

# 平行性の仮定と格付けデータ： 順序ロジットモデルと逐次ロジットモデル による分析

安川 武彦<sup>†</sup>

(受付 2002 年 3 月 15 日；改訂 2002 年 7 月 1 日)

## 要 旨

格付けデータは順序付きの離散データであり、その分析には、順序ロジット(プロビット)モデルが広く用いられている。しかし、この分野の研究では、その前提条件となる平行性の仮定が満たされているかどうか十分に検証されてこなかった。本稿では、順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルを取り上げ、平行性の仮定を検証した。その結果、どちらのモデルでも平行性の仮定がみたされず、格付けデータの分析には、この仮定を緩めた拡張逐次ロジットモデルが望ましいことがわかった。

キーワード：格付け、順序ロジットモデル、逐次ロジットモデル、平行性の仮定。

## 1. はじめに

社債格付けは、社債の元利金の安全性を簡単な符号で示したものであり、社債投資における投資指標として資本市場において重要な役割を担っている。格付機関は格付け符号のみならず格付けごとのデフォルト率も発表しており、金融機関の信用リスク計量化にも利用されている。一方、社債発行企業にとっては、調達金利に影響を与える要因となっており財務管理を行なうためには欠かせない情報となっている。

ところが、格付投資情報センター(2001)、スタンダード・アンド・プアーズ(1994)、Standard & Poor's Corporation(1998)、ムーディーズ・インベスターズ・サービス(1994)、Moody's Investors Service(1996)にみられるように、格付機関が分析を行なう際に重視する財務指標や格付けのコンセプトは公表されているが、その格付け決定メカニズムは未公開である。国際金融情報センター(1998)でも、回答した機関投資家のうち約 73%が、格付産業全体に対する問題として格付けの説明責任や情報開示をあげており、決定メカニズムの解析が望まれている。このように、公開されていない格付けの決定メカニズムを統計的に解析することは学術上のみならず実務上も有益である。

格付けの決定要因を分析する研究は、Horrigan(1966)、Pogue and Soldofsky(1969)、West(1970, 1973)、Pinches and Mingo(1973, 1975)などにみられるように、1960年代後半から米国を中心に行なわれてきている。古くは回帰モデルや判別分析が利用されていたが、格付けが順

---

<sup>†</sup> 中央青山ブライズウォーターハウスコーパス・フィナンシャル・アンド・リスクマネジメント(株) 〒100-6011  
東京都千代田区霞ヶ関 3-2-5 霞ヶ関ビル 11 階

順序離散データであることを考慮し, Kaplan and Urwitz(1979) が格付けデータに対し順序プロビットモデルの適用を行なった。これ以降, Ederington(1985), Terza(1985), Blume et al.(1998), 中山・森平(1998), 安川(2001)などにみられるように, 順序プロビットモデルや順序ロジットモデルが中心的に使われている。しかしながら, 格付けのような順序付き離散データを扱うモデルは, これらのモデルだけではない。本稿では, 2 項ロジットモデルを逐次的に適用し, 順序構造を反映させる逐次ロジットモデルを利用し格付けデータの分析を合わせて行っていく。

また, 順序付き離散データのモデルでは, 回帰係数はカテゴリーには依存せず複数の順序カテゴリー間で一定であるとしている。このような仮定は, 一般に平行性の仮定(equal slope assumption: 以下 ESA), または, 比例オッズ性(proportional odds assumption)と呼ばれ, この仮定が満たされていない場合に順序ロジットモデルや順序プロビットモデルを使用すると間違った推論を行なう可能性がある(Bender and Grouven(1998), Bender and Benner(2000))。また, 小林(2001)では, 格付けデータに順序ロジットモデルを適用することの問題点を指摘し, 順序プロビットモデルと多項プロビットモデルとを比較する検定を行なっている。そこでは, 順序プロビットモデルのような次元の情報ですべてを表現するモデルは格付けデータと整合的ではないと結論づけている。著者は, 多項プロビットモデルや多項ロジットモデルのような順序を考慮しない多項モデルではなく, ESA の想定を緩和した順序モデルの応用がこの分野には有用と考えている。そこで, 本稿では, まず, 順序ロジットモデルおよび逐次ロジットモデルを利用し, ESA が満たされているのかどうかを偏残差プロットを用いて検証する。続いて, ESA が満たされない場合の分析モデルとして, Harrell et al.(1998)により提案された拡張逐次ロジットモデル(extended continuation ratio model: 以下 ECR)に注目し, このモデルによる分析を試みる。

以下では, まず 2 節で順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルと, これらのモデルの前提条件(ESA)を解説する。続いて, 3 節では使用データについて説明し, 4 節で 2 つのモデルを使った結果を示す。さらに, 5 節では, ESA が満たされない場合のモデルとして ECR を用いて格付けデータの分析を行なう。最後に, 6 節でまとめと今後の課題について述べる。

## 2. 順序付き離散データモデルとその前提条件

### 2.1 順序ロジットモデル

順序付き離散データの分析(Agresti(1990)などを参照)には, 順序プロビットモデルや順序ロジットモデルが金融, 計量経済分野, 計量生物分野などで広く使われている。順序ロジットモデルは比例オッズモデル(proportional odds model)とも呼ばれ, McCullagh(1980), により, 一般化線形モデル(McCullagh and Nelder(1989))として提案された。順序付き離散データに対する一般化線形モデルでは,  $Y_i$  を  $1, \dots, j, \dots, k$  ( $k \geq 2$ ) の値をとる個体  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) の順序付き離散データである目的変数とし, 説明変数ベクトル  $x_i$  を与えたときの条件付累積確率を  $p_{ij}(x_i) = \Pr(Y_i \leq j | x_i)$  とすると,

$$(2.1) \quad f(p_{ij}(x_i)) = \alpha_j + \beta' x_i,$$

のように定式化できる。ここで,  $\alpha_j$  はしきい値で,  $\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{k-1}$  を満たす未知パラメータ,  $\beta$  は未知の回帰パラメータである。このように順序データを扱った一般化線形モデルでは, カテゴリー数より 1 個少ない ( $k-1$ ) 個の定数項  $\alpha_j$  が同時に推定される。ここで,  $f(Y)$  はリンク関数と呼ばれ, 順序付き離散データを扱う場合には, 次の 2 つの対称リンク関数が広く使われている。

1. ロジットリンク  $f(p) = \log \frac{p}{1-p}$  .
2. プロビットリンク  $f(p) = \Phi^{-1}(p)$  .

