

# 金融危機前後の商品先物取引における証拠金不足 に起因するリスクの評価

青木 義充<sup>†</sup>

(受付 2013 年 10 月 9 日 ; 改訂 2014 年 1 月 31 日 ; 採択 3 月 13 日)

## 要 旨

2008 年後半に起こった金融危機前後の商品先物相場が激しく変動した状況下で、商品先物への投資参加者が負うべきリスクの定義と評価を行った。商品先物へ投資する際には、規定の証拠金を預託する。価格が下落し、損失が預託した証拠金の半額を上回った際に、取引を続けるためには追加の証拠金(追証)を預託する必要がある。追証を預託せず取引を中止する場合は、仲介者が翌日以降に当該投資家の資産を清算する。清算時点の損失額が証拠金を上回った場合、その超過分を一時的に補填する必要がある。本稿では、仲介者が清算時に損失額を補填する事象を投資家のデフォルトと呼ぶ。当時、東京商品取引所が採用していた価格変動と取引機会に制約を課す値幅制限制度が、追証とデフォルトの発生に与える影響について分析した結果、価格変動を抑える機能により価格変動が激しい期間では追証の発生とデフォルト時の補填額を抑制する働きがある一方で、取引機会が制約されるためデフォルト発生率が上昇することが示された。

キーワード：商品先物、値幅制限、取引追証拠金、金融危機。

## 1. はじめに

2008 年後半に起こった金融危機の前後では商品先物相場も激しく変動した。本稿では、東京商品取引所(東商取)にこの時期に上場された商品先物に着目し、投資参加者が負っていたリスクの評価と、当時の取引制度が与えた影響について分析した結果を報告する。なお 2008 年当時は、東京工業品取引所(東工取)という名称であったが、本稿では一貫して東京商品取引所(東商取)と呼ぶ。

本稿での評価対象リスクは、「取引追証拠金(追証)が発生するリスク」と「投資家のデフォルトリスク」の 2 種類である。商品先物へ投資を始める際には、定められた取引本証拠金を預託する必要がある。取引本証拠金は、取引所が設定する取引本証拠金基準額をもとに商品取引員(仲介者)が設定したものである。投資家が取引本証拠金を預託し商品先物に投資した後、価格の下落によって保有資産の累積損失額が取引本証拠金基準額の半額を上回った場合、投資家には「追証を入金し取引を継続する」または「追証を入金せずに取引を終了し、保有資産の清算をする」の 2 つの選択肢が存在する。本稿では、この選択が迫られることを「追証の発生」と定義する。投資家が取引終了を選択した場合、商品取引員は翌日以降に当該投資家の保有資産を清算する。価格が下落し続けた結果、清算時に預託された取引本証拠金を上回る損失が起こった場合は、一

<sup>†</sup> 総合研究大学院大学 複合科学研究科統計科学専攻：〒 190-8562 東京都立川市緑町 10-3

時的に損失額の超過分を都合する必要がある。このように、清算時に預託された取引本証拠金を上回る損失が出た場合を本稿では「投資家のデフォルト」と呼ぶ。以降では2種類のリスクをまとめて単に信用リスクと呼ぶことにする。

商品先物のリスク評価に関する先行研究は、VaR (Value at Risk) などのリスク指標の計測をはじめとした市場リスクを対象としたものが多い (Giot and Laurent, 2003; Chiu et al., 2006; 青木他, 2012 など)。一方で、信用リスクは取引制度の影響が大きく、取引所ごとの特殊性が反映されたものであるため、その評価法を論じたものは少なく、東商取の商品先物に関する信用リスクを対象とした先行研究は見当たらない。

2008年当時の東商取では、日々の価格変動に制限を課す値幅制限制度 (日本商品先物取引協会, 2007a, 2007b) が採用されており、現在のサーキットブレーカ制度 (2009年5月より導入) とは異なっていた。本研究は旧制度の下での議論であり、今日的な観点から分析結果の実用性は必ずしも高いとは言えないが、従来取り扱われていない商品先物取引における信用リスクの評価法と、相場が荒れていたという特殊な時期に東商取が採用していた旧制度の影響を振り返って分析したという点で記録にとどめる価値があると判断し研究ノートとしてまとめたものである。

東商取で採用していた値幅制限とは、不確定な事象によって相場が急激に変動することを防ぐため、1日の価格変動に上下限を設ける制度である。値幅制限のもとでの価格変動をモデル化する際には、制度によって打ち切られた価格の扱いが問題となり、先行研究では値幅制限がなければ実現したであろう価格を制度の影響を受けない価格 (真の価格) として導入し、実際の取引所で取引されている価格を値幅制限のもとで観測される価格 (観測価格) として、2つの価格系列を定義している (Brennan, 1986; Chou, 1997; Wei, 2002; Wei and Chiang, 2004; Hsieh and Yang, 2009; Lin and Chou, 2011; 青木 他, 2012)。

本稿では、打ち切りのない真の価格変動をモデル化する一方で、打ち切りの情報を観測方程式での制約条件とすることで、価格変動モデルから切り離している。ただし、真の価格は一部観測が不可能であるため、観測できなかった時点の真の価格を補間してからパラメタを推定すべく、マルコフ連鎖モンテカルロ法 (MCMC 法) を用いて、真の価格のデータ補間と未知パラメタの推定を同時に行うアルゴリズムを構築する。真の価格変動は自己回帰モデルで定式化するが、高次のラグを持つモデルでも定常性を満たす領域が複雑にならないようサンプリング対象を自己回帰係数から偏自己相関係数に変換するサンプリング法 (Marriott et al., 1996) に修正を加え、データ補間と同時に自己回帰係数を推定するアルゴリズムを提案する。

信用リスクの評価に際しては、金、白金、ガソリン、原油の商品先物価格に対して、データ補間とパラメタ推定を同時に行うアルゴリズムを適用し、選択されたモデルに基づき、追証発生リスクとデフォルトリスクに値幅制限が与える影響を分析する。実証分析にもとづく数値実験からは、値幅制限には、価格変動に上限を課すために価格変動が大きい時期については追証発生率をわずかながら抑え、デフォルト時に商品取引員が補填する金額を抑制する効果がある一方で、取引を停止させてしまうことからデフォルトの発生率を上昇させる可能性があることが読み取れる。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では、価格変動と証拠金取引のモデル化を行う。価格変動については、値幅制限の影響を受けない真の価格変動にもとづく価格変動モデルを構築し、第3節では、一部観測不能となる真の価格のデータ補間法と自己回帰モデルの未知パラメタの推定方法の概略を述べ、具体例は付録に記す。第4節では、証拠金取引をモデル化したのちに、追証とデフォルト発生の定式化を行い、計測方法の概略を述べる。第5節では、金、白金、ガソリン、原油の価格を用いた実証分析と数値実験を行い、第6節では、結論と今後の課題についてまとめる。

## 2. 値幅制限と価格変動モデル

本稿では、値幅制限下の取引所で取引される価格の背後に、制度の影響を受けない新たな価格系列(真の価格)を導入し、真の価格変動にもとづくモデル化を行う。また、価格の変動については、値幅制限と証拠金の関係を論じた Brennan(1986)で提唱されたように、収益率ではなく価格差にもとづいて定式化する。

### 2.1 真の価格と観測価格

本稿では、値幅制限がなければ実現したであろう価格を、真の価格とし、実際の取引所で取引されている価格を、値幅制限のもとで観測される価格(観測価格)と呼ぶ。いま、時点  $t$  における観測価格を  $P_t$ 、真の価格を  $X_t$  とすると、両者の関係は

$$(2.1) \quad P_t = \begin{cases} P_{t-1} + L & , X_t - P_{t-1} \geq L \\ X_t & , |X_t - P_{t-1}| < L \\ P_{t-1} - L & , X_t - P_{t-1} \leq -L \end{cases}$$

と表せる。ここで、 $L$  は 1 日における価格変動の上限幅(制限値段幅)であり、定義は取引所の制度によって異なる。東商取では、毎月末に次の 1 ヶ月間の制限値段幅  $L$  を公表していた。2008 年 5 月から 2009 年 4 月までにおける制限値段幅の推移は、金は 150 円、白金は 300 円に 1 年間固定されており、ガソリン、原油は、2008 年 5 月から 7 月までが 2,700 円、それ以降は 3,600 円に固定されていた。このように、東商取での制限値段幅は時点  $t$  に伴って確率的に変動するものではなく、一定期間の値を確定的なものとして事前に発表していたため、本稿では  $L$  を定数として扱う。

つぎに、 $L$  を定数とした下で、複数期間に渡る観測価格  $P_t$  と真の価格  $X_t$ 、それぞれの前日差  $\Delta P_t := P_t - P_{t-1}$  と  $\Delta X_t := X_t - X_{t-1}$  の関係性について述べる。

図 1 の(a)の通り、 $X_t$  が急激な上昇をしても、値幅制限により変動が抑制された  $P_t$  は緩やかな上昇を示す。 $X_t$  は、 $t=2$  で大きく上昇、 $t=3$  で上昇が和らぎ、 $t=4$  でやや下落するような激しい変動であっても、同時期の  $P_t$  は、値幅制限によって上昇し尽くせなかった影響が翌日以降にも残るために、 $t=2, 3$  で連続してストップ高となり、 $t=4$  でも上昇が続くように、緩やかな変動を示している。また、 $X_t \neq P_t$  となる時点は  $t=2, 3$  であるが、 $\Delta X_t \neq \Delta P_t$  となる時点は、 $t=2, 3, 4$  の 3 時点となり、特に  $\Delta X_4$  と  $\Delta P_4$  では正負が逆になっている。この図に例示される通り、本来であれば価格が急激に変動する状況であっても、値幅制限によって緩やかに変動し当日に反映しきれなかった価格の変動要因が翌日以降に持ち越されることに注意が必要である。

### 2.2 価格変動モデルの時系列構造

観測価格の前日差  $\Delta P_t$  を直接モデル化しようと思うと、値幅制限によって値域に制限があるため、イノベーションに切断処理を含めなければならず、モデルが複雑になる。したがって、本稿では、値幅制限の影響を受けない真の価格の前日差  $\Delta X_t$  に時系列モデルを仮定し、

$$(2.2) \quad P_t = X_t \times I_{\{|X_t - P_{t-1}| < L\}}(t) + (L + P_{t-1}) \times I_{\{X_t - P_{t-1} \geq L\}}(t) \\ + (-L + P_{t-1}) \times I_{\{X_t - P_{t-1} \leq -L\}}(t)$$

$$(2.3) \quad \Delta X_t = \mu_p + \sum_{k=1}^p \phi_{pk} \Delta X_{t-k} + \varepsilon_{p,t}, \quad \varepsilon_{p,t} \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0, \sigma_p^2)$$

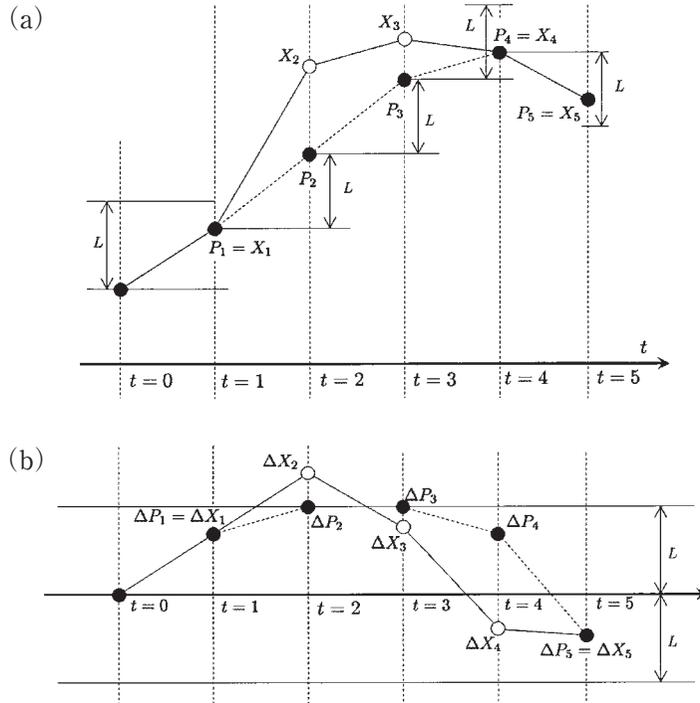


図 1. 真の価格  $X_t$  と商品先物価格  $P_t$  の関係. (a) 真の価格  $X_t$  と商品先物価格  $P_t$  の関係, (b) 真の価格の前日差  $\Delta X_t$  と商品先物価格の前日差  $\Delta P_t$  の関係.

