統計数理 (2001)
第 49 巻 第 1 号 175–198

［原著論文］

相反分布族の構築とその基本的性質

総合研究大学院大学* 武 井 智 裕
統計数理研究所 松 縄 規

(受付 2000 年 10 月 20 日；改訂 2001 年 3 月 27 日)

要 旨

密度関数の表現の中に主要な変量とその逆数の和という相反構造を含む確率分布の族を相反分布族として導入し，そこに属する種々の分布の密度関数型を与える．この分布族の特徴を表わすいくつかの興味深い等式などを提示し，それらの基本的性質を考察する．特に，指数関数の中に相反構造を持つものを指数相反分布族と呼び，逆ガウス分布，Birnbaum–Saunders 分布などいくつかの既知の重要な分布をはじめ，一般化逆ガウス分布も含まれていることを示す．また，これまで知られていないと思われる興味ある若干の新しい相反分布も誘導する．更に，相反分布の分布関数の値を評価するための有用な不等式を，不完全ガンマ関数比を基に与える．関連する数値計算やそれらの結果についての数表や図も提示する．

キーワード：相反関数，広義対称関数，相反相加平均，相反相乗平均，相反分布族，一般化逆ガウス分布族．

1. はじめに

正の領域で定義される一次元連続型確率変数 X の密度関数 $q(x)$ が，その中に変数 x^{γ} を分子に持つ項と分母に持つ項の和として，以下で相反関数と呼ぶ，表現

$$r(x;a,b,\gamma) := \frac{x^{\gamma}}{a} + \frac{b}{x^{\gamma}}, \qquad (x>0,\ a>0,\ b>0,\ -\infty<\gamma<\infty)$$

のような部分を持つ確率分布の族が本論文での興味の対象である．そのような分布族を相反分布族と呼ぶことにする．本論文の主な目的は，この相反分布族がどのように構築され得るか，いかなる分布が含まれるか，あるいはその基本的性質としてどのようなものがあるかなどを論じることである．

相反関数については $r(x;a,b,\gamma) = r(a^{1/\gamma}b^{1/\gamma}/x;a,b,\gamma)$ の関係が成立する．この性質は，相反関数が変数 x の広義の意味での対称関数であることを意味している．我々は以後これらの二つの量は広義の**相反関係**にあると言うことにする．

さて，この相反関数 $r(x;a,b,\gamma)$，あるいはその半分の量は，ある種の観測における興味の対象の理想値を直接あるいは間接的に推測する場合に，直感的にもまた解析的にも意義のある量であると思われる．以下にそのことについて若干言及する．次のような状況を考える．$\theta\ (>0)$ を我々がその大きさに興味を持つ対象量の未知の理想値とし，$x\ (>0)$ を θ の推測に際して行な

*数物科学研究科 統計科学専攻：〒106–8569 東京都港区南麻布 4–6–7.

う観測によって得る値とする．そのとき，θ の推定には x を二つのパラメータ $a\ (>0)$, γ で加工した x^{γ}/a に基づいて行なうという場合を想定する．一般に $x^{\gamma}/a \neq \theta$ と考え得る．$x^{\gamma}/a < \theta$ の時には

$$\theta x^{\gamma} < a\theta^2 \Rightarrow \theta < \frac{a\theta^2}{x^{\gamma}} \Rightarrow \frac{x^{\gamma}}{a} < \theta < \frac{a\theta^2}{x^{\gamma}}\,, \tag{1.1}$$

$x^{\gamma}/a > \theta$ の時には

$$\theta x^{\gamma} < a\theta^2 \Rightarrow \theta < \frac{a\theta^2}{x^{\gamma}} \Rightarrow \frac{a\theta^2}{x^{\gamma}} < \theta < \frac{x^{\gamma}}{a} \tag{1.2}$$

である．ここで $b := a\theta^2$ と置いて

$$\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\gamma}}{a} + \frac{b}{x^{\gamma}}\right), \qquad (x>0,\ a>0,\ b>0,\ -\infty<\gamma<\infty) \tag{1.3}$$

を考える．この広義の相反関係にある二量 x^{γ}/a と b/x^{γ} の算術平均は，それぞれの量を単独で考えるよりも，θ のより精度の良い近似値となることが期待される．ここで現れた平均のことを**相反相加平均**と呼ぶことにする．この平均は，我々が本論文で考えようとする相反分布族の密度関数の中に含まれ，解析的に重要な役割を演じる部分である．

また，相反関数を含むような分布を考えることが意味を持つことは，Kullback (1954) の一般化指数分布族の構築に倣った，以下の指数型相反密度関数の Bayes 的な接近を通じても認識できる．

$x>0$ とし，$q(x)$ および事前に与えられた $p(x)$ を σ–有限測度 λ に関して絶対連続な一般化密度関数とする．また可測関数 $Y = T(x)$ について，$\xi = \int_0^{\infty} T(x)q(x)d\lambda(x)$ の存在と τ のある区間で $M_p(\tau) = \int_0^{\infty} p(x)e^{\tau T(x)}d\lambda(x)$ が存在することを仮定する．このとき次の Kullback の不等式が成立する．

$$I(q:p) = \int_0^{\infty} q(x)\ln\frac{q(x)}{p(x)}d\lambda(x) \geq \xi\tau - \ln M_p(\tau) = I(q^*:p)\,, \quad \xi = \frac{d}{d\tau}\ln M_p(\tau)\,, \tag{1.4}$$

ここで等号が成立するのは

$$q(x) = q^*(x) := p(x)e^{\tau T(x)}/M_p(\tau) \quad [\lambda] \tag{1.5}$$

のとき且つそのときに限る．事前に与える分布として，広く自然界における偶然の現象を記述することができる冪ガンマ分布

$$p(x) := \frac{|\gamma|}{(2a)^{\beta}\Gamma(\beta)}x^{\gamma\beta-1}\exp\left(-\frac{x^{\gamma}}{2a}\right), \quad \begin{pmatrix} x>0,\ a>0, \\ \beta>0,\ \gamma\in \boldsymbol{R}-\{0\} \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

を考えれば，$\tau =: -b/2,\ T(x) =: x^{-\gamma}$ とすることで，事後的に分布

$$q^*(x) := \frac{|\gamma|x^{\gamma\beta-1}}{2(ab)^{\beta/2}K_{\beta}(\sqrt{b/a})}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\gamma}}{a}+\frac{b}{x^{\gamma}}\right)\right\}, \quad \begin{pmatrix} x>0,\ a>0,\ b>0, \\ -\infty<\beta<\infty,\ \gamma\in \boldsymbol{R}-\{0\} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

あるいは，$b = a\theta^2$ の関係により

$$q^*(x) := \frac{|\gamma|x^{\gamma\beta-1}}{2(a\theta)^{\beta}K_{\beta}(\theta)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^{\gamma}}{a}+\theta^2\frac{a}{x^{\gamma}}\right)\right\}, \quad \begin{pmatrix} x>0,\ \theta>0,\ a>0, \\ -\infty<\beta<\infty,\ \gamma\in \boldsymbol{R}-\{0\} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

が定まる．この表現は，Jørgensen(1982) の p. 27 の密度関数とも密接に関係している．上記二式で，$\boldsymbol{R}$ は一次元実軸，$K_{\beta}(\cdot)$ は，次数 β の第二種変形 Bessel 関数 (Watson (1966)) を表わす．一般に $K_{\beta}(\cdot) = K_{-\beta}(\cdot)$ が成立するので，β の範囲は (1.6) での $\beta>0$ から，(1.7)，(1.8) では $-\infty<\beta<\infty$ と拡張されている．上の密度関数で注目すべきはその指数関数部分に相反関数が