ここで、 $\Phi(p)$  は、標準正規分布の累積分布関数で、 $\Phi(p) = \int_{-\infty}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2}) du$  である。リンク関数としてプロビットリンクを使うと、順序プロビットモデル(Mckelvey and Zavonia(1975))となる。また、ロジットリンクを使用すると、累積確率の比を表す対数オッズ比が線形関数により表されるとし、次のようにモデル化することができる。

$$(2.2) \quad \log \frac{\Pr(Y_i \leq j | \mathbf{x}_i)}{\Pr(Y_i > j | \mathbf{x}_i)} = \alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i, \quad (1 \leq j \leq k-1).$$

また、このモデルの尤度は、次式のように表現される。

$$L = \prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^N I_{ij} \Pr(Y_i = j | \mathbf{x}_i) \\ = \prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^N I_{ij} \left\{ \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_j - \beta' \mathbf{x}_i)} - \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_{j-1} - \beta' \mathbf{x}_i)} \right\}.$$

ここで、 $N$  は全体のサンプル数で、 $I_{ij}$  は、個体  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) について  $Y_i = j$  のときに 1 となり、それ以外では 0 となる指示関数である。本稿では、このモデルの未知パラメータ  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta)$  を最尤推定し、大標本理論にもとづく推論を行なっている。

このモデルの大きな特徴として対数オッズ比が、

$$\log \left\{ \frac{\Pr(Y \leq j | \mathbf{x}_1) / \Pr(Y \geq j | \mathbf{x}_2)}{\Pr(Y \geq j | \mathbf{x}_1) / \Pr(Y \leq j | \mathbf{x}_2)} \right\} = \beta' (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2),$$

というようにカテゴリー  $j$  に依存せず説明変数の差のみに依存することにある。これは、推定された回帰係数  $\beta$  に、

$$(2.3) \quad \beta_1 = \dots = \beta_j = \dots = \beta_{k-1} = \beta,$$

といった制約をおくことにより成り立つ。このことは、カテゴリーの区分をどのようにしても、回帰係数  $\beta$  は変わらないことを意味する。これは、このモデルの背後にある強い仮定であり、本来この仮定 (ESA) が満たされない場合に順序ロジットモデルを利用すると間違った推論を行ってしまう可能性がある。

## 2.2 逐次ロジットモデル

順序付離散データを扱うモデルは順序ロジットモデル以外にも提案されている。逐次ロジットモデル(continuation ratio model)もその中のひとつであり、Fienberg(1980)によって提案されたモデルである(sequential model(Fahrmeir and Tutz(2001)))とも呼ばれている)。順序ロジットモデルが累積確率をもとにしているのに対して、逐次ロジットモデルは条件付確率をもとにしている。逐次ロジットモデルは、一般化線形モデルにおいて、continuation ratio と呼ばれる  $\delta_{ji}(\mathbf{x}_i)$  の関数が説明変数の線形結合によって、

$$(2.4) \quad f(\delta_{ji}(\mathbf{x}_i)) = \alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i,$$

と表現される。ここで、 $\delta_{ji}(\mathbf{x}_i) = \Pr(Y_i = j | Y_i \geq j)$  であり、 $j$  以上のカテゴリーのみを考え、その中で目的変数の  $Y_i$  が  $j$  となる確率を表す。これとは逆に  $j$  以下のカテゴリーのみを考えると、その場合は、 $\delta_{ji}(\mathbf{x}_i) = \Pr(Y_i = j | Y_i \leq j)$  とすればよい。前者は、前進逐次ロジットモデルと呼ばれ、後者は後進逐次ロジットモデルと呼ばれる。なお、この2つのアプローチは同値にはならない。

$f(Y)$  をロジットリンクとすると, 前進逐次ロジットモデルは,

$$(2.5) \quad \log \frac{\Pr(Y_i = j | \mathbf{x}_i)}{\Pr(Y_i \geq j | \mathbf{x}_i)} = \alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i, \quad (1 \leq j \leq k-1)$$

と表現される.

また, 後進逐次ロジットモデルは,

$$\log \frac{\Pr(Y_i = j | \mathbf{x}_i)}{\Pr(Y_i \leq j | \mathbf{x}_i)} = \alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i,$$

と表現される.

また, ESA を緩めカテゴリーごとに回帰係数  $\beta$  が異なることを許し,

$$(2.6) \quad f(\delta_{ji}(\mathbf{x}_i)) = \alpha_j + \beta'_j \mathbf{x}_i,$$

と表現されるモデルは, 拡張逐次ロジットモデル (ECR) と呼ばれる (Harrell et al. (1998)). ECR の尤度は,

$$L = \prod_{i=1}^N \Pr(Y_i = j | \mathbf{x}_i) \\ = \prod_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_j - \beta'_j \mathbf{x}_i)} \prod_{m=1}^{j-1} \left[ 1 - \frac{1}{1 + \exp(-\alpha_m - \beta'_m \mathbf{x}_i)} \right] \right\},$$

となり, 未知パラメータ  $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_1, \dots, \beta_{k-1})$  は, 最尤法により推定する. 拡張逐次ロジットモデルでは, 定数項だけでなく回帰係数パラメータもそれぞれ  $(k-1)$  個ずつ推定されることになる.

拡張逐次ロジットモデルは, 回帰パラメータ  $\beta_j$  がカテゴリーごとに違った値となっているが (2.3) 式の制約 (平行性の仮定: ESA) をおくと逐次ロジットモデルとなる. また, 逐次ロジットモデルでは, 順序カテゴリーに逐次的な選択メカニズムを想定しており, ひとつひとつ基準をクリアしながら下位カテゴリーから上位カテゴリーに格付けが変化するような逐次的なメカニズムがある場合に適したモデルである.

なお, 次節以降での分析では, 前進逐次ロジットモデルによりモデルを構築していくが, 期待されるパラメータの符号条件を順序ロジットモデルの場合と同一にするために (2.5) 式を,

$$(2.7) \quad \log \frac{\Pr(Y_i > j | \mathbf{x}_i)}{\Pr(Y_i \geq j | \mathbf{x}_i)} = \alpha_j + \beta' \mathbf{x}_i,$$

と変形し推定している.

### 2.3 偏残差プロット

ESA が満たされているかを検討する最も簡単な方法は, カテゴリーごとの説明変数の中央値をプロットすることであるが, より詳細に分析する方法として偏残差 (partial residuals) プロットがある. このプロットが順序カテゴリーごとに平行になっていれば, ESA が満たされていると考えることができる.

2 項ロジットモデルを利用し,  $l$  番目の説明変数に対する, 観測値  $i$  のカテゴリー  $j$  の偏残差 ( $r_{lij}$ ) は,  $\hat{\pi}_{ij}$  を観測値  $i$  がカテゴリー  $j$  となる確率の推定値とすると,

$$(2.8) \quad r_{il} = \hat{\beta}_l x_{il} + \frac{I(Y_i \geq j) - \hat{\pi}_{ij}}{\hat{\pi}_{ij}(1 - \hat{\pi}_{ij})},$$

として与えられる. なお,  $I(Y_i \geq j)$  は  $Y_i$  がカテゴリー  $j$  以上である場合に 1 となり, それ以外では 0 となる指示関数である.

