統計数理（2007）
第 55 巻 第 2 号 327–336

［原著論文］

パラメータ設計における2ステップ最適性に関する統計的一考察

河村 敏彦[1] ・岩瀬 晃盛[2]

（受付 2006 年 12 月 26 日；改訂 2007 年 4 月 25 日）

要　旨

タグチメソッドにおけるパラメータ設計は，環境条件や使用条件の変動に対してロバストになるように製品や工程を設計する方法である．本稿では，パラメータ設計で用いられる望目SN比を考察する上で，正値データの場合の尺度母数に関する一つの“ばらつき”の評価測度として正の領域で定義される平均 K 損失および平均対数 2 乗損失を採用し，平均損失による統一的な母 SN 比を提案する．さらに，提案された SN 比の推定量である標本 SN 比を構成し，統計的分布理論によるタグチメソッドにおける 2 ステップ法の妥当性を論じる．

キーワード： SN 比，逆ガウス型分布，損失関数，対数正規分布，タグチメソッド，2 ステップ法，パラメータ設計．

1．はじめに

タグチメソッドにおいて，環境条件や使用条件の変動に対してロバストになるように製品や工程を設計する方法としてパラメータ設計が知られている．このパラメータ設計の基本原理は，品質特性に対して非線形効果をもつ要因により，特性の“ばらつき”最小化またはSN比最大化を行い，線形効果をもつ別な要因で特性の中心を目標値に合わせ最適設計をしようとするものである（例えば，宮川, 2000, p.80）．タグチメソッドでは，この方法を製品ロバスト・パラメータ設計における 2 ステップ法と呼び，特に製造業における製品開発・設計現場において積極的に導入され，数多く事例が報告されている．一方，タグチの 2 ステップ法の統計的な観点による体系化は，例えば，Leon et al. (1987) や Box (1988) をはじめとした国外における研究者によってなされた．Leon et al. (1987) は統計的な観点による 2 ステップ法の妥当性を考察し，タグチの SN 比を特別な場合として含む“ばらつき”の測度として PerMIA を提案した．彼らは望目特性に対する 2 ステップ法が，ある統計モデルのもとで平均 2 乗損失の最小化として導けることを主張した．しかし，彼らによる試みは，変動係数の関数として定義されるタグチの SN 比と実数上の“ばらつき”の評価測度として定義される平均 2 乗損失を結びつけて考えられたものであり，濃度や反応量など正値データの場合には，通常の 2 乗損失関数を用いることが必ずしも適切であるとはいえない（例えば，岩瀬・平野, 1990, p.164）．

そこで，本稿では，まず，正値データにおける，尺度母数に関する一つの“ばらつき”の評価測度として正の領域で定義される平均 K 損失（河村 他, 2006）および平均対数 2 乗損失を採用

[1] 統計数理研究所：〒106–8569 東京都港区南麻布 4–6–7
[2] 横浜薬科大学 薬学部：〒245–0066 神奈川県横浜市戸塚区俣野 601

し，平均損失による統一的な母 SN 比および標本 SN 比を提案する．次に，Leon et al. (1987) と同様な方法により提案された SN 比および平均 K 損失関数を用いた場合のタグチメソッドにおける 2 ステップ法を論じる．

次節では，タグチメソッドにおける望目特性(品質特性で目標値が正の有限値である場合)の SN 比を平均損失の観点から定義し，尺度母数に対する母 SN 比の構成とその推定量である標本 SN 比を特定の確率分布型を仮定せずに構成する．さらに，提案した SN 比最大化と平均 K 損失を用いて，2 ステップ法の数理的な妥当性を Leon et al. (1987) と同様な方法によって考察する．

第 3 節では，ある分布族を仮定し，第 2 節で与えられた損失関数を正規分布と共通な性質に着目し，分布論の観点から分布と損失関数の関係および分布型を仮定した場合の推定量を論じる．

最後に，まとめと今後の課題を述べる．

2. SN 比と 2 ステップ最適性

タグチメソッドでは，品質特性のばらつきの低減や機能性の向上という目的に対し，それに適した方法として次のステップ:

