統計数理（2004）
第 52 巻 第 1 号 45–62

特集「極値理論」
［総合報告］

Trimmed Sums

前島 信†

（受付 2003 年 9 月 2 日；改訂 2003 年 11 月 13 日）

要　旨

$\{X_j, j=1,2,\dots\}$ を独立で同一分布に従う確率変数列とし，$X_n^{(j)}$ を $X_1,\dots,X_n$ の中で絶対値の意味で j 番目に大きいもの，X_{nj} を $X_1,\dots,X_n$ の中で普通の意味で j 番目に小さいものとする．すなわち，$|X_n^{(1)}| \ge |X_n^{(2)}| \ge \cdots \ge |X_n^{(n)}|$, $X_{n1} \le X_{n2} \le \cdots \le X_{nn}$ とする．$\{X_{nj}\}$ は順序統計量と呼ばれる．$r_n, p_n \in \mathbb{N}$ とし，和 S_n から絶対値の意味で大きい r_n 値を取り除いた和を ${}^{(r_n)}S_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_n^{(j)}$，また，$S_n$ から普通の意味で小さい r_n 個と大きい p_n 個，合計 (r_n+p_n) 個を取り除いた和を ${}^{(r_n,p_n)}\widetilde{S}_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_{nj} - \sum_{j=n-p_n+1}^{n} X_{nj}$ とおく．これらを trimmed sum といい，S_n からこのような極端な値を取り除くことを trimming という．この trimming が和の漸近挙動にどのように影響するかという問題が，ここで扱う問題である．

trimming には，例えば r_n に限っていうと，light trimming $(r_n = r)$, moderate trimming $(r_n \to \infty, r_n/n \to 0)$, heavy trimming $(r_n/n \to c \in (0,1))$ の 3 つのタイプが考えられる．さらに漸近挙動としては，大数の強法則のような概収束定理と，中心極限定理のような弱収束定理が考えられる．この総合報告では，著者の知る範囲で，以上についての知られている結果をまとめてみる．

キーワード： Trimming, 絶対値順序 trimming, 自然順序 trimming, light trimming, moderate trimming, heavy trimming.

1. はじめに

極値理論というのは，極端なデータ(例えば観測値の最大値など)がどのようなふるまいをするかを議論するのが中心的テーマである．その場合，極端なデータ自身を対象にすることのほか，例えば n 個の観測値の部分和から極端な値のデータの影響を除いた様子を対象にすることができる．この総合報告では，独立同一分布に従う確率変数の部分和の極限が，極端な値の影響をどのくらい受けているのか，言い換えれば，部分和から極端な値のデータを取り除くことによって状況はどうなるのか，について議論する．

まず記号の説明から始める．この総合報告全体を通じて，$X, X_1, X_2, \dots$ を独立で同じ分布 F に従う実数値確率変数とする

$$X_n^{(j)} : X_1, \dots, X_n \text{ の中で絶対値の意味で } j \text{ 番目に大きいもの}$$
$$X_{nj} : X_1, \dots, X_n \text{ の中で普通の意味で } j \text{ 番目に小さいもの}$$

とする．従って

† 慶應義塾大学 理工学部：〒223–8522 神奈川県横浜市港北区日吉 3–14–1

$$|X_n^{(1)}| \geq |X_n^{(2)}| \geq \cdots \geq |X_n^{(n)}|,$$
$$X_{n1} \leq X_{n2} \leq \cdots \leq X_{nn}$$

である．同じ値のときは，確率変数の添字の小さい順に番号づけするものとする．$\{X_{nj}\}$ を特に順序統計量という．$\{X_j\}$ の部分和を

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

と書く．$r_n, p_n \in \mathbb{N}$ とし，S_n から絶対値の意味で大きい r_n 個を取り除いた和を

$$^{(r_n)}S_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_n^{(j)}, \quad (^{(0)}S_n = S_n),$$

また，S_n から普通の意味で小さい r_n 個と大きい p_n 個，合計 $(r_n + p_n)$ 個を取り除いた和を

$$^{(r_n, p_n)}\widetilde{S}_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_{nj} - \sum_{j=n-p_n+1}^{n} X_{nj},$$

特に $r_n = p_n$ のとき

$$^{(r_n)}\widetilde{S}_n = ^{(r_n, r_n)} \widetilde{S}_n$$

と書く．これら $^{(r_n)}S_n$，$^{(r_n, p_n)}\widetilde{S}_n$ を trimmed sum と呼び，S_n からこのような極端な値を取り除く作業を trimming という．$\{X_n^{(j)}\}$ を基礎にした trimming を modulus trimming（絶対値順序 trimming）といい，$^{(r_n)}S_n$ を modulus trimmed sum という．これらは極値を問題にした確率関係の論文に多く見られる．順序統計量 $\{X_{nj}\}$ を基礎にした trimming を natural-order trimming（自然順序 trimming）といい，$^{(r_n, p_n)}\widetilde{S}_n$ を natural-order trimmed sum という．これらは推定問題に関連した統計関係の論文に多く見られる．

r_n（および p_n）が n に依存するかしないか，また，n に依存して大きくなる場合にどのようなオーダーで大きくなるかによって，3 つのタイプの trimming に分かれる

（1） light trimming: r_n が有界，特に $r_n = r$（定数）．
（2） moderate（または intermediate） trimming: $r_n \to \infty$, $r_n/n \to 0$.
（3） heavy trimming: $r_n/n \to c \in (0, 1)$.

極端な値を $2r_n$ 個取り除く場合，すなわち $^{(2r_n)}S_n = \sum_{j=2r_n+1}^{n} X_n^{(j)}$ と $^{(r_n)}\widetilde{S}_n = \sum_{j=r_n+1}^{n-r_n} X_{nj}$ の漸近的な挙動は本質的に同じように想像できるが，一般には異なる問題であること，特に moderate trimming の場合はそうであることを注意しておく（cf. Griffin and Pruitt（1987））．moderate trimming で $\{X_n^{(j)}\}$ を扱う時は X の（分布の）対称性を仮定するが，$\{X_{nj}\}$ の時は必要ない．そして，例え X が対称であっても両方の漸近正規性の正規化のオーダーの異なることもある．

部分和及び trimmed sum の極限定理と言った時に，一般的には 2 つのタイプの極限定理が考えられる．即ち，大数の強法則のように正規化した S_n が定数に概収束するタイプと，中心極限定理のようにある極限分布へ弱収束するタイプである．以下，これらの問題について，著者の知る範囲で知られている結果をまとめてみるのが本稿の目的である．

なお，今までにも trimmed sum に関する総合報告はいくつかある（Mori（1981），論文集 Hahn et al.（1991）の中の論文）．本稿の内容は，それらとかなり重複するが，年代的にはそれ以降のものにも言及して全体を見通せるように心がけたつもりである．

2. 概収束定理(light trimming)

ここでは，大数の強法則について述べる．関連して大数の弱法則についても触れる．

大数の法則については，light trimmng のみが今まで問題にされている．以下 $r_n = r$ とする．r_n は整数であり，n は十分大きい時が問題になるのであるから，この制約は $\lim_{n\to\infty} r_n = r$ と同等である．r_n が有界であるが収束しないという場合については特に問題にされた形跡はない．