登場していることである．また，(1.8) の $K_\beta(\cdot)$ の引数が θ となるが，$b = a\theta^2$ であるから θ は二つの量 x^γ/a と b/x^γ に基づく相反相乗平均と呼ぶべき量になっている．この分布族には，逆ガウス分布 (Chhikara and Folks (1989), Seshadri (1993))，逆数逆ガウス分布，そしてパラメータを $a = \mu^2/\lambda$, $b = \lambda$, $\gamma = 1$ ($\lambda > 0$, $\mu > 0$) として，それらの一般化である一般化逆ガウス分布を含むことも分かる．

以上のような側面を持つ相反分布族について，その密度関数の構造や基本的性質の基盤的研究を行なうことは興味深い．このことを本論文では次のような構成で実施する．

第 2 章で相反分布族の一般的な定義を与える．第 3 章では，相反分布族を特徴づける幾つかの興味ある等式を提示する．これらの式はまた，相反分布族に属する分布の間の関係や，多様な新しい分布が構成可能であることを示唆している．各等式の証明等は付録で与える．第 4 章では，この分布族に属する分布の具体例を挙げる．例えば，ブラウン運動などの物理現象の記述においてしばしば現れる確率分布の一つである逆ガウス分布が代表的なものとして含まれる．第 5 章では，相反分布族に関連する分布の分布関数の値の評価に有用な不完全ガンマ関数比の評価不等式（松縄・武井（1999））を用いて，逆数逆ガウス分布の分布関数を評価したグラフと数値結果を挙げる．

2. 定義

この章では，前述の事柄を踏まえて，相反分布族および指数相反分布族とそれらを特徴付ける相反関数について定義として述べる．

定義 2.1. 変数とその逆数の和の形を基に，累乗，定数倍に関して一般化した

$$r(x; a, b, \gamma) := \frac{x^\gamma}{a} + \frac{b}{x^\gamma}, \quad (x > 0,\ a > 0,\ b > 0) \tag{2.1}$$

という形の式を，x に関する**相反関数**と呼ぶことにする．

関数 $r(x; a, b, \gamma)$ は，$x > 0$ において $x \to +0$ と $x \to +\infty$ で $+\infty$ に発散する，x に関する凸関数である．(2.1) に関して，各パラメータ a, b, γ を動かしたときの $r(x)$ の振舞い（動特性）を直感的に把握するためのグラフの概形を図 1 に示す．以下で，この形に着目して新しい分布族を構成することを考える．また，特に混乱のない場合は，$r(x; a, b, \gamma)$ を簡単に $r(x)$ と書く．

定義 2.2. X を，正値をとる 1 次元連続型確率変数とする．X の確率密度関数がパラメータ $a > 0$, $b > 0$, $\gamma \neq 0$ を持ち，

$$p(x; a, b, \gamma) = f(x; a, b, \gamma) \cdot G(r(x; a, b, \gamma)), \quad (x > 0) \tag{2.2}$$

の形で表わされるとき，X の分布は**相反分布族**に属するという．ただし，ここで $G(\cdot) > 0$ は相反分布を生成する生成関数，すなわち相反関数の構造を含んでいるもので，$f(\cdot) > 0$ は条件

$$\int_0^\infty p(x; a, b, \gamma) = 1$$

を満たす規格化関数とする．

定義 2.3. 定義 2.2 で，生成関数が $G(r(x; a, b, \gamma)) = \exp(r(x; a, b, \gamma))$ と表わされる場合，すなわち生成関数が相反関数の定数倍を指数関数の肩に持つような表現で記述できる場合，X の分布は**指数相反分布族**に属するという．

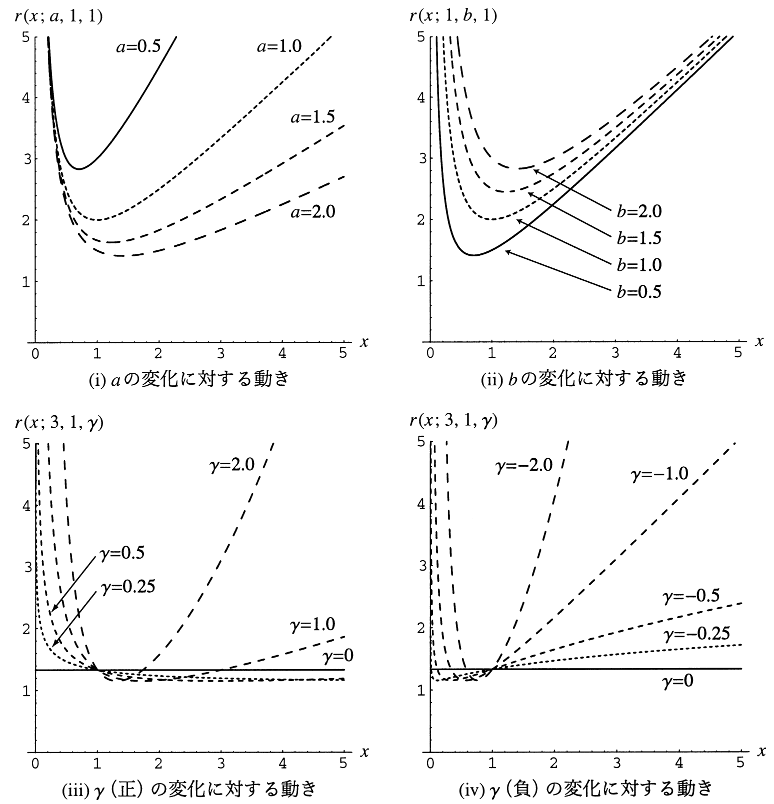

図 1. $r(x;a,b,\gamma)$ の動特性.

いくつかの分布の確率密度関数は，文献によっては $(x^\gamma/a-b/x^\gamma)^2$ という表現で記述されているのが見受けられる(Chhikara and Folks(1989), 岩瀬・平野(1990)など)が，これらは本論文における相反関数を用いた表現の一つの特殊な形である．実際この表現は，$(r(x;a,b,\gamma))^2-4b/a$ というように相反関数を含んだ形に書き直すことができる．本論文の確率密度関数の表記については，従来の習慣に倣っている部分も多少あるが，第 3 章の議論との関係も考慮して，(2.1) を相反関数の標準形として用いることにする．

3. 相反分布の密度関数に関連する等式

本章では，相反分布の密度関数について成り立つ，簡明だが興味深い等式を示す．いくつかの関連する式は森口 他 (1987)，Abramowitz and Stegun (1972)，Gradshteyn and Ryzhik (1965) に散見されるが，これらはそれぞれに特徴的なものであり，相反分布族に属する分布の分布間の関連を簡単に説明するために有用であるので，ここにまとめておく．実際にどのように適用されるかについては，第 4 章で述べる．

また，これらを用いることによって，密度関数となり得る多数の関数を新たに生成することもできる．第 4 章で示す新しい密度関数は，この章の等式から導出したものである．

なお，以下の積分の被積分関数は広義積分可能であると仮定する．各等式の証明の概略については付録に記載した．

等式 1. 条件 $x>0$, $a>0$, $b>0$, $\beta>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \left(\frac{a}{x^\gamma}\right)^\beta f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \left(\frac{x^\gamma}{b}\right)^\beta f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

この式は，相反関数によって表わすことのできる関数 f に，$(a/x^\gamma)^\beta$ を掛けたものと，その逆数に対応する $(x^\gamma/b)^\beta$ を掛けたものとを，それぞれ区間 $(0,\infty)$ で積分したときの値が等しくなるということを示している．