本稿では、この偏残差プロットを用い、さらにカテゴリーごとに散布図平滑化法にもとづき偏回帰関数を推定し表示している。なお、平滑化法として、Cleveland(1979)の局所回帰(lowess)を用いて推定している。

### 3. 使用データ

#### 3.1 データと説明変数

まず、分析対象と使用したデータについて説明する。分析対象は、決算期1999年4月から2000年3月までの株式公開企業のうち3期以上連続決算を公表している企業(銀行、保険、証券、その他金融を除く)とした。財務データは日経NEEDSのデータベースを使用し、目的変数となる格付けは、格付けのカバレッジが広い格付投資情報センター(R&I)の格付けを使用した。格付けはR&Iのホームページから入手し、2000年7月末のものを利用した。この結果、分析対象企業数は598社となった。

続いて、説明変数の選択について解説する。格付投資情報センター(2001)、Standard & Poor's Corporation(1998)、ムーディーズ・インベスターズ・サービス(1994)など、それぞれの格付機関は格付けの際に重視する財務指標を公表している(表1)。

これらの公開情報では、それぞれの格付機関に共通してキャッシュフロー分析が重要な定量分析のツールであり、将来キャッシュフローの安定性を評価していると述べられている。個別の指標では、収益性、利払能力、負債対キャッシュフロー、自己資本比率、規模といった指標が格付けに重要な指標として取り上げられている。本稿での変数選択は、このような格付機関が公表するキーレシオを元に、相関が高くない次の4つの変数を候補とした。説明変数として使用した変数は、キャピタリゼーション、負債キャピタリゼーション、ROA、EBIT変動係数の4つである。以下では、これら4つの変数の財務的な解釈について解説する。

まず、規模指標としては負の値をとることがあまりないキャピタリゼーションを対数変換したものを採用した。規模が大きい企業は、事業リスクの負担能力も高く、この値が大きければ格付けも高いことが期待できる。次に、収益性指標としてROAを採用した。なお、分子にくる利益の定義としてはEBITDAを使用した。収益性が高い企業は、負債返済能力も高いと考えられるため、この値が大きければ格付けも高いことが期待できる。ROAの算出は、短期的な変動に影響を受けにくいように過去5年間の平均と、公表する決算期が4期しかないものおよび3期しかないものについては、4期間もしくは3期間での平均をとった。また、3期末満しか決算を公表していない企業は今回の分析の対象外とした。さらに、安全性指標として、負債キャピタリゼーション比率を採用した。負債への依存度が高い企業は財務リスクが大きいと考えられ、この値が大きければ格付けは低くなることが期待される。最後に、格付機関のキー

表 1. 格付機関が重視する財務比率。

|          | S&P(1994)                | Moody's(1995)             | R&I(2000)        |
|----------|--------------------------|---------------------------|------------------|
| 収益性      | 売上高税前利払前営業利益率<br>永久資本利益率 | 営業利益率<br>税引前キャピタリゼーション利益率 | 総資本事業利益率         |
| 利払能力     | インタレスト・カバレッジ・レシオ         | インタレスト・カバレッジ・レシオ          | インタレスト・カバレッジ・レシオ |
| キャッシュフロー | キャッシュフロー・有利子負債比率         | 債務手元キャッシュフロー              | 有利子負債キャッシュフロー倍率  |
| 安全性      | 有利子負債・キャピタリゼーション比率       | 株主資本キャピタリゼーション            | 自己資本比率           |
| 規模       |                          | キャピタリゼーション合計              | キャッシュフロー         |
| その他      |                          |                           | 経常収支比率(%)        |

表 2. 使用データの基本統計量 .

|     | キャピタリ<br>ゼーション<br>対数<br>X1 | 負債キャピ<br>タリゼーシ<br>ョン比率<br>X2 | ROA(EBITDA)<br>5年平均<br>X3 | EBIT変動係<br>数対数<br>X4 |
|-----|----------------------------|------------------------------|---------------------------|----------------------|
| 平均  | 12.02                      | 0.45                         | 0.08                      | -1.16                |
| 中央値 | 11.86                      | 0.46                         | 0.08                      | -1.23                |
| 分散  | 1.92                       | 0.06                         | 0.00                      | 0.85                 |
| 尖度  | -0.29                      | -0.95                        | 2.24                      | 1.19                 |
| 歪度  | 0.43                       | 0.04                         | 1.06                      | 0.49                 |
| 最小  | 9.01                       | 0.00                         | -0.05                     | -3.63                |
| 最大  | 16.32                      | 0.98                         | 0.27                      | 3.66                 |

表 3. R&amp;I 格付けの分布状況 .

|      | 件数  | 割合     |
|------|-----|--------|
| AAA  | 16  | 2.7%   |
| AA   | 64  | 10.7%  |
| A    | 200 | 33.4%  |
| BBB  | 254 | 42.5%  |
| BB以下 | 64  | 10.7%  |
| 合計   | 598 | 100.0% |

表 4. 説明変数間の相関係数 .

| 変数名 |                 | X1  | X2      | X3      | X4      |         |
|-----|-----------------|-----|---------|---------|---------|---------|
| X1  | キャピタリゼーション対数変換  | 規模  | 1       | 0.3829  | 0.0349  | -0.1853 |
| X2  | 負債キャピタリゼーション比率  | 安全性 | 0.3829  | 1       | -0.4187 | 0.1150  |
| X3  | EBITDA総資産比率5年平均 | 収益性 | 0.0349  | -0.4187 | 1       | -0.3217 |
| X4  | EBIT変動係数対数      | 変動性 | -0.1853 | 0.1150  | -0.3217 | 1       |

レシオには含まれていないが、利益の変動性を示す指標として EBIT 変動係数を加えた。利益のばらつきが大きく安定しない企業は、格付けも低くなると考えられる。格付けは企業の将来キャッシュフローの安定性を重視する(格付投資情報センター(2001))ということから、この変数を追加することとした。本稿で用いた説明変数の定義は、次の通りである。また、表 2 および表 3 に使用したデータの基本統計量を示している。

- (1) X1: キャピタリゼーション = (自己資本 + 有利子負債) 対数変換
- (2) X2: 負債キャピタリゼーション比率 = 有利子負債 ÷ キャピタリゼーション
- (3) X3: ROA(EBITDA 総資産比率) = (EBITDA ÷ 総資産平均残高) 5年平均
- (4) X4: EBIT5 期変動係数 = (EBIT の 5 期標準偏差) ÷ (EBIT の 5 期平均) の対数変換