(1) SN 比を最大にする条件を制御因子の水準組合せで見出す．
(2) ステップ 1 の SN 比に影響せず平均に影響する制御因子により平均を目標値に合わせこむ．

からなる，製品ロバストパラメータ設計における 2 ステップ法が提案されている(例えば，宮川, 2000, p.104)．2 ステップ法で用いられる望目特性のタグチの母 SN 比は，標準偏差 σ を平均 μ で割った母変動係数の逆数を 2 乗したもので定義される:

$$\text{タグチの望目特性の母 SN 比} = \frac{\mu^2}{\sigma^2} \tag{2.1}$$

このタグチの望目特性の母 SN 比を平均損失の観点から定義する．望目特性 Y を平均 $E[Y]=\mu$, 分散 $V[Y]=\sigma^2$ が存在する(2 次のモーメントが存在する)，或る母集団 (μ,σ^2) からの正値確率変数とするとき，μ で無次元化した平均 2 乗損失は

$$R_S = E\left[\left(\frac{Y}{\mu}-1\right)^2\right] = \frac{\sigma^2}{\mu^2} \tag{2.2}$$

で与えられる．(2.2) 式は，尺度母数 μ に対する 2 乗損失関数を用いた場合の“ばらつき”の測度であり，これは変動係数を 2 乗したものに一致する．このように，変動係数の 2 乗の逆数で定義される望目特性のタグチの SN 比 (2.1) は，μ で無次元化した平均 2 乗損失の逆数の値として定義することもできる．また，タグチの母 SN 比 (2.1) の推定量である標本 SN 比は

$$\text{タグチの望目特性の標本 SN 比} = \frac{(S_m - V_e)/n}{V_e} \tag{2.3}$$

で与えられる．ただし，$S_m = (\sum_{i=1}^n y_i)^2/n$, $V_e = (\sum_{i=1}^n y_i^2 - S_m)/(n-1)$ である(例えば，宮川, 2000, p.103)．この推定量は，分子 μ^2 の不偏推定値 $(S_m - V_e)/n$ と，分母 σ^2 の不偏推定値 V_e のそれぞれ比をとった値であり，母 SN 比 (2.1) そのものの不偏推定値を構成しているわけではない．また，$S_m < V_e$ のとき，マイナスの値をとりデシベル表示する際，対数をとることができない．そこで分子を $\bar{y} = (1/n)\sum_{i=1}^n y_i$ の 2 乗とし，標本 SN 比を $\bar{y}^2/V_e$ と定義することもある (Box, 1988, p.2)．

先に述べたように，Leon らは乗法モデルに対して平均 2 乗損失の最小化として 2 ステップ法の妥当性を示したが，本稿では，実数上における“ばらつき”の測度として用いられる平均

2 乗損失を用いない．そこで，尺度母数に関する一つの“ばらつき”の評価測度として正の領域で与えられる平均 K 損失を用いた望目特性の SN 比を定義する．望目特性 Y を 1 次および逆数モーメントが存在する，或る母集団からの正値確率変数とし，“ばらつき”c^2 を次の平均 K 損失：

$$R_K = E\left[\left(\sqrt{\frac{Y}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right] \equiv c^2 \tag{2.4}$$

で定義する．これより尺度母数 μ に関する平均 K 損失を用いた場合の“ばらつき”の測度が導出され，本稿では，平均 K 損失の逆数の値を望目特性に対する母 SN 比として

$$\text{望目特性の母 SN 比} = \frac{1}{c^2} \tag{2.5}$$

で定義する．この SN 比はタグチメソッドにおける望目特性の母 SN 比を平均損失の逆数の値で定義するという点で統一化した母 SN 比として解釈できる．データから母 SN 比 (2.5) の推定値を構成するために次式：

$$\begin{aligned} C^2 &\equiv \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{y_j}{y_i}} - \sqrt{\frac{y_i}{y_j}}\right)^2 \\ &= \frac{\bar{y}}{\bar{y}_H} - 1 \end{aligned}$$

