

# ヘッジファンド運用戦略の事後評価と リスク計測モデルの検討

加藤 宏典<sup>†</sup>

(受付 2010 年 9 月 30 日；改訂 2011 年 4 月 11 日；採択 5 月 23 日)

## 要 旨

2008 年のサブプライム危機時にヘッジファンドは想定以上の大きな損失を記録し、ヘッジファンドへの投資家もモデルから計測したリスク量を大きく超える損失を被った。本論文では、サブプライム危機前後のヘッジファンドデータを利用し、金融機関で多く利用される損失に i.i.d. を仮定した損失予測モデルから算出したバリュアットリスクと期待ショートフォールのバックテストを行い、ヘッジファンドの投資戦略ごとに結果をまとめた。ヘッジファンドの損失分布としては、正規分布の他に、正規混合分布等のヘッジファンドのリターンの負の歪度や大きな尖度という非正規性が表現可能な確率分布を利用した。

キーワード：ヘッジファンド、リスク管理、バリュアットリスク、期待ショートフォール。

## 1. 始めに

ヘッジファンドは 2008 年にサブプライム危機の影響で過去最大のドローダウンを記録した。しかし、2009 年は、株式(MSCI World)が 2008 年の大きなドローダウンから回復していないのに対して、ヘッジファンドは高いパフォーマンスを上げ 2008 年の大きなドローダウンから概ね回復した。

表 1 は、投資戦略ごとのヘッジファンド・インデックス及び株式、債券インデックスの年率リターン、年率ボラティリティ、最大ドローダウン、歪度、超過尖度及び、2007 年～2009 年の YTD (年初来リターン)の一覧である。

2008 年のヘッジファンド全体のインデックスである HFRI Weighted Composite を見ると -19.03% 下落している。戦略ごとに見ると、株式マーケットへのエクスポージャーを持つ Equity Hedge 戦略がもっとも下落している。また、マーケットの流動性が低下し、市場価格と理論価格との乖離が広がった影響を受け、Relative Value 戦略も過去最大の大きな損失を記録した。しかし、マーケットの上昇・下落を予測し、ロング(買い)・ショート(売り)ポジションをダイナミックに切り替える Macro 戦略は 2008 年においてもプラスのリターンを記録した。2009 年のヘッジファンドのパフォーマンスを見ると 2008 年に大きな損失を記録した戦略は、2009 年には良好なパフォーマンスとなっている。2008 年に多くの機関投資家は、ヘッジファンドのリスク管理が機能せず想定外のドローダウンのために、ヘッジファンドを解約した。また、そのために 2009 年の良好なパフォーマンスを享受できなかった投資家も多くあった。これは、金融

<sup>†</sup> 総合研究大学院大学 複合科学研究科統計科学専攻：〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

表 1. インデックス統計量 (1990/1～2009/12).

	年率 リターン	年率 ボラティリティ	最大 ドローダウン	歪度	超過 尖度	2007 YTD	2008 YTD	2009 YTD
HFRI Weighted Composite	12.12%	7.12%	21.42%	-0.75	2.71	9.96%	-19.03%	16.64%
HFRI Equity Hedge Index	14.12%	9.27%	30.57%	-0.23	1.98	10.50%	-26.64%	20.23%
HFRI Macro Index	13.97%	7.80%	10.70%	0.45	0.86	11.11%	4.83%	3.35%
HFRI Relative Value Index	10.64%	4.52%	18.03%	-2.24	14.32	8.94%	-18.03%	22.28%
HFRI Event-Driven Index	12.39%	6.98%	24.78%	-1.37	4.36	6.60%	-21.81%	20.74%
MSCI World	3.68%	15.35%	55.37%	-0.73	1.56	7.09%	-42.08%	26.98%
JPMorgan Hedged GBI	6.04%	3.08%	2.82%	-0.15	0.08	5.74%	9.16%	0.92%

危機後にヘッジファンドを解約したり、ヘッジファンドへの投資が見送られたために、金融危機後のヘッジファンドの高いリターンを享受できなかったことが原因であると考えられる。本論文では、2008年、2009年のサブプライム危機前後の期間を含むヘッジファンドのパフォーマンスデータを利用し、i.i.d.を仮定したヘッジファンドのリスク計測モデルの実証分析を行う。

本論文の次節以降の構成は次の通りである。2節では、ヘッジファンドのリターンの正規性、ランダムウォーク検定を行う。3節では、VaR及びESとそれぞれの検定方法及び、本論文で検証を行う損失予測モデルの定義を記述する。4節では、3節で定義した損失予測モデルを利用したVaR、ESの実証分析を行い、ヘッジファンドの投資戦略ごとに実証結果をまとめる。

本論文では、ヘッジファンドの月次リターンは、HFRのヘッジファンドデータベースの2009年3月までのデータを利用した。他のマーケットデータは、Bloombergから取得したものを利用した。

### ヘッジファンド投資戦略の概説

本項では、HFR (Hedge Fund Research, Inc.)のヘッジファンドデータベースの投資戦略に関して記述する。HFRのヘッジファンドデータベースでは、ヘッジファンドの投資戦略をEquity Hedge, Macro, Relative Value, Event-drivenの4つの主戦略に分類する。以下では、それぞれの戦略に関しての概説を行う。

#### Equity Hedge 戦略

主に株式及びそのデリバティブのロング及びショートポジションを持つ。株式市場への一定のエクスポージャーを持つファンドが多く、そのリターンは、株式インデックスで多くの部分が説明される。

#### Macro 戦略

流動性が高い資産に投資をし、マーケットの上昇・下落の予測に基づき投資判断を行う。他の戦略と比較をしても、ロング・ショートポジションを日々ダイナミックに切り替える。そのため、マーケットインデックス等を月次リターンに線形回帰するモデルの説明力は他の戦略と比較して低い。

#### Relative Value 戦略

リターンの相関の高い資産セットのうち、割安な資産を買い、割高な資産を売るマーケットニュートラル戦略である。流動性が理論価格と市場価格の差の原因となるため、流動性リスクをとる傾向があり、金融危機などの流動性リスクが顕在化する際に大きなドローダウンを記録する。リターンに負の歪度や大きな尖度という非正規性や自己相関が見られるという特徴がある。

