統計数理（2006）
第 54 巻 第 1 号 23–38
©2006 統計数理研究所
特集「統計科学とリスク解析」
［原著論文］

時間依存共変量を用いたハザードモデルによるデフォルト確率期間構造の推計手法

山下 智志[1]・安道 知寛[2]

（受付 2005 年 7 月 5 日；改訂 2006 年 3 月 8 日）

要　旨

金融自由化や新 BIS 規制の導入などの環境変化にともない，信用リスクを適切に予測・管理することの重要性が認識されるようになった．信用リスク計量化のなかでも，デフォルト確率の推計は長い歴史を持ち，その推計モデルは，市場性のデータを元にした確率過程モデルと，実績デフォルトデータを元にした統計モデルとに大別される．近年，統計的アプローチの精練化が試みられ，“財務指標の推移” そのものを説明変数としたロジットモデルが導入された．

しかし，ロジットモデルは将来の一時点におけるデフォルト確率を求める手法であり，デフォルトの可能性のある債券の現在価値を求める場合，将来のクーポンや元本支払いが生じる「すべての」時点でのデフォルト確率を知る必要がある．また，ALM の観点からも，デフォルト確率の期間構造を考慮した資産・負債の管理は重要な要素となる．

本稿では，“財務指標の推移” を説明変数としたハザードモデルを導入し，デフォルト確率の期間構造を推計する手法を提案する．実証分析を通じ，提案手法の有効性を示す．

キーワード：関数データ解析，時間依存共変量，ハザードモデル，ベイズ情報量規準．

1.　はじめに

1.1　背景

わが国の金融機関では，BIS 規制や不良債権問題をはじめとするリスク管理の要請を背景に，信用リスク管理体制の整備に積極的に取り組んでいる．2006 年末から施行される新 BIS 規制においても，信用リスクの精密化が盛り込まれ，その管理能力の重要性が一段と認識されている．信用リスクには，デフォルト確率，デフォルト時損失率，デフォルトの相関，エキスポージャーの変動など様々なリスクが含まれるが，本稿では，このうちデフォルト確率の期間構造の推計を対象とする．

デフォルト確率の推計には大きく分けて確率過程モデルと統計モデルの二つがある．確率過程モデルには，さらに構造型モデル（Merton, 1974）と誘導型モデル（Jarrow and Turnbull, 1995; Duffie and Singleton, 1999）が存在する．構造型モデルにおいては，企業価値を表現する変数が一定水準を下回ることがデフォルトとみなされ，企業価値の確率変動を確率過程を用いてモデル化して，デフォルト確率が推計される．誘導型モデルは，デフォルト確率を確率過程を用いて表現し，市場で観測されるデータに基づき推計する．本稿では，実績デフォルトデータと財

[1] 統計数理研究所：〒106–8569 東京都港区南麻布 4–6–7
[2] 慶應義塾大学大学院 経営管理研究科/慶應義塾大学ビジネス・スクール：〒223–8523 神奈川県横浜市港北区日吉本町 2–1–1

務指標を利用してデフォルト確率を推計する統計モデルについて議論する．

財務指標を用いたデフォルト予測の代表的な統計的アプローチとしては，多変量判別分析(Altman, 1968)，ロジットモデル(Martin, 1979; 山下・川口，2003)，ニューラルネットワーク(Atiya, 2001)，決定木(Sung et al., 1999)，ハザードモデル(Lane et al., 1986)などが挙げられ，これらのモデルを利用したデフォルト予測の実証研究は多数存在する(例えば，安道・山下，2004 を参照)．一般に，統計的アプローチにおいては，直近に観測された "一時点" の財務指標，または一定期間における財務指標の変化率を利用するが，過去に蓄積された財務指標に関する膨大な情報を最大限に反映できているとは必ずしもいえない(例えば，Meyer and Pifer, 1970; 安道・山下，2004)．

1.2 本稿の目的

前節で指摘した問題に対し，安道・山下(2004)は，関数データ解析(Ramsay, 1982; Ramsay and Dalzell, 1991; Ramsay and Silverman, 1997)という現代的な手法の枠組みを利用し，"財務指標の推移" を説明変数としたロジットモデルを導入し，高精度なデフォルトリスク計測手法を提案した．しかし，統計的アプローチの精練化を試みた安道・山下(2004)の研究では "財務指標の推移" を説明変数とするロジットモデルが導入されたが，ロジットモデルは将来の一時点におけるデフォルト確率を求める手法であり，デフォルトの可能性のある債券の現在価値を求める場合，将来のクーポンや元本支払いが生じる「すべての」時点でのデフォルト確率を知る必要がある．また，デフォルト確率の期間構造を推計することは，資金・負債価値の期間別の把握や将来の期間損益の変動予測など，ALM 管理の観点からも利点がある．本稿の目的は，将来の一時点のみならず，デフォルト確率の期間構造を推計する手法を提案することにある．

具体的には，安道・山下(2004)と同様に，財務指標の時間的推移が信用リスク計測に影響を与えると考え，その変化を非線形関数でモデル化する．このモデル化した財務指標の推移を説明変数とするハザードモデルによりデフォルト確率の期間構造を推計する．モデルの推定には罰則付き最尤法を利用し，予測精度が高いモデルを選択するために拡張 BIC (Konishi et al., 2004)を導出した．

2 節では，各企業の財務指標の経年変化を非線形回帰手法を利用してモデル化する．3 節では，"財務指標の時間的推移" をモデルの説明変数とするハザードモデルを導入し，4 節で導入したモデルの構築法について議論する．5 節では，わが国の上場企業のデフォルトデータの解析を通じて，提案するモデルの有用性を検証する．

2. 財務指標推移のモデル化

いま，ある企業について，時刻 s において $X(s)$ の値をとる財務指標に関する経時的データ $\{(s_i, x_{s_i}); i=1,\ldots,n_x\}$ が与えられたとする．観測時点 s_i は，四半期決算・半期決算・決算期など有価証券報告書が公表される日付であったり，中小企業へ融資をおこなっている金融機関などでは，さらに短い期間(例えば毎月)の財務指標取得日であったりする．また，財務指標としてはキャッシュフローや自己資本比率など様々なものが考えられる．本節の目的は，財務指標の時間的変化を非線形回帰モデルにより関数化することにある．

本稿では，安道・山下(2004)に従い，財務指標の時間推移に B-スプライン(A.1 参照)による非線形構造

$$X(s) = \sum_{k=1}^{m} w_k \phi_k(s) = \boldsymbol{w}'\boldsymbol{\phi}(s) \tag{2.1}$$