と定義する. ここで,  $I_A(t)$  は指示関数であり,  $t \in A$  では 1, それ以外の場合では 0 をとる. また, 真の価格は値幅制限の影響を受けないため, (2.3) に示す通り, イノベーションに打ち切りの条件を含める必要はなく, 値幅制限による打ち切りを観測方程式(2.2)での制約として捉え,  $\Delta X_t$  のモデル(2.3)と切り離して考える.

青木 他(2012)では  $\Delta X_t$  に定数項のない 1 次の自己回帰モデルを当てはめているが, 本稿では  $\mu_p$  を導入し, より高次の自己回帰モデルまで考慮する. 収益率にせよ価格の前日差にせよ, 金融時系列の変化分では平均構造に顕著な過去依存性が見られることは稀であり, 仮に検出されても, それで説明できる変動の程度に限りがあることはしばしば経験的に指摘されている(Tsay, 2002, 3.2 節など). 本稿で高次の自己回帰まで含めることには, 可能性として探索範囲を広くとる以上の意味合いはない.  $\mu_p$  は価格前日差の自己回帰モデルにおける切片であるため価格水準では線形トレンドに対応する. 本稿のモデルが機能する局面は値幅制限に多く抵触するような期間であるが, ストップ高・ストップ安が数多く起こる期間は, 実際の商品先物価格の観察からは価格の上昇・下落が続きやすく, 短期的に価格水準がトレンド構造を持つと考えられるため,  $\mu_p$  をモデルに導入したほうが良い.

### 3. 自己回帰モデルの推定

本稿では, 自己回帰係数の推定に際し MCMC 法を用いたベイズ推定を行うが, 標準的な自己回帰係数の推定法(Chib and Greenberg, 1994; 伊庭 他, 2005 の 4 章など)とは異なり, Marriott

et al.(1996)が提唱した, Levinson-Durbin アルゴリズム (Brockwell and Davis, 1991 の Chapter 5.2; 北川, 2005 の 7 章を参照)を利用してサンプリング対象を自己回帰係数から偏自己相関係数に変換する手法を採用する. 偏自己相関係数は定常性を満たす領域が平易であるため, 自己回帰係数のサンプリングよりも簡便になるという利点がある. そのため, 本稿では Marriott et al. (1996)の推定アルゴリズムを採用するが, 本稿で提唱する定数項をもつ自己回帰モデルへの適用のため, 推定アルゴリズムを微修正している.

本稿で提案する推定アルゴリズムは, 「データ補間: 値幅制限に抵触し真の価格が観測不能となった時点で, 真の価格の前日差を補間」と「未知パラメタ推定: データ補間された真の価格の前日差をもとに, 未知パラメタを推定」の2段階で構成されている. 本節では, 本稿のモデリングの特徴を示すうえで必要な個所に焦点をあてて推定アルゴリズムの概要を示し, アルゴリズムの詳細については  $p = 2$  の場合を例にとり付録で解説する.

### 3.1 データ補間

本節では, パラメタ推定に先立ち, 真の価格の前日差  $\Delta X_t$  の算出方法について述べる. 値幅制限に抵触し商品先物価格が打ち切られた場合, 真の価格を観測することはできないため, データ補間を行う必要がある. なお, 値幅制限に抵触しているか否かは,  $|\Delta P_t| = L$  であるかを確かめればよく,  $\Delta P_t = L$  はストップ高,  $\Delta P_t = -L$  はストップ安である.

はじめに, 値幅制限に抵触しなかった場合,  $|\Delta P_t| < L$  のときについて考えよう. 値幅制限に抵触しなかった場合であっても  $\Delta P_t = \Delta X_t$  とは限らない(図 1 における  $t = 4$  時点を参照). そのため, 次の関係式

$$\Delta X_t = X_t - X_{t-1} = P_t - X_{t-1} = \sum_{k=1}^t \Delta P_k - \sum_{k=1}^{t-1} \Delta X_k$$

を用いて算出する.

続いて, 値幅制限に抵触した場合のデータ補間法について述べる.

いま, ストップ高に抵触した場合の観測価格は  $P_t = P_{t-1} + L$  であり, その前日差は  $\Delta P_t = L$  となる. このとき, 真の価格  $X_t$  は観測不能であったが, 観測価格  $P_t$  と真の価格  $X_t$  の関係式 (2.1) より, その値は  $X_t \geq P_{t-1} + L$  であったと考えられる. データ補間にあたっては  $X_t$  の従う分布からのサンプリングを利用したいが, 本稿におけるモデル化の対象は  $X_t$  ではなく  $\Delta X_t$  であり, 本稿では  $\Delta X_t$  の従う分布の利用が可能である. そのため, ストップ高に抵触した場合の  $X_t$  の値域ではなく,  $\Delta X_t$  の値域を求める必要がある. (2.1) より,

$$X_t - P_{t-1} = \sum_{k=1}^t \Delta X_k - \sum_{k=1}^{t-1} P_k = \Delta X_t + \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

が得られるため, ストップ高に抵触した時点での真の価格の前日差  $\Delta X_t$  の値域は,

$$\Delta X_t \geq L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

であったと考えられる.

いま,  $\Delta X_t$  が AR(0) モデルに従うと仮定すれば,  $1 \leq t \leq n$  において  $\Delta X_t \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$  であるため, ストップ高に抵触した場合の  $\Delta X_t$  のデータ補間は,

$$\Delta X_t \sim TN_{(L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k), +\infty)}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

からのサンプリングを考えればよい. ここで,  $TN_A(\mu, \sigma^2)$  は, 平均  $\mu$ , 分散  $\sigma^2$ , 区間  $A$  で切断

される切断正規分布である.

一方で, ストップ安に抵触した場合の  $\Delta X_t$  の値域は,

$$\Delta X_t \leq -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k)$$

と考えられるため,  $\Delta X_t$  のデータ補間は,

$$\Delta X_t \sim TN_{(-\infty, -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k))}(\mu_0, \sigma_0^2)$$

からのサンプリングを行えばよい.

これまでに述べた  $\Delta X_t$  の値の算出法をまとめると, 値幅制限に抵触していない場合には,

$$(3.1) \quad \Delta X_t = \sum_{k=1}^t \Delta P_k - \sum_{k=1}^{t-1} \Delta X_k$$

から算出すればよく, ストップ高に抵触した場合には,

$$(3.2) \quad \Delta X_t \sim TN_{(L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k), +\infty)}(u_{p,t}, v_{p,t}^2)$$

ストップ安に抵触した場合には,

$$(3.3) \quad \Delta X_t \sim TN_{(-\infty, -L - \sum_{k=1}^{t-1} (\Delta X_k - \Delta P_k))}(u_{p,t}, v_{p,t}^2)$$

より, それぞれ発生させればよい. 以上の (3.1) から (3.3) を  $t=1$  から  $n$  まで順々に適用していくことで, MCMC 法の各ステップにおける  $\Delta X_t$  が得られる. ただし, 仮定するモデルに応じて  $\Delta X_t$  が従う分布は異なり, (3.2) と (3.3) の  $u_{p,t}$  と  $v_{p,t}^2$  が変化していく. 参考までに, AR(1) モデルを仮定した場合の  $\Delta X_t$  の従う分布は以下のように計算できる.

いま,  $\Delta X_t$  が AR(1) モデルに従うと仮定したとき,  $\Delta X_1$  が与えられた場合の条件付尤度は,

$$\prod_{k=2}^n (2\pi\sigma_1^2)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2} (\Delta X_k - \mu_1 - \phi_{11}\Delta X_{k-1})^2 \right\}$$

で与えられる. したがって,  $\Delta X_t$  は  $t$  の値に伴って変化する平均と分散パラメタをもつ正規分布  $N(u_{1,t}, v_{1,t}^2)$  に従う. 具体的に  $2 \leq t \leq n-1$  の場合は,

$$u_{1,t} = \frac{(1 - \phi_{11})\mu_1 + \phi_{11}(\Delta X_{t-1} + \Delta X_{t+1})}{1 + \phi_{11}^2}, \quad v_{1,t}^2 = \frac{\sigma_1^2}{1 + \phi_{11}^2}$$

であり,  $t=n$  の場合は,

$$u_{1,t} = \mu_1 + \phi_{11}\Delta X_{t-1}, \quad v_{1,t}^2 = \sigma_1^2$$

である.

以上を  $t=1$  から  $n$  まで行っていくことで, MCMC 法の各ステップにおける真の価格の前日差を生成する.

### 3.2 パラメタ推定

未知パラメタ推定のためのサンプリングは, データ補間が行われた後に実行するため, 以降の説明では少なくとも1度データ補間のサンプリングが行われており, その意味で MCMC の第  $i$  ステップでの時系列  $\Delta X_t[i]$ ,  $t=1, 2, \dots, n$  が得られているものとする.