等式 2. 条件 $x>0$, $a>0$, $b>0$, $\beta>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \left(\frac{a}{x^\gamma}\right)^\beta f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\frac{a}{x^\gamma}\right)^\beta \left\{1+\left(\frac{x^{2\gamma}}{ab}\right)^\beta\right\} f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

等式 3. 条件 $x>0$, $a>0$, $b>0$, $\beta>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{a}{x^\gamma}\right)\left(\frac{a}{x^\gamma}\right)^\beta f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=\int_0^\infty \ln\left(\frac{x^\gamma}{b}\right)\left(\frac{x^\gamma}{b}\right)^\beta f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

相反関数を持つ関数 f と対数関数を含んだ積分の関係式である．

等式 4. 条件 $x>0$, $a>0$, $\beta>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{x^\gamma}{a}\right)\left\{\left(\frac{x^\gamma}{a}\right)^\beta+\left(\frac{a}{x^\gamma}\right)^\beta\right\} f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{a}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=0\,.$$

相反関数と対数関数が絡んだ一見複雑な積分の値が，実は 0 になってしまうということが分かる．

等式 5. 条件 $x>0$, $a>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{x^\gamma}{a}\right) f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{a}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=0\,.$$

等式 6. 条件 $x>0$, $a>0$, $\gamma\neq 0$ の下で

$$\int_0^\infty \ln x^\gamma f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{a}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}=\ln a\int_0^\infty f\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{a}{x^\gamma}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

等式 7. 条件 $x>0$ の下で

$$\int_0^\infty \ln x\cdot f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}=0\,.$$

等式 8. 条件 $x>0$ の下で

$$\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\tan^{-1}x\,\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty f\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}\,.$$

被積分関数に $\tan^{-1}$ を含む積分を，それを含まない積分の形で表わすことができる．

等式 9. 条件 $x>0,\ a>0,\ \beta>0$ の下で

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta+\left(\frac{a}{x}\right)^\beta\right\} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\tan^{-1}\frac{x}{a}\frac{dx}{x}\\
&\quad=\frac{\pi}{4}\int_0^\infty \left\{\left(\frac{x}{a}\right)^\beta+\left(\frac{a}{x}\right)^\beta\right\} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}\\
&\quad=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \left(\frac{x}{a}\right)^\beta f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \left(\frac{a}{x}\right)^\beta f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{dx}{x}\,.
\end{aligned}$$

被積分関数に $\tan^{-1}$ を含む積分を，それを含まない積分の形で表わすことができる．

等式 10. 条件 $x>0,\ a>0,\ b>0$, 偶関数 f の下で

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a}-\frac{b}{x}\right)dx=a\int_0^\infty f(x)dx\,.$$

x に関する相反関数に準ずる形によって表わされる偶関数 f の，区間 $(0,\infty)$ での積分は，相反関数のない形で簡単に表わすことができる．また，この式の右辺から，この積分の値が b の値に依存しないということが分かる．

等式 11. 条件 $x>0,\ a>0,\ b>0$, 偶関数 f の下で

$$\frac{1}{a}\int_0^\infty \left(\frac{a}{x}\right)^{\frac{3}{2}} f\left(\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x}{a}}\right)dx=2\int_0^\infty f(x)dx\,.$$

等式 12. 条件 $z>0,\ a>0,\ b>0,\ n=1,2,\dots$ の下で

$$I_n:=\int_0^\infty z^{-2n}\exp\left\{-k\left(\frac{z}{a}-\frac{b}{z}\right)^2\right\}dz=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^rk^ra^{n-1-r}b^{n+r}}\,.$$

等式 13. 条件 $z>0,\ a>0,\ b>0,\ n=0,1,2,\dots$ の下で

$$J_n:=\int_0^\infty z^{2n}\exp\left\{-k\left(\frac{z}{a}-\frac{b}{z}\right)^2\right\}dz=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^rk^r}\,.$$

等式 14. 条件 $k>0,\ a>0,\ b>0,\ \gamma\neq 0,\ n=1,2,\dots$ の下で

$$\begin{aligned}
I_n^*&:=\int_0^\infty x^{-(2n-1)\gamma-1}\exp\left\{-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right\}dx\\
&=\begin{cases}
\dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^rk^ra^{n-1-r}b^{n+r}} & (\gamma>0)\,,\\
-\dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^rk^ra^{n-1-r}b^{n+r}} & (\gamma<0)\,.
\end{cases}
\end{aligned}$$

等式 15. 条件 $k>0,\ a>0,\ b>0,\ \gamma\neq 0,\ n=1,2,\dots$ の下で

$$\int_0^\infty x^{-(2n-1)\gamma-1}\left\{-(2n-1)-2k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\right\}\cdot\exp\left\{-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right\}\ln x\,dx$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\gamma^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^r k^r a^{n-1-r}b^{n+r}} & (\gamma>0)\,,\\ \dfrac{1}{2\gamma^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^r k^r a^{n-1-r}b^{n+r}} & (\gamma<0)\,.\end{cases}$$

等式 16. 条件 $x>0,\ k>0,\ a>0,\ b>0,\ \gamma\neq 0,\ n=0,1,2,\dots$ の下で

$$J_n^*:=\int_0^\infty x^{(2n+1)\gamma-1}\exp\left\{-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right\}dx$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^r k^r} & (\gamma>0)\,,\\ -\dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^r k^r} & (\gamma<0)\,.\end{cases}$$

等式 17. 条件 $x>0,\ k>0,\ a>0,\ b>0,\ \gamma\neq 0,\ n=0,1,2,\dots$ の下で

$$\int_0^\infty x^{(2n+1)\gamma-1}\left\{(2n+1)-2k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\right\}\cdot\exp\left\{-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right\}\ln x\,dx$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{1}{2\gamma^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^r k^r} & (\gamma>0)\,,\\ \dfrac{1}{2\gamma^2}\sqrt{\dfrac{\pi}{k}}\displaystyle\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^r k^r} & (\gamma<0)\,.\end{cases}$$

4. 相反分布族に含まれる分布

相反分布族はさまざまな分布を含んでいる．ここではまず，既存の分布を相反分布という独自の観点から整理し，列挙する．次いで，これまでに知られていないと思われる分布の密度関数を紹介する．また，それぞれの分布の概形を把握するために，各分布に含まれるパラメータを種々動かした場合の密度関数の動特性を図示する．

4.1 既存の分布

逆ガウス分布． ブラウン運動の初期通過時間分布として知られている分布である．(2.2) において，$G(r(x;\mu/\phi,\mu\phi,1))=\exp\{-(\phi x/\mu+\mu\phi/x)/2\}$ とおき，$f(x)=\sqrt{\mu\phi/(2\pi)}e^\phi x^{-3/2}$ とすることにより，以下のように逆ガウス分布の密度関数を得る．

$$p_{\mathrm{IG}}(x;\mu,\phi)=\sqrt{\frac{\mu\phi}{2\pi}}e^\phi x^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu/\phi}+\frac{\mu\phi}{x}\right)\right\}.$$

この密度関数の概形について，二つのパラメータ $\mu,\ \phi$ に関する動特性を図 2 に示す．

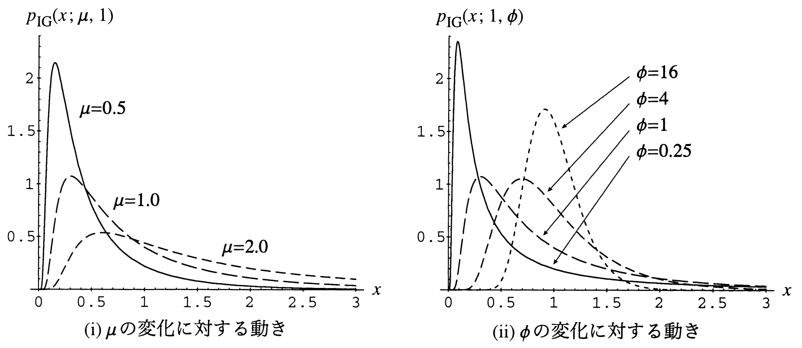

図 2. 逆ガウス分布の密度関数 $p_{\rm IG}(x;\mu,\phi)$ の動特性.