#### Event-driven 戦略

企業のコーポレートアクション(買収、合併、増資、企業再生等)に伴う株価や債券価格の変

動により利益を得る。

## 2. パフォーマンス特性

Malkiel and Sara (2005)は、ヘッジファンドのリターンは他のアセット・クラスと比較すると負の歪度と大きな尖度を持ち非正規性を持つことを示した。また、Getmanky et al. (2004)や Miura et al. (2008)では、流動性の低いアセットを保有するヘッジファンドのリターンには、正の系列相関が観測されることを示している。この章では、先行研究の結果を検証するために、個々のヘッジファンドの月次リターンの正規性の検定とランダムウォーク検定を行う。検証を行う期間は、1999年4月～2009年3月の10年間、1994年4月～2004年3月の5年間、2004年4月～2009年3月の5年間と2002年1月～2006年12月の5年間とし、各検証期間ですべての月の月次データが報告されているヘッジファンドを検証の対象とする。1つ目の期間(1999年4月～2009年3月)は、サブプライム危機の期間を含む。2つ目の期間は、LTCM 危機後の期間を含む。この期間にヘッジファンドは良好なパフォーマンスを記録した。4つ目の期間は、LTCM 危機、サブプライム危機前後の期間を含まず、ヘッジファンドのパフォーマンスが他の期間と比較すると安定していた期間である。それぞれの期間での検定結果の比較を行い、ヘッジファンドの投資戦略ごとに特徴があるかの分析を行う。

### 2.1 正規性、ランダムウォーク検定

個々のヘッジファンドに対して、正規性、ランダムウォーク検定を行う。正規性の検定としては、Shapiro-Wilk 検定、Jarque Bera 検定を行う。両検定とも帰無仮説は以下の通りである。検定方法は、蓑谷(2007)を参照した。

$$(2.1) \quad \begin{aligned} H_0: X_i &\sim \Phi(\mu, \sigma^2), \\ \Phi(\mu, \sigma^2): &\text{平均 } \mu, \text{ 分散 } \sigma^2 \text{ の正規分布.} \end{aligned}$$

$X_t$  は、ヘッジファンドの月次リターンである。

ランダム・ウォークの検定として Ljung-Box 検定、Breusch Pagan 検定を行う。

Ljung-Box 検定は、以下の検定を行う。 $p$  には、1と5を指定し、ヘッジファンドのリターンに自己相関、系列相関があるかの検定を行う。

$$(2.2) \quad \begin{aligned} X_t &= \sum_{i=1}^p \rho_i X_{t-i} + \varepsilon_t, \\ \varepsilon_t &\sim \Phi(0, \sigma_s^2), \\ H_0: \rho_1 &= \dots = \rho_p = 0, \\ H_1: \forall \rho_i &\neq 0, \quad i=1, \dots, p. \end{aligned}$$

Breusch Pagan 検定では、以下の通りにヘッジファンドのリターンに不均一分散が見られるかの検定を行う。帰無仮説が棄却される場合は、不均一分散が見られることとなる。

$$(2.3) \quad \begin{aligned} X_t &= X_{t-1} + \varepsilon_t, \\ \sigma_t^2 &= g(\alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}), \\ \sigma_t^2: \varepsilon_t &\text{ の分散,} \\ H_0: \alpha_1 &= 0, \\ H_1: \alpha_1 &\neq 0. \end{aligned}$$

## 2.2 検定結果

表2～表5は、それぞれ検定期間の戦略別の検定結果の一覧である。表の項目の「ファンド数」は、各戦略に含まれるヘッジファンドの件数である。「平均」、「標準偏差」、「歪度」、「超過尖度」、「自己相関」は、それぞれ各ファンドの月次リターンの平均、標準偏差、歪度、超過尖度、自己相関係数の戦略ごとの平均値である。「Rejected Ratio」は、各検定において帰無仮説が有意水準95%で棄却されたヘッジファンドの比率である。

平均が最も高い期間は、1994年4月～2004年3月であった。これは、LTCM危機の期間を含まず、LTCM危機後のヘッジファンドのパフォーマンスが高い期間を含んでいるためと考えられる。また、サブプライム危機を含む5年間(2004年4月～2009年3月)においても平均はすべての戦略でプラスのリターンとなっていることが分かった。標準偏差を見ると2002年1月～

表2. 戦略別検定結果(1999/4～2009/3)。

投資戦略	ファンド数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	自己相関	Shapiro Wilk	Jarque Bera	Ljung Box(1)	Ljung Box(5)	Breusch Pagan
							Rejected Ratio				
Equity Hedge	314	0.85%	5.17%	0.29	5.04	0.16	87.26%	88.22%	46.82%	40.45%	18.15%
Event-Driven	90	0.69%	3.09%	-0.71	7.33	0.29	95.56%	94.44%	77.78%	73.33%	17.78%
Macro	136	0.89%	4.75%	0.27	2.96	0.08	54.41%	58.82%	22.79%	21.32%	17.65%
Relative Value	71	0.65%	2.66%	-2.08	18.31	0.32	98.59%	98.59%	78.87%	83.10%	38.03%

表3. 戦略別検定結果(1994/4～2004/3)。

投資戦略	ファンド数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	自己相関	Shapiro Wilk	Jarque Bera	Ljung Box(1)	Ljung Box(5)	Breusch Pagan
							Rejected Ratio				
Equity Hedge	361	1.41%	5.81%	0.69	2.91	0.12	57.62%	58.45%	17.73%	18.56%	7.76%
Event-Driven	103	1.07%	2.92%	0.18	2.82	0.24	60.19%	64.08%	46.60%	35.92%	8.74%
Macro	162	1.19%	4.84%	0.33	1.47	0.01	29.01%	30.86%	6.17%	3.70%	6.79%
Relative Value	100	1.04%	2.06%	0.03	2.61	0.25	61.00%	62.00%	49.00%	38.00%	6.00%