ここで、EBITDA = EBIT + 減価償却費、EBIT = 営業利益 + 受取利息・配当金、である。

表 4 には、説明変数の相関行列を示している。これを見ると、各変数は独立とはいえないが相関は ±0.5 以内に抑えられている。

以降、この 4 つの説明変数を用いてモデルを構築していく。

### 3.2 格付けカテゴリーごとの中央値

モデル構築を行なう前に、本節では格付けと説明変数の関連を箱ひげ図により視覚的に検討した。これを見ると、キャピタリゼーションと ROA については、格付けが高くなれば格付けカテゴリーごとの中央値も高くなっていることがわかる。また、EBIT 変動係数は格付けが高くなれば格付けカテゴリーごとの中央値は低くなっていることがわかる。しかし、負債キャピタリゼーション比率については、格付けが最も高い AAA クラスについては、中央値が低くなっている。これは、電力・ガスなど定性的な要因のウェイトが高く、負債依存度の大きな企業が多く含まれているためである。

順序ロジットモデルや逐次ロジットモデルが前提とする ESA が満たされていれば、中央値

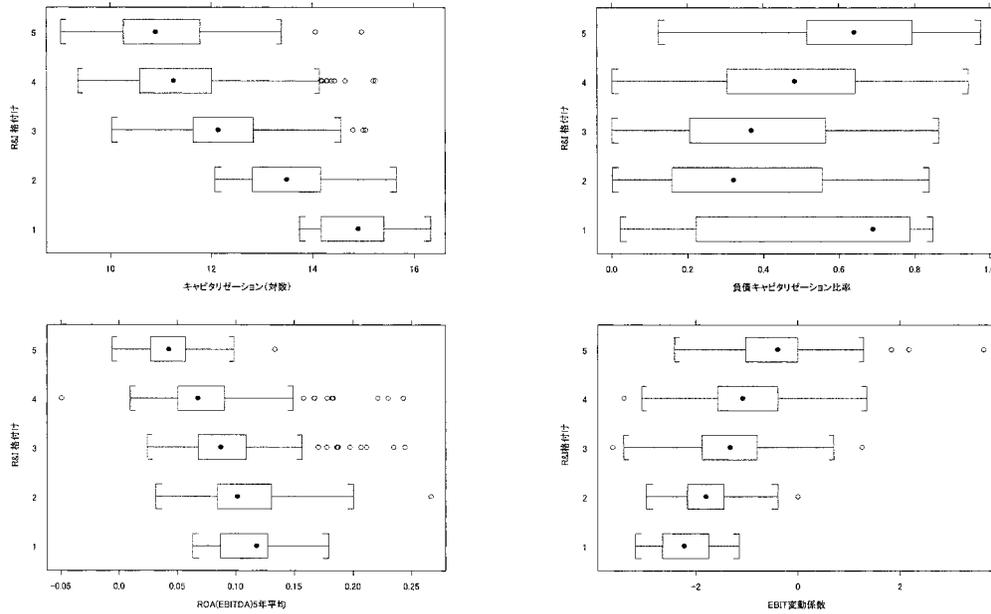


図 1. R&I 格付けと説明変数との関連。図中の黒丸は中央値を表し、白丸はデータを表す。箱は第 1 四分位点と第 3 四分位点を表しこの中に全データの半分があることになる。また、箱から伸びているひげは、第 1 四分位点と第 3 四分位点からそれぞれ四分位偏差の 1.5 倍だけ外側にある点を結んだものである。これよりも外側にあるデータは白丸で表示している。

が順序カテゴリーごとに順序づけられていることが期待される。箱ひげ図をみれば、負債キャピタリゼーション比率以外は、格付け別の中央値は順序付けられていることがわかる。このことは、特に負債キャピタリゼーション比率について、ESA の仮定が崩れている可能性を示唆している。

#### 4. 分析結果

本節では、順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルの推計結果と偏残差プロットによって ESA の妥当性を検討する。

##### 4.1 モデルの推定結果

表 5 と表 6 は、2 つのモデル(順序ロジットモデルと逐次ロジットモデル)の推定結果を示したものである。どちらのモデルも格付けが低くなる確率をモデル化しているため、キャピタリゼーションと ROA のように値が大きくなれば格付けも高くなることが期待される変数のパラメータ推定値は負となる。また、それとは逆に負債キャピタリゼーションや EBIT 変動係数のように値が小さければ格付けが高いことが期待される変数のパラメータ推定値は正となっている。このように、推定されたパラメータは 2 つのモデルで若干の違いがあるが、パラメータの符号は一致し、p 値にも大きな違いはみられない。

また、予測値と実際の格付けをクロス表にしたものが、表 7 である。これをみると、順序ロジットモデルの方が格付けを正確に判別できた割合が 67.06%と逐次ロジットモデルの 66.39%よりもやや高くなっているが、予測値の外れ方は類似しており、両モデルによる大きな違いは見

表5. 順序ロジットモデルの結果. Coef: パラメータの推定値, S.E.: 標準誤差, Wald: Wald 検定による統計量(すべて自由度1), p value: Wald 検定の結果(p値).

|       |                 | Coef      | S.E.   | Wald   | p value |
|-------|-----------------|-----------|--------|--------|---------|
| 定数項:1 | logit(P[Y>=2])  | 30.4575   | 1.6759 | 330.28 | 0.0000  |
| 定数項:2 | logit(P[Y>=3])  | 27.0334   | 1.5097 | 320.65 | 0.0000  |
| 定数項:3 | logit(P[Y>=4])  | 23.1123   | 1.3507 | 292.78 | 0.0000  |
| 定数項:4 | logit(P[Y>=5])  | 18.5127   | 1.1935 | 240.59 | 0.0000  |
| X1    | キャピタリゼーション(対数)  | -1.9966   | 0.1187 | 283.02 | 0.0000  |
| X2    | 負債キャピタリゼーション比   | 7.0014    | 0.5572 | 157.90 | 0.0000  |
| X3    | ROA(EBITDA)5年平均 | -13.4910  | 2.6405 | 26.11  | 0.0000  |
| X4    | EBIT変動係数        | 0.8775    | 0.1158 | 57.39  | 0.0000  |
| 対数尤度  |                 | -443.3166 |        |        |         |

表6. 逐次ロジットモデルの結果. Coef: パラメータの推定値, S.E.: 標準誤差, Wald: Wald 検定による統計量(すべて自由度1), p value: Wald 検定の結果(p値).

|       |                   | Coef      | S.E.   | Wald   | p value |
|-------|-------------------|-----------|--------|--------|---------|
| 定数項:1 | logit(P[Y>1 Y=1]) | 28.7787   | 1.6842 | 291.97 | 0.0000  |
| 定数項:2 | logit(P[Y>2 Y=2]) | 25.6460   | 1.5101 | 288.43 | 0.0000  |
| 定数項:3 | logit(P[Y>3 Y=3]) | 21.8670   | 1.3447 | 264.44 | 0.0000  |
| 定数項:4 | logit(P[Y>4 Y=4]) | 17.4381   | 1.1782 | 219.06 | 0.0000  |
| X1    | キャピタリゼーション(対数)    | -1.8887   | 0.1186 | 253.47 | 0.0000  |
| X2    | 負債キャピタリゼーション比     | 6.8467    | 0.5533 | 153.12 | 0.0000  |
| X3    | ROA(EBITDA)5年平均   | -13.1257  | 2.5395 | 26.71  | 0.0000  |
| X4    | EBIT変動係数          | 0.8207    | 0.1118 | 53.92  | 0.0000  |
| 対数尤度  |                   | -445.6304 |        |        |         |

表7. 予測値と実際の格付け. 縦が実際の格付け, 横がモデルによる予測結果, 右下が正確に予測できた割合を示している.