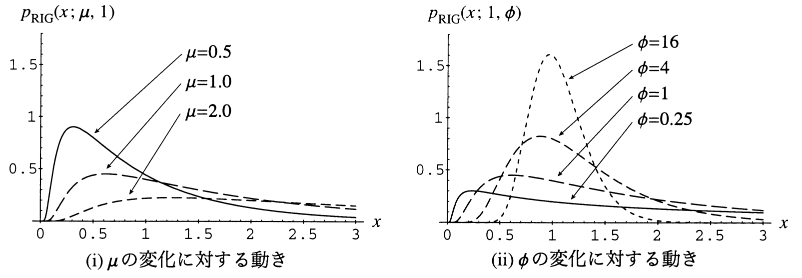

図 3. 逆数逆ガウス分布の密度関数 $p_{\rm RIG}(x;\mu,\phi)$ の動特性.

逆数逆ガウス分布． X を逆ガウス分布に従う確率変数としたとき，その逆数 $1/X$ の従う分布である．(2.2) において，$G(r(x;\mu/\phi,\mu\phi,1))=\exp\{-(\phi x/\mu+\mu\phi/x)/2\}$ とおき，$f(x)=\sqrt{\phi/(2\pi\mu)}e^{\phi}x^{-1/2}$ とすることにより，以下のように逆数逆ガウス分布の密度関数を得る．

$$p_{\rm RIG}(x;\mu,\phi)=\sqrt{\frac{\phi}{2\pi\mu}}e^{\phi}x^{-\frac{1}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu/\phi}+\frac{\mu\phi}{x}\right)\right\}.$$

この密度関数の概形について，二つのパラメータ μ,ϕ に関する動特性を図 3 に示す．

Birnbaum–Saunders 分布 (Birnbaum and Saunders (1969))．生存解析において知られている寿命分布の一つである．(2.2) において，$G(r(x;\mu/\phi,\mu\phi,1))=\exp\{-(\phi x/\mu+\mu\phi/x)/2\}$ とおき，$f(x)=\sqrt{\mu\phi/(2\pi)}(1+x/\mu)e^{\phi}x^{-3/2}/2$ とすることにより，以下のように Birnbaum–Saunders 分布の密度関数を得る．

$$p_{\rm BS}(x;\mu,\phi)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu\phi}{2\pi}}e^{\phi}\left(1+\frac{x}{\mu}\right)x^{-\frac{3}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mu/\phi}+\frac{\mu\phi}{x}\right)\right\}.$$

この密度関数の概形について，二つのパラメータ μ,ϕ に関する動特性を図 4 に示す．

ここに紹介した三つの既存の分布は，いずれも指数相反分布族に属する分布である．これらの密度関数は，既存の書籍などでは平均，分散などの統計的なパラメータを重視した別の表現で記述されることがほとんどだが，上記のように相反関数に基づく形で整理すると，分布全体の構造を比較し易くなる．この三つの分布を例にとれば，これらの生成関数は全く同じもので，規格化関数の部分のみが異なっているということが分かる．

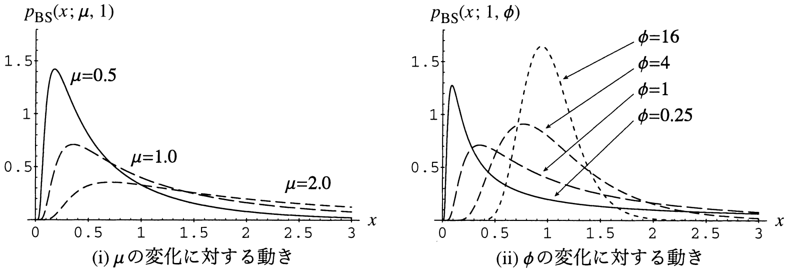

図 4. Birnbaum–Saunders 分布の密度関数 $p_{\mathrm{BS}}(x;\mu,\phi)$ の動特性.

規格化関数の違いについても，第 3 章で示した等式を用いることによって，分布間の関連性を把握することができる．例えば，逆ガウス分布と逆数逆ガウス分布については，等式 1 において $a=\mu/\phi$, $b=\mu\phi$, $\beta=-1/2$, $\gamma=1$, $f(w)=e^{-w/2}$ とし，定数 $e^{\phi}/\sqrt{2\pi}$ を掛けることによって，この等式の右辺の被積分関数は逆ガウス分布の密度関数となり，左辺の被積分関数は逆数逆ガウス分布の密度関数となる．逆数逆ガウス分布は，逆ガウス分布に従う確率変数の逆数の従う分布であるが，この等式の両辺の関係からも類推することができる．

また, 等式 1 とともに等式 2 を用いることによって, 逆ガウス分布と Birnbaum–Saunders 分布の関係も説明することができる．実際, 等式 2 において上述のように a, b, β, γ, f を定めれば, 左辺の被積分関数は逆数逆ガウス分布の密度関数となり, 右辺の被積分関数は Birnbaum–Saunders 分布の密度関数となる．等式 1 の両辺の被積分関数がそれぞれ逆ガウス分布と逆数逆ガウス分布の密度関数であったことを思い出せば，等式 2 から，Birnbaum–Saunders 分布は，逆ガウス分布と逆数逆ガウス分布の重み 1/2 の混合分布であることが分かる．

4.2　新しい分布

相反分布族，および指数相反分布族に属する未知の分布は数多く存在するが，ここではそのうちのいくつかを紹介する．

対数関数を含む密度関数．これは, 第 3 章の等式 17 で $n=0$ として得たものである．(2.2) において，$G(r(x;1,1/2,2\gamma))=\exp\{-(x^{2\gamma}+(1/2)/x^{2\gamma})\}$ とおき，$f(x)=(2\gamma^2/\sqrt{\pi})e^{\sqrt{2}}x^{-\gamma-1}(2x^{2\gamma}+1)(x^{\gamma}-1)(x^{\gamma}+1)\ln x$ とすれば，条件 $x>0$, $\gamma>0$ の下で

$$p_{\mathrm{Log}}(x;\gamma)=\frac{2\gamma^2}{\sqrt{\pi}}e^{\sqrt{2}}x^{-\gamma-1}(2x^{2\gamma}+1)(x^{\gamma}-1)(x^{\gamma}+1)\ln x\exp\left\{-\left(x^{2\gamma}+\frac{1/2}{x^{2\gamma}}\right)\right\}$$

は密度関数となる．

この密度関数は，$x=1$ を境に二つの山を持つ形をしている．パラメータ γ が大きくなるほど，二つの山は $x=1$ により近づく．この密度関数の概形について，パラメータ γ に関する動特性を図 5 に示す．