を仮定し，推定曲線の局所変動の程度を考慮に入れた罰則付き最小二乗法(Green and Silverman, 1994; Eilers and Marx, 1996, 1998）に基づいてモデルのパラメータ $\boldsymbol{w}=(w_1,\ldots,w_m)'$ を推定する．すなわち，$\ell_\eta(\boldsymbol{w})=\sum_{i=1}^{n_x}(x_{s_i}-X(s_i))^2+n_x\eta\boldsymbol{w}'R\boldsymbol{w}$ の最小化によりパラメータが推定される．ここで，$\boldsymbol{\phi}(s)=(\phi_1(s),\ldots,\phi_m(s))'$ は m 次元 B-スプライン基底関数ベクトル，η は平滑化パラメータと呼ばれ，推定曲線の局所変動の程度を制御するパラメータである．また，$\Delta w_k=w_k-w_{k-1}$ とし，$m\times m$ 行列 R は $\sum_{k=2}^{m}(\Delta^2 w_k)^2=\boldsymbol{w}'R\boldsymbol{w}$ を表現する行列である．

罰則付き最小二乗誤差の最小化に基づくパラメータの推定量 $\hat{w}$，および時間 s の関数としてモデル化された財務指標の推移 $X(s)$ は

$$\hat{\boldsymbol{w}}=\left(B'B+n_x\eta R\right)^{-1}B'\boldsymbol{x},\qquad X(s)=\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(s) \tag{2.2}$$

で与えられる．ここで，$B=(\boldsymbol{\phi}(s_1),\ldots,\boldsymbol{\phi}(s_{n_x}))'$，$\boldsymbol{x}=(x_{s_1},\ldots,x_{s_{n_x}})'$ である．

基底関数の個数 m と平滑化パラメータ η は，修正 SBIC（Eilers and Marx, 1998），拡張 BIC（Konishi et al., 2004），修正 AIC（Eilers and Marx, 1996），改良 AIC（Hurvich et al., 1998），一般化情報量規準 GIC（Konishi and Kitagawa, 1996; 井元・小西，1999），交差検証法（Stone, 1974），一般化交差検証法（Craven and Wahba, 1979）など様々な指標が利用可能である．本稿では拡張 BIC（Fujioka, 2002; Konishi et al., 2004）$=n_x\log(2\pi\hat{\sigma}^2)+n_x+n_x\eta\hat{\boldsymbol{w}}'R\hat{\boldsymbol{w}}/\hat{\sigma}^2+\log|Q(\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\sigma}^2)|-\log|R|_+-(m-2)\log(\eta/\hat{\sigma}^2)+\text{Const}$ を利用する．ただし，$\hat{\sigma}^2=\sum_{i=1}^{n_x}\{x_{s_i}-\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(s_i)\}^2/n_x$，$|R|_+$ は R の 0 でない固有値の積とし，$(m+1)$ 次元行列 $Q(\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\sigma}^2)$ は以下で与えられる．

$$Q(\hat{\boldsymbol{w}},\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n_x\hat{\sigma}^2}\begin{pmatrix} B'B+n_x\eta R & B'\boldsymbol{e}/\hat{\sigma}^2 \\ \boldsymbol{e}'B/\hat{\sigma}^2 & n_x/2\hat{\sigma}^2 \end{pmatrix}.$$

ここで，$\boldsymbol{e}=(x_{s_1}-\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(s_1),\ldots,x_{s_{n_x}}-\hat{\boldsymbol{w}}'\boldsymbol{\phi}(s_{n_x}))'$ とする．Fujioka（2002）は，一般化線形モデルの予測子が基底関数の線形和で表されるモデルを罰則付き最尤法に基づき推定し，そのモデルを評価するための拡張 BIC を提案している．

次節では，構成した財務指標の時間的推移を説明変数として，デフォルト確率の期間構造を推計するハザードモデルを導入する．

3．時間依存共変量を用いた生存時間モデル

生存時間解析は，医学，工学，保険数理など様々な分野で活発に研究されており，主な目的の一つは，死亡や故障などの事象のハザード率をモデル化し，事象が発生するまでの時間間隔を分析することである．ここでは，債務不履行や経営破綻などを解析対象の事象（以降，デフォルト事象と呼ぶことにする）とみなしその分析をおこなう．

いま，生存時間を表す非負の確率変数を τ とし，その密度関数を $f(t)$ とする．このとき，時点 t における企業の生存確率 $S(t)$，及びデフォルト確率 $F(t)$ はそれぞれ

$$S(t)=\Pr(\tau>t)=\int_t^\infty f(x)dx,$$
$$F(t)=\Pr(\tau<t)=\int_0^t f(x)dx$$

で定義される．さらに，ある時点以上生存するという条件の下で，次の瞬間にデフォルトが発生するハザード関数 $h(t)$ は

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Pr(t<\tau\le t+\Delta t)=\frac{f(t)}{S(t)}$$

で与えられる．

一般に，p 個の財務指標 $\boldsymbol{X}=(X_1,\ldots,X_p)'$ に基づく財務アプローチにおいては，ハザード関数 $h(t)$ を次のように定式化する(Lane et al., 1986)．

$$h(t,\boldsymbol{x};\boldsymbol{\beta})=h_0(t)\exp\{\beta_1X_1+\cdots+\beta_pX_p\}. \tag{3.1}$$

ここで $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\ldots,\beta_p)'$ は各説明変数に対する重み(重要性)を表すパラメータベクトルである．$h_0(t)$ はベースラインハザード関数と呼ばれ，時間 t にのみ依存する部分である．例えば，ワイブル分布(Lee and Jorge, 1996; Mata and Portugal, 1994)や対数ロジスティック分布(Whalen, 1991)によりモデル化されることがある．また，ベースラインハザード関数に対し特定の関数形を仮定しない Cox (1972)の比例ハザードモデルによる研究(Lane et al., 1986; 木島・小守林, 1999; 乾・室町，2000; 森平，2000)，スプライン関数を仮定した研究(安道・山下，2005)などもある．

本稿では，財務指標の時間的推移 $\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),\ldots,X_p(t))'$ を説明変数として用いる．このとき，ある一時点で観測された財務指標 X を用いる従来のハザード関数から，財務指標の時間推移 $X(t)$ を説明変数として用いるハザード関数への自然な拡張は，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ で重み付けられた $X_j(t)$ の積分である．

$$h(t,\boldsymbol{X}(t);\boldsymbol{\beta}(t))=h_0(t)\exp\left\{\int_\Omega\beta_1(z)X_1(z)dz+\cdots+\int_\Omega\beta_p(z)X_p(z)dz\right\}. \tag{3.2}$$

ここで，Ω は指標 $X_j(t)$ の定義域である．財務指標の観測開始時点 t_0 に存在し，かつ現時点 t までデフォルトしていない企業については $\Omega=[0,t]$ であり，財務指標の観測期間の途中で企業が立ち上げられ(時点を t_b とする)，現時点までデフォルトしていない企業については $\Omega=[t_b,t]$ である．また，財務指標の観測開始時点 t_0 に存在し，かつ現時点 t までにデフォルトしている企業については $\Omega=[0,t_d]$ となる．ただし，t_d は実際に観測されたデフォルト時点とする．このように，関数のデータを取り扱う手法を総称して関数データ解析(Ramsay and Silverman, 1997)という．関数データ解析のおおまかな枠組み・手順，データを関数化することの目的，利点などについて，安道・山下(2004)は概説しているので参考にされたい．