パラメタの発生手順は,  $\mu_p$ ,  $\sigma_p^2$  をそれぞれ発生させた後に, 自己回帰係数のサンプリングを行う. 次数が2以上の場合には,  $p$  次までの自己回帰係数を Levinson-Durbin アルゴリズムで

示される関係式に基づいて  $p$  次までの偏自己相関係数に変換することで、定常性を満たす領域からのサンプリングを簡便に行う。未知パラメタのサンプリングを終えた後には、次のステップに移りデータ補間に戻る。なお、具体的なサンプリング法については、次数 2 の自己回帰モデルを仮定した場合を例にとり付録で説明している。

### 3.3 条件付事後分布の収束とサンプリングの効率性

条件付事後分布の収束については、Geweke の収束判定法を用いる (Geweke, 1992; 渡部・大森, 2000)。Geweke の収束判定法とは、サンプル発生数が  $M$  回のときに、初期値に依存する最初の  $N$  回を捨てた残りの  $M - N$  個のサンプルを 2 つの集団に分け、それぞれの平均値が等しいかどうかを検定する方法である。本稿では Geweke (1992) に従い、始めから  $0.1 \times (M - N)$  個、後ろから  $0.5 \times (M - N)$  個の 2 つに分ける。ここで、収束判定に用いる統計量は、帰無仮説：「両者の平均が等しい」のもとでは標準正規分布に従う。

次にサンプリング効率を調べるために Chib (2001) の非効率因子 (Inefficiency Factor, IF) を計算する。IF は、ランダム・サンプリングで得られた標本から計算する標本平均の分散と同じ分散となるためには何倍の標本数が必要であることを示す指標であり、 $IF = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \hat{\rho}_l$  で定義される。ここで、 $\hat{\rho}_l$  は  $l$  次の標本自己相関係数であるが、本稿では、大塚 (2011)、各務 他 (2011) にならない、自己相関係数が有意でなくなる次数で切断し、それ以降の高次の自己相関係数を 0 とする。

本稿のパラメタ推定法では、サンプリング対象を自己回帰係数から偏自己相関係数に変換しているため、AR(2) モデルを仮定した場合は、サンプリング対象は  $\phi_{11}$  と  $\phi_{22}$  であり、 $\phi_{21}$  の推定値は、各ステップでの  $\phi_{21}[i]$  の平均値は用いずに、 $\phi_{11}$ 、 $\phi_{22}$  の推定値を求めた後に Levinson-Durbin アルゴリズムを利用して算出する。また、 $\phi_{21}$  はサンプリング対象でなく条件付事後分布を計算していないため、Geweke の収束判定統計量、IF は計測しない。

## 4. 信用リスク

本節では、取引開始時点で預託した取引本証拠金の不足によって発生する 2 つのリスク「取引追証証拠金(追証)発生リスク」「投資家のデフォルトリスク」の定義と評価法について述べる。東商取の商品先物に投資するに当たっては、取引する商品ごとに定められた取引本証拠金を預託する必要がある。取引本証拠金は、東商取が定めた取引本証拠金基準額をもとに、商品取引員(仲介者)が個々に設定していた。なお、東商取は毎月末に次の 1 ヶ月間の取引本証拠金基準額を公表していた。一般的に取引本証拠金は、取引本証拠金基準額に金額を上乗せする形で定められていたため、厳密には取引本証拠金は取次先である商品取引員によって金額が異なっている。しかしながら、追証の発生条件は、制度上、取引本証拠金基準額によって定められている点に加え、「投資家のデフォルトリスク」の評価においては商品取引員にとって好ましくない状況の下での考察を行うという観点から、本稿では取引本証拠金基準額と取引本証拠金の金額が等しいという前提をおく。

### 4.1 リスクの定式化

追証とデフォルトの発生条件は、投資家の保有資産の累積損失額を計算する必要がある。取引所での価格  $P_t$  は商品の受け渡し時に用いる単位「呼値」に対応したものであり、実際の投資家が用いる取引単位「枚」とは異なっており、例えば、白金の呼値は 1g であるが 1 枚当たりの取引単位は 500g であるため、白金の価格が 1 円変動した場合に投資家の資産は 500 円変動する。この呼値と 1 枚当たりの取引単位の間を倍率  $\eta$  で表すと、取引所での価格変動が  $\Delta P_t$  の場合、

投資家の保有資産の変動は  $\eta \Delta P_t$  と表せる。その他の商品では、金が呼値 1g に対して 1 枚当たりの取引単位は 1kg であり、 $\eta = 1000$  である。ガソリンと原油は、呼値 1kl に対して取引単位が 50kl であるので  $\eta = 50$  である。なお、取引所における価格の最小変動幅を呼値単位と呼び、その値は商品ごとに異なっている。金、白金は 1 円刻みで価格が変動するが、ガソリン、原油の場合には 10 円刻みでの変動となる。

東商取では、1 日の取引が終了するたびに清算処理を行っており、取引開始時点からの累積損失額が取引本証拠金基準額 ( $K$ ) の半額を上回った場合、投資家は追加の証拠金 (追証) を預託して取引を継続するか、預託せずに取引を終えるかの選択をする (日本商品先物取引協会, 2007a, 2007b)。本稿では、この事象を追証発生と呼ぶ。いま、 $t_0$  から取引を開始し  $l$  期間 ( $l \geq 1$ ) 保有した場合の累積損失額は

$$(4.1) \quad \eta(P_{t_0+l} - P_{t_0}) = \eta \sum_{j=1}^l \Delta P_{t_0+j}$$

で表されるので、追証発生条件は時点  $l$  ごとに、次の不等式

$$(4.2) \quad \sum_{j=1}^l \Delta P_{t_0+j} < -\frac{K}{2\eta}$$

によって判定すればよい。一方で、収益率にもとづいた場合には累積損失額を

$$\eta(P_{t_0+l} - P_{t_0}) = \eta P_{t_0} \left\{ \prod_{j=1}^l (1 + R_{t_0+j}) - 1 \right\}$$

と書き改めることができる。同様に、追証発生条件は

$$(4.3) \quad \prod_{j=1}^l (1 + R_{t_0+j}) < -\frac{K}{2\eta P_{t_0}} + 1$$

となるが、(4.2) と比べると、判定条件は複雑になる。

(4.2)、(4.3) のいずれにもとづく実装も可能であるが、表現が平易であること、制度に照らして自然であること、実際に価格の前日差にもとづくモデル化をしていることから、本稿では (4.2) の判定条件を採用する。

次に、商品取引員が考慮すべき「投資家のデフォルト」を定式化する。追証が発生した場合、投資家には「追証を預託し取引を継続する」または「追証を入金せずに取引を終了とし、保有資産の清算を行う」の 2 つの選択肢が存在する。投資家が取引終了を選択した場合には、商品取引員は翌日以降にその投資家の保有資産を清算する。翌日の精算前に再び値幅制限に抵触すると、取引ができなくなるため、清算は翌日以降に持ち越されることもある。

追証発生後から、さらに価格が下落し続けると、清算時点での累積損失額がさらに大きくなり、取引本証拠金基準額を上回る場合があるが、その場合であっても、商品取引員は投資家の資産を清算しなければならない。累積損失額は、清算後に投資家へ請求されるのだが、一時的にせよ、商品取引員は超過分の損失額を都合する必要がある。以上の制度的背景を考慮し、本稿では、清算時に投資家の保有資産の累積損失額が、予め預託した取引本証拠金基準額を超過する事象をデフォルトと定義する。

それでは、デフォルトの発生条件とデフォルト時の損失補填額を具体的に定義しよう。いま、 $t_0+l$  時点で追証が発生し、投資家が取引終了を選択したとする。商品取引員は、翌日以降で取引が可能となった時点で清算を行う。取引可能とは、商品先物価格が値幅制限に抵触せず  $P_t = X_t$  となる場合である。ここで、追証発生から  $m$  日後に取引可能となったと仮定したとき、すなわ

ち  $t_0 + l + m$  時点での累積損失額は

$$(4.4) \quad \eta(P_{t_0+l+m} - P_{t_0}) = \eta \sum_{j=1}^{l+m} \Delta P_{t_0+j}$$

である。商品取引員が都合すべき金額は、累積損失金額が(4.4)が予め預託された取引本証拠金基準額を上回る金額であるため、累積損失額から取引本証拠金基準額を控除した値として、次のように定義できる。

$$(4.5) \quad \max \left\{ - \left( K + \eta \sum_{j=1}^{l+m} \Delta P_{t_0+j} \right), 0 \right\}.$$

ここで、(4.5)が0の場合にはデフォルトが起こらずに清算できたと考える。なお本稿では、デフォルトリスクを示す指標として、発生頻度だけでなくデフォルトによる損失の大きさを商品取引員の立場から測るために、(4.5)の平均損失補填額も採用する。

ここまで述べてきた追証、デフォルトの議論は値幅制限の下でのものである。仮に値幅制限が存在しない場合では、(4.2)、(4.4)、(4.5)の  $\Delta P_t$  を  $\Delta X_t$  に変更すればよく、常に取引可能であるため  $m = 1$  に固定される。

また、商品先物では通常の保有(買建て保有)だけでなく空売りの保有(売建て保有)が可能である。本稿では価格変動を収益率ではなく価格前日差で定式化しているため、売建て保有時の信用リスク評価は、累積損失額の定義(4.1)、(4.4)の正負を逆転させるだけでよい。一例として価格1000円の商品が3日間連続で100円ずつ下落した場合と上昇した場合を考えると、価格前日差で考えた場合は、仮定と同様に下落時は-100円、上昇時は100円が3日間続くとすればよい。しかしながら、収益率で表した場合には前日の価格で割るために、下落時は-10.00%、-11.1%、-12.50%、上昇時は10.00%、9.09%、8.33%となり、正負を逆転するだけでは問題が生じる。以上のように、売建て保有時のリスク評価を簡便にすることも、価格変動を価格前日差で定式化する利点である。

## 4.2 リスクの推定

追証・デフォルトリスクの推定に際しては、仮定したモデルがデータ期間以降も妥当性を失わないという前提を置き、先物価格データを用いた外挿によりデータ期間以降のリスクを推定する。しかしながら、モデルの未知パラメタ推定には不確実性を伴う。本稿では未知パラメタの不確実性を考慮したリスク計測を行うため、MCMCアルゴリズムの各ステップにおいて発生させたパラメタ値にもとづいて、推定したい期間まで真の価格の前日差の予測パスを生成する。そのため、本稿では未知パラメタ推定についてもギブスサンプラーによるサンプリングを行う。ここで、データ補間とパラメタ推定ともにMCMC法によるサンプリングに統一した理由について述べておく。例えば、データ補間を終えた後に、各ステップのパラメタ推定を最尤法で求める推定方法も考えられる。しかしながら、このように2つを掛けあわせた推定方式では、未知パラメタの不確実性を考慮したリスク計測を行えない。また、全体の推定方式を統一させ、次数選択をDICで行うという観点からも、本稿ではデータ補間とパラメタ推定ともにMCMC法によるサンプリングに統一している。

いま、価格の前日差データの収録期間が  $t = 1, \dots, n$  であり、リスク推定のために  $j$  期間までの予測パス  $\Delta X_{n+j}$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) を生成することを考える。ここで、MCMC法によるパラメタ推定に際して、サンプル発生数が  $M$  回、初期値に依存する初めの  $N$  回を捨てる場合を考えると、パラメタ推定アルゴリズムの終了時には  $\Delta X_{n+j}$  が  $M - N$  本生成されている。商品ごとの倍率  $\eta$  を考慮すれば、値幅制限が撤廃された状況下で  $l$  日間保有したときの累積損失額は  $\eta \sum_{j=1}^l \Delta X_{n+j}$

で算出できる。一方で値幅制限を考慮する場合には、商品ごとの制限値段幅  $L$  と (2.2) の関係を  $\Delta X_{n+j}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) に適用することで、同時点の観測価格の前日差  $\Delta P_{t+j}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) を生成することができるため、値幅制限を考慮した場合の累積損失額を  $\eta \sum_{j=1}^l \Delta P_{t+j}$  で算出できる。以降では、それぞれの累積損失額を用いて、追証・デフォルトリスクの計測を行う。

追証の発生は、保有日数  $l$  ( $l \leq j$ ) までの各時点で条件式 (4.2) を用いて判定する。デフォルト発生については、追証が発生した場合には、常に投資家が追証をおさめずに清算を選択すると仮定し、(4.5) を用いて判定を行う。追証発生後も引き続き損失が膨らみ、取引本証拠金基準額を使い果たすまで累積損失額が大きくなった場合にデフォルトが発生するため、追証が発生したとしても必ずしもデフォルトが起こるとは限らない。したがって、発生した追証がデフォルトにつながる割合を確かめるため、デフォルトの条件付発生率をデフォルト発生頻度を追証発生頻度で割った値で定義する。以上、追証発生率、デフォルト発生率・条件付発生率については  $M-N$  本の予測パスの中で、それぞれが発生した頻度を用いて比率を計算する。一方でデフォルト時の平均損失補填額は (4.5) が正である条件のもとでの平均値として計算する。