逆正接関数を含む密度関数．これは，第 3 章の等式 9 から導出したものである．(2.2) において，$G(r(x;a/\phi,a\phi,1))=\exp\{-(\phi x/a+a\phi/x)\}$ とおき，$f(x)=\sqrt{2\phi}/(\pi\sqrt{\pi})e^{\phi}(\sqrt{x/a}+\sqrt{a/x})\tan^{-1}(x/a)/x$ とすれば，条件 $x>0$, $a>0$, $\phi>0$ の下で

$$p_{\mathrm{arctan}}(x;a,\phi)=\frac{\sqrt{2\phi}}{\pi\sqrt{\pi}}e^{\phi}\left(\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{a}{x}}\right)\frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a/\phi}+\frac{a\phi}{x}\right)\right\}$$

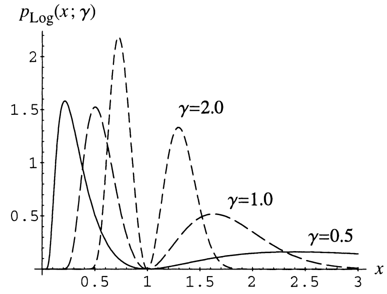

図 5. 対数関数を含む密度関数 $p_{\mathrm{Log}}(x;\gamma)$ の動特性.

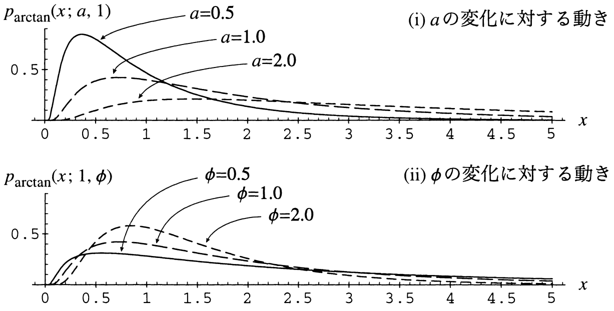

図 6. 逆正接関数を含む密度関数 $p_{\mathrm{arctan}}(x;a,\phi)$ の動特性.

は密度関数となる．この密度関数の概形について，二つのパラメータ a, ϕ に関する動特性を図 6 に示す．

次に，指数相反分布族ではない相反分布の例を挙げる．ここに挙げた三つの例はいずれも，第 3 章の等式 10 から導き出されたものである．

相反分布 1. 条件 $x>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$ の下で

$$g_1(x)=\frac{2}{a\pi}\frac{c}{(x^2/a^2+b^2/x^2)-2b/a+c^2}$$

は密度関数となる．この関数は，第 3 章の等式 10 に

$$\int_0^\infty f_1(x)dx := \int_0^\infty \frac{c}{x^2+c^2}dx=\frac{\pi}{2}\ (c>0)$$

を適用して得られたものである．この密度関数の概形について，三つのパラメータ a, b, c に関する動特性を図 7 に示す．

相反分布 2. 条件 $x>0$, $a>0$, $b>0$, $k>0$, $l>0$, $n=1,2,\dots$ の下で

$$g_2(x)=\frac{2\sqrt{kl^{2n-1}}\Gamma(n)}{a\sqrt{\pi}\Gamma(n-1/2)}\left\{k\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{x^2}\right)-\frac{2bk}{a}+l\right\}^{-n}$$

は密度関数となる．この関数は，第 3 章の等式 10 に

$$\int_0^\infty f_2(x)dx := \int_0^\infty \frac{1}{(kx^2+l)^n}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{kl^{2n-1}}}\frac{\Gamma(n-1/2)}{\Gamma(n)}\,,\quad (k>0,l>0)$$

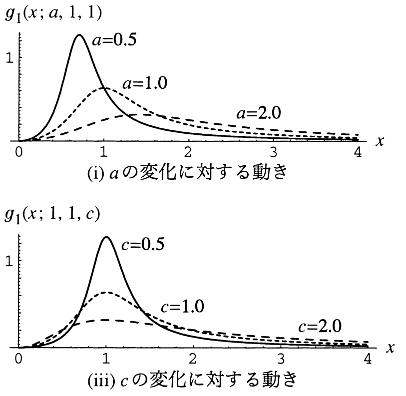

図 7.　相反分布 1 の密度関数 $g_1(x; a, b, c)$ に関する動特性.

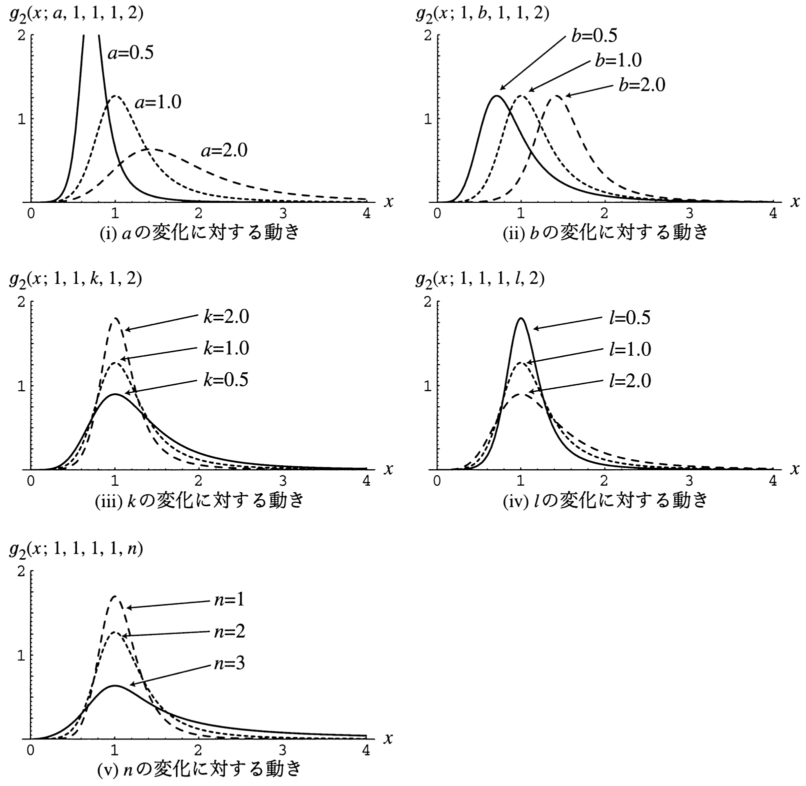

図 8.　相反分布 2 の密度関数 $g_2(x; a, b, k, l, n)$ に関する動特性.

を適用して得られたものである．また，相反分布 1 の一般形でもある．この密度関数の概形について，五つのパラメータ a, b, k, l, n に関する動特性を図 8 に示す．

相反分布 3. 条件 $x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ c > 1/(2n),\ n = 1, 2, \ldots$ の下で

$$g_3(x) = \frac{2n}{a}\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-1/(2n))\Gamma(1/(2n))}\left(\left\{\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{b^2}{x^2}\right)-\frac{2b}{a}\right\}^n+1\right)^{-c}$$

は密度関数となる．この関数は，第 3 章の等式 10 に

$$\int_0^\infty f_3(x)dx := \int_0^\infty \frac{1}{(x^{2\nu}+1)^\beta}dx = \frac{\Gamma(\beta-\frac{1}{2\nu})\Gamma(\frac{1}{2\nu})}{2\nu\Gamma(\beta)}, \quad (\beta,\ \nu > 0,\ 2\nu\beta > 1)$$