以下述べるように，大数の強法則は light trimming の影響を受けるが(定理 2.2)，その系として，大数の弱法則は light trimming の影響を受けないことがわかる(系 2.1)．

まず S_n に対する Kolmogorov の大数の強法則から始める．

定理 2.1. ある定数 $c \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n = c \quad \text{a.s.}$$

となる必要十分条件は，$E[|X_1|] < \infty$ であり，その時 $c = E[X_1]$ である．

概収束については，light trimming である場合も ${}^{(r)}S_n$ は S_n よりよい行動をすることが古くから指摘されてきた．例えば，Feller (1968)は重複対数の法則についてひとつの例をあげている．もし $E[|X_1|^2] < \infty$ であれば，適当な $\{a_n\}$ に対して

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1}(2\log\log a_n)^{-1/2} S_n = 1 \quad \text{a.s.}$$

であることが知られている．しかし，Feller は $E[|X_1|^2] = \infty$ であってもある条件の下では

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1}(2\log\log a_n)^{-1/2}\, S_n = \infty \quad \text{a.s.}$$

であっても

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{-1}(2\log\log a_n)^{-1/2}\ {}^{(1)}S_n = 1 \quad \text{a.s.}$$

であることを示している．従って定理 2.1 より $E[|X_1|] = \infty$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty}\ S_n/n = \infty \quad \text{a.s.}$$

であるが，適当な条件の下では

$$\lim_{n\to\infty}\ {}^{(r)}S_n/n = c \in \mathbb{R} \quad \text{a.s.}$$

となることが期待できる．これに対して完全な答を与えたのが Mori (1976)である．以下本稿を通して $H(x) = P(|X| > x)$ とおく．

定理 2.2. (Mori (1976)) $r \geq 0$ を整数とする．ある $\{c_n\}$ が存在して

$$\lim_{n\to\infty}\ {}^{(r)}S_n/n - c_n = 0 \quad \text{a.s.} \tag{2.1}$$

となるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty x^r H(x)^{r+1} dx < \infty \tag{2.2}$$

である．

系 2.1. (2.1) **がある** $r \geq 0$ **に対して成立すれば**

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n - c_n = 0 \quad \text{in prob.} \tag{2.3}$$

である．

証明. **条件**(2.2)**より** $\lim_{x\to\infty} xH(x) = 0$ **がいえる．これは元の部分和** S_n **に対する大数の弱法則**(2.3)**が成り立つ条件である．**

注意 2.1. **あとでわかるように，実は**(2.3)**は**

$$\lim_{n\to\infty} {}^{(r)}S_n/n - c_n = 0 \quad \text{in prob.} \tag{2.4}$$

と同値である．このように light trimming **は大数の弱法則には影響を与えていないことがわかる．**

Kolmogorov **の大数の強法則は，次の** Marcinkiewitz **の強法則に拡張される．**

定理 2.3. $0 < \alpha < 2$ **とする．ある** $\{c_n\}$ **が存在して**

$$\lim_{n\to\infty} S_n/n^{1/\alpha} - c_n = 0 \quad \text{a.s.}$$

となるための必要十分条件は $E\,[\,|X_1|^\alpha\,] < \infty$ **である．**

これを lightly trimmed sum **に拡張したのが，** Mori (1977)**である．**

定理 2.4.（Mori (1977)） $0 < \alpha < 2,\ r \geq 0$ **とする．** $\{c_n\}$ **が存在して**

$$\lim_{n\to\infty} {}^{(r)}S_n/n^{1/\alpha} - c_n = 0 \quad \text{a.s.}$$

となるための必要十分条件は

$$\int_0^\infty x^{\,\alpha(r+1)-1}\,H(x)^{r+1}dx < \infty$$

である．ここで c_n **は，**

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 1 \text{ のときは,} & c_n = 0 \\ 1 < \alpha < 2 \text{ のときは,} & c_n = nE\,[X] \end{cases}$$

ととれる．

次に大数の法則の収束の速さを考える．収束の速さを考えれば，大数の弱法則であっても trimming **の影響が出ることがわかる．まず通常の和に関する結果を述べる．**

定理 2.5.（Baum and Katz (1965)） (i) $0 < \alpha < 1$ **かつ** $t \geq 1$ **とする．**

$$\sum_n n^{t-2}\,P\{\,|S_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\,\} < \infty, \quad {}^\forall\varepsilon > 0$$

であるための必要十分条件は， $E\,[\,|X|^{\alpha t}\,] < \infty$ **である．**

(ii**)** $1 \le \alpha < 2$ **かつ** $t \ge 1$ **とする．**

$$\sum_n n^{t-2} P\{\,|S_n - n\mu| > \varepsilon n^{1/\alpha}\,\} < \infty, \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

であるための必要十分条件は， $E[\,|X|^{\alpha t}\,] < \infty$ **かつ** $E[X] = \mu$ **である．**

定理 2.6．（Heyde and Rohatgi **（**1967**））** $0 < \alpha < 2$ **かつ** $t \ge 1$ **とする．**

$$P\{\,|S_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\,\} = o\,(n^{1-t}\,), \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

であるための必要十分条件は，

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha t}\, H(n) = 0$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} n^{1-1/\alpha} \int_{|x|<n^{1/\alpha}} x dF(x) = 0 \tag{2.5}$$

である．

対応する ${}^{(r)}S_n$ **に対する結果は以下である．**

定理 2.7．（Hatori et al. **（**1979, 1980**））** $0 < \alpha < 2$ **かつ** $t \ge 1$ **とする．**
（i**）** $\{c_n\}$ **が存在して**

$$\sum_n n^{t-2} p\{\,|{}^{(r)}S_n - c_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\} < \infty\,, \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

であるための必要十分条件は

$$\int_0^{\infty} x^{\,\alpha(r+t)-1} H(x)^{r+1} dx < \infty$$

である．

（ii**）** $$P\{|{}^{(r)}S_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\} = o\,(\,n^{1-t}\,), \qquad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

となるための必要十分条件は

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha(r+t)} H(n)^{r+1} = 0 \tag{2.6}$$

かつ（2.5**）が成り立つことである．**

上の定理の（ii**）において** $t = 1 + (1+r)\beta,\ \beta \ge 0,$ **とおくと次が得られる．**

系 2.2． $0 < \alpha < 2,\ \beta \ge 0,\ r \ge 1$ **とする．このとき**

$$P\{\,|{}^{(r)}S_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\,\} = o\,(n^{-(1+r)\beta})\,, \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

となるための必要十分条件は

$$P\{|S_n| > \varepsilon n^{1/\alpha}\,\} = o\,(\,n^{-\beta})\,, \quad {}^{\forall}\varepsilon > 0$$

である．

証明. $t = 1 + (1+r)\beta$ のとき，条件(2.6)は r に無関係な条件になる．条件(2.5)はもともと r に無関係な条件である．

更に $\beta = 0$ とおくことによって，前に述べたように light trimming は大数の弱法則に影響を与えないことがわかる．

最後に，${}^{(r)}S_n/a_n - c_n$ の概収束を relative stability と題して論じて，Mori (1976, 1977)の結果を拡張した Maller (1984)の仕事も，この項の範疇に入ることをつけ加えておく．