を考える．ここで，$\bar{y}_H$ は標本調和平均である．このとき，次のような関係

$$E\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)C^2\right] = c^2, \quad n \geq 2$$

が知られている（詳しくは河村 他, 2006, p.98, (A.5) を見よ）．これより c^2 の不偏推定値は $(n/(n-1))C^2$ で与えられ，この逆数の値を望目特性に対する標本 SN 比として

$$\text{望目特性の標本 SN 比} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{C^2} \tag{2.6}$$

で定義する．

この標本 SN 比の構成はタグチのゼロ望目特性の SN 比と類似性をもつ．タグチのゼロ望目特性の SN 比は $1/\sigma^2$ で定義され，標本 SN 比は σ^2 の不偏推定値である V_e の逆数の値として与えられる．すなわち，今の場合，残差平方和に相当するものが nC^2 ということになる．言い換えれば，後で述べるように，ゼロ望目特性の SN 比とは，位置母数に関する“ばらつき”の測度を通常の平均 2 乗損失を用いて定義し，その逆数をとった値であると解釈できる．

さて，われわれが提案した SN 比 (2.6) および平均 K 損失関数を用いた場合について，Leon らによる 2 ステップ法の最適性の議論と同様な方法で最適化を考察する．最適化の手順は，Leon et al. (1987, pp.255–256) または宮川 (2000, pp.105–106) を参考にされたい．

出力 Y を設計パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ およびノイズ $\boldsymbol{N}$ の関数で与えられる正値確率変数 $Y = f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{N})$ とし，その目標値を y_0 とすれば，$\boldsymbol{N}$ の変動による平均 K 損失は

$$R_K(\boldsymbol{\theta}) = E_N\left[\left(\sqrt{\frac{Y}{y_0}} - \sqrt{\frac{y_0}{Y}}\right)^2\right]$$

と書ける．ここで，設計パラメータ $\boldsymbol{\theta}$ を調整因子 $\boldsymbol{a}$ とそれ以外の制御因子 $\boldsymbol{d}$ の 2 つのグループ $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})$ に分割すると，$R_K(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})$ の最小化は次の 2 ステップ法によって達成される．

(1) $P_K(\boldsymbol{d}) = \min_{\boldsymbol{a}} R_K(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})$ を最小化する $\boldsymbol{d}^*$ を求める．

(2) $R_K(\boldsymbol{d}^*, \boldsymbol{a})$ を最小化する $\boldsymbol{a}^*$ を求める．

いま，$f(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{N})$ として乗法モデル

$$Y = \mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d}) \tag{2.7}$$

を考える．ここで $\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})$ の 1 次および逆数モーメントが存在し

$$E[\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})] = 1, \quad E[1/\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})] = c^2(\boldsymbol{d}) + 1 \tag{2.8}$$

とする．この乗法モデルのもとで平均 K 損失は

$$R_K(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) = \frac{\mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}{y_0} + \frac{y_0}{\mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}\{c^2(\boldsymbol{d}) + 1\} - 2 \tag{2.9}$$

となる．相加相乗平均の関係より

$$\frac{\mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}{y_0} + \frac{y_0}{\mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})}\{c^2(\boldsymbol{d}) + 1\} \geq 2\sqrt{c^2(\boldsymbol{d}) + 1}$$

となり，

$$R_K(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) \geq 2\sqrt{c^2(\boldsymbol{d}) + 1} - 2$$

を得る．ここで等号が成立するのは

$$\mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{d})) = y_0\sqrt{c^2(\boldsymbol{d}) + 1} \tag{2.10}$$