表4. 戦略別検定結果(2004/4～2009/3)。

投資戦略	ファンド数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	自己相関	Shapiro Wilk	Jarque Bera	Ljung Box(1)	Ljung Box(5)	Breusch Pagan
							Rejected Ratio				
Equity Hedge	910	0.38%	4.14%	-0.64	2.65	0.17	59.78%	59.89%	32.09%	26.26%	19.67%
Event-Driven	200	0.38%	3.09%	-1.12	5.98	0.32	82.50%	82.00%	62.00%	56.00%	34.00%
Macro	331	0.69%	4.38%	-0.06	2.07	0.11	42.30%	41.99%	19.64%	20.24%	13.29%
Relative Value	249	0.22%	3.19%	-1.89	11.45	0.33	94.38%	92.37%	73.49%	61.85%	28.51%

表5. 戦略別検定結果(2002/1～2006/12)。

投資戦略	ファンド数	平均	標準偏差	歪度	超過尖度	自己相関	Shapiro Wilk	Jarque Bera	Ljung Box(1)	Ljung Box(5)	Breusch Pagan
							Rejected Ratio				
Equity Hedge	692	1.05%	3.44%	-0.00	1.09	0.11	27.75%	29.48%	16.04%	13.29%	7.23%
Event-Driven	162	0.99%	2.12%	-0.09	2.44	0.23	53.09%	55.56%	45.68%	33.95%	11.11%
Macro	246	0.96%	4.16%	0.30	0.97	0.06	23.98%	23.17%	11.38%	16.26%	5.28%
Relative Value	214	0.80%	1.66%	-0.06	3.14	0.27	50.93%	51.87%	58.41%	44.86%	8.41%

2006年12月の期間では、どの戦略においてもサブプライム危機を含む期間よりも標準偏差が低く安定したリターンを上げていたことが分かる。歪度を見ると、サブプライム危機を含む期間(1994年4月～2009年3月, 2004年4月～2009年3月)では、特にRelative Value戦略で大きな負の歪度が出ているが、サブプライム危機を含まない期間(1994年～2004年3月, 2002年1月～2006年12月)においては、Relative Value戦略においても歪度はゼロに近く、先行研究と異なる結果となった。このことから、LTCM危機、サブプライム危機時の大きな損失が同戦略の大きな歪度の一因であると考えられる。自己相関係数は、他の統計量とは異なり、サブプライム危機を含む期間と含まない期間とで値があまり変わらず、すべての検証期間でRelative Value, Event-driven, Equity Hedge, Macroの順に大きな値をとった。

正規性の検定であるShapiro Wilk検定, Jarque Bera検定の結果を見ると、すべての戦略でサブプライム危機を含む期間が含まない期間よりも正規性が棄却されたファンドの比率が高かった。Relative Value戦略, Event-driven戦略は、サブプライム危機を含む期間ではほとんどのヘッジファンドの正規性が棄却される結果となった。逆にMacro戦略は、他の戦略と比較すると正規性が棄却されるヘッジファンドが少なかった。

次に系列相関の検定であるLjung Box検定の結果を見ると、この検定においてもサブプライム危機を含む期間の方が、含まない期間よりも系列相関が見られるファンドの比率が高かった。また、Relative Value戦略は他の戦略と比較して系列相関が見られるヘッジファンドの比率が高い。一方でMacro戦略はどの期間においても系列相関が見られるヘッジファンドが少なかった。流動性の低い資産に投資をし、流動性リスクをとることでリターンを得るヘッジファンドを多く含むRelative Value戦略に系列相関が見られ、流動性が高い資産に投資を行うMacro戦略に系列相関が見られなかったという結果は、Getmanky et al. (2004)の結果と一致した。

Breusch Pagan検定の結果を見ると、この検定においてもサブプライム危機を含む期間の方が、含まない期間よりも帰無仮説が棄却されるヘッジファンドの比率が高く、不均一分散が見られるという結果となった。これは、サブプライム危機時にマーケットのボラティリティが上昇するため、ヘッジファンドのボラティリティも上昇していることが原因であると考えられる。

### 3. バリュアットリスク, 期待ショートフォールとそれぞれの検定方法

本節では、バリュアットリスク(以下 VaR)と期待ショートフォール(以下 ES)の定義と4節で行うVaR, ESの計測モデル及びバックテスト手法に関する記述を行う。本節でのVaR, ESの定義及びバックテストの手法は、McNeil et al. (2005)や山下(2000)を参照した。

#### 3.1 バリュアットリスク(VaR)とは

VaRは金融機関で最も広く利用されているリスク尺度である。VaRとは、保有資産もしくは保有ポートフォリオに対して、ある期間後に、ある一定の確率で想定される最大損失額あるいは最大損失率のことである。

VaRの数学的定義は次の通りとなる。ある $\alpha$  ( $\alpha$ は0から1の任意の値)が与えられたとき、当該資産に対する信頼水準 $\alpha$ のVaRは、損失 $L$ が $l$ を超える確率が $1-\alpha$ 以下となる最小の $l$ の値と定義される。

$$(3.1) \quad \text{VaR}_\alpha \equiv \inf\{l \in \mathfrak{R} : P(L > l) \leq 1 - \alpha\} = \inf\{l \in \mathfrak{R} : F_L(l) \geq \alpha\}.$$

$L$ の分布を損失分布と呼び、損失分布は期間中一定であると仮定される。 $\alpha$ の典型的な値は0.95もしくは0.99である。本論文では、 $\alpha=0.95$ としてVaR計測モデルの検証を行う。