3. 概収束定理(moderate, heavy trimming)

前節の初めで，Feller (1986)の例で，重複対数の法則について一言触れた．moderately 及び heavily trimmed sum について，概収束に関しては文献上重複対数の法則が多く議論されている．しかし ${}^{(r_n,p_n)}\widetilde{S}_n$ の重複対数的漸近挙動は r_n, p_n の挙動と F の尾部の挙動に著しく依存することがわかっている程度で完全な解決からはほど遠い．現在までわかっていることは，X が正の確率変数で，非正規安定分布の吸引域に入っている場合である．ここではそれは簡単に紹介する．

以下，X の分布 F は $F(0-) = 0$ で，α-安定分布 ($0 < \alpha < 2$) の吸引域に属するものとする．すなわち，$a_n > 0, c_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$$S_n/a_n - c_n \xrightarrow{d} Z_\alpha\,,$$

(Z_α は α-安定確率変数)となるものとする．ここで $\xrightarrow{d}$ は分布の弱収束の意味とする．このことは

$$H(1-s) = s^{-\alpha}L(s)\,,\quad 0 < s < 1\,,\quad H(0+) \geq 0$$

となっていることと同値である．ここで L はある緩慢変動関数．ただし $(0,\infty)$ 上の関数 L が緩慢変動(slowly varying)であるとは，任意の $c > 0$ に対し

$$\lim_{x\to\infty} L(cx)/L(x) = 1$$

となることである．F は負の部分がないので，trimmed sum としては

$${}^{(0,p_n)}\widetilde{S} = \sum_{j=1}^{n-p_n} X_{nj}$$

を考えればよい．以下，$\log_2 n = \log\log n$,

$$\mu_n(x) = n\int_0^{1-x/n} H(v)dv\,,$$
$$\sigma^2(x) = \int_0^{1-x}\int_0^{1-x}(u\wedge v - uv)\,dH(u)\,dH(v)\,,\quad 0 < x < 1\,,$$
$$T_n = (2n\log_2 n)^{-1/2}\sigma(p_n/n)^{-1}\left({}^{(0,p_n)}\widetilde{S}_n - \mu_n(p_n)\right)$$

とおく．

定理 3.1. (Haeusler and Mason (1987)) F を上記のものとする．ある $x_n \uparrow \infty,\ y_n \downarrow 0$ に対し $r_n \sim x_n,\ r_n/n \sim y_n$ とする．

(i) もし $r_n/\log_2 n \to \infty\ (n\to\infty)$ ならば

$$\limsup_{n\to\infty} T_n = 1 \quad \text{a.s.} \tag{3.1}$$

$$\liminf_{n\to\infty} T_n = -1 \quad \text{a.s.} \tag{3.2}$$

(ii) もし $r_n/\log_2 n \to 0$ ($n \to \infty$) ならば

$$\limsup_{n\to\infty} T_n = \infty \quad \text{a.s.}$$
$$\liminf_{n\to\infty} T_n = 0 \quad \text{a.s.}$$

heavily trimmed sum については，上の(i)から，無条件に(3.1)と(3.2)が成り立つことが予想されるが，実際 Wang and Cheng (2001)において改めて論じられている．

4. 弱収束定理(light trimming)

以下 $r_n = r$ とする．まず極限分布が正規分布である弱収束定理(中心極限定理)から始める．以下，N は平均 0，分散 1 の標準正規分布に従う確率変数とする．

定理 4.1. (Mori (1984)) ある $r \geq 1$ と $a_n > 0$ ($a_n \to \infty$), $c_n \in \mathbb{R}$ に対して

$${}^{(r)}S_n/a_n - c_n \xrightarrow{d} N$$

となるための必要十分条件は，

$$S_n/a_n - c_n \xrightarrow{d} N$$

である．

このように中心極限定理に関しては，light trimming は全く影響がないことがわかる．では一般に極限分布が非正規の場合はどうか．次の Kesten (1993)の結果は，弱収束自身に関しては，やはり light trimming は影響のないことを示している．

定理 4.2. (Kesten (1993)) ある $r \geq 1$ と $a_n > 0$ ($a_n \to \infty$), $c_n \in \mathbb{R}$ に対して

$${}^{(r)}S_n/a_n - c_n \tag{4.1}$$

または

$${}^{(r)}\widetilde{S}_n/a_n - c_n \tag{4.2}$$

が弱収束すれば

$$S_n/a_n - c_n \tag{4.3}$$

も弱収束する．逆に(4.3)が成立すれば (4.1), (4.2)が成り立つ．

注意 4.1. (4.3)が弱収束すれば，その極限分布は安定分布(正規分布を含む)か 1 点分布であることが知られている．従って，(4.1)または(4.2)が弱収束するための必要十分条件は，X が安定分布か 1 点分布の吸引域に属することである．

定理 4.1 により，(4.3)の極限分布が正規分布であるときは，(4.1)の極限分布もまた正規分布であることがわかる．しかし(4.3)の極限分布が非正規安定分布の場合の(4.1)の極限分布については，定理 4.2 は何も答えていない．それについては Hall (1978)，Mori (1984)が特性関数の

形で，その極限分布を特徴づけている．ここでは彼らと全く異なる方法，すなわち安定分布に従う確率変数の無限級数表現，いわゆる LePage 表現を使って説明する．この方が，trimming の影響が具体的にわかりやすいと思う．そのためにまず安定確率変数の無限級数表現について，LePage et al.（1981）に従って説明する．

$\{\delta_j\}$ を $+1$ と -1 をそれぞれ確率 p と $q\,(=1-p)$ でとる i.i.d. 確率変数列とし，$\{e_j\}$ を平均 1 の独立な指数確率変数列，$\Gamma_j=\sum_{k=1}^{j} e_k$ をそれからできる Poisson 点列，$\{\delta_j\}$ と $\{e_j\}$ は独立，$0<\alpha<2$ とする．そのとき

$$S^*=\sum_{j=1}^{\infty}\{\delta_j\Gamma_j^{-1/\alpha}-(p-q)E[\Gamma_j^{-1/\alpha}I[\Gamma_j^{-1/\alpha}\le 1]]\} \tag{4.4}$$

は概収束の意味で収束して，α-安定分布に従うことがわかる．次に $\{X_j\}$ が，α-安定分布の吸引域に属し，

$$\lim_{x\to\infty}\big(1-F(x)\big)/H(x)=p\,,\quad \lim_{x\to\infty}F(-x)/H(x)=q$$

とする．

定理 4.3.（LePage et al.（1981））　以上の設定のもとで次が成り立つ．

$$S_n/a_n-c_n\xrightarrow{d}S^*\,. \tag{4.5}$$

この定理の証明のアイディアは以下である．

$$\delta_{nj}=\mathrm{sgn}(X_n^{(j)})$$

とおいて，$X_n^{(j)}=\delta_{nj}\,|X_n^{(j)}|$ と表す．すると

$$S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j=\sum_{j=1}^{n}\delta_{nj}\,|X_n^{(j)}|$$