本稿では，安道・山下(2004)に従い，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ に対しては B-スプライン構造を仮定する．

$$\beta_j(t)=\sum_{l=1}^{q}c_{jl}\psi_l(t)=\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{\psi}(t). \tag{3.3}$$

ただし $\boldsymbol{c}_j=(c_{j1},\ldots,c_{jq})'$ は q 次元パラメータベクトル，$\boldsymbol{\psi}(t)=(\psi_1(t),\ldots,\psi_q(t))'$ は B-スプライン基底関数ベクトルである．このとき，(2.1)式と(3.3)式から，(3.2)式の積分は

$$\int_\Omega\beta_j(z)X_j(z)dz=\int_\Omega\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{\psi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)'\hat{\boldsymbol{w}}_j=\boldsymbol{c}_j'Q\hat{\boldsymbol{w}}_j:=\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_j,\qquad j=1,\ldots,p \tag{3.4}$$

で定式化される．ここで，$z_j=Q\hat{\boldsymbol{w}}_j$ とし，m 次元ベクトル $\hat{w}_j$ は，2 節で説明した手法により j 番目の財務指標を関数化した際に推定されたものである．また Q は $q\times m$ 次元行列で，その (i,j) 成分は $Q_{ij}=\int_\Omega\psi_i(z)\phi_j(z)dz$ で与えられる．

本稿では，ベースラインハザード関数 $h_0(t)$ をパラメトリックモデルで定式化する．パラメトリックの中では，ベースラインハザードが期間を通じて一定である指数分布が考えられる．しかし，経済の状態に依存せず，ベースラインハザードの水準が一定であるという仮定は成り立たないと考えるのが自然である．そこで，本稿では，確率変数 τ に対してワイブル分布を仮定し，(3.2)式のベースラインハザード関数 $h_0(t)$ を

$$h_0(t;\alpha,\gamma)=\frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha-1}$$

で定式化する．ここで α は形状パラメータ，γ は尺度パラメータである．ここで，$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1', \ldots, \boldsymbol{c}_p')'$，$\alpha$ はハザード関数の形状を決定する形状パラメータで，$\alpha = 1$ とすると指数分布に帰着する．以上をまとめると，p 個の財務指標の推移 $X(t)$ が与えられたときのハザード関数，生存関数，密度関数はそれぞれ次式で定式化される．

$$h(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) = \frac{\alpha}{\gamma}\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha-1}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_j\right), \tag{3.5}$$

$$S(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) = \exp\left\{-\left(\frac{t}{\gamma}\right)^{\alpha}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_j\right)\right\}, \tag{3.6}$$

$$f(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) = h(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) \times S(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma). \tag{3.7}$$

ここで，$\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{c}_1', \ldots, \boldsymbol{c}_p')'$，$\alpha$ はハザード関数の形状を決定する形状パラメータで，$\alpha = 1$ とすると指数分布に帰着する．

4.　モデルの構築

いま，n 個のデフォルト企業，または非デフォルト企業の生存時間に関するデータ $\{(t_i, \boldsymbol{x}_i(t), z_i); i = 1, \ldots, n\}$ が与えられたとする．ここで z_i は打ち切りを表す変数で，i 番目の企業が観測期間内にデフォルトに陥ったときは $z_i = 1$，それ以外の場合は $z_i = 0$ をとる．n 個の観測データに基づく尤度への寄与は，デフォルト例では $f(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma)$，打ち切り例では $S(t|\boldsymbol{X}(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma)$ であることから，生存時間モデル(3.5)の対数尤度関数は，

$$\begin{aligned}\ell(\boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) &= \sum_{i=1}^{n}\left[z_i \log f(t_i|\boldsymbol{x}_i(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) + (1 - z_i)\log S(t_i|\boldsymbol{x}_i(t); \boldsymbol{c}, \alpha, \gamma)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[z_i\left\{\log\alpha + (\alpha - 1)\log t_i - \alpha\log\gamma + \sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right\} - \left(\frac{t_i}{\gamma}\right)^{\alpha}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\right]\end{aligned}$$

となる．

対数尤度関数 $\ell(\boldsymbol{c}, \alpha, \gamma)$ を最大にすることで，最尤推定量 $\hat{\beta}_j(t) = \hat{\boldsymbol{c}}_j\psi(t)$，$\hat{\alpha}$，$\hat{\gamma}$ は得られる．しかし，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ を時間 t の関数とみたとき，パラメータ関数が大きく変動する．つまり，デフォルト予測モデルが時間軸に関して極度に変動することはあまり望ましくない(安道・山下，2004)．また，2 パラメータのワイブル分布では，形状パラメータと尺度パラメータの同時推定が不安定になる問題がある．以上のことを考慮し，パラメータ関数 $\beta_j(t)$ の複雑さを

$$\mathrm{penalty}(\beta_j(t)) := \int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2\beta_j(t)}{\partial t^2}\right)^2 dt \approx \sum_{l=2}^{m}(\Delta^2 c_{jl})^2 = \boldsymbol{c}_j' R\boldsymbol{c}_j, \qquad j = 1, \ldots, p$$

で測り，次の罰則付き対数尤度関数の最大化に基づきパラメータを推定する．

$$\ell_{\lambda_c, \lambda_\gamma}(\boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) = \ell(\boldsymbol{c}, \alpha, \gamma) - \frac{n\lambda_c}{2}\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j' R\boldsymbol{c}_j - \frac{n\lambda_\gamma}{2}\gamma^2. \tag{4.1}$$

ここで，λ_c，λ_γ は平滑化パラメータ，$q \times q$ 次元行列 R は 2 節で定義した差分行列とする．この罰則付き対数尤度関数を利用すると，パラメータの推定量の漸近分散が小さくなり，結果的に，パラメータ関数，及びワイブル分布のパラメータを安定的に推定することができる．推定されたパラメータ $\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{\gamma}$ を(3.5)～(3.7)式に代入するとハザード関数，生存関数，密度関数が構成される．

ここで注意すべきは，デフォルト予測モデルは財務指標の種類・個数，平滑化パラメータ λ，(3.3)式で定義されるパラメータ関数 $\beta_j(t)$ の B-スプライン基底関数の個数 q に依存していることで，これらの選択をおこなう必要がある．

経験ベイズアプローチにおいては，モデルのパラメータ θ（本稿では，$\boldsymbol{c},\alpha,\gamma$ に対応する）に事前分布 $\pi(\boldsymbol{\theta}|\zeta)$ を想定し，周辺尤度

$$\int \exp\{\ell(\boldsymbol{\theta})\}\pi(\boldsymbol{\theta}|\boldsymbol{\zeta})d\boldsymbol{\theta}$$