## 5. 数値実験による確認

本稿では、金、白金、ガソリン、原油の先物価格の日次データについて、次の3期間を対象とした実証分析の結果を報告する。それぞれの期間の観測価格  $P_t$  とその前日差  $\Delta P_t$  の時系列プロットを図2, 3, 4に示し、特徴を述べていく。

第1期間(2008/05/01から2008/07/31)は、金融危機前の時期であり、商品先物価格が上昇傾向を示している。特にガソリンと原油は価格が急騰し、数回のストップ高を記録している。また、金は上昇傾向を示しているものの、5月1日の2,900円近辺から最高でも3,300円程度の価格にとどまり、大きな値動きは示しておらず、ストップ高、ストップ安についても記録されていない。

第2期間(2008/08/01から2008/10/31)は金融危機を含む時期であり、図3が示すように全ての商品が急落している。価格前日差の図から分かるように、価格が下落傾向をとりながらも日々の価格変動は必ずしも負の値だけをとり続けているわけではなく、ストップ安だけでなく、ストップ高も記録されている。

第3期間(2008/11/01から2009/01/31)では、金融危機によって引き起こされた価格の下落傾向に歯止めが利き始め、価格が持ち直していく様子が図4に示されている。価格前日差の図に示されている通り、全商品に渡って、値幅制限に抵触した日が少ない。そのため、全体として相場があまり荒れていない期間といえる。

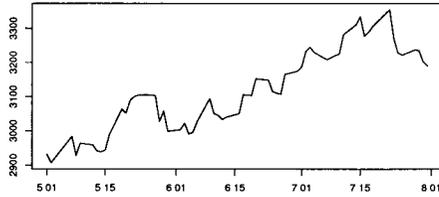
商品先物価格系列に対する自己回帰モデルの当てはめでは、次数に応じた複数の推定アルゴリズムを適用し、DIC (Spiegelhalter et al., 2002) によって自己回帰モデルの次数を選択する。本稿のデータ補間と未知パラメタ推定は条件付尤度にもとづいている。次数選択におけるDICの比較時にそれぞれの次数で分析に用いるデータ数を等しくするため、分析期間以前の価格データを各次数で必要となる初期条件として与える。

また、値幅制限による打ち切りを考慮する効果について論じるために、データ補間を行ってパラメタ推定をした場合と、データ補間を行わずにパラメタ推定をした場合の2種類の推定法を用いる。なお、それぞれの推定アルゴリズムでは、サンプル発生数を12,000回、最初の2,000回を捨てるため、残りの10,000回の平均値をパラメタの推定値として採用し、リスク推定に用いる予測パスは10,000本を生成する。

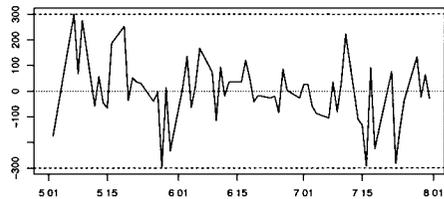
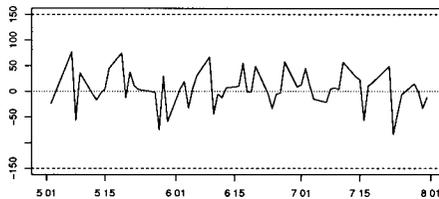
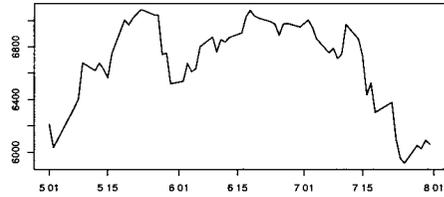
### 5.1 価格変動の構造とデータ補間の効果

本節では、データ補間を行わずに実際に観測される価格(値幅制限により打ち切られた価格)

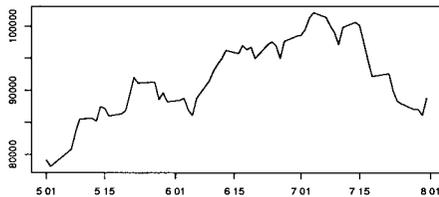
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

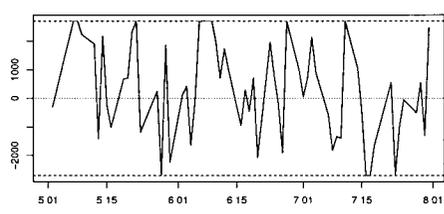
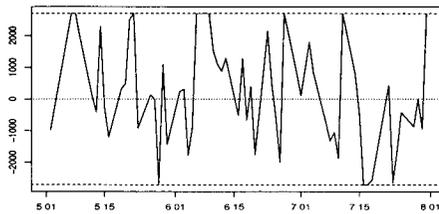
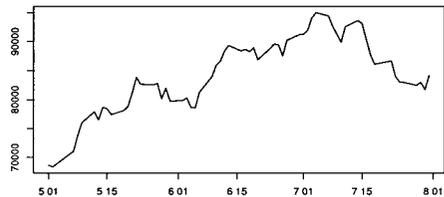
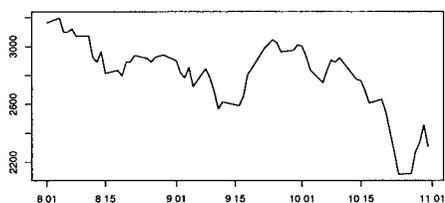


図 2. 第 1 期間：2008/05/01 から 2008/07/31 までの商品先物の市場価格  $P_t$  (上段) と価格前日差  $\Delta P_t$  (下段) の推移。価格前日差の図中にある上下の破線は、値幅制限の上限と下限を示す。

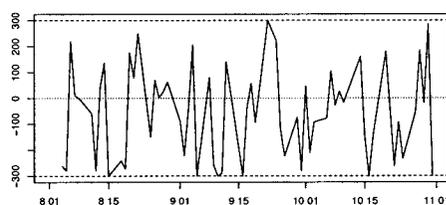
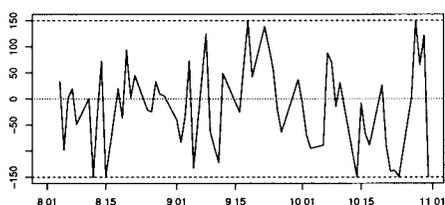
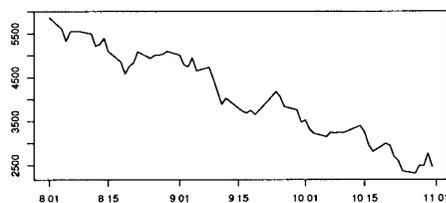
の変動と、データ補間を行うことで推定した真の価格変動を比較することで、値幅制限が価格変動の構造に与える影響とデータ補間を行うことの意義について検証する。

はじめに、今回の数値実験における条件付事後分布の収束について述べておくと、Geweke の統計量の絶対値はすべて 1.645 以内に収まっていたため、有意水準 10% ですべての事後分布は収束していると判断した。また、IF の値は、商品、期間などで目立った特徴はなく、2.00 程度で推移しており、大きなものでも高々 2.73 であったため、本稿で用いたアルゴリズムはサンブ

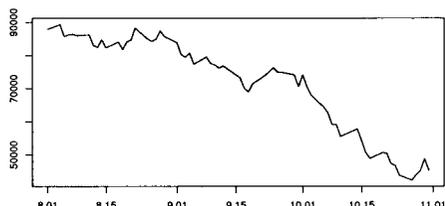
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

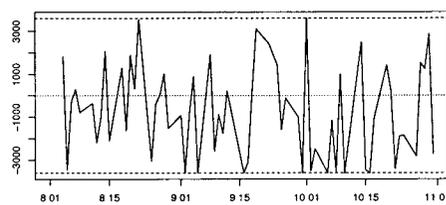
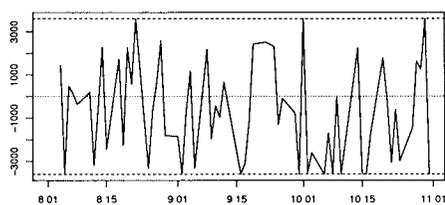
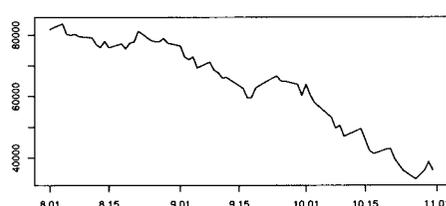
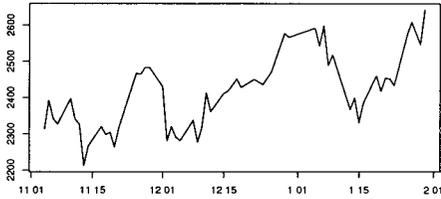


図3. 第2期間：2008/08/01 から2008/10/31 までの商品先物の市場価格  $P_t$  (上段) と価格前日差  $\Delta P_t$  (下段) の推移。価格前日差の図中にある上下の破線は、値幅制限の上限と下限を示す。

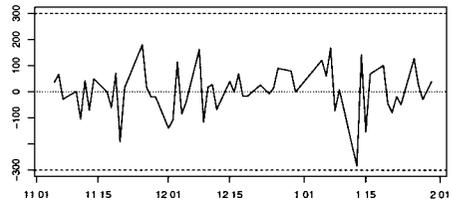
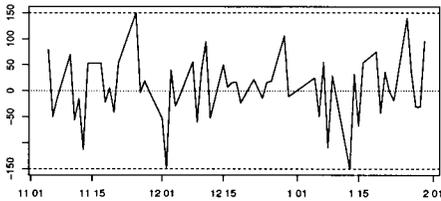
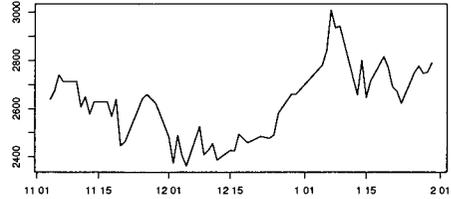
リングの効率性については問題ないと判断して良いだろう。

それぞれの期間の各商品についての分析結果を表1にまとめた。表中には、それぞれの商品の制限値段幅  $L$  と当該期間中に値幅制限に抵触した回数をストップ高とストップ安に分けて記し、観測日数に対して値幅制限に抵触した日数の割合を記した。ガソリンと原油では第1, 2期間ともに何度も値幅制限に抵触しており観測数に対する値幅制限抵触の割合が15%程度と高く、第2期間の金、白金でも10%程度までであるため、価格の打ち切りによる影響は少なくなく、適

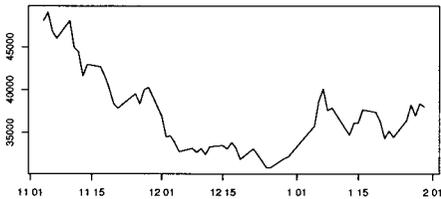
(a) 金



(b) 白金



(c) ガソリン



(d) 原油

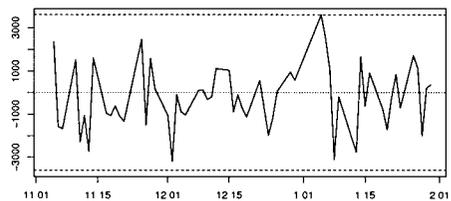
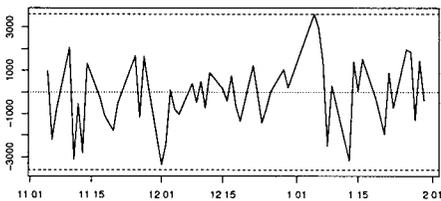
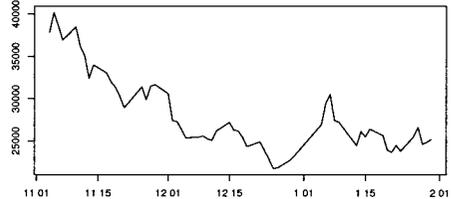


図 4. 第 3 期間：2008/11/01 から 2009/01/31 までの商品先物の市場価格  $P_t$  (上段) と価格前日差  $\Delta P_t$  (下段) の推移。価格前日差の図中にある上下の破線は、値幅制限の上限と下限を示す。

切な処理が必要であると考えられる。

また、データ補間を行った場合と行わない場合のそれぞれについて、DIC で選択された自己回帰モデルの次数を記してある。各期間における商品ごとのパラメータ推定の詳細は、表 2, 3, 4 に示した。

データ補間を行わないことがイノベーションの標準偏差に与える影響に注目しよう。値幅制限に抵触した回数の多い、第 1・2 期間の原油、ガソリンでは 2 割程度、第 2 期間の金と白金で

表 1. 各期間における AR モデルの次数.