#### 3.2 期待ショートフォール(ES)とは

ESとは、将来のある保有期間後にVaRを超える損失が発生するという条件の下での損失の

期待値である。テイル部分のリスクを捉えられることや劣加法性を満たすことなどから、実務において多くのリスクマネージャーが VaR よりも ES をより好んでいる。

ES の定義を行うために、一般化逆関数と分位関数を以下のように定義する。

- (i) 増加関数  $T: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  に対して、 $T$  の一般化逆関数は  $T^{\leftarrow}(y) \equiv \inf\{x \in \mathfrak{R}: T(x) \geq y\}$  で定義される。ただし、慣行により空集合の加減は  $\infty$  とする。
- (ii) 分布関数  $F$  に対して、その一般化逆関数  $F^{\leftarrow}$  を  $F$  の分位関数という。  $\alpha \in (0, 1)$  に対して、 $F$  の  $\alpha$  分位点は

$$(3.2) \quad q_{\alpha} \equiv F^{\leftarrow}(\alpha) = \inf\{x \in \mathfrak{R}: F(x) \geq \alpha\}$$

で与えられる。

式(3.2)を利用すると信頼水準  $\alpha$  の ES は、以下のように定義される。

損失  $L$  が  $E(|L|) < \infty$  を満たし、分布関数  $F_L$  を持つとき、

$$(3.3) \quad \text{ES}_{\alpha} \equiv \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 q_u(F_L) du = \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 \text{VaR}_u(L) du$$

ただし、 $q_u(F_L) = F_L^{\leftarrow}(u)$  は  $F_L$  の分位関数である。

本論文では、VaR と同様に、 $\alpha=0.95$  として ES 計測モデルの検証を行った。

### 3.3 VaR, ES 計測モデル

本項では、4章で実証分析を行う VaR 及び ES 計測モデルの定義を記述する。VaR, ES の計測モデルとして、デルタ法、Cornish Fishser 法、ヒストリカル法、及びモンテカルロ法を使用する。本節で利用したヘッジファンドの損失予測モデルは、ヘッジファンドのリターンに見られるような非正規性や系列相関がある資産のポートフォリオ構築に関して記述された Hakamada et al. (2007) やヘッジファンドリターンの確率分布の複製手法を提案している Takahashi and Yamamoto (2009, 2010) を参考にした。

#### デルタ法による VaR, ES

以下の通りに VaR 及び ES の計測を行う。

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \text{VaR}_{\alpha}^i &= -\mu_i + \sigma_i \Phi^{-1}(\alpha), \\ \text{ES}_{\alpha}^i &= -\mu_i + \sigma_i \frac{\phi(\Phi^{-1}(\alpha))}{1-\alpha}, \\ \mu_i &: \text{リターンの平均}, \\ \sigma_i &: \text{リターンの標準偏差}. \end{aligned}$$

#### ヒストリカル法による VaR, ES

以下の通りに VaR 及び ES の計測を行う。

$k$  は、 $T$  と  $\alpha$  を与えた際に以下の通りに定まる整数である。

$$(3.5) \quad \begin{aligned} \frac{k-1}{T} < 1-\alpha \leq \frac{k}{T}, \\ \text{Historical VaR}_{\alpha}^i &= \widehat{L}_{k-1}^i - (\widehat{L}_{k-1}^i - \widehat{L}_k^i) \{T(1-\alpha) - (k-1)\}, \\ \text{Historical ES}_{\alpha}^i &= \frac{\sum_{t=1}^{k-1} \widehat{L}_t^i}{(1-\alpha)T} + \left\{1 - \frac{k-1}{(1-\alpha)T}\right\} \widehat{L}_k^i, \\ L_t^i &: \text{第 } t \text{ 期のファンド } i \text{ の損失}, \\ \{\widehat{L}_1^i, \dots, \widehat{L}_T^i\} &: \{L_1^i, \dots, L_T^i\} \text{ を降順に並べたものとする}. \end{aligned}$$

**Cornish Fisher 法による VaR, ES**

以下は, Zangari (1996)を参照した.

$$\begin{aligned}
 q &= \Phi^{-1}(1 - \alpha), \\
 Z_{cf}^i &= q + \frac{(q^2 - 1)S_i}{6} + \frac{(q^3 - 3q)K_i}{24} - \frac{(2q^3 - 5q)S_i^2}{36}, \\
 \text{Cornish Fisher VaR}_\alpha^i &= -\mu_i - \sigma_i Z_{cf}^i, \\
 \text{Cornish Fisher ES}_\alpha^i &= -\mu_i - \sigma_i \frac{\phi(Z_{cf}^i)}{\phi(Z_{cf}^i)}, \\
 S_i &: \text{ファンド } i \text{ のリターンの歪度,} \\
 K_i &: \text{ファンド } i \text{ のリターンの超過尖度.}
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

図 1 は, Macro 戦略のヘッジファンドの月次リターンの平均値のヒストグラムと Cornish Fisher 展開を行った場合の密度関数を表示した図である.

正規混合分布を利用したモンテカルロ法による VaR, ES

以下は, 正規混合分布の定義である.

$$\begin{aligned}
 X &\sim \sum_{j=1}^p \pi_j \Phi(\mu_j, \sigma_j^2), \\
 \sum_{j=1}^p \pi_j &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

パラメータ推定は, EM アルゴリズムにより行う. レジーム数  $p$  は, Papageorgiou et al. (2008) の適合度検定に基づいて選択する. 推定した分布を利用し, モンテカルロ法により VaR 及び ES を算出する. 図 2 は, Relative Value 戦略のヒストグラムと正規混合分布の密度関数である.

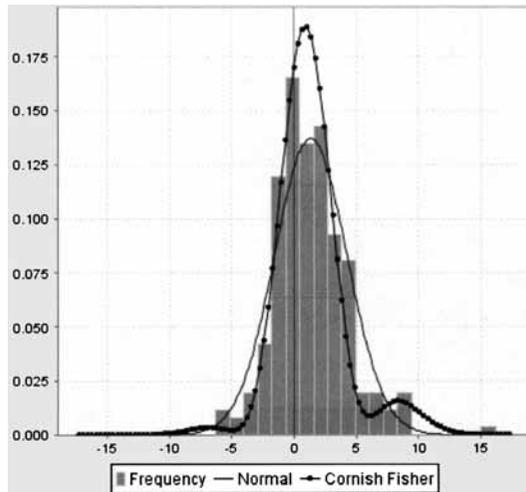


図 1. Cornish-Fisher 密度関数 (Macro 戦略).