の場合である．つまり，$\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{d})$ は $P_K(\boldsymbol{d}) = \min_{\boldsymbol{a}} R_K(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a})$ を与える $\boldsymbol{a}$ である．これより，(2.10) を (2.9) 式に代入すれば

$$P_K(\boldsymbol{d}) = 2(\sqrt{c^2(\boldsymbol{d}) + 1} - 1)$$

を得る．一方，$P_K(\boldsymbol{d})$ は，望目性に対する母 SN 比

$$\begin{aligned}\eta &= 1\bigg/E\left[\left(\sqrt{\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})} - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})}}\right)^2\right] \\ &= 1/c^2(\boldsymbol{d})\end{aligned}$$

の単調減少関数であるから，η の最大化と $P_K(\boldsymbol{d})$ の最小化は等価である．以上により，平均 K 損失最小化のための上記の 2 ステップ法は

(1) 望目特性に対する母 SN 比 (2.5) を最大にする $\boldsymbol{d}^*$ を求める
(2) $\mu(\boldsymbol{d}^*, \boldsymbol{a}^*) = y_0\sqrt{c^2(\boldsymbol{d}) + 1}$ を満たす $\boldsymbol{a}^*$ を求める

という手続きと等価になり，平均 K 損失に基づく母 SN 比による 2 ステップ法の妥当性が Leon らと同様に証明された．

また，Leon et al. (1987) は $\boldsymbol{N}$ の変動による平均 2 乗損失 $R(\boldsymbol{\theta}) = E_N\left[(Y - y_0)^2\right]$ を採用したときの加法モデル

$$Y = \mu(\boldsymbol{d}, \boldsymbol{a}) + \varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})$$

の場合に対しても考察している．ここで $\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})$ の 1 次および 2 次モーメントが存在し

$$E[\varepsilon(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})] = 0, \quad E[\varepsilon^2(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{d})] = \sigma^2(\boldsymbol{d})$$

とする．このとき $P(\boldsymbol{d})=V[Y]=\sigma^2(\boldsymbol{d})$ となる．これは，タグチメソッドにおけるゼロ望目特性の SN 比：

$$\text{ゼロ望目特性の母 SN 比}=\frac{1}{\sigma^2(\boldsymbol{d})}$$

に対応する．加法モデルにおける母数 $\mu(\boldsymbol{d},\boldsymbol{a})$ は位置母数を表す．先で述べたように，これらは位置母数 μ を Y で推定したときの損失を 2 乗損失関数で測った“ばらつき”の測度が分散であるという整合性のとれた結果であり，タグチメソッドにおけるゼロ望目特性の SN 比は，加法モデル (位置母数) を想定した評価測度であると考えられる．

さて，最適化における平均 2 乗損失最小化は以下のような平均損失の分解によって解釈できる．望目特性 Y を確率変数とし，その目標値を y_0 とすれば，その平均 2 乗損失は分散と偏りの 2 乗に分解される：

$$E[(Y-y_0)^2]=V[Y]+(E[Y]-y_0)^2$$

これより，ステップ 1 で，第 1 項の“ばらつき”の測度である分散 (SN 比の逆数) を最小化し，ステップ 2 で第 2 項の平均を目標値 y_0 に近づければ，平均 2 乗損失は最小になる．ここでは，ある条件のもとで平均 K 損失 (2.4) の場合を平均 2 乗損失と同様に分解できることを示す．

望目特性 Y を正値確率変数とし，その目標値を y_0 とする．このとき K 損失関数は

$$L_K(Y,y_0)=\left(\sqrt{\frac{Y}{y_0}}-\sqrt{\frac{y_0}{Y}}\right)^2 \tag{2.11}$$

となる．(2.11) 式の Y に尺度母数 μ を入れ，損失関数を変形すれば

$$\begin{aligned}L_K(Y,y_0)&=\left(\sqrt{\frac{\mu}{y_0}\cdot\frac{Y}{\mu}}-\sqrt{\frac{y_0}{\mu}\cdot\frac{\mu}{Y}}\right)^2\\&=\left(\sqrt{k}\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\end{aligned}$$

となる．ただし $k=\mu/y_0$ である．次に上式の期待値 (平均 K 損失)：

$$E\left[\left(\sqrt{k}\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right] \tag{2.12}$$