期間	商品名	限月	制限値幅 (L)[円]	値幅制限抵触回数		値幅制限抵触 割合 (%)	選択次数		
				ストップ高	ストップ安		補間あり	補間なし	
第 1 期間	金	2009/04 限	150	0	0	0.00	0	0	
	自:2008/05/01	白金	2009/04 限	300	1	1	3.23	0	0
	至:2008/07/31	ガソリン	2008/10 限	2,700	7	3	16.13	0	1
	(観測数 62 日間)	原油	2008/09 限	2,700	7	3	16.13	0	1
第 2 期間	金	2009/06 限	150	2	5	11.29	0	0	
	自:2008/08/01	白金	2009/06 限	300	1	6	11.29	0	0
	至:2008/10/31	ガソリン	2009/02 限	3,600	3	7	16.13	1	0
	(観測数 62 日間)	原油	2008/12 限	3,600	1	8	14.52	1	0
第 3 期間	金	2009/10 限	150	1	2	4.84	1	1	
	自:2008/11/04	白金	2009/10 限	300	0	0	0.00	1	1
	至:2009/01/30	ガソリン	2009/05 限	3,600	1	0	1.61	0	0
	(観測数 57 日間)	原油	2009/03 限	3,600	1	0	1.61	0	0

注) 値幅制限抵触割合は、観測数に対して値幅制限に抵触した割合を示している。また、選択次数はデータ補間の有無で 2 種類を記載している。補間なしとは、値幅制限に抵触した場合であってもデータ補間を行わずに AR モデルを当てはめた場合に選択される次数である。補間ありとは、本稿で提案するアルゴリズムによって値幅制限に抵触した時点のデータ補間と同時に AR モデルの推定を行なった場合に選択される次数である。

表 2. 第 1 期間の推定結果.

商品名	データ補間	次数		$\mu$	$\sigma$	$\phi_{11}$
金	有り	0	事後平均	4.22	34.72	
			事後標準偏差	3.11	15.02	
			90% 信用区間	(-0.84, 9.35)	(29.81, 40.24)	
	なし	0	事後平均	4.23	34.71	
			事後標準偏差	3.12	14.93	
			90% 信用区間	(-0.88, 9.48)	(29.85, 40.13)	
白金	有り	0	事後平均	-2.49	130.40	
			事後標準偏差	11.38	56.43	
			90% 信用区間	(-21.13, 16.28)	(111.73, 151.14)	
	なし	0	事後平均	-2.39	126.88	
			事後標準偏差	11.40	54.92	
			90% 信用区間	(-21.12, 16.51)	(108.88, 147.07)	
ガソリン	有り	0	事後平均	250.68	2066.18	
			事後標準偏差	162.21	1125.37	
			90% 信用区間	(-16.11, 516.36)	(1657.64, 2574.10)	
	なし	1	事後平均	130.61	1584.24	0.23
			事後標準偏差	144.10	684.87	0.13
			90% 信用区間	(-110.31, 367.43)	(1357.95, 1834.55)	(0.02, 0.44)
原油	有り	0	事後平均	250.58	2069.28	
			事後標準偏差	161.47	1146.59	
			90% 信用区間	(-11.88, 518.05)	(1655.35, 2582.35)	
	なし	1	事後平均	222.14	1624.97	0.17
			事後標準偏差	143.37	698.88	0.13
			90% 信用区間	(-9.37, 458.05)	(1395.90, 1873.55)	(-0.01, 0.38)

は 1 割程度小さく推定される。価格が激しく変動するような期間に、値幅制限により大きな価格変動を打ち切った影響を無視した場合には本来の価格変動を正しく評価できない。イノベーションの標準偏差を過小評価することは、市場リスク、追証・デフォルトリスクの過小評価につながるため、適切なデータ補間を行う必要がある。

表 3. 第 2 期間の推定結果.

商品名	データ補間	次数		$\mu$	$\sigma$	$\phi_{11}$
金	有り	0	事後平均	-14.10	92.44	
			事後標準偏差	7.73	42.64	
			90% 信用区間	(-26.74, -1.43)	(77.97, 109.02)	
	なし	0	事後平均	-13.84	82.19	
			事後標準偏差	7.36	35.32	
			90% 信用区間	(-26.09, -1.84)	(70.67, 94.88)	
白金	有り	0	事後平均	-55.18	196.38	
			事後標準偏差	16.76	89.51	
			90% 信用区間	(-82.61, -27.97)	(165.88, 230.99)	
	なし	0	事後平均	-55.19	177.71	
			事後標準偏差	15.92	75.84	
			90% 信用区間	(-81.59, -29.18)	(153.20, 204.94)	
ガソリン	有り	1	事後平均	-687.16	2670.90	-0.25
			事後標準偏差	219.43	1280.75	0.14
			90% 信用区間	(-1129.76, -406.26)	(2222.70, 3179.26)	(-0.47, -0.02)
	なし	0	事後平均	-685.57	2279.07	
			事後標準偏差	201.57	979.79	
			90% 信用区間	(-1016.95, -354.51)	(1957.88, 2634.74)	
原油	有り	1	事後平均	-841.73	2466.42	-0.27
			事後標準偏差	205.52	1155.96	0.13
			90% 信用区間	(-1176.05, -501.15)	(2065.20, 2930.28)	(-0.49, -0.06)
	なし	0	事後平均	-739.36	2156.47	
			事後標準偏差	193.72	923.63	
			90% 信用区間	(-105.16, -417.88)	(1857.10, 2490.67)	

表 4. 第 3 期間の推定結果.

商品名	データ補間	次数		$\mu$	$\sigma$	$\phi_{11}$
金	有り	1	事後平均	6.36	64.93	-0.25
			事後標準偏差	5.89	29.17	0.14
			90% 信用区間	(-3.31, 16.09)	(55.05, 75.95)	(-0.47, -0.02)
	なし	1	事後平均	6.32	61.76	-0.21
			事後標準偏差	5.70	27.35	0.13
			90% 信用区間	(-3.08, 15.64)	(52.78, 71.86)	(-0.43, 0.01)
白金	有り	1	事後平均	4.99	88.38	-0.24
			事後標準偏差	8.36	39.37	0.13
			90% 信用区間	(-8.57, 18.74)	(75.28, 103.06)	(-0.45, -0.03)
	なし	1	事後平均	4.83	88.26	-0.24
			事後標準偏差	8.35	38.82	0.13
			90% 信用区間	(-11.09, 16.47)	(75.34, 102.64)	(-0.45, -0.02)
ガソリン	有り	0	事後平均	-177.07	1561.04	
			事後標準偏差	145.19	690.80	
			90% 信用区間	(-415.73, 61.43)	(1333.93, 1821.16)	
	なし	0	事後平均	-174.95	1550.54	
			事後標準偏差	143.83	683.54	
			90% 信用区間	(-411.64, 60.28)	(1326.87, 1804.72)	
原油	有り	0	事後平均	-221.43	1499.84	
			事後標準偏差	138.35	660.59	
			90% 信用区間	(-448.47, 8.04)	(1279.12, 1746.99)	
	なし	0	事後平均	-220.35	1486.40	
			事後標準偏差	138.20	648.86	
			90% 信用区間	(-449.02, 7.76)	(1274.59, 1727.36)	

次に、データ補間の有無により、選択される自己回帰モデルの次数が変化する点に注目しよう。ガソリン、原油では、第 1 期間にデータ補間なしの場合に正の係数をもつ AR(1) モデル、データ補間を行うと AR(0) モデルが選択され、第 2 期間にデータ補間なしの場合に AR(0) モデル、データ補間を行うと負の係数をもつ AR(1) モデルが選択される。本来ならば当日に価格が上昇・下落し尽くし翌日には反対の動きをする場合であっても、値幅制限のもとでは、価格変

動の抑制のために当日に変動しきれなかった影響が翌日にも残り、上昇・下落が緩やかに続いているように観測される。そのため、第1期間では短期間の急激な上昇が、値幅制限によって緩やかな上昇を続けることで正の係数をもつAR(1)モデルとして観測され、第2期間では本来であれば下落と回復を繰り返す負の係数をもつAR(1)モデルの挙動が、値幅制限によってなだらかな変化になったと考えられる。なお、金、白金ではデータ補間による自己回帰モデルの次数変化は観測されなかった。

## 5.2 値幅制限が信用リスクに与える影響

本節では、営業日ベースで1日間、5日間(1週間)、10日間(2週間)、20日間(1ヶ月間)、保有したときの追証とデフォルトの発生率、デフォルト時の平均損失補填額の評価と、値幅制限の有無が与える影響について数値実験による考察を行う。本来ならばあり得なかった値幅制限が撤廃されている状況下でのリスク評価を行う理由は、次の通りである。投資家ではなく制度設計をする立場からは、値幅制限制度による制限を緩めることで信用リスクに与える影響を観察することが必要である。ここで、最大限緩和した場合は値幅制限を撤廃した状況に等しいため、本節では値幅制限が撤廃された状況下での信用リスクを計測し、値幅制限下の信用リスクと比較することで値幅制限制度が信用リスクに与える影響について分析する。

信用リスクの計測にあたっては、3つの分析期間でのパラメタ推定時に発生させた価格前日差の予測パスに基づき各指標の算出を行っている。それぞれの分析期間以降も仮定したモデルが妥当性を失わないという前提をおき、第1期間に続く1ヶ月間である2008年8月に運用する場合の指標を、2008年8月に設定されていた制限値段幅 $L$ と取引本証拠金基準額 $K$ を用いて算出した結果を表5にまとめた。以降、第2期間に続く1ヶ月間である2008年11月に運用する場合の指標を表6、第3期間に続く1ヶ月間である2009年2月に運用する場合の指標を表7にそれぞれまとめた。

値幅制限の影響について調べるためには、値幅制限抵触回数が多い商品、期間に注目すればよい。第1期間のガソリン、原油では、売建て保有時も含めて、値幅制限を課した場合に追証発生率が0.01とわずかながら減少している。第2期間は先物価格が上昇と下落を激しく繰り返していた時期であるため、売建て保有時も含め4商品ともに値幅制限を課した場合に追証発生率が減少している。特に、ガソリンと原油で減少幅が大きく、ガソリンを5日間保有した場合には0.03減少している。しかしながら、全体を通して値幅制限による追証発生率の減少幅は高々0.03と小さいものである。その理由としては、値幅制限は1日における価格変動に上限を課しているため追証発生が抑えられるが、当日に下がりきらなかった価格の影響は当然翌日以降に持ち越されるため、結果的には追証が発生してしまい、追証発生を抑制する機能は大きくないと考えられる。