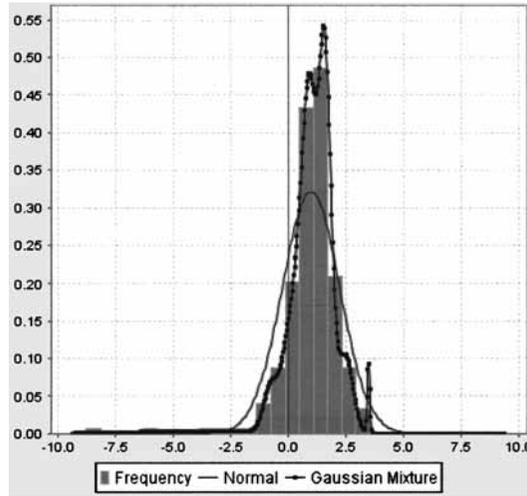


図 2. 正規混合分布密度関数 ( $p=5$ ) (Relative Value 戦略).

### Johnson 分布を利用したモンテカルロ法による VaR, ES

Johnson 分布は、非正規性を持つヘッジファンドの分布の推定手法として Kaplan and Knowles (2004) や Perez (2004) で利用されている。以下は、その定義である。

$$(3.8) \quad \begin{aligned} F(X) &= \Phi(Z), \\ Z &= \gamma + \delta \cdot g\left(\frac{X - \xi}{\lambda}\right), \\ X &: \text{ヘッジファンドリターン.} \end{aligned}$$

関数  $g$  は、以下の何れかを利用する。

$$(3.9) \quad g(y) = \begin{cases} \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), & S_U \text{ unbounded distribution} \\ \ln\left(\frac{y}{1-y}\right), & S_B \text{ bounded distribution} \end{cases}$$

パラメータ推定は、 $Z$  が標準正規分布に従うことを利用してモーメント法により行い、モデル選択は、Papageorgiou et al. (2008) の適合度検定に基づいて行う。推定した分布を利用し、モンテカルロ法により VaR 及び ES を算出する。図 3 は、Relative Value 戦略のヒストグラムと Johnson unbound 分布による密度関数である。

### 3.4 VaR 計測モデルのバックテスト

推定した VaR の検証方法として、ヘッジファンドの月次の損失が VaR を越えることが各月独立であるという仮定をおき、検証期間 (2006 年 4 月 ~ 2009 年 3 月) の 36 ヶ月の間の VaR の超過回数が適切な範囲内であったかの検証を行う。表 6 の (a) 列は、95% VaR をヘッジファンドの損失が超過する各回数の確率である。(b) 列は、対応する超過回数をモデルの棄却基準とする場合に第 1 種の過誤が起こる確率である。検証期間が 36 ヶ月であった場合には、VaR 超過回数が 5 回もしくは 6 回を超える場合は、推定した VaR が棄却される水準にあるといってもよさそうである。今回の検証においては、5 回以上 VaR を超過した場合に推定した VaR が真の VaR よりもリスクを小さく推定したとし、VaR 計測モデルを棄却する。

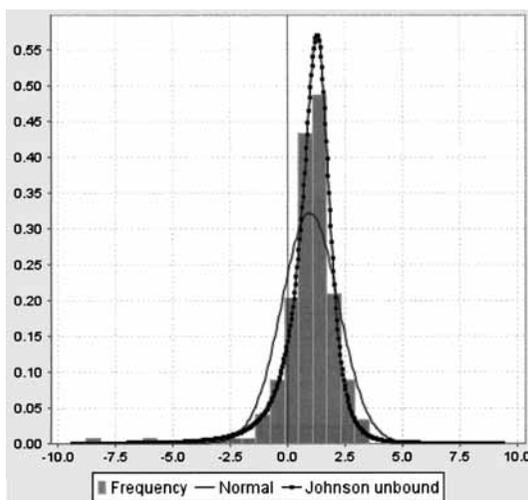


図 3. Johnson unbound 分布密度関数 (Relative Value 戦略).

表 6. VaR 超過回数の確率と第 1 種の過誤が起こる確率. (a) 各信頼水準モデルに対して 36 回のうち対応する超過回数が起こる確率, (b) 対応する超過回数をモデルの棄却基準として設定した場合に第 1 種の過誤が起こる確率.

超過回数	95%	
	(a)	(b)
0	0.158	1
1	0.299	0.842
2	0.275	0.543
3	0.164	0.268
4	0.071	0.104
5	0.024	0.032
6	0.007	0.008
7	0.001	0.002
8	0.000	0.000
9	0.000	0.000
10	0.000	0.000

VaR の計測には、2001 年 4 月～2006 年 3 月、1996 年 4 月～2006 年 3 月の 2 つの期間を利用する。後者は LTCM 危機の際のパフォーマンスを含む。本論文では、1996 年 4 月～2009 年 3 月のすべての月の月次リターンが登録されているヘッジファンドを検証対象とする。

### 3.5 ES 計測モデルのバックテスト

本項では、ES のバックテストの手法を示す。

まず、以下の確率変数を定義する。

$$(3.10) \quad \begin{aligned} I_t &\equiv I_{\{L_t > \text{VaR}_\alpha\}}, \\ R_t &\equiv (L_t - \text{ES}_\alpha) I_t. \end{aligned}$$

ここで、 $E[R_t] = 0$  であり、また  $L$  が i.i.d. であると仮定をすると確率変数  $R$  も i.i.d. となるため、ブートストラップ検定を行うことができる。確率変数  $R$  の分布は、非対称な分布となる