(順序ロジットモデル)

|    | 予測値 |    |     |     |      | 総計         |
|----|-----|----|-----|-----|------|------------|
|    | AAA | AA | A   | BBB | BB以下 |            |
| 実  |     |    |     |     |      |            |
| 測  | 5   | 10 | 1   |     |      | 16         |
| 値  | 3   | 34 | 26  | 1   |      | 64         |
|    |     | 10 | 140 | 50  |      | 200        |
|    |     |    | 45  | 195 | 14   | 254        |
|    |     |    | 2   | 35  | 27   | 64         |
| 総計 | 8   | 54 | 214 | 281 | 41   | 598 67.06% |

(逐次ロジットモデル)

|    | 予測値 |    |     |     |      | 総計         |
|----|-----|----|-----|-----|------|------------|
|    | AAA | AA | A   | BBB | BB以下 |            |
| 実  |     |    |     |     |      |            |
| 測  | 5   | 10 | 1   |     |      | 16         |
| 値  | 3   | 32 | 27  | 2   |      | 64         |
|    |     | 10 | 138 | 52  |      | 200        |
|    |     |    | 45  | 195 | 14   | 254        |
|    |     |    | 2   | 35  | 27   | 64         |
| 総計 | 8   | 52 | 213 | 284 | 41   | 598 66.39% |

受けられない。

#### 4.2 スコア検定による ESA の検討

前節では, モデルの推定結果と予測結果をみた. そこでは, パラメータの推定値と予測結果

の両方について、モデルによる違いは認められなかった。本節では、さらに ESA について検討していく。まず、順序ロジットモデルについて、スコア検定を行ない ESA が満たされているかどうかを分析する。ESA に関するスコア検定は、制約下でのモデルを推定しその尤度をもとに検定を行なう。まず、次のような帰無仮説を考える。

帰無仮説 ( $H_0$ ): ESA が成り立つ  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = \beta$ .

対立仮説 ( $H_1$ ): ESA が成り立たない  $\beta_1 \neq \beta_2 \neq \dots \neq \beta_{k-1} \neq \beta$ .

順序ロジットモデルを  $(k-1)$  個の 2 項ロジットと考えると、カテゴリー  $j$  以下になる確率は、

$$\Pr(Y_i \leq j | \mathbf{x}_i) = F(\alpha_j - \beta'_j \mathbf{x}_i) \quad (1 \leq j \leq k-1),$$

となる。ここで、 $\beta_j$  が  $(k-1)$  個の式で等しいという制約、

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = \beta,$$

を課して、制約付きモデル、

$$\Pr(Y \leq j | \mathbf{x}_i) = F(\alpha_j - \beta' \mathbf{x}_i),$$

を推定する。帰無仮説:  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{k-1} = \beta$  の下で、スコア関数(対数尤度の  $\beta$  に関する 1 階微分)を最尤推定値  $\hat{\beta}$  で評価したものを  $\hat{U}$  とし、ヘシアン(対数尤度の  $\beta$  に関する 2 階微分)を  $\hat{\beta}$  で評価したものを  $\hat{H}$ 、フィッシャーの情報行列を  $\hat{I}$  とすると、スコア検定統計量:  $S = \hat{U}' \hat{I}^{-1} \hat{U}$  は、漸近的に自由度  $K(J-1)$  のカイ 2 乗分布にしたがう。これを用いて、ESA 仮説を検定することができる。

このスコア検定の結果をみると、カイ 2 乗統計量  $S$  は、自由度 12 で 82.86 (p 値は 0.0001) となり、ESA 仮説が高度に有意に棄却されることがわかる。さらに、対象とする格付けカテゴリーを変えてスコア検定を行なった結果が、表 8 である。これは、AAA から BB までの 5 つのカテゴリーについてカテゴリーの取り方を変えてスコア検定を行なったものである。表 8 の「検定の範囲」に「まる」がついていないものを分析対象からはずし検定を行なっている。例えば、上から 2 行目(左欄に BB=missing と書いてあるもの)は、BB を分析対象からはずし AAA から BBB までのデータで解析を行なった結果である。結果は、スコア検定によるカイ 2 乗統計量と自由度、その p 値を示している。

表 8. スコア検定の結果(ESA)。

|                   | 検定の対象範囲 |    |   |     |    | カイ2乗<br>統計量 | 自由度 | p値     |
|-------------------|---------|----|---|-----|----|-------------|-----|--------|
|                   | AAA     | AA | A | BBB | BB |             |     |        |
| ALL               | ○       | ○  | ○ | ○   | ○  | 82.86       | 12  | 0.0001 |
| BB=missing        | ○       | ○  | ○ | ○   | -  | 44.55       | 8   | 0.0001 |
| AAA=missing       | -       | ○  | ○ | ○   | ○  | 46.41       | 8   | 0.0001 |
| BBandBBB=missing  | ○       | ○  | ○ | -   | -  | 8.72        | 4   | 0.0686 |
| AAAandBB=missing  | -       | ○  | ○ | ○   | -  | 16.11       | 4   | 0.0029 |
| BBB=missing       | ○       | ○  | ○ | -   | ○  | 53.72       | 8   | 0.0001 |
| A=missing         | ○       | ○  | - | ○   | ○  | 74.95       | 8   | 0.0001 |
| AA=missing        | ○       | -  | ○ | ○   | ○  | 44.59       | 8   | 0.0001 |
| AAandA=missing    | -       | -  | ○ | ○   | ○  | 21.72       | 4   | 0.0002 |
| AandBBB=missing   | ○       | ○  | - | -   | ○  | 26.35       | 4   | 0.0001 |
| AAandBBB=missing  | ○       | -  | ○ | -   | ○  | 37.52       | 4   | 0.0001 |
| AAAandBBB=missing | -       | ○  | ○ | -   | ○  | 32.22       | 4   | 0.0001 |

この検定の結果は、AAA から A までの 3 カテゴリーにした場合を除き、どのようなカテゴリーの取り方をしても概ね ESA の適合は高度に有意に棄却された。唯一、BB と BBB を除いたデータでは有意水準 5% で、仮説が棄却できなかった。