が最大となるモデル選択をする．ただし，モデルの事前確率は等しいと仮定しており，ζ はハイパーパラメータベクトルである．本研究においては，ζ は基底関数の個数，平滑化パラメータ，財務指標の組み合わせに対応する．周辺尤度の解析的な近似である Schwarz (1978)の Bayes 型情報量規準(Konishi et al., 2004 を参照)は，現在まで様々な分野で使用され成果をあげてきた．しかし，Schwarz (1978)の Bayes 型情報量規準は最尤法によって推定されたモデルを評価する規準であり，罰則付き最尤法により推定されたモデルの評価には理論的な問題が生じていた．この問題を解決するひとつの方法として，Konishi et al. (2004)は，上式の積分をラプラス近似(Tierney and Kadane, 1986)を利用して解析的に求め，罰則付き最尤法に基づき構成されたモデルを評価するための Bayes 型情報量規準を導出した．

ベイズ理論の観点から考えると，罰則付き対数尤度関数(4.1)式の最大化によりモデルを推定することは，退化した正規分布の積

$$\pi(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma|\lambda_c,\lambda_\gamma)=\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{n\lambda_c}{2\pi}\right)^{(q-2)/2}|R|_{+}^{1/2}\exp\left\{-\frac{n\lambda_c}{2}\boldsymbol{c}_j'R\boldsymbol{c}_j\right\}$$
$$\times\left(\frac{n\lambda_\gamma}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{n\lambda_\gamma}{2}\gamma^2\right\}$$

をパラメータの事前分布に仮定することと対応している(Konishi et al., 2004)．モデルの事前確率を等しいと仮定し，モデルの事後確率に積分のラプラス近似を適用することでベイズの理論から導かれる拡張 BIC (Konishi et al., 2004)は次式で与えられる．

$$\mathrm{BIC}=-2\ell(\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\alpha},\hat{\gamma})+n\lambda_c\sum_{j=1}^{p}\hat{\boldsymbol{c}}_j'R\hat{\boldsymbol{c}}_j+n\lambda_\gamma\hat{\gamma}^2-(2p+1)\log(2\pi/n)$$
$$+\log|Q(\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\alpha},\hat{\gamma})|-p\log|R|_{+}-p(q-2)\log\lambda_c-\log\lambda_\gamma. \tag{4.2}$$

ただし，

$$Q(\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\alpha},\hat{\gamma})=-\frac{1}{n}\frac{\partial^2\ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\hat{\boldsymbol{c}},\hat{\alpha},\hat{\gamma})}{\partial\boldsymbol{\theta}\partial\boldsymbol{\theta}}$$

はパラメータ $\theta=(c',\alpha,\gamma)'$ の 2 回微分で構成される $(pq+2)\times(pq+2)$ 次元ヘッシアン行列である．罰則付き対数尤度関数の 2 回微分の計算式については，A.3 節を参照されたい．BIC を最小とするモデルを最適なモデルとして選択する．

5. 実証分析

5.1 データ

本節では，東証・大証の上場企業によるデフォルト事例(法的倒産またはそれに準ずる行為とし，法的倒産には会社更生，和議，破産，商法整理及び特別清算を含み，それに準ずる行為とは，銀行取引停止処分，金融機関による債務放棄など)の分析を通して提案する手法の有効性を検証する．ここでのデフォルト観測期間は 1995 年 9 月 $\sim$ 2003 年 1 月であり，その期間に観

表 1. **東証・大証の上場企業の 50 デフォルト事例(推定用サンプル). オ・スポーツ:オリンピックスポーツ, 長谷工コーポ:長谷工コーポレーション, 第一コーポ:第一コーポレーション.**

企業名	日時	事由	企業名	日時	事由
環境建設	1995/09	債務免除	ダイア建設	1999/03	債務免除
エクイオン	1996/02	会社整理	中央板紙	1999/03	債務免除
旭ホームズ	1996/03	債務免除	佐藤工業	1999/03	債務免除
第一コーポ	1996/03	債務免除	青木建設	1999/03	債務免除
オ・スポーツ	1996/09	和議開始	第一電工	1999/03	債務免除
飛島建設	1996/10	債務免除	環境建設	1999/03	債務免除
日榮ファイナンス	1996/10	会社整理	殖産住宅相互	1999/03	債務免除
京樽	1997/01	会社更生法	アーバンライフ	1999/03	債務免除
チノン	1997/03	債務免除	藤和不動産	1999/03	債務免除
多田建設	1997/07	会社更生法	兼松	1999/03	債務免除
東海興業	1997/07	会社更生法	佐々木硝子	1999/04	会社更生法
大都工業	1997/08	会社更生法	日興電機工業	1999/04	会社更生法
ヤオハンジャパン	1997/09	会社更生法	興国鋼線索	1999/07	会社更生法
東食	1997/12	会社更生法	長崎屋	2000/02	会社更生法
パスコ	1998/03	債務免除	エルカクエイ	2000/02	会社更生法
レオパレス 21	1998/03	債務免除	井上工業	2000/03	債務免除
マルキン忠勇	1998/03	債務免除	トーメン	2000/03	債務免除
アーバンライフ	1998/03	債務免除	有楽土地	2000/03	債務免除
三井埠頭	1998/06	会社更生法	ロイヤルホテル	2000/03	債務免除
第一コーポ	1998/06	特別清算	アーバンライフ	2000/03	債務免除
大倉商事	1998/08	自己破産	レオパレス 21	2000/03	債務免除
ヤハギ	1998/09	自己破産	ダイア建設	2000/03	債務免除
ロンシャン	1998/09	会社更生法	長谷工コーポ	2000/03	債務免除
日本国土開発	1998/12	会社更生法	中央板紙	2000/03	債務免除
長谷工コーポ	1998/12	債務免除	ライフ	2000/05	会社更生法

測された 100 デフォルト事例に注目して解析をおこなう. デフォルトの年月日は, 法的申請日, 不渡り日, 債務免除が合意に至った日, もしくは債務免除がバランスシートに計上される日とした. 更に, 対象期間をモデル推計期間(2000 年 5 月迄)とモデルの予測精度を検証するテスト期間(2000 年 5 月以降)とし, 50 デフォルト事例を推定用サンプル(表 1 を参照), 50 デフォルト事例をテストサンプル(表 2 を参照)として用いることとした. 推定用サンプルには金融機関による債務放棄を複数回受けた企業があるが, それぞれを 1 サンプルとして取り扱った. ただし, テストサンプルについては, 2000 年 5 月迄デフォルトに陥っていないので, 推定時点においては非デフォルト企業として扱われてモデルは推定される. 財務指標の観測期間は 1990 年 1 月 ∼ 2000 年 3 月であり, 途中でデフォルトに至るケースはその直近の財務指標まで用いた.

本稿での目的の一つは, 現在までに観測された財務指標データに基づき, 信用リスクを推計することであるが, それを表す代表的な指標として債券格付けがある. 債券格付けとは, 企業が発行した個々の債券について, 元利金が約定通りに支払われる安全性・確実性の程度を, 発行体の信用リスクに関する膨大な情報から格付け機関が判断し, ある一定の簡潔な符号によって投資家に投資情報として提供するものである. ここでは, デフォルト企業に対するモデルの予測精度を評価することを考えているが, 提案手法の推計結果と企業の信用リスクを表す格付けとが整合的であるかどうかを調べるために, 非デフォルト企業については, 2000 年 3 月 31 日時点で格付投資情報センター(R&I)により長期優先債務格付けが付与されている(ただし,

表2. 東証・大証の上場企業の50デフォルト事例(テストサンプル). フットワーク:フットワークインターナショナル, ニッセキ・工業:ニッセキハウス工業.