一方でデフォルトの発生については、第2期間における買建て保有時のガソリンと原油では顕著に値幅制限の影響を受けている。値幅制限を撤廃することで、デフォルトの発生率、デフォルト条件付発生率ともに最大で発生率が0.05減少している。値幅制限を課すとデフォルトリスクが高まる原因は、取引を停止することで清算の機会を奪うことにあると考えられる。仮に追証が発生した翌日以降も価格が大きく下落し続けた場合を考えると、値幅制限下ではストップ安のために取引が停止され清算できないまま累積損失額が膨らみ続けていくことによって、結果的にデフォルトに至ってしまう恐れがあるが、値幅制限がなければ取引は停止されず翌日に清算ができるため、累積損失額が膨らみ続けるような状況が回避でき、デフォルトに至らずに済む可能性がある。なお、デフォルト発生時の平均損失補填額は、値幅制限を課すことにより小さく抑えられる。値幅制限の急激な価格変動を抑制する機能により、過度な損失が出ることが抑えられていると考えられる。

表 5. 第 1 期間のパラメタ推定にもとづく数値実験による追証・デフォルト発生リスク。

値幅制限の 有無		買建て保有日数				売建て保有日数			
		1	5	10	20	1	5	10	20
1. 金									
追証	有	0.02	0.19	0.30	0.40	0.03	0.37	0.56	0.74
発生率	なし	0.02	0.19	0.30	0.40	0.03	0.37	0.56	0.74
デフォルト	有	0.00	0.02	0.03	0.04	0.00	0.05	0.08	0.11
発生率	なし	0.00	0.02	0.03	0.04	0.00	0.05	0.08	0.11
デフォルト	有	0.04	0.11	0.10	0.09	0.05	0.14	0.15	0.15
条件付発生率	なし	0.04	0.11	0.10	0.09	0.05	0.14	0.15	0.15
平均損失	有	23,875	20,350	21,483	20,564	21,056	21,383	21,768	21,929
補填額 [円]	なし	23,875	20,350	21,483	20,564	21,056	21,383	21,768	21,929
2. 白金									
追証	有	0.02	0.20	0.32	0.42	0.04	0.33	0.53	0.70
発生率	なし	0.02	0.20	0.32	0.42	0.04	0.33	0.53	0.70
デフォルト	有	0.00	0.02	0.03	0.04	0.00	0.04	0.06	0.08
発生率	なし	0.00	0.02	0.03	0.04	0.00	0.04	0.06	0.08
デフォルト	有	0.06	0.09	0.09	0.09	0.06	0.12	0.12	0.12
条件付発生率	なし	0.06	0.09	0.09	0.09	0.06	0.12	0.12	0.12
平均損失	有	14,583	21,566	21,989	22,092	24,727	22,765	21,989	22,176
補填額 [円]	なし	14,583	21,566	21,989	22,092	24,727	22,765	22,023	22,202
3. ガソリン									
追証	有	0.13	0.42	0.53	0.63	0.17	0.53	0.68	0.79
発生率	なし	0.13	0.42	0.54	0.63	0.17	0.54	0.68	0.79
デフォルト	有	0.04	0.14	0.18	0.21	0.06	0.20	0.25	0.29
発生率	なし	0.04	0.14	0.17	0.20	0.06	0.20	0.25	0.29
デフォルト	有	0.29	0.33	0.33	0.33	0.36	0.37	0.37	0.37
条件付発生率	なし	0.29	0.32	0.33	0.32	0.36	0.38	0.37	0.37
平均損失	有	66,349	73,181	73,021	72,516	83,878	86,271	85,937	85,744
補填額 [円]	なし	78,517	82,693	80,581	79,681	85,481	91,095	91,487	91,601
4. 原油									
追証	有	0.13	0.39	0.49	0.57	0.18	0.57	0.72	0.84
発生率	なし	0.13	0.40	0.49	0.57	0.18	0.57	0.73	0.84
デフォルト	有	0.03	0.12	0.15	0.18	0.07	0.23	0.28	0.33
発生率	なし	0.03	0.12	0.15	0.17	0.07	0.22	0.28	0.33
デフォルト	有	0.28	0.31	0.31	0.31	0.37	0.39	0.39	0.40
条件付発生率	なし	0.28	0.31	0.30	0.30	0.37	0.39	0.39	0.39
平均損失	有	62,695	70,999	71,241	71,404	85,467	86,364	86,872	86,707
補填額 [円]	なし	73,357	78,838	78,787	79,162	90,184	93,414	93,669	93,257

注)2008年8月の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は135,000円、制限値段幅は150円であり、白金の取引本証拠金基準額は150,000円、制限値段幅は300円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は210,000円、制限値段幅は3,600円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。

数値実験から得られる結果からは、買建て保有時と売建て保有時の追証・デフォルトのリスクは、各期間で価格変動の平均構造が異なるために単純に正負を逆転させた対称関係とはならず、それぞれの指標の水準は異なっている。しかしながら、値幅制限が与える影響という観点からは買建てと売建てに違いは見られなかった。

表 6. 第 2 期間のパラメタ推定にもとづく数値実験による追証・デフォルト発生リスク.

値幅制限の 有無		買建て保有日数				売建て保有日数			
		1	5	10	20	1	5	10	20
<b>1. 金</b>									
追証	有	0.28	0.66	0.79	0.88	0.19	0.44	0.53	0.58
発生率	なし	0.28	0.66	0.79	0.89	0.19	0.45	0.53	0.59
デフォルト	有	0.14	0.34	0.41	0.46	0.07	0.17	0.21	0.23
発生率	なし	0.14	0.34	0.41	0.46	0.07	0.17	0.21	0.23
デフォルト	有	0.50	0.52	0.52	0.52	0.38	0.40	0.40	0.40
条件付発生率	なし	0.50	0.51	0.51	0.51	0.38	0.40	0.40	0.40
平均損失	有	78,007	78,551	78,767	78,783	69,178	72,594	72,047	73,592
補填額 [円]	なし	88,277	87,922	87,772	87,607	71,297	74,427	73,860	74,176
<b>2. 白金</b>									
追証	有	0.31	0.74	0.87	0.95	0.15	0.34	0.60	0.43
発生率	なし	0.31	0.75	0.87	0.95	0.15	0.35	0.40	0.44
デフォルト	有	0.17	0.41	0.49	0.53	0.05	0.11	0.13	0.14
発生率	なし	0.17	0.41	0.49	0.53	0.05	0.11	0.13	0.14
デフォルト	有	0.53	0.56	0.57	0.56	0.31	0.33	0.34	0.34
条件付発生率	なし	0.53	0.56	0.56	0.55	0.31	0.33	0.34	0.34
平均損失	有	81,039	83,919	84,062	84,243	67,370	70,372	71,634	72,425
補填額 [円]	なし	98,553	98,469	98,567	98,285	71,447	70,989	72,642	73,158
<b>3. ガソリン</b>									
追証	有	0.18	0.63	0.82	0.93	0.27	0.45	0.51	0.53
発生率	なし	0.18	0.66	0.83	0.94	0.27	0.47	0.52	0.55
デフォルト	有	0.08	0.28	0.37	0.43	0.06	0.10	0.11	0.11
発生率	なし	0.08	0.27	0.34	0.38	0.06	0.10	0.11	0.11
デフォルト	有	0.42	0.45	0.46	0.46	0.21	0.21	0.22	0.21
条件付発生率	なし	0.42	0.41	0.41	0.41	0.21	0.21	0.21	0.21
平均損失	有	80,859	88,960	90,841	90,957	72,840	78,524	78,354	78,162
補填額 [円]	なし	103,132	107,459	108,911	108,936	82,790	84,938	84,768	84,374
<b>4. 原油</b>									
追証	有	0.21	0.69	0.86	0.96	0.18	0.35	0.40	0.42
発生率	なし	0.21	0.71	0.87	0.96	0.18	0.36	0.41	0.44
デフォルト	有	0.08	0.30	0.37	0.42	0.03	0.06	0.07	0.07
発生率	なし	0.08	0.29	0.35	0.39	0.03	0.06	0.07	0.07
デフォルト	有	0.38	0.43	0.43	0.43	0.14	0.16	0.17	0.17
条件付発生率	なし	0.38	0.41	0.40	0.40	0.14	0.16	0.16	0.17
平均損失	有	77,519	84,438	85,088	85,280	61,148	66,918	67,889	69,578
補填額 [円]	なし	94,694	97,564	97,590	97,568	67,584	71,724	71,259	71,710

注)2008年11月の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は135,000円、制限値段幅は150円であり、白金の取引本証拠金基準額は150,000円、制限値段幅は300円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は210,000円、制限値段幅は3,600円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。

次に取引本証拠金基準額について考えよう。追証・デフォルトの発生条件は、累積損失額と取引本証拠金基準額の比較であるため、取引本証拠金基準額の設定はそれぞれのリスクに大きく影響を与える。2009年2月には全ての商品で取引追証拠金基準額が増額されているため、この期間に注目し、値幅制限と追証・デフォルトの関係について考察する。白金、ガソリン、原

表 7. 第 3 期間のパラメタ推定にもとづく数値実験による追証・デフォルト発生リスク。

値幅制限の 有無		買建て保有日数				売建て保有日数			
		1	5	10	20	1	5	10	20
<b>1. 金</b>									
追証	有	0.19	0.46	0.56	0.64	0.08	0.41	0.60	0.75
発生率	なし	0.19	0.46	0.56	0.64	0.08	0.42	0.60	0.75
デフォルト	有	0.03	0.07	0.09	0.11	0.02	0.09	0.14	0.17
発生率	なし	0.03	0.07	0.09	0.10	0.02	0.09	0.14	0.17
デフォルト	有	0.14	0.16	0.16	0.17	0.24	0.23	0.23	0.22
条件付発生率	なし	0.14	0.15	0.16	0.16	0.24	0.22	0.22	0.22
平均損失	有	37,594	39,777	39,792	40,450	42,342	45,038	45,526	44,902
補填額 [円]	なし	37,849	39,933	40,147	40,934	43,658	45,211	45,201	44,817
<b>2. 白金</b>									
追証	有	0.04	0.24	0.38	0.49	0.03	0.27	0.46	0.62
発生率	なし	0.04	0.24	0.38	0.49	0.03	0.27	0.46	0.62
デフォルト	有	0.00	0.02	0.02	0.03	0.00	0.02	0.04	0.05
発生率	なし	0.00	0.02	0.02	0.03	0.00	0.02	0.04	0.05
デフォルト	有	0.04	0.07	0.07	0.07	0.04	0.08	0.08	0.08
条件付発生率	なし	0.04	0.07	0.07	0.07	0.04	0.08	0.08	0.08
平均損失	有	21,333	24,088	23,851	24,872	17,409	24,514	25,042	24,282
補填額 [円]	なし	21,333	24,088	23,851	24,872	17,409	24,336	24,943	24,205
<b>3. ガソリン</b>									
追証	有	0.09	0.46	0.64	0.78	0.06	0.30	0.41	0.50
発生率	なし	0.09	0.46	0.64	0.78	0.06	0.30	0.42	0.50
デフォルト	有	0.02	0.11	0.16	0.20	0.01	0.06	0.08	0.10
発生率	なし	0.02	0.11	0.16	0.20	0.01	0.06	0.08	0.10
デフォルト	有	0.20	0.25	0.25	0.25	0.17	0.19	0.20	0.20
条件付発生率	なし	0.20	0.25	0.25	0.25	0.17	0.19	0.20	0.19
平均損失	有	49,475	54,755	55,923	55,552	49,748	50,755	52,784	52,580
補填額 [円]	なし	53,992	57,763	58,655	58,070	49,866	51,503	54,791	54,418
<b>4. 原油</b>									
追証	有	0.09	0.48	0.66	0.81	0.05	0.26	0.37	0.45
発生率	なし	0.09	0.48	0.66	0.81	0.05	0.26	0.37	0.45
デフォルト	有	0.02	0.13	0.18	0.21	0.01	0.04	0.06	0.07
発生率	なし	0.02	0.13	0.17	0.21	0.01	0.04	0.06	0.07
デフォルト	有	0.22	0.27	0.27	0.26	0.14	0.16	0.17	0.17
条件付発生率	なし	0.22	0.27	0.26	0.26	0.14	0.16	0.16	0.17
平均損失	有	46,515	50,892	51,758	51,680	44,368	47,238	46,336	46,681
補填額 [円]	なし	49,550	53,390	53,975	53,698	44,389	47,765	47,169	47,775