を考える．ここで Y の分布について，次の意味での対称性：

$$E\left[\left(\sqrt{k}\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right]=E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\sqrt{k}\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right] \tag{2.13}$$

を満たすとする．この条件は

$$E\left[\frac{Y}{\mu}\right]=E\left[\frac{\mu}{Y}\right] \tag{2.14}$$

と同値であり，この等式 (2.14) を満たす確率変数 Y に制約する (例えば，対数正規分布や Birnbaum-Saunders 分布 (Birnbaum and Saunders, 1969) などがこの条件を満たす)．

さて，条件 (2.14) のもとで，平均 K 損失 (2.12) 式は

$$\begin{aligned}E\left[\left(\sqrt{k}\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right]&=\frac{k+1/k}{2}E\left[\left(\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right]+\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2\\&=E\left[\left(\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right]+\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2\left(1+\frac{1}{2}E\left[\left(\sqrt{\frac{Y}{\mu}}-\sqrt{\frac{\mu}{Y}}\right)^2\right]\right)\end{aligned}$$

となり，第 1 項が K 損失関数で測ったときの尺度母数の“ばらつき”に，また第 2 項が偏りに対応していることがわかる．

最後に，尺度母数 μ に対する“ばらつき”の測度として平均 2 乗対数損失

$$R_L = E\left[\left(\log\frac{X}{\mu}\right)^2\right] = c^2$$

を用いた場合も，同様に望目特性に対する母 SN 比を平均 2 乗対数損失の逆数の値であると定義することができる．また，平均 2 乗損失および平均 K 損失と同様に，2 ステップ法の統計的な妥当性を論じることができるが，ここでは平均 2 乗対数損失によって定義される母 SN の推定量である標本 SN 比のみを考察する．標本 SN 比をデータから推定するために，c^2 の推定値として

$$C^2 \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\left(\frac{y_i}{\bar{y}_G}\right)\right)^2 \tag{2.15}$$

を考える．ここに $\bar{y}_G$ は標本幾何平均を表す．このとき

$$E\left[\left(\frac{n}{n-1}\right)C^2\right] = c^2, \quad n \geq 2$$

が成立し，これより c^2 の不偏推定値は $nC^2/(n-1)$ で与えられ，この逆数の値を望目特性に対する標本 SN 比として

$$\text{望目特性の標本 SN 比} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{C^2} \tag{2.16}$$

で定義することができる．

3. Sankaran and Gupta の指数型分布族から導出される損失関数と SN 比

本節では，Sankaran and Gupta (2005) によって与えられた指数型分布族に着目し，分布型を特定化した場合の SN 比を考察する．ここで，Sankaran and Gupta 分布族の密度関数は

$$f(x,\mu,\theta) = a(x)c(\theta)^{\alpha}\exp\{-2c(\theta)l(x)\} \tag{3.1}$$

で与えられる（詳しくは，Sankaran and Gupta, 2005, p.2090,（2.1）式を見よ）．この分布族は，指数型分布族の部分集合であり，正規分布，ガンマ分布，対数正規分布，逆ガウス型分布，レイリー分布，マクスウェル分布，指数分布，ベータ型分布を含む．さらに $2\alpha = k$ が整数であるとき指数部分の主因子 $c(\theta)l(X)$ は自由度 k の χ^2 分布に従うことが知られている（$c(\theta)l(X) \sim \chi^2(k)$）．そこで，本節では，分布族（3.1）において，$\alpha = 1/2$，$c(\theta) = 1/\theta^2$ かつ $c(\theta)l(X) \sim \chi^2(1)$ という共通の性質をもつ正規分布，逆ガウス型分布および対数正規分布の場合について論じる．ただし，$a(x)$ は $\int f(x)dx = 1$ を満たす関数である．