#### 4.3 偏残差による ESA の検討

次に、どの変数について、ESA が崩れているかを確認するために、偏残差プロットを行なう。図 2 は、前節で推定した順序ロジットモデルについて偏残差をプロットしたものであり、もし ESA が満たされていれば、カテゴリー区分を変えた偏回帰曲線は平行になることが期待される。グラフ上の「 $y \geq 2$ 」は AAA と AA、「 $y \geq 3$ 」は AA と A、「 $y \geq 4$ 」は A と BBB、「 $y \geq 5$ 」は BBB と BB 以下の区分を表す。図 2 をみると、特に、BB 以下について大きなずれが生じており、BB 以下について他のカテゴリーとは違う動きがあることがわかる。これにはいくつかの原因が考えられるが、逐次ロジットモデルの偏残差を表示した図 3 では、このような大きな変動がみられず、BB 以下のデータに含まれるサンプルに問題があることが示唆される。実際に、BB 以下のサンプルで偏残差が大きい企業は、商社や流通、不動産など規模が大きいが負債も大きく、加えて収益力も低い企業であった。

一方、図 3 をみると、カテゴリー間で平行なプロットにはなっておらず ESA が満たされているとはいえない。しかし、図 2 と比べて極端な変化はみられず、縦軸の数値ラベルをみると偏残差の絶対値も小さいことがわかる。順序ロジットモデルよりもデータに適合しているといえるが、このグラフをみるかぎりではカテゴリー間で平行にならなっており、ESA が満たされて

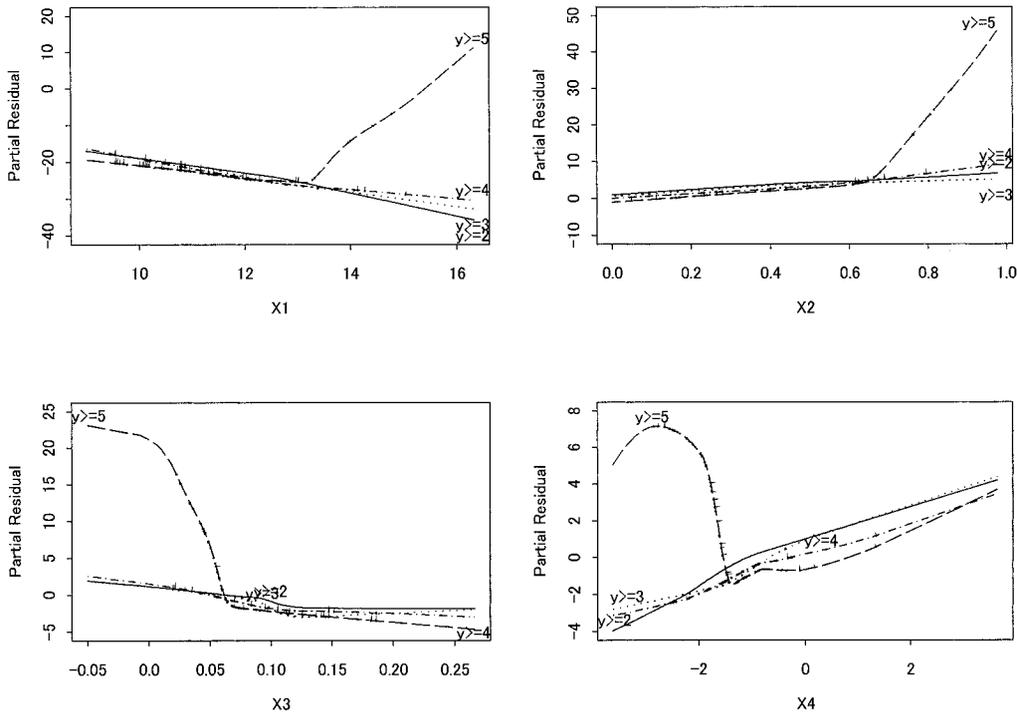


図 2. 偏残差プロット(順序ロジットモデル).  $y \geq 2$  は、AAA と AA,  $y \geq 3$  は AA と A,  $y \geq 4$  は A と BBB,  $y \geq 5$  は BBB と BB 以下の区分を表す。

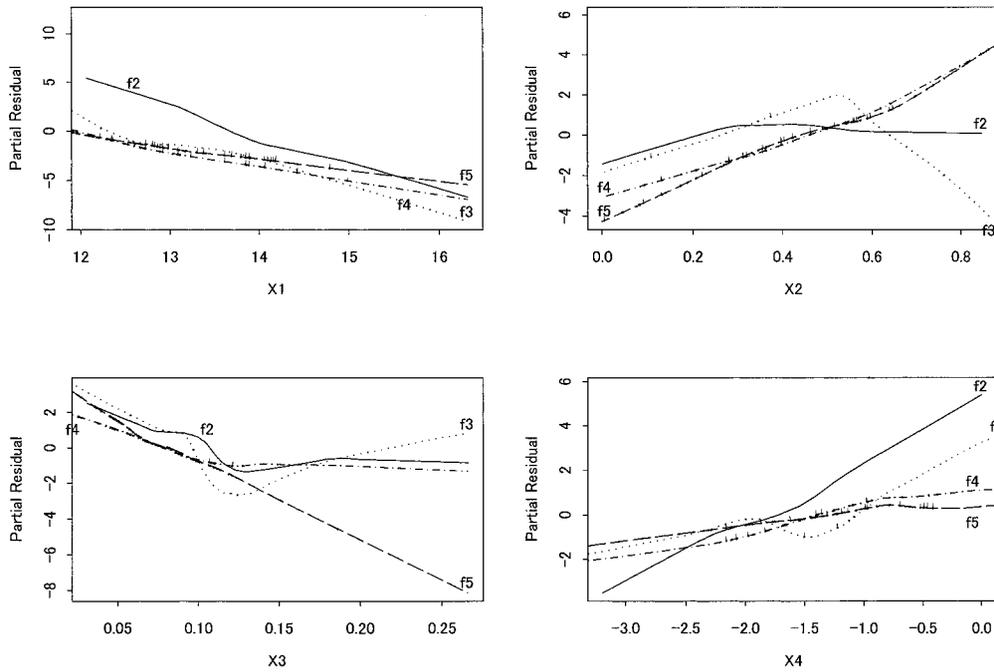


図3. 偏残差プロット(逐次ロジットモデル). f2は、AAとAA以上の格付け、f3はAとA以上の格付け、f4はBBBとBBB以上の格付け、f5はBBとBB以上の格付けの比較を行なっている。

いるとは考えにくい。図1でみたように、X2(負債キャピタリゼーション比率)では、f3(AとA以上の比較)が他のカテゴリーの比較と違った動きをしている。これは、負債比率が大きいと高い格付けとなることを示している。

本節では、順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルにより格付けデータを分析してきた。2つのモデルの推定結果や予測結果をみると大きな違いはみられなかった。さらに、どちらのモデルにおいてもESAを満たしているとはいえないことがわかった。よって、次節では、このESAを緩和したECRによる分析を行なう。