と表せる．そこで無限次元確率ベクトル

$$Z^n=a_n^{-1}(\,|X_n^{(1)}|,|X_n^{(2)}|,\dots,|X_n^{(n)}|,\,0,\,0,\,\dots)$$

と

$$\delta^n=(\delta_{n1},\delta_{n2},\dots,\delta_{nn},\,1,\,1,\dots)$$

の収束を考える．

$$Z^n\xrightarrow{d}Z=(\,\Gamma_1^{-1/\alpha},\ \Gamma_2^{-1/\alpha},\dots)$$

および

$$\delta^n\xrightarrow{d}\delta=(\,\delta_1,\delta_2,\dots)$$

が成立，しかも Z^n と δ^n は漸近的に独立であることを示すことによって，（適当に c_n の項を考慮しながら）（4.5）を導き出す．

この議論の中には，例えば，絶対値の意味で j 番目に大きい $X_n^{(j)}$ は，分布の意味で $\delta_j\,\Gamma_j^{-1/\alpha}$ に弱収束することが含まれている．この考え方を trimmed sum に最初に適用したのが Maejima and Morita（1992）である．そこでは従属確率変数が扱われているが，ここではそれを i.i.d. の形で述べる．（Maejima（1993）では，更にその考えを Banach 空間値をとる確率変数の場合に適用した．）

定理 4.4. **今までの設定の下で**

$$ {}^{(r)}S_n/n^{1/\alpha} - c_n \xrightarrow{d} {}^{(r)}Z\,, $$

ここで

$$ c_n = \sum_{j=r+1}^{n} E[\,\delta_{nj}|X_n^{(j)}|\,I\,[\,|X_n^{(j)}| \le 1\,]]\,, $$

$$ {}^{(r)}Z = \sum_{j=r+1}^{\infty} \{\delta j \Gamma_j^{-1/\alpha} - (p-q)E\,[\Gamma_j^{-1/\alpha} I\,[\,\Gamma_j^{-1/\alpha} \le 1\,]]\}\,. $$

言うまでもないが，定理 4.4 **は定理** 4.3 **に含まれているもので，定理** 4.3 **を認めれば，何ら新しい結果ではない．しかしこのアイディアを使うことによって，従属確率変数への拡張**(Maejima and Morita **(**1992**))や** Banach **空間値確率変数への拡張**(Maejima **(**1993**))が可能になるのである．**

前に述べたように，この定理は特性関数の形で Hall **(**1978**)，** Mori **(**1984**)によって示されている．以下** ${}^{(r)}Z$ **の特性関数を求めるが，結果のみでなく，彼らとは違うここでの流れの中で求めてみる．簡単のために以下** $p = q$ **とする．**

さて

$$ \begin{aligned} {}^{(r)}Z &= \sum_{j=r+1}^{\infty} \delta_j \Gamma_j^{-1/\alpha} \\ &= \sum_{j=r+1}^{\infty} \delta_j\,(\,\Gamma_r + e_{r+1} + \cdots + e_j\,)^{-1/\alpha} \\ &\overset{d}{=} \sum_{j=r+1}^{\infty} \delta_j\,(\,\Gamma_r + \widetilde{e}_1 + \cdots + \widetilde{e}_j\,)^{-1/\alpha} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j(\,\Gamma_r + \widetilde{\Gamma}_j\,)^{-1/\alpha}\,, \end{aligned} $$

ここで $\{\widetilde{e}_j\}$ **は** $\{e_j\}$ **の独立なコピーで** $\{\delta_j\}$ **と独立，** $\widetilde{\Gamma}_j = \widetilde{e}_1 + \cdots + \widetilde{e}_j$**，従って** $\{\widetilde{\Gamma}_j\}$ **は** $\{\Gamma_r\}$ **とも** $\{\delta_j\}$ **とも独立，** $\overset{d}{=}$ **は両辺が分布の意味で等しいことを表す．**

そこで

$$ {}^{(r)}Z(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j\,(\,x + \Gamma_j\,)^{-1/\alpha} $$

を考える．ここでは詳細を省くが，各 $x > 0$ **に対して** ${}^{(r)}Z(x)$ **は無限分解可能で，その特性関数は**

$$ E\,[\,e^{i\,\theta\,{}^{(r)}Z(x)}] = \exp\left\{\alpha \int_{|u|\le x^{-1/\alpha}} [\,e^{i\,\theta u} - 1 - izu\,I[|u| \le 1]]\,\frac{du}{|u|^{1+\alpha}}\right\}, \quad \theta \in \mathbb{R}\,, $$

であることがわかる．従って ${}^{(r)}Z$ **の分布は無限分解可能分布のガンマ分布による混合となって**

$$ E\,[\,e^{i\,\theta\,{}^{(r)}Z}\,] = \int_0^{\infty} E\,[\,e^{i\,\theta\,{}^{(r)}Z(x)}\,]((r+1)!)^{-1}\,x^{r-1}e^{-x}dx\,, \quad \theta \in \mathbb{R} $$

となることがわかる．

定理 4.2 **に戻る．** Kesten **(**1993**)はその論文の中で，定理** 4.2 **の部分列版は正しいだろうかという問題を挙げている．すなわち，(**4.1**)と(**4.3**)の同等性は** $n \to \infty$ **を部分列** $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$

での収束に置き換えても成り立つか，という問題である．一般には依然として解かれていない(cf. Csörgő and Mogyesi (2001))．収束先の極限分布が正規分布である場合は，定理 4.2 の部分列版は正しい(Mori (1984))．しかし一般の極限分布についてはわかっていない．(4.1)がすべての $r \geq 1$ について部分列で成り立っていれば，(4.3)が成り立つことは知られている(Mori (1984))．(4.3)が幾何学的部分列に関して収束すれば，その極限分布は半安定分布であることが知られている．しかしそのような場合に限っても解はわかっていない．

5. 弱収束定理(moderate trimming)

前節で述べたように，light trimming の場合は，結局，trimmed sum の極限分布が存在する確率変数のクラスは，trim しない通常の和 S_n の(正規化した)分布の極限が存在するクラスと同じで，極限分布の形だけが変わりうるものであった．しかし moderate trimming の場合になると話はかわる．以下 trimming の個数 r_n は，$r_n \to \infty$, $r_n/n \to 0$ を満たすものとする．

まず初めに，$\{X_j\}$ が安定分布の吸引域に属している時，漸近的に正規であるか非正規であるかに，S_n の中のどの項が影響を与えているかということを論じた結果を紹介する(Csörgő et al. (1986))．

定理 5.1. (Csörgő et al. (1986)) $0 < \alpha < 2$ とする．X が α-安定分布の吸引域に属するとする．

(i) ある緩慢変動関数 L_1 と $\{c_n^1\}$ が存在して

$$(n^{1/\alpha}L_1(n))^{-1}\left(\sum_{j=1}^{r_n} X_{nj} + \sum_{j=n-r_n+1}^{n} X_{nj}\right) - c_n^1 \xrightarrow{d} Z_\alpha \tag{5.1}$$