注) 2009年2月の1ヶ月間、金の取引本証拠金基準額は150,000円、制限値段幅は150円であり、白金の取引本証拠金基準額は165,000円、制限値段幅は300円であり、ガソリンと原油の取引本証拠金基準額は225,000円、制限値段幅は3,600円であった。なお、それぞれ上段には値幅制限が課せられている場合の算出値、下段には値幅制限がないと仮定した場合の算出値を載せている。

油の3商品は、全ての分析期間の中で第3期間の価格変動が最も小さくなっている。以降では、価格変動が小さい状況での影響を考えるため、3商品のリスク指標について焦点を当てて絞って考える。

追証発生の定義を考えると、日々の価格変動が小さい場合でも、価格が下落し続ければ追証

表 8. 実際の商品先物価格データにもとづく追証・デフォルト発生リスクの実績値.

対象期間	2008年8月				2008年11月				2009年2月			
	買建て保有		売建て保有		買建て保有		売建て保有		買建て保有		売建て保有	
保有日数	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5	1	5
<b>1. 金</b>												
追証発生率	0.15	0.63	0.10	0.25	0.06	0.31	0.06	0.54	0.00	0.00	0.11	0.86
デフォルト発生率	0.05	0.25	0.00	0.00	0.00	0.15	0.06	0.23	0.00	0.00	0.00	0.07
デフォルト条件付発生率	0.33	0.40	0.00	0.00	0.00	0.50	1.00	0.43	0.00	0.00	0.00	0.08
平均損失補填額 [円]	50,000	67,250	0	0	0	31,000	29,000	42,667	0	0	0	3,000
<b>2. 白金</b>												
追証発生率	0.35	0.75	0.10	0.35	0.06	0.54	0.06	0.08	0.00	0.00	0.06	0.50
デフォルト発生率	0.15	0.35	0.00	0.06	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07
デフォルト条件付発生率	0.43	0.58	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.14
平均損失補填額 [円]	101,333	107,250	0	96,500	0	0	0	0	0	0	0	2,000
<b>3. ガソリン</b>												
追証発生率	0.15	0.38	0.05	0.25	0.18	0.92	0.00	0.00	0.00	0.29	0.06	0.36
デフォルト発生率	0.00	0.00	0.00	0.06	0.00	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
デフォルト条件付発生率	0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	0.17	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
平均損失補填額 [円]	0	0	0	96,500	0	76,750	0	0	0	0	0	0
<b>4. 原油</b>												
追証発生率	0.15	0.53	0.05	0.31	0.12	0.77	0.06	0.08	0.00	0.00	0.00	0.14
デフォルト発生率	0.00	0.13	0.00	0.06	0.00	0.08	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
デフォルト条件付発生率	0.00	0.22	0.00	0.20	0.00	0.10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
平均損失補填額 [円]	0	13,500	0	81,000	0	99,000	0	0	0	0	0	0

は発生する。大幅に価格変動が小さくなった白金であっても20日間保有した場合の追証発生率は0.49であり、売建ても含めれば最も低い原油を売建て保有した場合でも0.45と高い水準を示しており追証発生率は必ずしも低くない。一方で、デフォルトの発生条件は、追証が発生してから清算をするまでの間に取引本証拠金基準額を使い果たしたか否かで判定される。ここで、制限値段幅  $L$  に対する価格変動  $\sigma$  が小さく(値幅制限に抵触しづらく)、取引本証拠金基準額  $K$  に対して資産変動  $\eta\sigma$  も小さい(資産変動も小さい)状況を考えてみよう。この状況下では追証が発生したとしても、翌日にストップ安で取引が停止せずに清算できる可能性が高く、追証発生から清算までの間に取引本証拠金基準額を使い果たすほどには累積損失額も膨らまないため、デフォルトには至りにくい。2009年2月の白金、ガソリン、原油の3商品は、他の期間に比べて、価格変動が小さく( $\sigma$  が小さく)取引本証拠金基準額  $K$  が大きいので、値幅制限に抵触しづらく資産変動も小さい期間であり、デフォルトの条件付発生率は買建て時で高々0.25、売建て時では高々0.20と大きくなく、デフォルト時の平均損失補填額も他の期間のものに比べて少ない。

取引本証拠金基準額は取引所によって設定されるため、デフォルトの発生率を下げ、デフォルト時の平均損失補填額を抑えたいならば、取引本証拠金基準額を増額すればよい。ただし、取引本証拠金基準額を増額は、商品取引員の保護という観点からは望ましいことかもしれないが、投資家の立場からは投資開始時点の出費が増えるために新たな投資を呼び込む妨げとなりうる。必ずしも商品取引員にとって歓迎されるとは限らないことに注意が必要である。

最後に、リスク指標の実績値との比較について述べよう。実績値の算出に際しては、分析に用いた限月の商品先物を分析期間以降に運用すると考える。例えば、2008年8月の1ヶ月間であれば、金と白金ならば2009/04限、ガソリンならば2008/10限、原油ならば2008/09限を運用対象とする。なお、1日間保有したと考えると2008年8月の1ヶ月間ではデータ数を20確

保でき、5日間の保有期間ではデータ数が16のみ利用できる。このように確保できるデータ数が限られるため、実績値の測定にあたっては、保有期間を1日間と5日間の2つに絞った。その他の期間については、2008年11月では1日間の保有でデータ数は17、5日間の保有で13、2009年2月では1日間の保有で18、5日間の保有で14である。表8ではそれぞれの期間で各商品を保有した場合のリスク指標をまとめた。

信用リスクの予測精度という観点から、表5、6、7と対応する表8のリスク指標の実績値を比べると、表5の結果と2008年8月におけるガソリンと原油の売建ての実績値、表6の結果と2008年11月のガソリンと原油の買建ての実績値で数値の乖離が小さい。その一方で、2008年8月の金と白金の実績値は表6の結果、2008年11月の金の実績値は表7の結果に近く、その他の商品、期間では実績値との乖離が大きく、予測ができていないと言いがたい。その原因は、予測する上での前提条件が満たされていない可能性があると考えられる。リスク指標の予測に際しては、パラメタ推定のための分析期間で仮定したモデルが、その後の1ヶ月間も妥当性を失わないという前提を置いた。しかしながら、2008年8月は第2期間、2008年11月は第3期間のはじめの1ヶ月間であるため、モデルの妥当性が失われている可能性がある。前節の結果が示すところでは、商品先物における価格変動の平均構造は期間によって変化していると考えられるため、分析期間と予測期間の設定には十分に注意を払う必要がある。

## 6. 結語

本稿では金融危機前後という価格変動が大きい時期を対象に商品先物市場における信用リスクの評価を行った。本稿で提案するリスク計測方法は、データ補間を通じて、本来は課されていた値幅制限制度が撤廃された状況下での価格変動を推定することが特徴である。そのため、価格変動を過小評価せずに適切にリスクを評価すること、制限値段幅 $L$ を変更することで値幅制限制度がリスク指標に与える影響を調べることが可能となっている。本稿では、値幅制限の影響を最大限緩和した状態である値幅制限の撤廃時のリスク指標と、実際に適用されていた $L$ を用いた現実の値幅制限制度下のリスク指標を比較することで、値幅制限が追証とデフォルト発生に与える影響を分析した。その結果、値幅制限制度は価格変動を抑える機能によりわずかながら追証発生を抑制しデフォルト時の損失補填額を抑えるが、その一方で取引停止により清算する機会を奪うためデフォルト発生を高めるという負の側面を持つことが観測された。また、価格変動に対する制限値段幅 $L$ と資産変動に対する取引本証拠金基準額 $K$ の設定が追証とデフォルト発生に大きく影響を与えることが示された。なお、リスク指標の推定値と実際の商品先物価格を用いたリスク指標の実績値との比較により、予測精度の観点から本稿で提案するリスクの計測方法を評価したところ、ガソリンと原油の一部期間では数値の乖離が小さく予測として利用できる可能性があるが、その他の商品、期間では乖離が大きく予測として利用できない。特に、商品先物価格は期間によって価格変動の構造が変わるために、パラメタ推定に用いる分析期間と予測対象の期間の設定について十分に注意を払う必要がある。

取引所が設定する制限値段幅 $L$ と取引本証拠金基準額 $K$ については、2008年当時と2013年現在では東商取が課す制度が変更されているため、新制度のもとでの考察は今後の課題である。2009年5月より採用されたサーキットブレーカ制度は、1日の価格変動に上限を課してはいるが、上限値に抵触した場合でも取引停止は一時的なものに留めているため、値幅制限と同様に価格の過度な変動を抑制する効果と、取引停止により清算ができない事態を回避する効果を期待できると考えられる。この観点から新制度の有効性を検討することは、今後の研究課題としたい。

さらに本稿の数値実験の示すところでは、デフォルト発生率とデフォルト発生時の平均損失

補填額は、取引本証拠金基準額によって大きく影響を受ける。取引本証拠金基準額を増額することは、デフォルトの発生率、デフォルト発生時の平均損失補填額を引き下げることに寄与するため、商品取引員(仲介者)にとって好ましい状況といえるが、その一方で、投資家にとっては、取引開始時点で納めるべき証拠金が増大するという負の側面があるために、商品先物取引を活性化させる観点からは必ずしも好ましいものではない。どうバランスを取るかの問題であるが、デフォルトの発生率をある水準以下に抑えながら、一方で透明性の高い新たな取引本証拠金基準額をどう設定するのか。こうした観点から2011年1月より導入された、過去の価格変動のデータをもとに証拠金額を決定するSPAN制度の影響を検証することも、今後の課題のひとつである。

### 付録A. パラメタ推定

Levinson-Durbin アルゴリズムを利用した推定法の実例として、AR(2) モデルを仮定した場合のパラメタ推定法を述べる。なお、パラメタ推定に際してはMCMC法を採用しているため、パラメタのサンプリングに必要となる条件付事後分布の計算法に焦点を当てて説明する。また以降では、すでにデータ補間を終えており  $\Delta \mathbf{X} = \{\Delta X_t\}_{t=1}^n$  が得られているものとする。

2次の自己回帰モデル  $\Delta X_t = \mu_2 + \phi_{21}\Delta X_{t-1} + \phi_{22}\Delta X_{t-2} + \varepsilon_{2,t}$  を仮定した場合、 $\Delta X_1, \Delta X_2$  が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{n-2}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\}$$

である。

いま、 $\mu_2$  の事前分布を正規分布、 $\mu_2 \sim N(h_2, s_2^2)$  とおくと、条件付事後分布  $f(\mu_2 | \sigma_2^2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X})$  は、

$$\begin{aligned} & f(\mu_2 | \sigma_2^2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{(\mu_2 - h_2)^2}{2s_2^2} \right\} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\} \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{\mu_2}^2} \sum_{t=3}^n (\mu_2 - \mu_{\mu_2})^2 \right\} \end{aligned}$$