### 5. 拡張逐次ロジットモデル

本節では、ESAが満たされない場合の拡張として、ESAを仮定しない(2.6式)のECRを構築する。ECRは、カテゴリーごとに回帰係数が異なるモデルであり、ESAを仮定するモデルより推定するパラメータ数は増える。表9はその推定結果を示したものである。推定したパラメータの符号はそれぞれの説明変数ごとに一致しているが、その値はカテゴリーごとにかなりの違いがみられる。例えば、負債キャピタリゼーションのうちAAAを判別する回帰係数のp値が、0.147と大きくなっている。これは、負債キャピタリゼーションはAAAとそれ以外を区分するには効果がないことを意味している。ESAを仮定した順序ロジットモデルや逐次ロジットモデルでは、すべてのカテゴリーで同様な効果があると仮定しているが、ECRによりカテゴリーごとにみていくとAAAを区分するには効果がない変数であることがわかる。このことは、図1でみた箱ひげ図の結果と整合的である。

表 9. 拡張逐次ロジットモデルの結果. Coef: パラメータの推定値, S.E.: 標準誤差, Wald: Wald 検定による統計量(すべて自由度 1), p value: Wald 検定の結果(p 値).

|       |                   | Coef      | S.E.    | Wald   | p value |
|-------|-------------------|-----------|---------|--------|---------|
| 定数項:1 | logit(P[Y>1 Y=1]) | 51.3938   | 11.7306 | 19.19  | 0.0000  |
| 定数項:2 | logit(P[Y>2 Y=2]) | 38.0069   | 4.5443  | 69.95  | 0.0000  |
| 定数項:3 | logit(P[Y>3 Y=3]) | 22.1650   | 2.0582  | 115.97 | 0.0000  |
| 定数項:4 | logit(P[Y>4 Y=4]) | 12.0851   | 2.5000  | 23.37  | 0.0000  |
| X1:1  | キャピタリゼーション(対数)    | -3.0528   | 0.7343  | 17.28  | 0.0000  |
| X1:2  |                   | -2.7813   | 0.3472  | 64.16  | 0.0000  |
| X1:3  |                   | -1.9880   | 0.1869  | 113.14 | 0.0000  |
| X1:4  |                   | -1.3310   | 0.2448  | 29.56  | 0.0000  |
| X2:1  | 負債キャピタリゼーション比     | 2.9139    | 2.0093  | 2.10   | 0.1470  |
| X2:2  |                   | 7.8090    | 1.3221  | 34.89  | 0.0000  |
| X2:3  |                   | 8.2510    | 0.9075  | 82.67  | 0.0000  |
| X2:4  |                   | 7.3664    | 1.2700  | 33.64  | 0.0000  |
| X3:1  | ROA(EBITDA)5年平均   | -23.0591  | 10.7478 | 4.60   | 0.0319  |
| X3:2  |                   | -15.6447  | 5.6232  | 7.74   | 0.0054  |
| X3:3  |                   | -12.1278  | 3.8485  | 9.93   | 0.0016  |
| X3:4  |                   | -36.7954  | 8.4912  | 18.78  | 0.0000  |
| X4:1  | EBIT変動係数          | 2.5571    | 0.7895  | 10.49  | 0.0012  |
| X4:2  |                   | 1.3273    | 0.2957  | 20.14  | 0.0000  |
| X4:3  |                   | 0.6714    | 0.1656  | 16.43  | 0.0001  |
| X4:4  |                   | 0.4903    | 0.2088  | 5.51   | 0.0189  |
| 対数尤度  |                   | -404.6327 |         |        |         |

表 10. 拡張逐次ロジットモデルの予測結果.

|             |      | 予測値 |    |     |     |      |            |
|-------------|------|-----|----|-----|-----|------|------------|
|             |      | AAA | AA | A   | BBB | BB以下 | 総計         |
| 実<br>測<br>値 | AAA  | 8   | 8  |     |     |      | 16         |
|             | AA   | 3   | 43 | 16  | 2   |      | 64         |
|             | A    |     | 11 | 138 | 51  |      | 200        |
|             | BBB  |     | 1  | 41  | 199 | 13   | 254        |
|             | BB以下 |     |    | 1   | 32  | 31   | 64         |
| 総計          |      | 11  | 63 | 196 | 284 | 44   | 598 70.07% |

また, 表 10 は ECR による予測結果と実際の格付けを比較したものである. 全体の予測精度は 70.07% と ESA を仮定した逐次ロジットモデルよりもよい結果となっている. しかし, 推定すべき未知パラメータも増加しており, 単純な比較はできないため, 次の AIC によりこれらのモデルを比較した.

$$AIC = -2L + 2P \quad (L \text{ は対数尤度}, P \text{ はパラメータ数})$$

表 11 はこの結果を示したものであり, ESA を 4 つの説明変数すべてに仮定したモデル (mode10) と, 1 つの変数のみ ESA を仮定せず残りの変数は ESA を仮定するモデル (model1, model2, model3, model4) と, 4 つの変数すべてに ESA を仮定しないモデル (model5) とを比較している. この結果, ESA を仮定せずカテゴリーごとにパラメータを推定する ECR の AIC が最も小さく, ESA を仮定する逐次ロジットモデルよりもデータに適合している. また, 個別の変数ごとにみると X1 について ESA を緩めたモデルの AIC が 855.65 で低く, ECR を除くと最も AIC が低かった. このことから, 今回の分析で使用した 4 つの変数のうち, 企業規模を表すキャピタリゼーションが格付けカテゴリーごとの効果の違いが最も大きな変数であることがわかった.

このように, 実際の格付けデータを用いた分析では ESA を仮定するには無理があることが

表 11. ESA に関するモデル比較の結果.

|        | 対数尤度    | パラメータ数 | AIC    | ESA         | nonESA      |
|--------|---------|--------|--------|-------------|-------------|
| model0 | -445.63 | 8      | 899.26 | X1,X2,X3,X4 | --          |
| model1 | -422.33 | 11     | 855.65 | X1          | X2,X3,X4    |
| model2 | -422.99 | 11     | 856.98 | X2          | X1,X3,X4    |
| model3 | -433.93 | 11     | 878.86 | X3          | X1,X2,X4    |
| model4 | -439.02 | 11     | 889.03 | X4          | X1,X2,X3    |
| model5 | -404.63 | 20     | 829.27 | --          | X1,X2,X3,X4 |

わかった。よって格付けデータの分析では、このような前提条件を要求する順序ロジットモデルや逐次ロジットモデルよりも、ESA を仮定しない ECR のようなモデルが望ましいといえる。

また、小林(2001)では、順序プロビットモデルと格付けの順序性を考慮しない多項プロビットモデルとを比較し、後者の方がデータに適合していることを示したが、上記の分析はその原因をある程度データ解析的に示したことになる。当面、順序性を考慮しないモデルよりも、ECR のような仮定の弱い順序モデルの活用がすすめられる。