を適用して得られたものである．この密度関数の概形について，四つのパラメータ a, b, c, n に関する動特性を図 9 に示す．

この章で述べた分布の密度関数は，第 3 章の等式から導き出されたものである．この他にも，以下のような Bessel 関数を含む密度関数となり得る関数が存在する．

・等式 14 より，条件 $x > 0,\ k > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ \gamma > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots$ の下で

$$p_{J,n}(x) = \frac{\gamma(ab)^{n-1/2}}{K_{n-1/2}(2bk/a)}x^{-(2n-1)\gamma-1}\exp\left\{-k\left(\frac{x^{2\gamma}}{a^2}+\frac{b^2}{x^{2\gamma}}\right)\right\}$$

・等式 15 より，条件 $x > 0,\ a > 0,\ b > 0,\ \gamma \neq 0,\ n = 1, 2, \ldots$，および

$$\left\{(2n-1)+2k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\right\}\ln x > 0$$

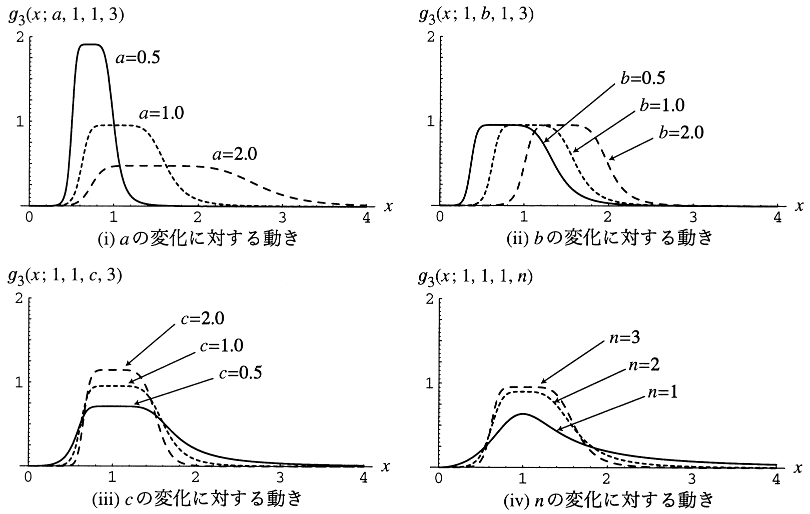

図 9． 相反分布 3 の密度関数 $g_3(x; a, b, c, n)$ に関する動特性.

の下で，

$$f_{I,n}(x)=\frac{\gamma^2 x^{-(2n-1)\gamma-1}}{e^{2kb/a}(ab)^{n-1/2}K_{n-1/2}(2bk/a)}$$
$$\cdot\left\{(2n-1)+2k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\right\}\exp\left\{-k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2\right\}\ln x$$
$$=2\gamma^2 e^{2kb/a}\sqrt{\frac{k}{\pi}}x^{-(2n-1)\gamma-1}\left\{(2n-1)+2k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)\left(\frac{x^\gamma}{a}+\frac{b}{x^\gamma}\right)\right\}$$
$$\cdot\exp\left\{-k\left(\frac{x^{2\gamma}}{a^2}+\frac{b^2}{x^{2\gamma}}\right)\right\}\ln x\Bigg/\sum_{r=1}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^r k^r a^{n-1-r}b^{n+r}}\,.$$

5. 確率の評価

この章では，統計学をはじめとして自然科学の理論の多くの分野でしばしば現われる不完全ガンマ関数比

$$\Gamma(p,x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_x^\infty e^{-t}t^{p-1}dt,\quad (p>0,\ x>0) \tag{5.1}$$

の値を両側から定量的に評価することのできる不等式を用いて，指数相反分布族に属する分布の確率の評価を行なう．これによって理論値との誤差の符号など，近似では分からない性質を把握できる．また，ここで用いる不等式は絶対収束級数に基づくもので，計算項数を増やすほど近似の精度を上げることができる．詳細については松縄・武井 (1999) を参照されたい．不等式は二種類あり，評価する x の値に応じて使い分ける．

x が比較的大きい場合の不完全ガンマ関数比の評価不等式． 条件 $0<p<1$, $x>1$, $n\geq 2$ の下で，

$$\Gamma(p,x)<\frac{x^pe^{-x}}{\Gamma(p)}\left[\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i\alpha_i(p)}{x(x+1)\cdots(x+i)}+\frac{2\Gamma(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\right], \tag{5.2}$$

$$\Gamma(p,x)>\frac{x^pe^{-x}}{\Gamma(p)}\left[\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{(-1)^i\alpha_i(p)}{x(x+1)\cdots(x+i)}-\frac{2\Gamma(n)}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\right] \tag{5.3}$$

となる．ただし

$$\alpha_i(p)=\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}d_{i-j,i-1}(j-p)(j-1-p)\cdots(1-p)$$

であり，$d_{i-j,i-1}$ は，以下の関係式をみたす第 1 種 Stirling 数の絶対値

$$d_{0,i-1}=1,$$
$$d_{j,i-1}=(i-1)d_{j-1,i-1}+d_{j,i-2},$$
$$(i=1,2,\dots;j=1,2,\dots)$$

を表わしている．

この不等式において，最初に挙げた p に関する条件 $0<p<1$ は，次のような変形によって $p>0, p\notin \boldsymbol{N}$ に緩めることができる．N を適当な正の整数とすれば，条件 $x>0$, $N\leq p<N+1$

の下で

$$\Gamma(p,x) = e^{-x}\sum_{i=1}^{N}\frac{x^{p-i}}{\Gamma(p-i+1)} + \begin{cases} 0\,, & \text{if } N=p,\\ \Gamma(p-N,x)\,, & \text{if } N<p \end{cases}$$

が成り立つので，右辺の末項に上で与えた不等式を適用することができるようになる．

x **が比較的小さい場合の不完全ガンマ関数比の評価不等式．** 条件 $x>0,\, p>0$ の下で，整数 m を $2m>x$ を満たすように取れば，

(5.4)
$$\Gamma(p,x) < 1 - \frac{x^p}{\Gamma(p)}\sum_{i=0}^{2m-1}\frac{(-1)^i}{i!(p+i)}x^i\,,$$

(5.5)
$$\Gamma(p,x) > 1 - \frac{x^p}{\Gamma(p)}\sum_{i=0}^{2m}\frac{(-1)^i}{i!(p+i)}x^i$$

が成り立つ．

この章の始めにも述べた通り，これら二種類の不等式は絶対収束級数に基づいて導出されたものであるため，計算する項数を多く取るほどより精密な評価を得ることができる．一例として，逆数逆ガウス分布について，計算項数を多く取った場合と少なく取った場合の，分布関数の確率評価の数値計算を行なった．

逆数逆ガウス分布の分布関数は，標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を用いて

(5.6)
$$\mathrm{cdf}_{\mathrm{RIG}}(x;\mu,\phi) = \Phi\left(\sqrt{\frac{\mu\phi}{x}}\left(\frac{x}{\mu}-1\right)\right) - e^{2\phi}\Phi\left(-\sqrt{\frac{\mu\phi}{x}}\left(\frac{x}{\mu}+1\right)\right)$$

のように表現できる．実際，この式を x で微分することで 4.1 節で示した逆数逆ガウス分布の密度関数を得る．ところでこの式はまた，以下のように不完全ガンマ関数比を用いて記述することもできる．

(5.7)
$$\mathrm{cdf}_{\mathrm{RIG}}(x;\mu,\phi) = \begin{cases} 1-\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\mu\phi}{2x}\left(\dfrac{x}{\mu}-1\right)^2\right) - e^{2\phi}\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\mu\phi}{2x}\left(\dfrac{x}{\mu}+1\right)^2\right) & (x\ge\mu)\,,\\ \dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\mu\phi}{2x}\left(\dfrac{x}{\mu}-1\right)^2\right) - e^{2\phi}\dfrac{1}{2}\Gamma\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\mu\phi}{2x}\left(\dfrac{x}{\mu}+1\right)^2\right) & (0<x<\mu)\,. \end{cases}$$

