

# 平滑化 Nelson-Aalen 推定量の一致収束率

西山 陽一<sup>†</sup>

(受付 2010 年 3 月 31 日; 改訂 5 月 20 日; 採択 5 月 20 日)

## 要 旨

計数過程の積強度モデルにおいて, Ramlau-Hansen (1983, *Ann. Statist.*) は危険関数に対する平滑化 Nelson-Aalen 推定量の一致性を証明した. 我々はこの結果を拡張し, 一致性の収束率が  $o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$  であることを証明する. ただし  $b_n$  はバンド幅である. 証明には Nishiyama (2000a, *Ann. Probab.*) による  $\ell^\infty$ -空間値マルチンゲールの弱収束理論を用いる.

キーワード: カーネル推定量, 平滑化, Nelson-Aalen 推定量, 一致性.

## 1. 序

この論文は Aalen (1978) によって導入された計数過程の積強度モデル (multiplicative intensity model) を扱う. すなわち, 各  $n \in \mathbb{N}$  に対し, 計数過程  $\{N_t^n; t \in [0, T]\}$  の強度が

$$\alpha(t)Y_t^n$$

の形をしていることを仮定する. ここで  $\alpha(t)$  は非確率的な非負可測関数であり,  $\{Y_t^n; t \in [0, T]\}$  は非負予測可能過程である.  $Y_t^n$  の一般化逆数  $Y_t^{n-}$  を

$$Y_t^{n-} = \frac{J_t^n}{Y_t^n}$$

によって定義する. ただし

$$J_t^n = 1\{Y_t^n \geq 1\}$$

とおいた上で  $\frac{0}{0} = 0$  と約束する. Ramlau-Hansen (1983) は平滑化 Nelson-Aalen 推定量

$$\hat{\alpha}^n(x) = \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) Y_t^{n-} dN_t^n$$

を  $\alpha(x)$  の推定量として提案した. ここで  $K$  は適切なカーネル関数であるとし,  $\{b_n\}$  はゼロに収束する定数列であるとする. 彼は  $E[\sup_{x \in [z_1, z_2]} |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)|^2] \rightarrow 0$  が成り立つための十分条件を提示した. ただし  $0 < z_1 < z_2 < T$  (Ramlau-Hansen, 1983 の Theorem 4.1.2 を見よ). 少々異なる条件のもとで Andersen et al. (1993) は, もしも  $n^{-1/2}b_n^{-1} \rightarrow 0$  であるならば

$$(1.1) \quad \sup_{x \in [z_1, z_2]} |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = o_P(1)$$

であることを証明した. 実際のところ, 彼らは本質的には

$$\sup_{x \in [z_1, z_2]} |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = O_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$$

---

<sup>†</sup> 統計数理研究所: 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

を証明した (Andersen et al., 1993 の Theorem IV.2.2. の証明を注意深く見ると, そこにおいて Nelson-Aalen 推定量の弱収束理論を用いることによってこのことはわかる).

我々はこの結果を次の形まで拡張する: もしも  $nb_n^6 \rightarrow 0$  ならば

$$\sup_{x \in [z_1, z_2]} |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$$

が  $\alpha$  についての緩い条件のもとで成り立つ. Andersen et al. (1993) による (1.1) の証明は単に Lengart の不等式に基づくものに過ぎないが, 我々は Nishiyama (2000a, 2000b) による  $\ell^\infty$ -空間値マルチンゲールに対する弱収束理論を, 極限が退化している場合について適用する.

## 2. 結果

この論文の主結果は次の通りである.

**定理 1.** 一様カーネル  $K(u) = 1_{[-1/2, 1/2]}(u)$  をとる.  $0 < z_1 < z_2 < T$  とせよ.

$$\sup_{t \in [0, T]} Y_t^{n-} = O_P(n^{-1}), \quad \sup_{t \in [0, T]} |J_t^n - 1| \rightarrow^p 0$$

を仮定する.  $\alpha$  は  $[0, T]$  上で有界で, かつ  $(0, T)$  上で 2 回微分可能であって 2 次導関数  $\alpha''$  が有界であるとする. もしも  $nb_n^6 \rightarrow 0$  ならば,

$$\sup_{x \in [z_1, z_2]} |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| = o_P(n^{-1/2}b_n^{-1}).$$

**注意 1.** カーネル関数  $K$  を他のものにとってくることも可能であるが, 一様カーネルを選ぶと証明が簡単になる.

**注意 2.**  $nb_n^6 \rightarrow 0$  という仮定は, 例えばいわゆる最適バンド幅  $b_n = n^{-1/5}$  に対しては実際に成り立っている.

**証明.**

$$\begin{aligned} \alpha^{*n}(x) &= \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) J_t^n \alpha(t) dt, \\ \tilde{\alpha}^n(x) &= \int_0^T \frac{1}{b_n} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) \alpha(t) dt \end{aligned}$$

とおく.  $\hat{\alpha}^n(x) - \alpha^{*n}(x)$  は実際には確率積分

$$n^{1/2}b_n(\hat{\alpha}^n(x) - \alpha^{*n}(x)) = M_T^{n,x} = \int_0^T H_t^{n,x}(dN_t^n - \alpha(t)Y_t^{n-} dt)$$

であることに注意せよ. ただし

$$H_t^{n,x} = n^{1/2}K\left(\frac{t-x}{b_n}\right)Y_t^{n-}.$$

これから Nishiyama (2000a) の Theorem 3.2 を  $\sup_x |M_T^{n,x}| \rightarrow^p 0$  を示すために適用していく. まず  $\langle M^{n,x} \rangle_T \rightarrow^p 0$  であることは容易にわかるから, Lengart の不等式より任意の有限次元マージナルが退化極限に確率収束することが従う:  $M_T^{n,x} \rightarrow^p 0$ .