企業名	日時	事由	企業名	日時	事由
第一ホテル	2000/05	会社更生法	殖産住宅相互	2002/01	民事再生法
そごう	2000/07	民事再生法	日本重化学工業	2002/02	会社更生法
川崎電気	2000/09	民事再生法	そうご電器	2002/02	民事再生法
藤井	2000/09	民事再生法	イズミ工業	2002/02	民事再生法
熊谷組	2000/09	債務免除	ナカミチ	2002/02	民事再生法
靴のマルトミ	2000/12	民事再生法	岩田屋	2002/02	私的整理
三井建設	2000/12	債務免除	日産建設	2002/03	会社更生法
池貝	2001/02	民事再生法	市田	2002/03	私的整理
富士車輌	2001/02	民事再生法	佐藤工業	2002/03	会社更生法
冨士工	2001/03	民事再生法	ダイエー	2002/03	債務免除
間組	2001/03	債務免除	雪印食品	2002/04	解散
千代田化工建設	2001/03	債務免除	段谷産業	2002/04	自己破産
天龍木材	2001/03	債務免除	第一家庭電器	2002/04	民事再生法
明和産業	2001/03	債務免除	宝幸水産	2002/04	会社更生法
フットワーク	2001/03	民事再生法	京神倉庫	2002/04	会社更生法
三井木材工業	2001/03	債務免除	ニコニコ堂	2002/04	民事再生法
ベターライフ	2001/03	民事再生法	日本加工製紙	2002/05	破産
マイカル	2001/09	民事再生法	住倉工業	2002/06	破産
大倉電気	2001/10	民事再生法	藤木工務店	2002/06	民事再生法
エルゴテック	2001/11	民事再生法	大日本土木	2002/07	民事再生法
新潟鐵工所	2001/11	会社更生法	テザック	2002/07	会社更生法
ナナボシ	2001/11	民事再生法	日立精機	2002/08	民事再生法
壽屋	2001/12	民事再生法	ニッセキ・工業	2002/10	民事再生法
青木建設	2001/12	民事再生法	古久根建設	2002/11	民事再生法
イタリヤード	2002/01	自己破産	タカラブネ	2003/01	民事再生法

表3. 財務指標.

総資本事業利益率	インタレストカバレッジ
株主資本利益率	流動比率
投資収益率	固定比率
売上高利益率	当期利益
使用総資本回転率	売上高
有形固定資産回転率	キャッシュフロー
自己資本比率	キャッシュフロー対負債比率
負債比率	キャッシュフロー対売上高比率

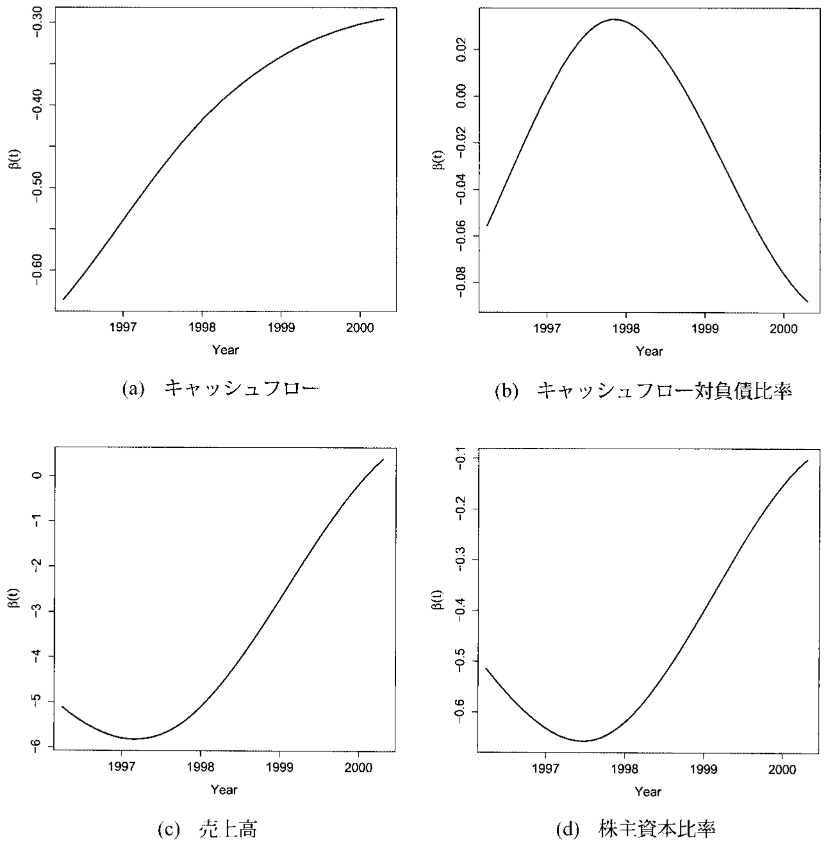
2000年4月～2002年5月迄にデフォルトした企業を除く)東証上場企業700社を用いることにした. ただし, 700社のうち150社を推定用サンプル, 550社をテストサンプルとし, 推定サンプル作成においては, 比例抽出法により高格付け企業から低格付け企業まではいるように配慮した.

デフォルト予測に有効な財務指標については, 数多くの指標が考えられるが, ここでは, 伝統的な財務諸表分析でよく議論される, 収益性, 効率性, 規模, キャッシュフローなどを表す代表的な指標を考慮し, 表3に挙げられるものを候補とする. 各変数の定義は日経NEEDSデータベースに従った. 例えば, インタレストカバレッジは(営業利益+受取利息・配当金)／支

払利息・割引料で算出される．また，当期利益，売上高，キャッシュフローについては常用対数とし，基本的には 1990 年 $\sim$ 2000 年 3 月 31 日迄の観測データを利用するが，途中でデフォルトに至るケースはその直近の財務指標まで用いた．ただし，当期利益，売上高，キャッシュフローについては，X を元の変数とすると $\mathrm{sign}(X)\cdot\log_{10}(|X|)$ の変換をおこなった．ただし，$\mathrm{sign}(X)=1\ (X>0)$，$\mathrm{sign}(X)=-1\ (X<0)$ である．つまり，その絶対スケールを対数変換で原点方向へ縮小した後に，保存していた $\pm$ 符号を再び施すような変換である．