という正規分布として得られる。ただし、 $\mu_{\mu_2}$  と  $\sigma_{\mu_2}^2$  は次の通りである。

$$\mu_{\mu_2} = \frac{\sigma_2^2 h_2 + s_2^2 \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2}{\sigma_2^2 + (n-2)s_2^2}, \quad \sigma_{\mu_2}^2 = \frac{\sigma_2^2 s_2^2}{\sigma_2^2 + (n-2)s_2^2}$$

次に、 $\sigma_2^2$  の事前分布を逆ガンマ分布、 $\sigma_2^2 \sim IG(\alpha_0, \beta_0)$  とすると、条件付事後分布  $f(\sigma_2^2 | \mu_2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X})$  は、

$$\begin{aligned} & f(\sigma_2^2 | \mu_2, \phi_{21}, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}) \\ & \propto (\sigma_2^2)^{-(1+\alpha_0)} \exp \left( -\frac{\beta_0}{\sigma_2^2} \right) \\ & \quad \times (\sigma_2^2)^{-\frac{n-2}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\} \\ & \propto (\sigma_2^2)^{-(1+\alpha_0 + \frac{n-2}{2})} \exp \left[ -\frac{1}{\sigma_1^2} \left\{ \beta_0 + \sum_{t=3}^n (\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{21}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2})^2 \right\} \right] \end{aligned}$$

となり、逆ガンマ分布として得られる。

続いて、自己回帰係数  $\phi_{21}$  と  $\phi_{22}$  の発生について述べる。定常性を満たす範囲からのサンプリングを行うために、Levinson-Durbin アルゴリズムの等式  $\phi_{21} = \phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22}$  を用いて、モデル式を偏自己相関係数で表現しなおせば、

$$\Delta X_t = \mu_2 + (\phi_{11} - \phi_{11}\phi_{22})\Delta X_{t-1} + \phi_{22}\Delta X_{t-2} + \varepsilon_{2,t}$$

が得られる。ここで、 $\Delta X_1, \Delta X_2$  が与えられたときの条件付尤度は、

$$(2\pi\sigma_2^2)^{-\frac{n-2}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n \{\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}(1 - \phi_{22})\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2}\}^2 \right]$$

と計算できる。いま、定常性を満たす範囲を考慮し、 $\phi_{11}$  の事前分布を区間  $(-1, 1)$  の一様分布とすれば、条件付事後分布  $f(\phi_{11}|\mu_2, \sigma_2^2, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X})$  は、

$$\begin{aligned} & f(\phi_{11}|\mu_2, \sigma_2^2, \phi_{22}, \Delta \mathbf{X}) \\ & \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n \{\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}(1 - \phi_{22})\Delta X_{t-1} - \phi_{22}\Delta X_{t-2}\}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{2,\phi_{11}}^2} (\phi_{11} - \mu_{2,\phi_{11}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{11}) \end{aligned}$$

であり、区間  $(-1, 1)$  の切断正規分布  $TN(\mu_{2,\phi_{11}}, \sigma_{2,\phi_{11}}^2)$  に従う。ただし、

$$\begin{aligned} \mu_{2,\phi_{11}} &= \frac{\sum_{t=3}^n (\Delta X_t \Delta X_{t-1} - \mu_2 \Delta X_{t-1} - \phi_{22} \Delta X_{t-1} \Delta X_{t-2})}{(1 - \phi_{22})^2 \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-1}^2}, \\ \sigma_{2,\phi_{11}}^2 &= \frac{2\sigma_2^2}{(1 - \phi_{22})^2 \sum_{t=3}^n \Delta X_{t-1}^2} \end{aligned}$$

である。同様に定常性を満たす範囲を考慮して、 $\phi_{22}$  の事前分布を区間  $(-1, 1)$  の一様分布とすれば、条件付事後分布  $f(\phi_{22}|\mu_2, \sigma_2^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X})$  は、

$$\begin{aligned} & f(\phi_{22}|\mu_2, \sigma_2^2, \phi_{11}, \Delta \mathbf{X}) \\ & \propto \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma_2^2} \sum_{t=3}^n \{\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}\Delta X_{t-1} - \phi_{22}(\Delta X_{t-2} - \phi_{11}\Delta X_{t-1})\}^2 \right] \times I_{(-1,1)}(\phi_{22}) \\ & \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_{2,\phi_{22}}^2} (\phi_{22} - \mu_{2,\phi_{22}})^2 \right\} \times I_{(-1,1)}(\phi_{22}) \end{aligned}$$

と計算でき、区間  $(-1, 1)$  の切断正規分布  $TN_{(-1,1)}(\mu_{2,\phi_{22}}, \sigma_{2,\phi_{22}}^2)$  に従う。ただし、

$$\begin{aligned} \mu_{2,\phi_{22}} &= \frac{\sum_{t=3}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11}\Delta X_{t-1})(\Delta X_t - \mu_2 - \phi_{11}\Delta X_{t-1})}{\sum_{t=3}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11}\Delta X_{t-1})^2}, \\ \sigma_{2,\phi_{22}}^2 &= \frac{\sigma_2^2}{\sum_{t=3}^n (\Delta X_{t-2} - \phi_{11}\Delta X_{t-1})^2} \end{aligned}$$

である。

以上が、それぞれの偏自己相関係数の条件付事後分布である。なお、 $i$  ステップ目の偏自己相関係数  $\phi_{11}[i], \phi_{22}[i]$  を発生させた後には、次のステップのデータ補間のため、 $\phi_{21}[i] = \phi_{11}[i] - \phi_{11}[i]\phi_{22}[i]$  を用いて、 $\phi_{21}[i]$  を更新しておく。

## 参 考 文 献

- 青木義充, 横内大介, 加藤 剛(2012). 値幅制限を考慮した商品先物価格の実証分析: MCMC による先物商品価格のモデル化を利用して, 『市場構造分析と新たな資産運用手法(ジャフィー・ジャーナル: 金融工学と市場計量分析)』(日本金融・証券計量・工学学会 編), 16–55, 朝倉書店, 東京.
- Brockwell, P. J. and Davis, R. A. (1991). *Time series: Theory and Methods*, 2nd ed. Springer, New York.
- Brennan, M. J. (1986). A theory of price limits in futures markets, *Journal of Financial Economics*, **16**, 213–233.
- Chib, S. (2001). Markov chain Monte Carlo methods: Computation and inference, *Handbook of Econometrics*, **5** (eds. J. J. Heckman and E. Leaper), 3569–3649, Elsevier, Amsterdam.
- Chib, S. and Greenberg, E. (1994). Bayes inference in regression models with ARMA( $p, q$ ) errors, *Journal of Econometrics*, **64**, 183–206.
- Chiu, C., Shu-Mei, C., Jui-Cheng, H. and Yu-Lung, C. (2006). Clearing margin system in the futures markets - Applying the value-at-risk model to Taiwanese data, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **367**, 353–374.
- Chou, P. (1997). A Gibbs sampling approach to the estimation of linear regression models under daily price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **5**, 39–62.
- Geweke, J. (1992). Evaluating the accuracy of sampling-based approaches to the calculation of posterior moments, *Bayesian Statistics*, **4** (eds. J.M. Bernardo, J.O. Berger, A.P. Dawid and J. F. M. Smith), 169–193, Oxford University Press, Oxford.
- Giot, P. and Laurent, S. (2003). Market risk in commodity markets: A VaR approach, *Energy Economics*, **25**(5), 435–457.
- Hsieh, P. and Yang, J. (2009). A censored stochastic volatility approach to the estimation of price limit moves, *Journal of Empirical Finance*, **16**, 337–351.
- 伊庭幸人, 種村正美, 大森裕浩, 和合 肇, 佐藤整尚, 高橋明彦(2005). 『計算機統計 II マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺』, 岩波書店, 東京.
- 各務和彦, 和合 肇, 大塚芳宏(2011). 地域間所得分布と所得取戻仮説, 日本統計学会誌, **41**(1), 181–200.
- 北川源四郎(2005). 『時系列解析入門』, 岩波書店, 東京.
- Lin, M. and Chou, P. (2011). Prospect theory and the effectiveness of price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **19**, 330–349.
- Marriott, J. M., Ravishanker, N., Gelfand, A. E. and Pai, J. S. (1996). Bayesian analysis of ARMA processes: Complete sampling-based inference under exact likelihoods, *Bayesian Analysis in Statistics and Econometrics: Essays in Honor of Arnold Zellner* (eds. D. Berry, K. Chaloner and J. Geweke), 243–256, John Wiley & Sons, New York.
- 日本商品先物取引協会(2007a). 『商品先物取引委託のガイド(第15版)』, 日本商品先物取引協会, 東京.
- 日本商品先物取引協会(2007b). 『商品先物取引委託のガイド別冊(第27版)』, 日本商品先物取引協会, 東京.
- 大塚芳宏(2011). マルコフ・スイッチング時空間自己回帰モデルによる日本の地域別の景気循環の計量分析, 日本統計学会誌, **40**(2), 89–109.
- Spiegelhalter, D. J., Best, N. G., Carlin, B. P. and van der Linde, A. (2002). Bayesian measures of model complexity and fit, *Journal of Royal Statistical Society, Series B*, **64**, Part 4, 583–639.
- Tsay, R. S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New York.
- 渡部敏明, 大森裕浩(2000). 日本の商品先物市場における価格と出来高の変動: 動学的2変量分布混合モデルによる分析, 先物取引研究, **5**(1), 111–130.
- Wei, S. X. (2002). A censored-GARCH model of asset returns with price limits, *Journal of Empirical Finance*, **9**, 197–223.
- Wei, K. C. J. and Chiang, R. (2004). A GMM approach for estimation of volatility and regression models when daily prices are subject to price limits, *Pacific-Basin Finance Journal*, **12**, 445–461.

## Note of Risk Caused by Shortage of Margin in Commodity Futures Listed on Tokyo Commodity Exchange under the Global Financial Crisis

Yoshimitsu Aoki

Department of Statistical Science, School of Multidisciplinary Sciences,  
The Graduate University for Advanced Studies

We propose a method of evaluating risk when prices of commodity futures listed on Tokyo Commodity Exchange (TOCOM) fluctuated widely before and after the global financial crisis in late 2008. An investor needs to deposit an additional margin when the loss of investor asset exceeds half the margin. That is defined as ‘Margin call risk’. If the investor wants to exit trading without depositing the additional margin, brokers must liquidate the assets of investors the next day or later. Even if the loss of assets of investors is greater than the margin, the broker must temporarily compensate for the excess of loss. After that, the investor should pay the excess to the broker. We define the shortage of margin with respect to the loss of asset as ‘Investors Default Risk’. In those days, in order to prevent rapid price fluctuations, TOCOM adopted the daily limit system in commodity futures trading. We define two prices, true price and observation price, in order to analyze the price fluctuation under the daily limit. When a price limit is hit, we cannot observe the true prices on limit days. Hence, using the Markov Chain Monte Carlo method, we solve interpolation of censored data simultaneously with the estimation of the parameter. Analyzing impacts of the daily limit in terms of the two types of risk via empirical study of commodity futures price data, we obtain the following results. Since the daily limit system has a function to reduce price fluctuations, there is work to suppress margin call slightly during the period in which price fluctuations are heavy. However, in order to lose the liquidation opportunity, the default risk is increased.