が成り立つ．ここで Z_α は α-安定確率変数である．

(ii) $$(n^{1/\alpha}L_1(n))^{-1}\ {}^{(r_n)}\widetilde{S}_n - c_n^1 \to 0 \quad \text{in prob.}$$

であるが，ある緩慢変動関数 L_2 と $\{c_n^2\}$ が存在して

$$(n^{1/2}L_2(n))^{-1}\ {}^{(r_n)}\widetilde{S}_n - c_n^2 \xrightarrow{d} N \tag{5.2}$$

である．

(ii)でわかるように，F が非正規安定分布の吸引域に入っていても，moderately trimmed sum は漸近正規である．すなわち，部分和 S_n の中の多くの部分 ($(n-2r_n)$ 個，そしてその個数は $r_n/n \to 0$ より n のオーダー)は，適当に正規化すれば漸近的に正規分布になる．一方，S_n 全体が α-安定分布 $(0 < \alpha < 2)$ に収束することに貢献しているのは，サンプルのうち比較的少数の $2r_n$ 個であることが(i)からわかる．

注意 5.1. 次節系 6.1 でみるように heavy trimming で $r_n = [n\rho]$, $0 < \rho < 1/2$, の場合は，どんな F に対してもほとんどすべての ρ に対して(5.2)が成り立つ．

${}^{(r_n)}\widetilde{S}_n$ と ${}^{(2r_n)}S_n$ の漸近挙動は同じであることが想像されるが，前に述べたように，全く一般には本質的に異なる問題となる．しかし，定理 5.1 の(5.1)に対応する結果は，modulus trimmed sum に対しても成り立つ．即ち，(4.5)を導いた議論から，$r_n \to \infty$ ならばいつでも

$$(n^{1/\alpha} L(n))^{-1}\ {}^{(r)}S_n - c_n = (n^{1/\alpha}\, L(n))^{-1} \sum_{j=1}^{r_n} \delta_{nj}\, |X_n^{(j)}| - c_n \xrightarrow{d} S^* \stackrel{d}{=} Z_\alpha$$

となる（最後の部分は(4.4)より）．

さて moderate trimming に戻る．何度も述べているように moderate trimming では絶対値順序 trimming と自然順序 trimming とでは一般に話がかなり異なる．ひとつの大きな違いは今までの研究において，$\{X_n^{(j)}\}$ を扱うときは元の X の分布の対称性が常に仮定されていることである．対称でない X に対する多くの問題が依然として open として残っている（cf. Griffin and Qazi (2002), p. 1467）．しかし順序統計量 $\{X_{nj}\}$ を扱う時は，そのような対称性は全く必要ない．

以下 Griffin and Pruitt (1991) の総合報告の内容に従う．$r_n \to \infty,\ p_n \to \infty,\ r_n/n \to 0,\ p_n/n \to 0$ とする．記号を導入する．F^{-1}, H^{-1} をそれぞれ F, H の右連続逆関数とする．即ち，

$$\begin{aligned}
F^{-1}(u) &= \inf\{x : F(x) > u\}, \quad 0 \le u < 1\\
H^{-1}(x) &= \sup\{x : H(x) > u\}, \quad 0 \le u < 1\\
F^{-1}(1) &= F^{-1}(1-), \quad H^{-1}(1) = H^{-1}(1-)
\end{aligned}$$

とする．U を $(0,1)$ 上の一様確率変数とする．任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
u_n(x) &= 0 \vee (\, r_n - x r_n{}^{1/2}\,)\, n^{-1} \wedge 1\,,\\
v_n(x) &= 0 \vee (\, p_n - x p_n{}^{1/2}\,)\, n^{-1} \wedge 1\,,\\
a_n(x) &= F^{-1}(v_n(x))\,,\\
b_n(x) &= F^{-1}(1 - u_n(x))\,,\\
c_n(x) &= H^{-1}(u_n(x))\,,\\
\sigma_n(x,y) &= (\mathrm{Var}(F^{-1}(v_n(x) \vee (U \wedge (1 - u_n(y))))))^{1/2}\,,\\
\tau_n(x) &= (E\,[\,G^{-1}(U)^2\,;\, U \ge u_n(x)])^{1/2}\,.
\end{aligned}$$

τ_n は，任意の $\lambda > 0$ に対し，もし n が十分大きければ，$[-\lambda, \lambda\,]$ 上で，非負，非減少，連続で，τ_n^2 は $[-\lambda, \lambda\,]$ で凸になる．以下でみるように，moderately trimmed sum の漸近挙動は，r_n, p_n に依存する．

定理 5.2. (Griffin and Pruitt (1987)) X は対称とする．そのとき，ある $a_n > 0$ が存在して

$${}^{(r_n)}S_n / a_n \xrightarrow{d} N$$

となるための必要十分条件は，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\tau_n(x)}{\tau_n(0)} = 1 \tag{5.3}$$

となることである．この場合，$a_n = n^{1/2}\,\tau_n(0)$ ととれる．

定理 5.3. (Griffin and Pruitt (1989)) ある $a_n > 0$ と $c_n \in \mathbb{R}$ が存在して

$${}^{(r_n,\,p_n)}\widetilde{S}_n / a_n - c_n \xrightarrow{d} N \tag{5.4}$$

となるための必要十分条件は，すべての $x, y \in \mathbb{R}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(x,y)}{\sigma_n(0,0)} = 1 \tag{5.5}$$

となることである．この場合 $a_n = n^{1/2}\,\sigma_n(0,0), c_n = a_n^{-1} n\, E\left[F^{-1}(U)\;;\; v_n(0) < U < 1 - u_0(0)\right]$ ととれる．

注意 5.2. 上記の必要十分条件はすべて，整数列 n の代わりに部分列 $\{n_k\}$ とおきかえても成り立つ．

例 5.1. X が対称で

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{x^2\, P(|X| > x)}{E\,[\,X^2\, I\,[\,|X| \le x]]} < \infty$$

ならば（このような分布のクラスを Feller クラスという），(5.3) は任意の r_n に対して成立する．逆に X が対称で (5.3) がすべての r_n に対して成立すれば，X の分布は Feller クラスに入る．しかし，例え $r_n = p_n$ であっても Feller クラスの対称な X に対して (5.5) は必ずしも成り立たない．

注意 5.3. 上の例で ${}^{(2r_n)}S_n$ と ${}^{(r_n,\,r_n)}\widetilde{S}_n$ との違いを述べたが，更に例えば X が対称であっても，ある $a_n > 0,\ c_n \in \mathbb{R}$ に対して

$${}^{(r_n,\,r_n)}\widetilde{S}_n/a_n - c_n \xrightarrow{d} N$$

ならば，ある $a_n > 0$（前と同じとは限らない）に対して

$${}^{(r_n)}S_n/a_n \xrightarrow{d} N$$

であるが，逆は必ずしも成り立たない．

次に，極限分布としては正規分布以外にどのようなものが現れうるかという問題について考える．その前に，部分列極限としての可能な極限分布族について考える．

$l\,(\{r_n\}) = \{Z : $ 対称な $X,\ a_n > 0,$ 部分列 n_k が存在して ${}^{(r_{n_k})}S_{n_k}/a_{n_k} \xrightarrow{d} Z\}$