5.2　推計結果

表 3 の財務変数の全ての組み合わせ（2^{16} 通り）をモデルの探索範囲として（4.2）式の BIC を計算した結果，キャッシュフロー，キャッシュフロー対負債比率，売上高，株主資本比率に基づく 4 変数モデルが最適なモデルとして選択された．ベースラインハザード関数 $h_0(t;\alpha,\gamma)$ に含まれる形状パラメータ，尺度パラメータは $\hat{\alpha}=3.239$，$\hat{\gamma}=1.270$ と推計された．このときの平滑化パラメータの値は，$\lambda_c=0.01$，$\lambda_\gamma=0.001$ である．また，図 1 に各変数に対するパラメータ関数 $\beta(t)$ を図示した．一般に，ハザード関数（すなわち，デフォルト確率）に寄与するパラメータ関数が正の場合，対応する財務指標の値が大きいほどハザードが高くなり，逆に，係数が負の場合は，デフォルト確率が低くなる．推計結果を分析すると，各パラメータ関数がほと



(a)　キャッシュフロー　　(b)　キャッシュフロー対負債比率

(c)　売上高　　(d)　株主資本比率

図 1.　モデルに組み込まれた 4 変数に対する重み関数 $\beta(t)$ の挙動．縦軸：$\beta(t)$，横軸：時間 t（年）．

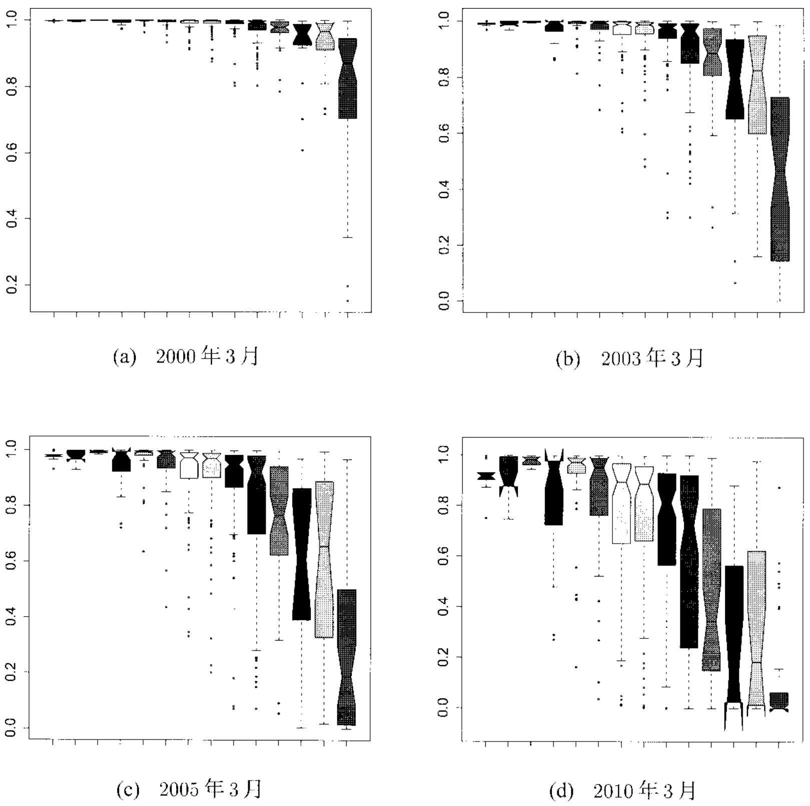


図 2. 生存確率 $S(t|\boldsymbol{x}(t);\hat{c},\hat{\alpha},\hat{\gamma})$ のボックスプロット(格付別). 一番左から順に AAA, AA+, AA, AA−, A+, A, A−, BBB+, BBB, BBB−, BB+, BB, BB−以下の企業群, 2000年3月31日以降にデフォルトするデフォルト企業群のボックスプロットである.

んど負の領域にあることから, 各財務指標が高い企業ほどデフォルト確率が低くなると推察される. 図1(b)のキャッシュフロー対負債比率に対するパラメータ関数の絶対値は増加傾向があり, 残りの変数に対するパラメータ関数の絶対値は減少傾向がある. これは, デフォルト回避のためにキャッシュフロー対負債比率を重視すべきであることを示唆している. 安道・山下(2004)はデフォルト確率とキャッシュフローの強い関連性を指摘している.

図2は生存確率 $S(t|\boldsymbol{x}(t);\hat{c},\hat{\alpha},\hat{\gamma})$ の格付け別のボックスプロットである. 上位の格付けを付与されている企業は, 2010年3月31日経過時においても高い生存確率であるのに対し, 格付けが下がるに従いその生存確率が小さくなっている. すなわち, 推計された生存確率が格付けと強い相関をもっていることがわかる. また, 図3に格付け別のデフォルト確率の期間構造の平均値を示した. 表4の格付投資情報センター(2004)の累積平均広義デフォルト率(実績ベースのデフォルト確率)と比較して, 提案手法により推計されたデフォルト確率の期間構造は累積平均広義デフォルト率の水準より若干高めの水準となった.

5.3 ROCによる予測精度評価と時間依存共変量利用の効果

デフォルトデータに対する推計精度については, ROC (Receiver Operating Characteristic)

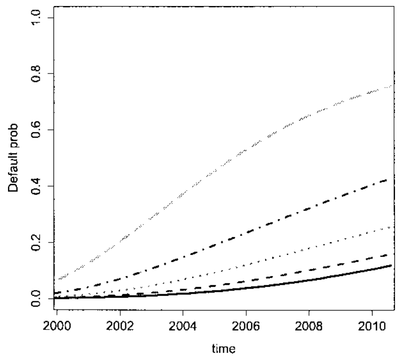


図 3. 格付けごとのデフォルト確率の期間構造．ただし，それぞれの曲線は AAA:(—)，AA 群(AA+，AA，AA–):(– – –)，A 群(A+，A，A–):(· · ·)，BBB 群(BBB+，BBB，BBB–):(– · – · –)，投資不適格群(BB+ 以下):(— — —)に対応する．

表 4. 格付投資情報センター(R&I)の累積平均広義デフォルト率(格付投資情報センター，2004)．

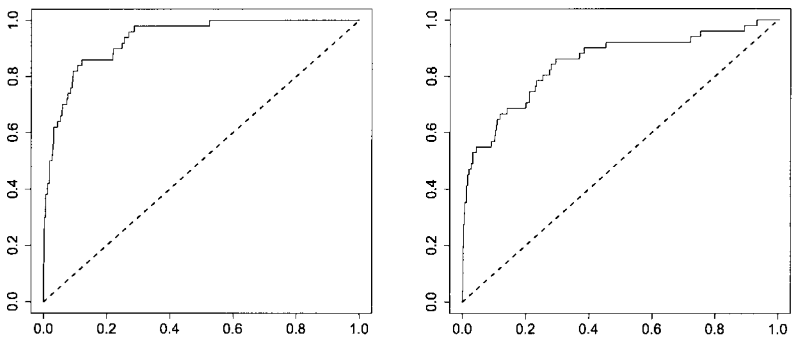
年数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
AAA	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.17	0.36	0.55	0.76
AA	0.00	0.00	0.06	0.12	0.18	0.38	0.60	0.84	1.20	1.39
A	0.04	0.13	0.32	0.58	0.93	1.26	1.55	1.90	2.30	2.61
BBB	0.13	0.40	0.74	1.13	1.53	2.01	2.48	2.90	3.27	3.68
BB	1.90	3.65	5.25	6.41	7.55	8.80	10.34	11.77	13.13	14.11
B 以下	7.89	12.36	15.96	17.84	19.19	20.62	22.83	25.05	28.11	30.47