3.1 正規分布

密度関数（3.1）において，$\alpha = 1/2$，$c(\theta) = 1/\sigma^2$，$l(x) = (x-\mu)^2$ とした場合に正規分布が得られる．ここで μ は位置母数であり，μ を x で推定したときの損失として 2 乗損失関数 $l(x)$ を定義することができる．$X \sim N(\mu,\sigma^2)$ のとき，平均損失は

$$R_S = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

となる．これより，2 乗損失関数および平均 2 乗損失は本来，位置母数 μ に関する損失を測る関数として用いられ，その“ばらつき”の測度を分散としているのである．この平均 2 乗損失

の逆数で定義される母 SN 比はゼロ望目性の SN 比である．また，母 SN 比をデータから推定する場合，母 SN 比の推定量である標本 SN 比は不偏分散 V_e の逆数の値で与えられ，今の場合には，分布を仮定しなくても同じ結果を与える．ちなみに，正規分布を仮定すれば，タグチの望目特性の SN 比(2.1)の推定値である標本 SN 比は，分子分母の最尤推定値の比として

$$\text{望目特性の標本 SN 比}\ \gamma_N = \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2/n}$$

を考えることもできる．

3.2 逆ガウス型分布

密度関数(3.1)において，$\alpha = 1/2$，$c(\theta) = 1/c^2$，$l(x) = (\sqrt{x/\mu} - \sqrt{\mu/x})^2$ とした場合には尺度を記述する分布として知られる逆ガウス型分布が得られ，その確率素分は

$$f(x;\mu,c^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}c}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\left(\sqrt{\frac{x}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{x}}\right)\right)^2\right\}\frac{dx}{\mu}, \quad 0 < x < \infty$$

で与えられる．$X \sim IG(\mu,c^2)$ のとき，平均損失は

$$R_{IG} = E[L_{IG}(X,\mu)] = E\left[\left(\sqrt{\frac{X}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{X}}\right)^2\right] = c^2$$

となる．これより尺度母数 μ を K 損失関数を用いた場合のばらつきの測度が導出され，逆ガウス型母集団を仮定した場合の望目特性に対する母 SN 比が次式で定義できる：

$$\text{望目特性の母 SN 比}\ \eta_{IG} = \frac{1}{c^2}$$

また，c が 1 と比べて十分小さいならば，逆ガウス型分布 $IG(\mu,c^2)$ は正規分布 $N(\mu,c^2\mu^2)$ で近似されるため，タグチの望目の SN 比とほぼ等しい値となる．

逆ガウス型母集団を仮定した場合の望目特性の標本 SN 比は

$$\text{望目特性の標本 SN 比}\ \gamma_{IG} = \frac{\bar{x}_H}{\bar{x} - \bar{x}_H} \tag{3.2}$$

で定義することができ，この標本 SN 比(3.2)は最尤推定値に一致する．また，サンプル数が大きければ，ほぼ(2.6)式に一致し，標本 SN 比が大きい(“ばらつき” が小さい)場合には，平均 2 乗損失に基づく標本 SN 比にほぼ等しいことがわかる．

3.3 対数正規分布

密度関数(3.1)において，$\alpha = 1/2$，$c(\theta) = 1/c^2$，$l(x) = (\log(x/\mu))^2$ とした場合には対数正規分布が得られ，その確率素分は

$$f(x;\mu,c^2)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}c}\left(\frac{x}{\mu}\right)^{-1}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}\log\frac{x}{\mu}\right)^2\right\}\frac{dx}{\mu}, \quad 0 < x < \infty$$

である．$X \sim LN(\mu,c^2)$ のとき，平均損失は

$$R_L = E\left[\left(\log\frac{X}{\mu}\right)^2\right] = c^2$$

となる．これより，対数正規母集団を仮定した場合の望目特性に対する母 SN 比が次式で定義できる：

$$\text{望目特性の母 SN 比}\ \eta_L = \frac{1}{c^2}$$

また，c が 1 と比べて十分小さいならば(2.1)で定義される母変動係数にほぼ一致する．データから母 SN 比を推定する際，対数正規母集団を仮定すれば最尤推定量が陽な表現で導出することができ，この場合の標本 SN 比を次式で定義する：

$$\text{(3.3)} \qquad 望目特性の標本 SN 比\ \gamma_{LN} = 1 \Big/ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\log\frac{x_i}{\bar{x}_G}\right)$$