$\widetilde{l}\,(\{r_n\}, \{p_n\}) = \{Z : X,\ a_n > 0,\ c_n \in \mathbb{R},$ 部分列 n_k が存在して ${}^{(r_{n_k},\,p_{n_k})}\widetilde{S}_{n_k}/a_{n_k} - c_{n_k} \xrightarrow{d} Z\}$

とおく．

定理 5.4.（Griffin and Pruitt (1989)）

$l\,(\{r_n\}) = \{Z = N_1\tau(N_2),$ ここで N_1, N_2 は独立な標準正規確率変数，
τ は非負，非減少関数で，τ^2 は凸 $\}$．

$Z = N_1\tau(N_2)$ は特性関数で書けば

$$E\,[\,e^{i\theta Z}\,] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2(x)\theta^2/2}\ \Phi(dx)\,, \quad \theta \in \mathbb{R}\,,$$

ここで Φ は標準正規分布．このような形の確率変数 Z は正規確率変数の分散混合と呼ばれる．

Z がある τ に対して上の表現をもっているとき，$Z \sim \tau$ と書く．Z に対して τ は一意である．

定理 5.5.（Griffin and Pruitt（1989））

$$\widetilde{l}\,(\{r_n\},\{p_n\}) = \{Z = \xi N_1 + f(N_2) - g(N_3) + \mu\,,\quad \text{ここで}\ N_1, N_2, N_3 \text{は独立な標準正規確率変数,}\ \xi \geq 0,\ \mu \in \mathbb{R}\text{,}\ f \text{ と } g \text{ は非減少凸関数で，原点で } 0\}\,.$$

Z がある ξ, f, g, μ に対して上の表現をもっているとき，$Z \sim (\,\xi, f, g, \mu\,)$ と書く．Z に対して $(\,\xi, f, g, \mu\,)$ は一意とは限らない．

注意 5.4. 2 つのクラス $l\,(\{r_n\}), \widetilde{l}\,(\,\{r_n\}, \{p_n\}\,)$ 共に r_n, p_n に依存していないことは興味あることである．また，これらのクラスの分布が無限分解可能であるかどうかは興味ある問題だが，必ずしもそうでないことがわかっている．

定理 5.4，5.5 に現われる Z の吸引域(元の X にどのような条件があれば極限分布として特定の Z が現われるか．$Z = N$ の場合は，定理 5.2，5.3)について，次のことがわかる．
まず Z の部分列吸引域をそれぞれ

$$\mathcal{D}_p(\{r_n\}, Z) = \{\, X : a_n > 0, \text{部分列 } n_k \text{が存在して} {}^{(r_{n_k})}S_{n_k} \,/\, a_{n_k} \xrightarrow{d} Z \,\}$$

$$\widetilde{\mathcal{D}}_p\,(\,\{r_n\}, \{p_n\}, Z\,) = \{\, X : a_n > 0,\ c_n \in \mathbb{R}, \text{部分列 } n_k \text{が存在して}\ {}^{(r_{n_k},\,p_{n_k})}\,\widetilde{S}_{n_k}/a_{n_k} - c_{n_k} \xrightarrow{d} Z \,\}\,.$$

定理 5.6.（Griffin and Pruitt（1989）） $Z \in l\,(\{r_n\})$，Z は非退化である τ に対して $Z \sim \tau$ とする．そのとき $X \in \mathcal{D}_p(\{r_n\}, Z\,)$ であるための必要十分条件は，ある部分列 n_k が存在して，ある（そして結果としてすべての）$x_0 \in \mathbb{R}$ で $\tau(x_0) > 0$ なるものが存在して，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\tau_{n_k}(x)}{\tau_{n_k}(x_0)} = \frac{\tau(x)}{\tau(x_0)}, \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}\,.$$

以下，

$$X(n,x,y) = F^{-1}(U)I[v_n(x) < U < 1 - u_n(y)]$$
$$f_n(y) = E[X(n,0,y)] - E[X(n,0,0)]$$
$$g_n(x) = E[X(n,0,0)] - E[X(n,x,0)]$$
$$\xi_n = (\mathrm{Var}X(n,0,0))^{1/2}$$

とおく．

定理 5.7.（Griffin and Pruitt（1989）） $Z \in \widetilde{l}\,(\{r_n\}, \{p_n\})$, Z は非退化で $Z \sim (\xi, f, g, \mu)$ とする．そのときもしある部分列 n_k に対して $x_0,\, y_0 \in \mathbb{R}$ が存在して，$g'(x_0)$, $f'(y_0)$ が存在，$\xi^2 + g'(x_0)^2 + f'(y_0)^2 \neq 0$,

(i) $\xi_{n_k}(\sigma_{n_k}(x_0,y_0))^{-1} \to \xi(\xi^2 + g'(x_0)^2 + f'(y_0)^2)^{-1/2}$,

(ii) $n_k^{1/2} f_{n_k}(y)(\sigma_{n_k}(x_0,y_0))^{-1} \to f(y)(\xi^2 + g'(x_0)^2 + f'(y_0)^2)^{-1/2} \quad {}^{\forall}y \in \mathbb{R}$,

(iii) $n_k^{1/2} g_{n_k}(x)(\sigma_{n_k}(x_0,y_0))^{-1} \to g(x)(\xi^2 + g'(x_0)^2 + f'(y_0)^2)^{-1/2} \quad {}^{\forall}x \in \mathbb{R}$

が成り立つなら，$X \in \widetilde{\mathcal{D}}_p(\{r_n\}, \{p_n\}, Z\,)$ である．逆にもし Z が ξ, f, g, μ を一意に決めていて $X \in \widetilde{\mathcal{D}}_p(\{r_n\}, \{p_n\}, Z)$ ならば(i)–(iii)が成り立つ．

さて，部分列でない全体列に沿っての極限分布の話に戻る．

$$\mathcal{L}(\{r_n\}) = \{\, Y : \text{対称な}\ X,\ a_n > 0\ \text{が存在して}\ {}^{(r)}S_n/a_n \xrightarrow{d} Y \,\}$$
$$\widetilde{\mathcal{L}}(\{r_n\},\{p_n\}) = \{\, Y : X,\ a_n > 0,\ c_n \in \mathbb{R}\ \text{が存在して}\ {}^{(r_n)}\widetilde{S}_n/a_n - c_n \xrightarrow{d} Y \,\}$$

とおく．これらのクラスを特徴づけたいのであるが，これらの部分列版に比べて問題は難しい．そのひとつの理由は，今度はこれらのクラスが取り除く個数 r_n, p_n に依存する可能性があるからである．例えば $\mathcal{L}(\{r_n\}) = l\,(\{r_n\})$, $\widetilde{\mathcal{L}}(\{r_n\},\{p_n\}) = \widetilde{l}\,(\{r_n\},\{p_n\})$ となるような r_n, p_n が存在する．しかしながら「r_n, p_n は非減少」という条件をつけ加えると

$$\mathcal{L}\,(\{r_n\}) \subsetneqq l\,(\{r_n\}), \quad \widetilde{\mathcal{L}}(\{r_n\},\{p_n\}) \subsetneqq \widetilde{l}\,(\{r_n\},\{p_n\})$$