曲線，および AUC (Area Under the Curve)を用いて検討した．ROC，及び AUC については A.2 節を参照されたい．図 4 (a)は，テストデータに対する提案手法の ROC 曲線である．提案モデルの AUC は 0.934 であり，提案モデルが高精度のデフォルト予測能力を持つことは図 4 (a)からも容易に確認できる．

本稿で提案する時間依存共変量を用いたハザードモデルの精度を，一時点の財務指標を利用した研究(Lee and Jorge, 1996; Mata and Portugal, 1994 以降，従来モデルと呼ぶ)と比較する．つまり，(3.1)式にワイブル分布のハザード関数を考えている．財務指標については，表 3 に挙げた 16 財務指標を候補とした．従来モデルは，最尤法により推定され，Schwarz (1978)の Bayes 型情報量規準により最適な財務指標の組み合わせが選択される．その結果，図 4 (b)のテストデータに対する ROC 曲線が得られた．従来モデルの AUC は 0.780 であり，時間依存共変量を使用することで予測精度の向上が達成できることが確認された．

6. まとめと今後の課題

本稿では，時間依存共変量を用いたハザードモデルによるデフォルト確率の期間構造の推計法を提案した．近年，安道・山下(2004)は，財務データをもとにデフォルト確率の推計をおこなう統計的アプローチを拡張し，“財務指標の推移” そのものを説明変数としたロジットモデルを導入した．しかし，デフォルトの可能性のある債券の現在価値を求める場合，将来のクーポンや元本支払いが生じる「すべての」時点でのデフォルト確率を推計する必要があるにもかかわらず，ロジットモデルは将来の一時点におけるデフォルト確率のみ推計していた．



(a) 提案モデルの ROC 曲線
(AUC=0.934)

(b) 従来モデルの ROC 曲線
(AUC=0.780)

図 4. ROC **曲線**(—)，**及び直線** $y=x$ (- - -).

本稿では，安道・山下(2004)に従い，財務指標の時間的推移が信用リスク計測に影響を与えると考えてその変化を非線形回帰モデルによって捉え，財務指標の推移を説明変数とするハザードモデルを提案した．モデルの推定には罰則付き最尤法を利用し，平滑化パラメータの選択には拡張 BIC (Konishi et al., 2004)を利用した．実データの解析を通じて，ハザードの期間構造が推定できることを示したが，今後の展望として，以下の二点が挙げられる．

第一に，株価情報の併用やデフォルト相関の導入などが考えられる．第二に，本研究では上場企業の分析をおこなったが，中小企業についても実証分析をおこないたいと考える．これらについては，今後の課題とし，稿を移して議論していきたい．

謝　辞

本研究は，全国銀行協会学術研究振興財団の『研究活動に対する助成』を受けて遂行されました．なお，二人の査読者の丁寧なコメントのおかげで内容は大幅に改善されました．ここに記して感謝いたします．また，財務データの一部を提供していただいた，佐藤整尚氏(統計数理研究所)に感謝致します．

A. 補足

A.1 B-スプラインについて

B-スプラインとは，基底関数の線形結合で非線形な構造を持つ関数を表現する手法である．例えば，次数が 3 の B-スプライン基底関数は，節点と呼ばれる(等)間隔に配置された点 t_j において，2 回微分導関数が連続であるという意味で，滑らかに連結した区分的多項式で構成されている．本稿においては，データが点在する区間を等間隔に分割し，各小区間を 4 つの基底関数で覆うように節点を決定したが，必ずしも等間隔に配置する必要はなく，解析目的に応じて，節点を調整することも可能である．B-スプライン基底関数は de Boor (1978)の逐次的アルゴリズムを利用すると構成される：

$$\phi_j(x,0) = \begin{cases} 1, & t_j \le x < t_{j+1}, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$\phi_j(x;p) = \frac{x-t_j}{t_{j+p}-t_j}\phi_j(x;p-1) + \frac{t_{j+p+1}-x}{t_{j+p+1}-t_{j+1}}\phi_{j+1}(x;p-1).$$

ここで，$\phi_j(x;p)$ は次数が p の B-スプライン基底関数の次数である．結局，次数が 0 の B-スプライン基底関数は 2 つの接点の間で定数であることから，任意の次数の B-スプライン基底関数を簡単に計算できる．B-スプラインに関する日本語文献としては，桜井(1981)が詳しい．

A.2　ROC 曲線

ROC 曲線は区間 $[0,1]\times[0,1]$ 上の関数で，いま，デフォルト確率が高い順番にデータが整列されているとすると，j 番目に高いデフォルト確率における ROC 曲線の座標点は $\mathrm{ROC}(j)=(n_j/n_n, d_j/n_d)$ で定義される．ただし，n_n，n_d はそれぞれデフォルト・非デフォルト企業数，n_j，d_j は j 番目に高いデフォルト確率より高いデフォルト確率をもつデフォルト・非デフォルト企業の数である．つまり，縦軸にはデフォルト確率の高い上位 j 件に対するデフォルト企業の割合，横軸には非デフォルト企業の割合が描かれることになる．また，AUC とは，ROC 曲線，直線 $y=0$，及び直線 $x=1$ で囲まれた面積で定義される量で，AUC が 1 に近づくほどデフォルト予測精度の高いモデルであると判断される．つまり，ROC 曲線が直線 $y=1$，$x=0$ に近ければ近いほど，AUC が大きくなり，予測精度が高いモデルであるといえる．ROC，及び AUC については山下 他(2003)を参照されたい．

A.3　罰則付き対数尤度関数の 2 回微分の計算式

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\alpha^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{z_i}{\alpha^2} - \left(\frac{t_i}{\gamma}\right)^{\alpha}\left\{\log\left(\frac{t_i}{\gamma}\right)\right\}^2 \exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\gamma^2} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{z_i\alpha}{\gamma^2} - \left\{\frac{\alpha(\alpha+1)t_i^{\alpha}}{\gamma^{\alpha+2}}\right\}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\right] - n\lambda_\gamma$$

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\boldsymbol{c}_l\partial\boldsymbol{c}_k'} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{t_i}{\gamma}\right)^{\alpha}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\boldsymbol{z}_{il}\boldsymbol{z}_{ik}'\right] - \delta(l,k)\times n\lambda_c R \quad (1\le k,l\le p)$$

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\alpha\partial\gamma} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{z_i}{\gamma} + \left(\frac{t_i^{\alpha}}{\gamma^{\alpha+1}}\right)\left\{\alpha\log\left(\frac{t_i}{\gamma}\right)+1\right\}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\alpha\partial\boldsymbol{c}_k} = \sum_{i=1}^{n}\left[-\left(\frac{t_i}{\gamma}\right)^{\alpha}\left\{\log\left(\frac{t_i}{\gamma}\right)\right\}\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\boldsymbol{z}_{ik}\right] \quad (1\le k\le p)$$

$$\frac{\partial^2 \ell_{\lambda_c,\lambda_\gamma}(\boldsymbol{c},\alpha,\gamma)}{\partial\gamma\partial\boldsymbol{c}_k} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\alpha t_i^{\alpha}}{\gamma^{\alpha+1}}\right)\exp\left(\sum_{j=1}^{p}\boldsymbol{c}_j'\boldsymbol{z}_{ij}\right)\boldsymbol{z}_{ik}\right] \quad (1\le k\le p)$$

ここで，$\delta(l,k)=1$ if $l=k$, $=0$ otherwise はデルタ関数である．

参　考　文　献

Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy, *Journal of Finance*, **23**, 589–609.