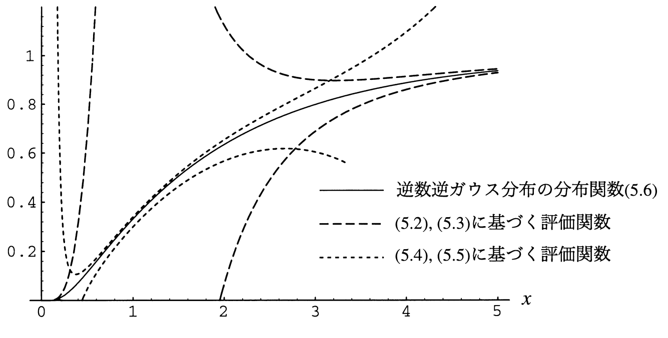

図 10. 計算項数が小さいときの逆数逆ガウス分布の分布関数の評価.

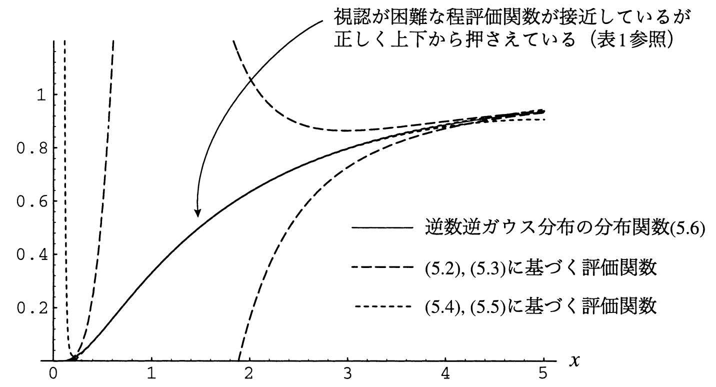

図 11.　計算項数が大きいときの逆数逆ガウス分布の分布関数の評価.

表 1.　計算項数が大きいときの逆数逆ガウス分布の分布関数の評価.

x	a	b	$F_{\mathrm{RIG}}(x)$	c	d
0.2	−0.02909	−0.00291	0.00988	0.00886	0.00299
0.4	−0.00055	−0.16205	0.07217	0.00011	0.17485
0.6	−0.00013	−0.86153	0.15919	0.00002	1.00700
0.8	−0.00008	−2.77716	0.24834	0.00001	3.69742
1.0	−0.00007	$-\infty$	0.33190	0.00001	∞
1.2	−0.00007	−4.73286	0.40762	0.00001	3.45506
1.4	−0.00009	−2.10508	0.47524	0.00002	1.68453
1.6	−0.00012	−1.19092	0.53521	0.00002	1.00545
1.8	−0.00016	−0.73462	0.58822	0.00003	0.64189
2.0	−0.00023	−0.47345	0.63502	0.00004	0.42355
2.2	−0.00033	−0.31352	0.67633	0.00006	0.28527
2.4	−0.00046	−0.21164	0.71279	0.00009	0.19504
2.6	−0.00066	−0.14500	0.74499	0.00014	0.13495
2.8	−0.00094	−0.10058	0.77344	0.00020	0.09434
3.0	−0.00133	−0.07050	0.79860	0.00030	0.06654
3.2	−0.00187	−0.04987	0.82086	0.00043	0.04732
3.4	−0.00260	−0.03558	0.84058	0.00063	0.03390
3.6	−0.00361	−0.02557	0.85806	0.00090	0.02446
3.8	−0.00497	−0.01850	0.87356	0.00127	0.01776
4.0	−0.00680	−0.01348	0.88731	0.00179	0.01297
4.2	−0.00922	−0.00988	0.89952	0.00251	0.00952
4.4	−0.01242	−0.00728	0.91038	0.00348	0.00703
4.6	−0.01661	−0.00539	0.92002	0.00478	0.00522
4.8	−0.02206	−0.00401	0.92861	0.00653	0.00389
5.0	−0.02909	−0.00300	0.93625	0.00886	0.00291

a.　(5.5) に基く評価関数の値と逆数逆ガウス分布の分布関数の値との差
b.　(5.3) に基く評価関数の値と逆数逆ガウス分布の分布関数の値との差
c.　(5.4) に基く評価関数の値と逆数逆ガウス分布の分布関数の値との差
d.　(5.2) に基く評価関数の値と逆数逆ガウス分布の分布関数の値との差

よって，不完全ガンマ関数比の部分の符号に注意しながら，上述の不等式を用いて評価式を作ることができる．逆数逆ガウス分布の分布関数は二つのパラメータ μ, ϕ を持つが，ここでは $\mu = \phi = 1$ として計算している．計算項数は

1. 不等式 (5.2), (5.3) に関して $n = 5$, 不等式 (5.4), (5.5) に関して $m = 3$
2. 不等式 (5.2), (5.3) に関して $n = 10$, 不等式 (5.4), (5.5) に関して $m = 5$

の二種類とした．1. の結果を図 10, 2. の結果を図 11 に示す．

図から分かるように，計算項数が増すほど厳密な評価が可能である．図 11 では，不完全ガンマ関数比のグラフと評価関数のグラフが見分けの付かないほどに接近している．それでも不等式なので，表 1 に見るように正しく上下から押えられている．

グラフや数表から分かるように，この不等式は，それほど項数を取らなくてもかなり良い評価を与える．逆数逆ガウス分布のように少々複雑な分布関数を持つものでも，適当に計算項数を増やすことによって十分な精度の評価を得ることができる．

もちろん，ここで取り上げた二つの分布関数以外の関数でも，不完全ガンマ関数比によって表現することが可能であるならば，この不等式を用いての精密評価が可能である．

6.　おわりに

相反分布族は，その密度関数の中の相反構造に特徴を持っている．この分布族の部分族である指数相反分布族の中に，近年注目されることの多くなった逆ガウス分布や Birnbaum–Saunders 分布などが含まれていることは，信頼性理論や水文学，環境科学，経済学等各方面で相反分布族の認識が高まり，今後いっそう活用されるであろう．この分布族に入るいくつかの新しいと思われる分布を 4.2 節で構築したが，図 5 から図 9 に見るように，それぞれ特徴的な形状をしており，それ自体非常に興味深い．今後それらが現実世界でのどのような現象と対応しているのかを検討することにより，相反分布族の genesis がより一層明確になると思われる．なお，我々の第一義的な興味は相反分布族に含まれる分布の密度関数の形を与えることにあった．このことに関して本論文では主として，第 3 章の諸公式を用いて初等的に分布を与えることに成功した．しかし指数相反分布族に関しては，対流拡散方程式の初期値境界値問題として，本論文とは異なった観点から捉えることも可能である．そのことについては，紙数の関係もあり別の機会に扱うことにする．