次に Nishiyama (2000a) の条件 [PE] をチェックしよう. 各  $\varepsilon > 0$  に対し,  $z_1 = x_0^\varepsilon < x_1^\varepsilon < \dots < x_{N(\varepsilon)}^\varepsilon = z_2$  を  $x_k^\varepsilon - x_{k-1}^\varepsilon \leq \varepsilon^2$  となるように選ぶ. このことは  $N(\varepsilon) \leq \text{constant} \cdot \varepsilon^{-2}$  を満たし

つつ可能であるから、エントロピー条件  $\int_0^1 \sqrt{\log N(\varepsilon)} d\varepsilon < \infty$  は実際に満たされている。もし  $\varepsilon^2 \leq b_n$  ならば

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sup_{x,y \in [x_{k-1}^\varepsilon, x_k^\varepsilon]} |H_t^{n,x} - H_t^{n,y}|^2 \alpha(t) Y_t^n dt \\ & \leq n \sup_{t \in [0, T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot \int_0^T \{1_{[x_{k-1}^\varepsilon - b_n/2, x_k^\varepsilon - b_n/2]}(t) + 1_{[x_{k-1}^\varepsilon + b_n/2, x_k^\varepsilon + b_n/2]}(t)\} dt \\ & \leq n \sup_{t \in [0, T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

他方、もし  $\varepsilon^2 > b_n$  ならば

$$\begin{aligned} & \int_0^T \sup_{x,y \in [x_{k-1}^\varepsilon, x_k^\varepsilon]} |H_t^{n,x} - H_t^{n,y}|^2 \alpha(t) Y_t^n dt \\ & \leq n \sup_{t \in [0, T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot \int_0^T 1_{[x_{k-1}^\varepsilon - b_n/2, x_k^\varepsilon + b_n/2]}(t) dt \\ & \leq n \sup_{t \in [0, T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot (\varepsilon^2 + b_n) \\ & \leq n \sup_{t \in [0, T]} \alpha(t) Y_t^{n-} \cdot 2\varepsilon^2. \end{aligned}$$

よって Nishiyama (2000a) の条件 [PE] は満たされている。Lindeberg 条件 [L1] をチェックするのは易しい。実際 Lyapunov 条件、すなわちある  $\delta > 1$  に対して Nishiyama (2000a) の記号でいえば  $|\overline{W}^n|^\delta * \nu_r^n \rightarrow^p 0$  が満たされていることが、例えば  $\delta = 3$  に対してチェックできる。よって  $\sup_x n^{1/2} b_n |\hat{\alpha}^n(x) - \alpha^{*n}(x)| \rightarrow^p 0$  であることが証明できた。

仮定  $\sup_t |J_t^n - 1| \rightarrow^p 0$  により  $P(\sup_x |\alpha^{*n}(x) - \tilde{\alpha}^n(x)| > 0) \rightarrow 0$  を得る。最後に、テイラー展開により

$$\begin{aligned} n^{1/2} b_n |\tilde{\alpha}^n(x) - \alpha(x)| &= n^{1/2} b_n \left| \int_{-1/2}^{1/2} K(u) (\alpha(x + b_n u) - \alpha(x)) du \right| \\ &\leq n^{1/2} b_n \int_{-1/2}^{1/2} K(u) |\alpha''(x + b_n \tilde{u}_n)| |b_n u|^2 du \\ &\leq n^{1/2} b_n^3 \int_{-1/2}^{1/2} u^2 K(u) du \cdot \sup_y |\alpha''(y)| \\ &= O(n^{1/2} b_n^3) \quad x \text{ に関し一様に} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし  $\tilde{u}_n$  は  $[-1/2, 1/2]$  の中の点である。これで証明が終わった。□

### 謝 辞

匿名査読者には、初稿に含まれていた誤りを指摘していただいた。この研究は日本学術振興会からの科学研究費補助金・基盤研究(C)、21540157 によって支援されたものである。

### 参 考 文 献

Aalen, O. O. (1978). Nonparametric inference for a family of counting processes, *The Annals of Statistics*, **6**, 701–726.

- Andersen, P. K., Borgan, Ø., Gill, R. D. and Keiding, N. (1993). *Statistical Models Based on Counting Processes*, Springer-Verlag, New York.
- Nishiyama, Y. (2000a). Weak convergence of some classes of martingales with jumps, *The Annals of Probability*, **28**, 685–712.
- Nishiyama, Y. (2000b). *Entropy Methods for Martingales*, CWI Tract, **128**, Centrum voor Wiskunde en Informatica, Amsterdam.
- Ramlau-Hansen, H. (1983). Smoothing counting process intensities by means of kernel functions, *The Annals of Statistics*, **11**, 453–466.

## Uniform Rate of Convergence of Smoothed Nelson-Aalen Estimator

Yoichi Nishiyama

The Institute of Statistical Mathematics

In the multiplicative intensity model for counting processes, Ramlau-Hansen (1983, *Ann. Statist.*) derived the uniform consistency of the smoothed Nelson-Aalen estimator for the hazard function. We extend this result to the case where the rate of uniform consistency is  $o_P(n^{-1/2}b_n^{-1})$  where  $b_n$  is the bandwidth, by using the weak convergence theory for  $\ell^\infty$ -valued martingales given by Nishiyama (2000a, *Ann. Probab.*).