安道知寛，山下智志(2004). 財務指標の時間依存を考慮した信用リスク評価モデル——デフォルト予測への応用，金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパー，15.

安道知寛，山下智志(2005). 格付け・財務データを用いた誘導型モデルによるデフォルト確率期間構造・回収率の同時推定，金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパー，18.

Atiya, A. F. (2001). Bankruptcy prediction for credit risk using neural networks: A survey and new results, *IEEE Transactions on Neural Networks*, **12**, 929–935.

Cox, D. R. (1972). Regression models and life-tables, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **34**, 187–220.

Craven, P. and Wahba, G. (1979). Smoothing noisy data with spline functions, *Numerishe Mathmatik*, **31**, 377–403.

de Boor, C. (1978). *A Practical Guide to Splines*, Springer, Berlin.

Duffie, D. and Singleton, K. J. (1999). Modeling term structures of defaultable bonds, *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720.

Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1996). Flexible smoothing with *B*-splines and penalties (with discussion), *Statistical Science*, **11**, 89–121.

Eilers, P. H. C. and Marx, B. D. (1998). Direct generalized additive modeling with penalized likelihood, *Computational Statistics and Data Analysis*, **28**, 193–209.

Fujioka, Y. (2002). Asymptotic theory for U-statistics and statistical modeling, Doctorial Thesis, Graduate School of Mathematics, Kyushu University.

Green, P. J. and Silverman, B. W. (1994). *Nonparametric Regression and Generalized Linear Models*, Chapman & Hall, London.

Hurvich, C. M., Simonoff, J. S. and Tsai, C.-L. (1998). Smoothing parameter selection in nonparametric regression using an improved Akaike information criterion, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **60**, 359–373.

井元清哉，小西貞則(1999). *B*-スプラインによる非線形回帰モデルと情報量規準，統計数理，47(2)，359–373.

乾　浩治，室町幸雄(2000). 『金融モデルにおける推定と最適化』，朝倉書店，東京.

Jarrow, R. A. and Turnbull, S. M. (1995). Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**, 53–86.

格付投資情報センター(2004). 格付けとデフォルトの関係，R&I News Release.

木島正明，小守林克哉(1999). 『信用リスク評価の数理モデル』，朝倉書店，東京.

Konishi, S. and Kitagawa, G. (1996). Generalised information criteria in model selection, *Biometrika*, **83**, 875–890.

Konishi, S., Ando, T. and Imoto, S. (2004). Bayesian information criteria and smoothing parameter selection in radial basis function networks, *Biometrika*, **91**, 27–43.

Lane, W. R., Looney, S. W. and Wansley, J. W. (1986). An application of the Cox proportional hazards model to bank failure, *Journal of Banking and Finance*, **10**, 511–531.

Lee, S. H. and Jorge, L. U. (1996). Analysis and prediction of insolvency in the property-liability insurance industry: A comparison of the logit and hazard models, *Journal of Risk and Insurance*, **63**, 121–130.

Martin, D. (1979). Early warning of bank failure: A logit regression approach, *Journal of Banking and Finance*, **1**, 249–276.

Mata, J. and Portugal, P. (1994). Life duration of new firms, *Journal of Industrial Economics*, **42**, 227–246.

Merton, R. C. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, **29**, 449–470.

Meyer, P. and Pifer, H. (1970). Prediction of bank failures, *Journal of Finance*, **25**, 853–868.

森平爽一郎(2000). 信用リスクの測定と管理(5)：倒産確率の期間構造推定，証券アナリストジャーナル，**5**, 104–124.

Ramsay, J. O. (1982). When the data are functions, *Psychometrika*, **47**, 379–396.

Ramsay, J. O. and Dalzell, C. J. (1991). Some tools for functional data analysis (with discussion),

Journal of the Royal Statistical Society, Series B, **53**, 539–572.
Ramsay, J. O. and Silverman, B. W. (1997). *Functional Data Analysis*, Springer, New York.
桜井明(1981). 『スプライン関数入門』, 東京電機大学出版局, 東京.
Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model, *Annals of Statistics*, **6**, 461–464.
Stone, C. J. (1974). Cross-validatory choice and assessment of statistical predictions (with discussion), *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **36**, 111–147.
Sung, T. K., Chang, N. and Lee, G. (1999). Dynamics of modeling in data mining: Interpretive approach to bankruptcy prediction, *Journal of Management Information Systems*, **16**, 63–85.
Tierney, L. and Kadane, J. B. (1986). Accurate approximations for posterior moments and marginal densities, *Journal of the American Statistical Association*, **81**, 82–86.
Whalen, G. (1991). A proportional hazard model of bank failure: An examination of its usefulness as an early warning tool, *Economic Review*, **27**, 21–31.
山下智志, 川口　昇(2003). 大規模データベースを用いた信用リスク計測の問題点と対策(変数選択とデータ量の関係), 金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパー, 3.
山下智志, 川口　昇, 敦賀智裕(2003). 信用リスクモデルの評価方法に関する考察と比較, 金融庁金融研究研修センターディスカッションペーパー, 11.

38 Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 54, No. 1, 23–38 (2006)

Measuring Method for Hazard Term Structure Based on Hazard Model with Time Varying Covariates

Satoshi Yamashita[1] and Tomohiro Ando[2]

[1]The Institute of Statistical Mathematics
[2]Graduate School of Business Administration, Keio University; Keio Business School

As the environment changes with the introduction of financial deregulation and new BIS's capital-adequacy requirements, lenders have realized the importance of credit risk management. Default probability estimation has a long history in the field of financial risk measurement. It follows that the estimation method is divided roughly into a statistical model and a stochastic process model.

Recently, a logit model with a time-varying financial predictor was introduced to achieve accurate estimation of default probability. However, a logit model estimates default probability only at a future temporary point. When a creditor evaluates the present value of the debenture with the possibility of default risk, the term structure of the default probability is necessary. Moreover, from the viewpoint of asset and liability management, consideration of the term structure may be a critical factor.

The purposes of this article are to introduce the hazard model with time varying financial predictor, and to propose a new method for estimating the term structure of default probability. The effectiveness of the proposed methodology is shown through analysis of a Japanese company's default data.

Key words: Bayes approach, functional data analysis, hazard model, time varying covariate.