ため、BCa法を利用する。ブートストラップ検定の手法は、汪・田栗(2003)及び小西 他(2008)を参照した。BCa法の手順は、補論に記述した。

検証期間は、VaRの検証と同様に(2006年4月～2009年3月)の36ヶ月のデータを利用し、有意水準5%の両側検定を行う。

#### 4. リスク計測モデルの実証分析

本節では、3節で示したリスク計測モデル及びそのバックテストの実証分析結果を示す。表7～表11は、ヘッジファンドの投資戦略ごとの実証結果の一覧表である。表内の「VaR」,「ES」は、各算出期間(1996年4月～2006年3月もしくは2001年4月～2006年3月)のデータを利用し、それぞれの手法で計測した各リスク量である。そして、「VaRを超過した損失の回数」,「VaRを超過した損失の平均」,「VaRが棄却されたファンドの比率」,「ESが棄却されたファンドの比率」は、それぞれ検証期間(2006年4月～2009年3月)でのVaR超過回数の平均、VaRを超えた損失の平均値の平均、VaR計測モデルが棄却されたヘッジファンドの比率、ES計測モデルが棄却されたヘッジファンドの比率である。

表7は、各算出期間においてデルタ法により計測したVaRの検証結果である。Equity Hedge戦略、Event-driven戦略、Relative Value戦略では、LTCMを含む長い期間で計測したVaRの方が値が大きかった。但し、Relative Value戦略では、LTCM危機を含むデータを利用しても各ファンドのVaR超過回数の平均値が5.64回と多く、VaR計測モデルが棄却されたヘッジファンドの比率が高かった。一方で、Macro戦略を見るとLTCM危機を含む期間、含まない期間においても各ファンドのVaR超過回数の平均値が2より小さく、VaR計測モデルが棄却されたヘッジファンドの比率も低かった。これは、Macro戦略がマーケットの上昇・下落を予測し、ポジションを決定しているため、金融危機の際にも一定のパフォーマンスを上げているためと考えられる。また、このことは2節で行ったMacro戦略の正規性、ランダムウォーク検定が棄却された比率が低かった結果とも一致する。ESの値と検証期間にVaRを超えた場合の平均値を比較すると、LTCM危機を含むデータを利用してもRelative Value戦略、Event-driven戦略では、ESの値を大きく上回っており、VaR計測モデルと同様に、ES計測モデルが棄却された比率が高かった。一方で、Equity Hedge戦略、Macro戦略では、ESの値と検証期間の値が近い値となり、ES計測モデルが棄却された比率が低かった。

表8はヒストリカルVaRによる検証結果である。デルタ法と比較するとMacro戦略以外では、ESの平均が高い値となった。これは、Macro戦略以外は、負の歪度もしくは大きな尖度という特徴が見られることと符合する。Relative Value戦略では、VaR超過回数が6回を超えており、またVaR計測モデル、ES計測モデルが棄却された比率が高く、デルタ法を利用した場合と同様の結果となった。一方で、Equity Hedge戦略とMacro戦略は、VaR超過回数が5回を下回った。

表9は、Cornish Fisher法によるVaRの検証結果である。Cornish Fisher法においても、Relative Valueの超過回数は6回を超えた。

表10は、正規混合分布によるVaRの検証結果である。Relative Value戦略では、VaRの値はデルタ法よりも小さく、VaR超過回数が6.47回とデルタ法よりも多かった。しかし、ESの値はデルタ法よりも大きく、ES計測モデルが棄却された比率もデルタ法よりも低かった。これは図3からも推測できるが、正規混合分布では、テイル部分のリスクを正規分布よりも的確に捉えることができる一方で分布の中心部分も的確に捉えているために、95%VaRではデルタ法よりもリスク量が小さくなり、逆にESはデルタ法よりも大きな値になったと考えられる。今回の検証では95%VaRの検証を行ったが、99%VaRなどより大きな損失の検証をすれば、デ

ルタ法よりも棄却される比率が下がると考えられる。

表 11 は、Johnson 分布による VaR の検証結果である。LTCM 危機を含む期間の Relative Value 戦略の VaR、ES の値を見るとデルタ法のときよりも高い値となった。このモデルも、VaR 超過回数が 5 回を超え、VaR 計測モデルが棄却されたヘッジファンドの比率が高かった。

以上をまとめると、Macro 戦略では、金融危機の際のリスク量を計測する場合でも、過去の金融危機の期間のデータを含んでいなくても i.i.d.、正規性を仮定した手法のリスク計測モデルが棄却されるヘッジファンドの比率が低いことが分かった。Equity Hedge 戦略、Event-driven 戦略は、過去の金融危機 (LTCM 危機) 時のデータをリスク量計測時に利用すれば、サブプライム危機の期間においてもリスク計測モデルが棄却される比率が低いという結果となった。一方で、Relative Value 戦略は、ヒストリカル法やヘッジファンドの非正規性を表現できる確率分布を利用しても、損失に i.i.d. を仮定するとリスク計測モデルが棄却される比率が高いことが分かった。

表 7. デルタ法による VaR 検証結果.

1996/4 ~ 2006/3						VaRを 超過した 損失の回数	VaRを 超過した 損失の平均	VaRが棄却 されたファンド の比率	ESが棄却 されたファンド の比率
投資戦略	ファンド 数	$\mu$	$\sigma$	VaR	ES				
Equity Hedge	153	1.24%	5.32%	7.52%	9.74%	3.15	9.47%	30.72%	21.6%
Event-Driven	46	1.05%	3.03%	3.93%	5.20%	4.74	7.67%	50.00%	54.3%
Macro	74	1.06%	5.29%	7.63%	9.84%	1.64	7.31%	8.11%	12.2%
Relative Value	36	0.90%	2.12%	2.59%	3.47%	5.64	6.12%	61.11%	55.6%

2001/4 ~ 2006/3						VaRを 超過した 損失の回数	VaRを 超過した 損失の平均	VaRが棄却 されたファンド の比率	ESが棄却 されたファンド の比率
投資戦略	ファンド 数	$\mu$	$\sigma$	VaR	ES				
Equity Hedge	153	1.03%	3.99%	5.53%	7.20%	4.49	8.95%	49.02%	50.3%
Event-Driven	46	0.93%	2.33%	2.91%	3.89%	5.57	6.62%	60.87%	67.4%
Macro	74	0.80%	4.94%	7.33%	9.40%	1.95	7.68%	12.16%	16.2%
Relative Value	36	0.77%	1.48%	1.67%	2.29%	6.92	5.74%	72.22%	77.8%

表 8. ヒストリカル VaR による検証結果.