であることがわかる．以下 $\mathcal{L}(\{r_n\})$ のクラスを決定する．それは $\{r_n\}$ に依存し，2 つの可能性が起こる．そのための条件は次の条件 (S) である．

(S) 任意の部分列 $m_k, n_k \to \infty$ に対し，もし $r_{m_k}/m_k = r_{n_k}/n_k + O(r_{n_k}^{1/2}/n_k)$ であれば $m_k/n_k \to 1$ である．

例としては，もし，ある $\varepsilon > 0$ に対し

$$r_n/n^{1-\varepsilon} \sim t_n$$

で t_n が非増加であれば $\{r_n\}$ は (S) を満たす．しかし $r_n/n \sim t_n$ で t_n が非増加であっても，(S) が満たされる場合も満たされない場合もある．例えば $r_n = [\,n/\log n\,]$ は (S) を満たすが $[r_n/[\,\log n\,]]$（およびその非減少修正）は (S) を満たさない．

定理 5.8.（Griffin and Pruitt (1991)） r_n を非減少とする．
(i) 条件 (S) が満たされれば

$$\mathcal{L}\,(\{r_n\}) = \{Y : Y \stackrel{d}{=} aN_1 e^{\lambda N_2},\ a \ge 0,\ \lambda \ge 0\}.$$

(ii) 条件 (S) が満たされなければ

$$\mathcal{L}(\{r_n\}) = \{Y : Y \stackrel{d}{=} aN_1,\ a \ge 0\}.$$

定理 5.8 は全く別のアプローチ（quantile-transform 方法）で，Csörgő et al. (1991) でも解かれている．$\{r_n\}$ が必ずしも非減少でない場合は，状況はもっと複雑になる．それについては最近 Griffin and Qazi (2002) が完全な特徴づけを行った．

最後に，部分列 $\{n_k\}$ が幾何的である場合についての最近の結果（Csörgő and Mogyesi (2001)）について説明する．それは前に述べた定理 5.3 に関連している．それによれば，(5.4) が成り立つための必要十分条件は，(5.5) が成立していることである．しかし，F が半安定分布の吸引域に属してその Lévy 測度が両側存在していれば，無条件でいえることがわかる．すなわち，その場合の moderately trimmed sum の可能な漸近分布は正規分布のみであることがわかる．これは定理 5.1 の (5.2) が，F が安定分布だけでなく，もし少し広い半安定分布の吸引域に属している場合に成り立つことを意味している．

定理 5.9.（Csörgő and Mogyesi (2001)） (i) F が非退化半安定分布の吸引域に属しているものとする．もし，F の Lévy 測度 ν が $\nu((-\infty,0)) > 0,\ \nu((0,\infty)) > 0$ で，$\nu(\{x\}) = 0,\ {}^{\forall}x \in$

$(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ ならば，(5.4)が成立する．(ii)　$\nu((-\infty,0))=0$ または $\nu((0,\infty))=0$ のときは，さらに

$$0<\liminf_{n\to\infty}\ r_n/p_n\le\limsup_{n\to\infty}\ r_n/p_n<\infty$$

ならば，(5.4) が成立する．

Csörgő and Mogyesi (2001)は定理 5.1, (5.1)の半安定分布版も示している．

6.　弱収束定理(heavy trimming)

ここでは $\{X_j\}$ の絶対値の大きさによる順序づけ $\{X_n^{(j)}\}$ でなく，そのものの大きさで順序づけを行う順序統計量 $\{X_{nj}\}$ を使い，自然順序 trimming による trimmed sum

$$^{(r_n,\,p_n)}\widetilde{S}_n=S_n-\sum_{j=1}^{r_n}X_{nj}-\sum_{j=n-p_n+1}^{n}X_{nj}$$

を考える．$r_n/n\to c\in(0,1),\quad p_n/n\to d\in(0,1),\quad c+d<1$ であるが，ここでは $r_n=[nc],\quad p_n=[nd]$ とする．X の分布 F の左連続逆関数を Q，すなわち

$$Q(s)=\begin{cases}\inf\{x:F(x)\ge s\}, & 0<s\le 1\\ Q(0+)\,, & s=0\end{cases}$$

とする．

定理 6.1. (Stigler (1973), Csörgő et al. (1988))

$$\mu_n(c,d)=n\int_c^{1-d}Q(u)du$$
$$\sigma(c,d)=\int_c^{1-d}\int_c^{1-d}(u\wedge v-uv)\,dQ(u)\,dQ(v)$$

とする．$\sigma(c,d)>0$ ならば

(6.1) $$(n^{1/2}\sigma(c,d))^{-1}\{^{(r_n,\,p_n)}\widetilde{S}_n-\mu_n(c,d)\}\xrightarrow{d}V\,,$$

ここで

(6.2) $$\begin{aligned}V&=c^{1/2}(\sigma(c,d))^{-1}(Q(c+)-Q(c))\min(0,Z_1)+N\\&\quad+d^{\,1/2}(\sigma(c,d))^{-1}(Q((1-d)+)-Q(1-d))\max(0,-Z_2)\,,\end{aligned}$$

(Z_1,N,Z_2) は 3 次元正規確率変数で平均は 0，共分散行列は，

(6.3) $$\begin{pmatrix}1-c & r_1 & (cd)^{1/2}\\ r_1 & 1 & r_2\\ (cd)^{1/2} & r_2 & 1-d\end{pmatrix},$$

$$r_1=-c^{\,1/2}(\sigma(c,d))^{-1}\int_c^{1-d}(1-s)\,dQ\,(s)\,,$$
$$r_2=-d^{\,1/2}(\sigma(c,d))^{-1}\int_c^{1-d}s\,dQ\,(s)\,.$$

この定理の特別な場合として，次がわかる．

系 6.1. 極限が正規分布，すなわち $V = N$**（標準正規確率変数）である必要十分条件は，** c, $1-d$ **が** Q **の連続点で** $\sigma(c,d) > 0$ **であることである．**

定理 6.1 **の**(6.1)**の右辺で** $1-d=t$ **とおいて，** t **を時間変数とした確率過程を考えた時の有限次元分布の収束は，** Kasahara and Maejima (1992)**で論じられている．この結果より，定理** 6.1 **の極限確率変数の意味が，より明確になる．** $\{W(t), 0 \le t \le 1\}$ **を** Brown **橋，すなわち平均** 0 **の連続な** Gauss **過程で** $E[W(s)W(t)] = s(1-t)$ **を満たすものとする．**

定理 6.2. (Kasahara and Maejima (1992))

$$X_n(t) = n^{-1/2}\left\{\sum_{j=[nc]+1}^{[nt]} M_n^{(j)} - n\int_c^t Q(x)\,dx\right\},$$

$$X(t) = \int_c^t Q(x)\,dW(x) + Q(t+)\max\{0, -W(t)\} - Q(t)\max\{0, W(t)\}$$
$$- (Q(c+)\max\{0, -W(c)\} - Q(c)\max\{0, W(c)\})$$

とおくと， $\{X_n(t)\}$ **の有限次元分布は** $\{X(t)\}$ **のそれに収束する．**

$t = 1-d$ **とおけば** $X(t) = X(1-d)$ **は** $\sigma(c,d)V$ **となる．ここで，** V **は**(6.2)**と同じものである．** (Z_1, N_1, Z_2) **については**

$$N = -(\sigma(c,d))^{-1}\int_a^d W(x)\,dQ(x)$$
$$Z_1 = c^{-1/2}\,W(c)$$
$$Z_2 = c^{-1/2}\,W(1-d)$$

となって，(6.3)**の共分散関数が** Brown **橋** $\{W(t)\}$ **を通して直接計算できる．**

参 考 文 献

Baum, L. E. and Katz, M. (1965). Convergence rates in the law of large numbers, *Transaction of the American Mathematical Society*, **120**, 108–123.

