq C_Lr^{-L}.$$

ただし，$V_n(r)=\{u\in\mathbb{R}^d;|u|\geq r,\sigma_*+n^{-1/4}u\in\Lambda\}$.

定理 5.1 から任意の $p>0$ に対し，$L>p$ として，

$$E[|n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2-\sigma_*)|^p]=\int_0^\infty pt^{p-1}P[|n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2-\sigma_*)|\geq t]dt\leq\int_0^\infty pt^{p-1}(1\wedge(C_Lt^{-L}))dt<\infty.$$

つまり最尤型推定量の誤差のモーメントが収束する．

さらに最尤型・ベイズ型推定量に対して以下が成立．

定理 5.2.（Ogihara, 2015b）[B1]–[B4] を仮定する．この時，任意の有界確率変数 $\boldsymbol{Y}$ と任意の高々多項式増大の連続関数 f に対して $n\to\infty$ の時，

$$E[\boldsymbol{Y}f(n^{1/4}(\hat{\sigma}_n^2-\sigma_*))]\to E[\boldsymbol{Y}f(\Gamma_2^{-1/2}\zeta)],$$
$$E[\boldsymbol{Y}f(n^{1/4}(\tilde{\sigma}_n^2-\sigma_*))]\to E[\boldsymbol{Y}f(\Gamma_2^{-1/2}\zeta)].$$

参 考 文 献

Aït-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2014). *High-frequency Financial Econometrics*, Princeton University Press, Princeton.

Bandi, F. M. and Russell, J. R. (2008). Microstructure noise, realized variance, and optimal sampling, *Review of Economic Studies*, **75**, 339–369.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2008). Designing realized kernels to measure the ex post variation of equity prices in the presence of noise, *Econometrica*, **76**, 1481–1536.

Barndorff-Nielsen, O. E., Hansen, P. R., Lunde, A. and Shephard, N. (2011). Multivariate realised kernels: Consistent positive semi-definite estimators of the covariation of equity prices with noise and non-synchronous trading, *Journal of Econometrics*, **162**, 149–169.

Bibinger, M. (2011). Efficient covariance estimation for asynchronous noisy high-frequency data, *Scandinavian Journal of Statistics*, **38**, 23–45.

Bibinger, M. (2012). An estimator for the quadratic covariation of asynchronously observed Itô processes with noise: Asymptotic distribution theory, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 2411–2453.

Christensen, K., Kinnebrock, S. and Podolskij, M. (2010). Pre-averaging estimators of the ex-post covariance matrix in noisy diffusion models with non-synchronous data, *Journal of Econometrics*, **159**, 116–133.

Fukasawa, M. and Rosenbaum, M. (2012). Central limit theorems for realized volatility under hitting times of an irregular grid, *Stochastic Processes and Their Applications*, **122**, 3901–3920.

Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1994). Estimation of the diffusion coefficient for diffusion processes: Random sampling, *Scandinavian Journal of Statistics*, **21**, 193–221.

Gloter, A. and Jacod, J. (2001a). Diffusions with measurement errors. I. Local asymptotic normality, *ESAIM Probability and Statistics*, **5**, 225–242.

Gloter, A. and Jacod, J. (2001b). Diffusions with measurement errors. II. Optimal estimators, *ESAIM Probability and Statistics*, **5**, 243–260.

Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: A Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**, 359–379.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2008). Asymptotic normality of a covariance estimator for nonsynchronously observed diffusion processes, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **60**, 367–406.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2011). Nonsynchronous covariation process and limit theorems, *Stochastic Processes and Their Applications*, **121**, 2416–2454.

Hoffmann, M., Rosenbaum, M. and Yoshida, N. (2013). Estimation of the lead-lag parameter from non-synchronous data, *Bernoulli*, **19**, 426–461.

Huth, N. and Abergel, F. (2014). High frequency lead/lag relationships — Empirical facts, *Journal of Empirical Finance*, **26**, 41–58.

Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1972). The asymptotic behavior of certain statistical estimates in the smooth case. I. Investigation of the likelihood ratio, *Akademija Nauk SSSR. Teorija Verojatnosteĭ i ee Primenenija*, **17**, 469–486.

Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1973). Asymptotic behavior of certain statistical estimates. II. Limit theorems for a posteriori density and for Bayesian estimates, *Akademija Nauk SSSR. Teorija Verojatnosteĭ i ee Primenenija*, **18**, 78–93.

Ibragimov, I. A. and Has'minskiĭ, R. Z. (1981). *Statistical Estimation*, Springer-Verlag, New York, Berlin.

Jacod, J. and Protter, P. (2012). *Discretization of Processes*, Springer, Heidelberg.

Jacod, J. and Shiryaev, A. N. (2003). *Limit Theorems for Stochastic Processes*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York.

Jacod, J., Li, Y., Mykland, P. A., Podolskij, M. and Vetter, M. (2009). Microstructure noise in the continuous case: The pre-averaging approach, *Stochastic Processes and Their Applications*, **119**, 2249–2276.

Jeganathan, P. (1983). Some asymptotic properties of risk functions when the limit of the experiment is mixed normal, *Sankhyā Series A*, **45**, 66–87.

Koike, Y. (2016). On the asymptotic structure of Brownian motions with an infinitesimal lead-lag effect, arXiv:1601.03614.

Koike, Y. (2017). Time endogeneity and an optimal weight function in pre-averaging covariance estimation, *Stochastic Inference for Stochastic Processes*, **20**, 15–56.

Li, Y., Mykland, P. A., Renault, E., Zhang, L. and Zheng, X. (2014). Realized volatility when sampling times are possibly endogenous, *Econometric Theory*, **30**, 580–605.

Ogihara, T. (2015a). Local asymptotic mixed normality property for nonsynchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **21**, 2024–2072.

Ogihara, T. (2015b). Parametric inference for nonsynchronously observed diffusion processes in the presence of market microstructure noise, arXiv:1412.8173.

Ogihara, T. and Yoshida, N. (2014). Quasi-likelihood analysis for nonsynchronously observed diffusion processes, *Stochastic Processes and Their Applications*, **124**, 2954–3008.

Podolskij, M. and Vetter, M. (2009). Estimation of volatility functionals in the simultaneous presence of microstructure noise and jumps, *Bernoulli*, **15**, 634–658.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2013). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, *Stochastic Processes and Their Applications*, **123**, 2851–2876.

Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, **63**, 431–479.

Modeling Intraday Stock Price Dynamics Using Diffusion Processes and Estimating Volatility and Covariation

Teppei Ogihara[1,2]

[1]The Institute of Statistical Mathematics
[2]PRESTO, Japan Science and Technology Agency

This paper introduces modeling of intraday stock price dynamics using diffusion processes, and statistical inference of volatility and covariation. In particular, we study the problems of ‘market microstructure noise’ and ‘nonsynchronous observations’. First, we look back at the history of nonparametric estimation of volatility and covariation. Then we construct maximum-likelihood-type estimators and show their asymptotic mixed normality. We also study local asymptotic mixed normality of statistical models, which is significant when we discuss asymptotic optimality of estimators. Finally, we construct a Bayes-type estimator and study its asymptotics.

Key words: Asymptotic efficiency, high-frequency data, local asymptotic mixed normality, market microstructure noise, maximum-likelihood-type estimation, nonsynchronous observations.