1996/4 ~ 2006/3				VaRを 超過した 損失の回数	VaRを 超過した 損失の平均	VaRが棄却 されたファンド の比率	ESが棄却 されたファンド の比率
投資戦略	ファンド 数	VaR	ES				
Equity Hedge	153	7.20%	10.06%	3.33	9.64%	33.33%	25.5%
Event-Driven	46	3.70%	6.29%	5.24	7.59%	54.35%	34.8%
Macro	74	7.07%	9.22%	1.85	7.41%	9.46%	17.6%
Relative Value	36	2.16%	4.65%	6.28	6.40%	63.89%	55.6%

2001/4 ~ 2006/3				VaRを 超過した 損失の回数	VaRを 超過した 損失の平均	VaRが棄却 されたファンド の比率	ESが棄却 されたファンド の比率
投資戦略	ファンド 数	VaR	ES				
Equity Hedge	153	5.89%	7.41%	4.28	9.36%	43.14%	51.0%
Event-Driven	46	3.36%	4.56%	5.30	6.97%	50.00%	60.9%
Macro	74	7.43%	9.13%	1.84	7.33%	10.81%	16.2%
Relative Value	36	1.92%	2.93%	6.83	6.12%	69.44%	75.0%

表9. Cornish Fisher 法による VaR 検証結果.

1996/4 ~ 2006/3											
投資戦略	ファンド数	$\mu$	$\sigma$	Skew	Kurt	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率
Equity Hedge	153	1.24%	5.32%	0.18	2.79	6.78%	9.13%	3.75	9.59%	34.64%	27.5%
Event-Driven	46	1.05%	3.03%	-0.50	5.57	3.69%	5.00%	4.85	7.42%	45.65%	54.3%
Macro	74	1.06%	5.29%	0.35	3.37	6.72%	9.08%	2.66	7.62%	12.16%	18.9%
Relative Value	36	0.90%	2.12%	-1.28	10.09	2.73%	3.60%	6.31	6.13%	50.00%	55.6%

2001/4 ~ 2006/3											
投資戦略	ファンド数	$\mu$	$\sigma$	Skew	Kurt	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率
Equity Hedge	153	1.03%	3.99%	-0.06	0.81	5.48%	7.16%	4.71	8.79%	52.94%	47.7%
Event-Driven	46	0.93%	2.33%	-0.12	3.28	2.60%	3.64%	6.22	6.40%	60.87%	76.1%
Macro	74	0.80%	4.94%	0.17	1.33	7.04%	9.15%	2.34	7.57%	12.16%	20.3%
Relative Value	36	0.77%	1.48%	-0.27	3.24	1.77%	2.38%	7.56	5.82%	72.22%	77.8%

表10. 正規混合分布による VaR 検証結果.

1996/4 ~ 2006/3									
投資戦略	ファンド数	p	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率	
Equity Hedge	153	3.05	7.18%	10.29%	3.33	9.74%	33.99%	23.5%	
Event-Driven	46	3.61	3.69%	6.38%	5.20	7.38%	58.70%	37.0%	
Macro	74	3.15	6.98%	9.41%	1.84	7.46%	9.46%	13.5%	
Relative Value	36	3.50	2.14%	4.71%	6.42	6.32%	63.89%	44.4%	

2001/4 ~ 2006/3									
投資戦略	ファンド数	p	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率	
Equity Hedge	153	3.29	5.73%	7.55%	4.52	9.11%	46.41%	47.1%	
Event-Driven	46	3.02	3.00%	4.77%	5.57	6.66%	58.70%	52.2%	
Macro	74	2.69	7.07%	9.28%	2.14	7.35%	12.16%	16.2%	
Relative Value	36	3.42	1.79%	2.97%	7.06	5.96%	72.22%	72.2%	

表11. Johnson unbound 分布による VaR 検証結果.

1996/4 ~ 2006/3								
投資戦略	ファンド数	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率	
Equity Hedge	153	7.46%	10.39%	3.09	9.81%	29.41%	21.6%	
Event-Driven	46	4.08%	6.34%	4.54	7.73%	47.83%	41.3%	
Macro	74	7.16%	9.44%	1.85	7.53%	9.46%	12.2%	
Relative Value	36	2.81%	4.65%	5.58	6.49%	52.78%	47.2%	

2001/4 ~ 2006/3								
投資戦略	ファンド数	VaR	ES	VaRを超過した損失の回数	VaRを超過した損失の平均	VaRが棄却されたファンドの比率	ESが棄却されたファンドの比率	
Equity Hedge	153	5.64%	7.56%	4.49	9.00%	48.37%	36.6%	
Event-Driven	46	3.34%	4.54%	5.52	6.95%	60.87%	58.7%	
Macro	74	7.04%	9.11%	2.18	7.38%	12.16%	18.9%	
Relative Value	36	1.95%	2.88%	7.00	5.68%	69.44%	77.8%	

## 5. 結論

本論文では, i.i.d. を仮定した損失予測モデルから計測した VaR 及び ES の実証分析をサブプライム危機前後のデータを利用して行った.

ヘッジファンドの損失分布として正規分布の他に, 正規混合分布や Johnson 分布等のヘッジファンドの非正規性が表現可能な確率分布を仮定したりリスク計測モデルの検定を行った. Macro 戦略は金融危機の期間を通しても正規性, 独立性があり, i.i.d. と正規性を仮定したりリスク計測モデルにおいても, モデルが棄却されたファンドの比率が低かった. 一方で, Relative Value 戦略はすべての VaR 計測モデルで, 棄却されたヘッジファンドの比率が高かった.

また, サブプライム危機時のような大きな損失が発生した場合においても, i.i.d. を仮定したモデルでは, VaR と ES の実証結果に大きな違いはなく, 今回のモデルでは, ES の利点であるテイルリスクを捉えられるという特徴は見られなかった.