## 6. まとめと今後の課題

本稿では、格付けデータの分析を順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルを用いて行なった。しかし、これらのモデルの前提となっている ESA を検討してみたところ、この前提条件を満たしておらず、格付けデータに対して ESA を前提としたモデルは望ましくないことがわかった。

ESA は格付けの判定においてはすべての格付けカテゴリーを横断的に考えていることを意味し、例えば、ある企業が AAA かどうかを判断する基準(財務比率の重みづけ)と BB であるかどうかを判断する基準が同じであると仮定することになる。しかし、現実には信用力が高い企業と低い企業ではその判断基準も異なっていると考えるのが自然である。本稿での結果は、このような解釈をサポートするものであり、小林(2001)の結果とも整合的である。

このような格付け判断のメカニズムをモデルに反映するために、本稿では、格付けの順序性を考慮しない多項ロジットモデルではなく、ESA を緩和した ECR による分析を試みた。AIC によるモデル選択の結果、ESA を緩めたモデルの方がデータに適合していることが明らかになった。特に、キャピタリゼーションの対数変換と、負債キャピタリゼーション比率の 2 つの変数について ESA を緩めるべきであることがわかった。

本稿で用いた偏残差プロットは、ESA を視覚的に確かめる方法であるが、非線形性を確かめる方法としても利用できる。本稿での分析をみるとカテゴリーによっては偏残差プロットが大きく波を打っており非線形性の存在が示唆されている。このような非線形のメカニズムの解明は本稿ではできなかったため今後の課題としたい。また、順序ロジットモデルと逐次ロジットモデルの比較は、これらが階層的なモデルになっていないため尤度比検定などの通常の方法では行なえない。これらの点についても今後の課題としたい。

## 謝 辞

本稿を作成するにあたり、ご指導いただいた筑波大学大学院の椿広計教授に感謝いたします。また、匿名のレフェリーからは、有益なコメントをいただきました。ここに記して感謝いたします。

## 参 考 文 献

- Agresti, A. (1990) *Categorical Data Analysis*, Wiley, New York.
- Blume, M. E., Lim, F. and Mackinlay, A. C. (1998) The declining credit quality of U.S. corporate debt: Myth or reality, *Journal of Finance*, **53**, 1389–1413.
- Bender, R. and Benner, A. (2000) Calculating ordinal regression models in SAS and Splus, *Biometrical Journal*, **42**, 677–699.
- Bender, R. and Grouven, U. (1998) Using binary logistic regression models for ordinal data with non-proportional odds, *Journal of Clinical Epidemiology*, **51**, 809–816.
- Cleveland, W. S. (1979) Robust locally-weighted regression and scatterplot smoothing, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **74**, 829–836.
- Ederington, L. H. (1985) Classification models and bond ratings, *Financial Review*, **20**, 237–262.
- Fahrmeir, L. and Tutz, G. (2001) *Multivariate Statistical Modeling Based on Generalized Linear Models*, 2nd ed., Springer, New York.
- Fienberg, S. E. (1980) *The Analysis of Cross-classified Categorical Data*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts.
- Harrel, F. E., Jr., Margolis, P. A., Gove, S., Mason, K. E., Mulholland, E. K., Lehmann, D., Muhe, L., Gatchalian, S. and Eichenwald, H. F. (1998) Tutorial in biostatistics: Development of a clinical prediction model for an ordinal outcome: The World Health Organization Multicentre Study of Clinical Signs and Etiological Agents of Pneumonia, Sepsis and Meningitis in Young Infants, *Statistics in Medicine*, **17**, 909–944.
- Horrigan, J. (1966) The determination of long-term credit standing with financial ratio, *Supplement to Journal of Accounting Research*, **4**, 44–62.
- 格付投資情報センター (2001) 『格付け&A 決まり方から使い方まで』, 格付投資情報センター, 東京.
- Kaplan, R. and Urwitz, G. (1979) Statistical models of bond ratings: A methodological inquiry, *Journal of Business*, **52**, 231–261.
- 小林正人 (2001) 順序プロビットモデルのテストと社債格付けデータへの応用, 金融研究, **20** (別冊1), 日本銀行金融研究所, 東京.
- 国際金融情報センター (1998) 『主要格付会社の特徴と評価 1999年版』, 国際金融情報センター, 東京.
- McCullagh, P. (1980) Regression models for ordinal data (with discussion) *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **42**, 109–142.
- McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989) *Generalized Linear Models*, 2nd ed., Chapman and Hall, London.
- McKelvey, R. and Zavonia, W. (1975) A statistical model for the analysis of ordinal level dependent variables, *Journal of Mathematical Sociology*, **4**, 103–120.
- ムーディーズ・インベスターズ・サービス (1994) 『グローバル格付け分析』, 金融財政事情研究会, 東京.
- Moody's Investors Service (1996) *Research Guide—Industrial*, Moody's Investors Service, New York.
- 中山めぐみ, 森平爽一郎 (1998) 格付け選択確率の推定と信用リスク量, JAFEE 1998 夏季大会予稿集, 210–225.
- Pinches, G. E. and Mingo, K. A. (1973) A multivariate analysis of industrial bond ratings, *Journal of Finance*, **28**, 1–18.
- Pinches, G. E. and Mingo, K. A. (1975) Subordination and industrial bond ratings, *Journal of Finance*, **30**, 201–206.
- Pogue, T. F. and Soldofsky, R. M. (1969) What's in a bond rating, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **4**, 201–228.
- スタンダード・アンド・プアーズ (1994) 『事業法人のための格付けの手引き』, スタンダード・アン

ド・ブアーズ, 東京 .

Standard & Poor's Corporation (1998). *Corporate Ratings Criteria*, McGraw-Hill, New York.

Terza, J. V. (1985). Ordinal Probit: A generalization, *Comm. Statist. Theory Methods*, **14**, 1–11.

West, R. R. (1970). An alternative approach to predicting corporate bond rating, *Journal of Accounting Research*, **7**, 118–127.

West, R. R. (1973). Bond ratings, bond yields and financial regulation: Some findings, *Journal of Law and Economics*, **16**, 159–168.

安川武彦 (2001) サンプル・セレクション・モデルによる社債格付けの比較, 現代ファイナンス, **10**, 63–83.

## Equal Slope Assumption and Bond Rating Data: Analysis of Using Ordered Logit Model and Continuation Ratio Model

Takehiko Yasukawa

(ChuoAoyama PricewaterhouseCoopers Financial & Risk Management, Ltd.)

Since bond rating is typical ordinal data, ordered logit models or ordered probit models are being widely used for credit analysis. However, these models require the equal slope assumption, which has not been verified in previous research in this field. This paper tests this assumption using the ordered logit model and continuous ratio model using Japanese bond ratings data. As a result, the equal slope assumption was rejected and extended continuation ratio models relaxing this assumption were found to be a useful approach for analyzing bond rating.