Csörgő, S. and Mogyesi, Z. (2001). Trimmed sums from the domain of geometric partial attraction of semistable laws, *State of the Art in Probability and Statistics*, IMS Lecture Notes Monograph Series, Vol. 36, 173–194, Institute of Mathematical Statistics, Beachwood, Ohio.

Csörgő, S., Horváth, L. and Mason, D. M. (1986). What portion of the sample makes a partial sum asymptotically stable or normal?, *Probability Theory and Related Fields*, **72**, 1–16.

Csörgő, S., Haeusler, E. and Mason, D. M. (1988). The asymptotic distribution of trimmed sums, *The Annals of Probability*, **16**, 672–699.

Csörgő, S., Haeusler, E. and Mason, D. M. (1991). The quantile-transform approach to the asymptotic distribution of modulus trimmed sums, *Sums, Trimmed Sums and Extremes* (eds. M. G. Hahn, D. M. Mason and D. C. Weiner), 337–353, Birkhäuser, Boston.

Feller, W. (1968). An extension of the law of the iterated logarithm to variables without variances, *Journal of Mathematical Mechanics*, **18**, 343–354.

Griffin, P. S. and Pruitt, W. E. (1987). The central limit problem for trimmed sums, *Mathematical*

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, **102**, 329–387.

Griffin, P. S. and Pruitt, W. E. (1989). Asymptotic normality and subsequential limits of trimmed sums, *The Annals of Probability*, **17**, 1186–1219.

Griffin, P. S. and Pruitt, W. E. (1991). Weak convergence of trimmed sums, *Sums, Trimmed Sums and Extremes* (eds. M. G. Hahn, D. M. Mason and D. C. Weiner), 55–80, Birkhaüser, Boston.

Griffin, P. S. and Qazi, F. S. (2002). Limit laws of modulus trimmed sums, *The Annals of Probability*, **30**, 1466–1485.

Haeusler, E. and Mason, D. M. (1987). Laws of the iterated logarithm for the middle portion of the sample, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **101**, 301–312.

Hahn, M. G., Mason, D. M. and Weiner, D. C. (eds.) (1991). *Sum, Trimmed Sums and Extremes*, Birkhaüser, Boston.

Hall, P. (1978). On the extreme terms of a sample from the domain of attraction of a stable law, *Journal of the London Mathematical Society (2)*, **18**, 181–191.

Hatori, H., Maejima, M. and Mori, T. (1979). Convergence rates in the law of large numbers when extreme terms are excluded, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **47**, 1–12.

Hatori, H., Maejima, M. and Mori, T. (1980). Supplement to the law of large numbers when extreme terms are excluded, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **52**, 229–234.

Heyde, C. C. and Rohatgi, V. K. (1967). A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **63**, 73–82.

Kasahara, Y. and Maejima, M. (1992). Limit theorems for trimmed sum, *Journal of Theoretical Probability*, **5**, 617–628.

Kesten, H. (1993). Convergence in distribution of lightly trimmed and untrimmed sums are equivalent, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **113**, 615–638.

LePage, R., Woodroofe, M. and Zinn, J. (1981). Convergence to a stable distribution via order statistics, *The Annals of Probability*, **9**, 624–632.

Maejima, M. (1993). Trimmed sums of i.i.d. Banach space valued random variables, *Journal of Theoretical Probability*, **6**, 57–69.

Maejima, M. and Morita, Y. (1992). Trimmed sums of mixing triangular arrays with stationary rows, *Yokohama Mathematical Journal*, **40**, 59–71.

Maller, R. (1984). Relative stability of trimmed sums, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **66**, 61–80.

Mori, T. (1976). The strong law of large numbers when extreme terms are excluded from sums, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **36**, 189–194.

Mori, T. (1977). Stability for sums of i.i.d. random variables when extreme terms are excluded, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, **40**, 159–167.

Mori, T. (1981). The relation of sums and extremes of random variables, *Proceedings of the 43rd ISI Meeting*, Buenos Aires.

Mori, T. (1984). On the limit distributions of lightly trimmed sums, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **96**, 507–516.

Stigler, S. M. (1973). The asymptotic distribution of the trimmed mean, *The Annals of Statistics*, **1**, 472–477.

Wang, F. and Cheng, S. (2001). A law of the iterated logarithm for the heavily trimmed sums, *Acta Scientiarum Naturalium Univesitatis Pekinensis*, **37**, 289–293.

62 Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 52, No. 1, 45–62 (2004)

Trimmed Sums

Makoto Maejima

(Keio University)

Let $\{X_j\}$ be i.i.d. random variables. Let $X_n^{(j)}$ be the j-th largest in absolute value among $X_1, \ldots, X_n$, and X_{nj} the j-th smallest among $X_1, \ldots, X_n$. Thus $|X_n^{(1)}| \geq |X_n^{(2)}| \geq \cdots \geq |X_n^{(n)}|$ and $X_{n1} \leq X_{n2} \leq \cdots \leq X_{nn}$. $\{X_{nj}\}$ is called order statistics. Let $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$. For $r_n, p_n \in \mathbb{N}$, let ${}^{(r_n)}S_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_n^{(j)}$, and ${}^{(r_n,\, p_n)}\widetilde{S}_n = S_n - \sum_{j=1}^{r_n} X_{nj} - \sum_{j=n-p_n+1}^{n} X_{nj}$. These are called trimmed sums and this procedure of excluding extreme terms from the original sum S_n is called trimming. The question is how trimming affects to the asymptotic behavior of the trimmed sums.

There are three types of trimming depending on the behavior of r_n (and p_n) as a function of n. If $r_n = r$ (independent of n or more generally bounded), it is called light trimming; if $r_n \to \infty$ but $r_n/n \to 0$, it is called moderate (or intermediate) trimming; and if $r_n/n \to c \in (0, 1)$, it is called heavy trimming. As to the limiting behavior of the trimmed sums, we can consider almost sure convergence such as the law of large numbers and weak convergence such as the central limit theorem. In this article, we survey several important results in this area.

Key words: Trimming, modulus trimming, natural-order trimming, light trimming, moderate trimming, heavy trimming.