今後の研究課題として, Relative Value 戦略の損失予測を改善するために, 同戦略の運用戦略を考慮した新しい損失予測モデルの構築を試みたい.

## 補 論

### A. ES 計測モデルのバックテスト

以下の BCa 法の手順を示す.

$r_1, \dots, r_T$  を, i.i.d. 確率変数  $R_1, \dots, R_T$  の 1 組の実現値とする.

- (i)  $r_1, \dots, r_T$  からの独立な復元抽出により, ブートストラップ標本  $R_1^*, \dots, R_T^*$  を構成する.
- (ii) ブートストラップ推定値を, 以下により計算する.

$$(A.1) \quad \hat{\mu}^*(b) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_i^*(b).$$

これを  $B$  回繰り返して,  $\mu_1^*, \dots, \mu_T^*$  を求める.

- (iii) 偏り修正推定量  $\hat{z}_0$  及び加速定数推定量  $\hat{\alpha}$  の値を, 以下により計算する.

$$(A.2) \quad \hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left( \frac{1}{B} \#\{\hat{\mu}_b^* < \hat{\mu}\} \right), \quad \hat{\alpha} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_{(\cdot)}^* - \hat{\mu}_{(i)})^3}{6 \left\{ \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_{(\cdot)}^* - \hat{\mu}_{(i)})^2 \right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

ただし,

$$\begin{aligned} x^*(b) &= \{R_1^*(b), \dots, R_T^*(b)\}, \quad b = 1, 2, \dots, B, \\ \hat{\mu} &= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T r_i, \quad \hat{\mu}^*(b) = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T R_i^*(b), \quad \hat{\mu}_{(i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n R_j \cdot I_{\{i \neq j\}}, \quad \hat{\mu}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\mu}_{(j)}, \end{aligned}$$

である.

- (iv)  $1 - 2\alpha$  の両側の信頼区間は, 以下の通りとなる.

$$(A.3) \quad (\hat{G}^{-1}\{\hat{\alpha}(\alpha)\}, \hat{G}^{-1}\{\hat{\alpha}(1-\alpha)\}).$$

ただし,

$$\hat{\alpha}(\alpha) = \Phi \left( \hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_\alpha}{1 - \hat{\alpha}(\hat{z}_0 + z_\alpha)} \right), \quad \Phi(z_\alpha) = \alpha,$$

$\hat{G}^{-1}(\alpha) \approx \{\text{大きさの順に並べた } B \text{ 個の } \hat{\mu}^*(b) \text{ の中で } B\alpha \text{ 番目の値}\},$

である。

## 謝 辞

本論文の作成にあたり、研究全般に渡ってご指導下さいました統計数理研究所データ科学研究系准教授の佐藤整尚氏に深く感謝致します。一橋大学大学院国際企業戦略研究科金融戦略コース名誉教授の三浦良造氏にも、修士論文の指導を通して多くのアドバイスを頂いたことを心より感謝致します。東京大学大学院経済学研究科教授の高橋明彦氏、GCIアセットマネジメントの山本匡氏にも多くのアドバイス等を頂いたことを深く感謝致します。

## 参 考 文 献

- Getmansky, M., Lo, A. and Makarov, I. (2004). An econometric analysis of serial correlation and illiquidity in hedge-fund returns, *The Journal of Financial Economics*, **74**, 529–609.
- Hakamada, T., Takahashi, A. and Yamamoto, K. (2007). Selection and performance analysis of Asia-Pacific hedge funds, *Journal of Alternative Investments*, **10** (3), 7–29.
- Kaplan, P. D. and Knowles, J. A. (2004). Kappa: A generalized downside risk-adjusted performance measure, *Journal of Performance Measurement*, **8**, 42–54.
- 小西貞則, 越智義道, 大森裕浩 (2008). 『計算統計学の方法—ブートストラップ・EM アルゴリズム・MCMC—』, 朝倉書店, 東京.
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. (2005). *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.
- 養谷千鳳彦 (2007). 『計量経済学大全』, 東洋経済新報社, 東京.
- Miura, R., Aoki, Y. and Yokouchi, D. (2008). A note on statistical models for individual hedge fund returns, *Mathematical Methods of Operations Research*, **69** (3), 553–577.
- 汪 金芳, 田栗正章 (2003). 『ブートストラップ法入門, 計算統計 I: 確率統計の新しい手法』, 1–64, 岩波書店, 東京.
- Papageorgiou, N., Remillard, B. and Hocquard, A. (2008). Replicating the properties of hedge fund returns, *The Journal of Alternative Investments*, **11** (2), 8–38.
- Perez, P. G. (2004). An approach to the non-normal behavior of hedge fund indices using Johnson distributions, presented to Finance Department, ESSEC in Paris and submitted for publication.
- Takahashi, A. and Yamamoto, K. (2009). *Hedge fund replication. The Recent Trend of Hedge Fund Strategies*, Nova Science Publishers (forthcoming).
- Takahashi, A. and Yamamoto, K. (2010). Generating a target payoff distribution with the cheapest dynamic portfolio: An application to hedge fund replication, 22nd Australasian Finance and Banking Conference 2009, Available at SSRN: <http://ssrn.com/abstract=1420154>.
- 山下智志 (2000). 『市場リスクの軽量化と VaR』, 朝倉書店, 東京.
- Zangari, P. (1996). A VaR methodology for portfolios that include options, *RiskMetrics Monitor*, 1st quarter, 4–12.

## Backtesting and Studying Risk Measure in Hedge Funds

Hironori Kato

The Graduate University for Advanced Studies

This paper provides empirical analyses of value at risk and expected shortfall calculated by various models which assume i.i.d. with the hedge fund's losses. We use hedge funds' monthly returns, which include before and after the subprime crisis of 2008.

We use the normal distribution as the hedge fund's loss distribution and also Gaussian mixture, Johnson distribution, which can express negative skewness and large kurtosis of the hedge fund's return.

We conclude that the ratios rejecting risk measure models for the global-macro are low. On the other hand, all risk measures for the relative-value are mostly rejected.