また，標本 SN 比が大きい場合には，平均 K 損失と同様に平均 2 乗損失に基づく標本 SN 比にほぼ等しいことがわかる．

最後に，尺度母数を記述する分布として，2 つの分布を考察したが，これらの分布は任意に固定された λ に対して，損失関数 $l(x) = ((x/\mu)^{\lambda/2} - (\mu/x)^{\lambda/2})^2$，$c(\theta) = c^2$ とした特別な場合として得られる．すなわち，$\lambda = 1$ のとき逆ガウス型分布であり $\lambda \to 0$ のとき対数正規分布となる．これは，べき逆ガウス型分布として岩瀬・平野(1990)によって提案された分布であり，この場合の平均損失は

$$\text{(3.4)} \qquad R_{PIG} = E\left[\left(\left(\frac{X}{\mu}\right)^{\frac{\lambda}{2}} - \left(\frac{\mu}{X}\right)^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2\right] = c^2$$

となる．しかし，この逆数を母 SN 比として定義することができるけれども，べき逆ガウス型母集団を仮定したとしても標本 SN 比の陽な表現を与えることが困難である．

4. おわりに

本稿では，まず，望目特性におけるタグチの母 SN 比を無次元化した平均 2 乗損失の逆数の値であると定義し，さらに正値データを想定した場合の尺度母数に関する“ばらつき”の測度を平均 K 損失および平均 2 乗対数損失などの平均損失の逆数の値として定義し統一的な SN 比を提案した．さらに，この提案された SN 比に基づいて，分布を仮定しない場合および仮定した場合の推定量として標本 SN 比を構築し，2 ステップの統計的観点による体系化を試みた．しかし，本稿で扱った平均損失に対する 2 ステップ最適性は議論できたものの，これらを包含するような一般化はなされておらず，今後の課題となろう．

謝　辞

本論文に対して編集委員会，査読者の方々に貴重なご助言を頂きました．ここに深謝の意を表します．

参 考 文 献

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969). A new family of life distributions, *Journal of Applied Probability*, **6**, 319–327.

Box, G. E. P. (1988). Signal-to-noise ratios, performance criteria, and transformations, *Technometrics*, **30**, 1–40.

岩瀬晃盛，平野勝臣(1990). べき逆ガウス型分布とその応用，応用統計学，**19**(3), 163–176.

河村敏彦，岩瀬晃盛，金藤浩司(2006). 比例式モデルに基づく新しい SN 比の提案とその応用，品質，**36**(3), 91–99.

Leon, R. V., Schoemaker, A. C. and Kackar, R. N. (1987). Performance measures independent of adjustment: An explanation and extension of Taguchi's signal-to-noise ratios, *Technometrics*,

29, 253–285.
宮川雅巳(2000).『品質を獲得する技術』，日科技連出版社，東京.
Sankaran, P. G. and Gupta, R. D. (2005). A general class of distributions: Properties and applications, *Communications in Statistics. Theory and Methods*, **34**(11), 2089–2095.

A Statistical Consideration of Two-step Optimization in Parameter Design

Toshihiko Kawamura[1] and Kōsei Iwase[2]

[1]The Institute of Statistical Mathematics
[2]Yokohama College of Pharmacy

The Taguchi method is widely used as a parameter design that is robust to disturbances or variations due to the conditions under which products are manufactured. This paper first proposes a generalized population SN ratio based on average loss by employing the average K loss and average log quadratic loss defined in the positive region as performance measures for evaluating a "variation" relating to the scale parameter for data with positive values. We construct sample SN ratios for estimating the proposed population SN ratios and give its statistical considerations relating to the optimality of the two-step procedure in the Taguchi method.

Key words: Inverse Gaussian distribution, log-normal distribution, loss function, parameter design, SN ratios, Taguchi method, two-step procedures.