謝　辞

本稿を精読し貴重なコメントをして頂いた査読者に深く感謝します．

付　録

第 3 章の等式の証明．

等式 1. 変数変換 $x = (ab)^{1/\gamma}/y$ を行なって得る．

等式 2. 右辺は等式 1 の両辺の和を取ったものに 1/2 を掛けたものである．

等式 3. 等式 1 の両辺を β で微分して得る．

等式 4. 等式 3 で，$a = b$ と置いて移項して得る．

等式 5. 等式 4 で，$\beta = 0$ と置いて得る．

等式 6. 等式 5 の分数の対数関数を差に分解して得る．

等式 7. 等式 6 で $a = 1$ と置いて得る．

等式 8. $\tan^{-1} x$ の冪級数展開

$$\tan^{-1} x = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, & \text{for } |x| < 1, \\ \displaystyle\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}, & \text{for } x > 1, \\ \displaystyle -\frac{\pi}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}, & \text{for } x < -1 \end{cases}$$

より，

(A.1)
$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \tan^{-1} x \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{1} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{dx}{x} \\ &\quad + \int_1^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}\right) \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

となる．ここで $x := 1/y$ と置けば，$dx = -dy/y^2$ より

(A.2)
$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{0} f\left(\frac{1}{y} + y\right) \tan^{-1} \frac{1}{y} y \left(-\frac{dy}{y^2}\right) \\ &= \int_0^{\infty} f\left(\frac{1}{y} + y\right) \tan^{-1} \frac{1}{y} \frac{dy}{y} = \int_0^{\infty} f\left(\frac{1}{x} + x\right) \tan^{-1} \frac{1}{x} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{1} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}\right) \frac{dx}{x} \\ &\quad + \int_1^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

(A.1)+(A.2) より，

(A.3)
$$\begin{aligned} 2I &= \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \frac{dx}{x} \\ &\quad + \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left(\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}\right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \left\{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}}\right)\right\} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

等式 9. $\tan^{-1} y$ の冪級数展開

$$\tan^{-1} y = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}, & \text{for } 0 < y < 1, \\ \displaystyle\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)y^{2n+1}}, & \text{for } y > 1 \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} I &:= \int_0^{\infty} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta} + \left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} \right\} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \tan^{-1} \frac{x}{a} \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^{a} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta} + \left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} \right\} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1} \frac{dx}{x} \\ &\quad + \int_a^{\infty} \left\{ \left(\frac{x}{a}\right)^{\beta} + \left(\frac{a}{x}\right)^{\beta} \right\} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \\ &\qquad \cdot \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{a}{x}\right)^{2n+1} \right\} \frac{dx}{x} \end{aligned}$$

となる．ここで $y = x/a$ と置けば，$dy = dx/a$ より

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\infty} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(\frac{1}{y} + y\right) \tan^{-1} y \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^{1} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \frac{dy}{y} \\ &\quad + \int_1^{\infty} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)y^{2n+1}} \right\} \frac{dy}{y}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

また $y = a/x$ と置けば，$dx/x = -ady/y^2$ より

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{0} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(\frac{1}{y} + y\right) \tan^{-1} \frac{1}{y} \left(-\frac{dy}{y}\right) \\ &= \int_0^{\infty} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(\frac{1}{y} + y\right) \tan^{-1} \frac{1}{y} \frac{dy}{y} \\ &= \int_0^{1} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(\frac{1}{y} + y\right) \left\{ \frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)y^{2n+1}} \right\} \frac{dy}{y} \\ &\quad + \int_1^{\infty} \left(y^{\beta} + \frac{1}{y^{\beta}}\right) f\left(\frac{1}{y} + y\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \frac{dy}{y}. \end{aligned} \tag{A.5}$$

(A.4)+(A.5) より,

$$\text{(A.6)}\qquad 2I = \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \frac{dy}{y}$$
$$+ \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \left\{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)y^{2n+1}}\right\} \frac{dy}{y}$$
$$= \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \left\{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(y^{2n+1} - \frac{1}{y^{2n+1}}\right)\right\} \frac{dy}{y}$$
$$= \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \frac{\pi}{2} \frac{dy}{y}$$
$$+ \int_0^\infty f\left(y + \frac{1}{y}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(y^{\beta+2n+1} - \frac{1}{y^{\beta+2n+1}}\right) \frac{dy}{y}$$
$$+ \int_0^\infty f\left(y + \frac{1}{y}\right) \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \left(y^{\beta-2n+1} - \frac{1}{y^{\beta-2n+1}}\right) \frac{dy}{y}.$$

等式 1 から右辺の二項目と三項目は 0 になるので,

$$I = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \frac{\pi}{2} \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{4} \int_0^\infty \left(y^\beta + \frac{1}{y^\beta}\right) f\left(y + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y}$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty y^\beta f\left(y + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y} = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty y^{-\beta} f\left(y + \frac{1}{y}\right) \frac{dy}{y}$$

となる.

等式 10. 変数変換 $u = x/a - b/x$ を考える. $x^2 - aux - ab = 0$ $(x > 0)$ より, $x = (au + (a^2u^2 + 4ab)^{1/2})/2$, $dx = (a/2)(1 + au(a^2u^2 + 4ab)^{-1/2})du$ を得て,

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{x}\right) dx = \int_{-\infty}^\infty f(u) \frac{a}{2} \left(1 + \frac{au}{\sqrt{a^2u^2 + 4ab}}\right) du$$
$$= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du + \frac{a^2}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) \frac{u}{\sqrt{a^2u^2 + 4ab}} du$$
$$= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^\infty f(u) du$$

となる. f が偶関数であることから, 所望の等式を得る.

等式 11. 等式 10 の左辺で $x = a^{3/2}u^{-1/2}$ とおけば, $dx = -(a/u)^{3/2}du/2$ より

$$\int_0^\infty f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{x}\right) dx = a \int_0^\infty f(x) dx$$
$$\iff \int_\infty^0 f\left(\sqrt{\frac{a}{u}} - \frac{b}{a}\sqrt{\frac{u}{a}}\right) \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{u}\right)^{3/2}\right\} du = a \int_0^\infty f(x) dx$$
$$\iff \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(\frac{a}{u}\right)^{3/2} f\left(\sqrt{\frac{a}{u}} - \frac{b}{a}\sqrt{\frac{u}{a}}\right) du = a \int_0^\infty f(x) dx$$

となり, 所望の等式を得る.

等式 12. $z=\sqrt{b^2k/t}$ と置けば，$dz=-\sqrt{b^2k}\,t^{-3/2}/2$ より

$$
\begin{aligned}
k\left(\frac{z}{a}-\frac{b}{z}\right)^2 &= k\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2k}{t}}-b\sqrt{\frac{t}{b^2k}}\right)^2 \\
&= k\left(\frac{b^2k}{a^2t}-2\frac{b}{a}+\frac{t}{k}\right)=t+\frac{b^2k^2}{a^2}\frac{1}{t}-2k\frac{b}{a}\,.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{2}e^{2kb/a}\int_0^\infty \frac{t^n}{(b^2k)^n}\exp\left\{-\left(t+\left(\frac{bk}{a}\right)^2\frac{1}{t}\right)\right\}(b^2k)^{1/2}t^{-3/2}dt \\
&= e^{2kb/a}\frac{1}{2}\frac{1}{(b^2k)^{n-1/2}}\int_0^\infty \frac{1}{t^{-n+3/2}}\exp\left\{-\left(t+\frac{b^2k^2}{a^2t}\right)\right\}dt \\
&= e^{2kb/a}\frac{(bk/a)^{n-1/2}}{(b^2k)^{n-1/2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{bk}{a}\right)^{-(n-1/2)}\int_0^\infty \frac{1}{t^{-(n-1/2)+1}}\exp\left\{-\left(t+\frac{(2bk/a)^2}{4t}\right)\right\}dt \\
&= e^{2kb/a}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n-1/2}K_{-(n-1/2)}\left(\frac{2bk}{a}\right)
\end{aligned}
$$

と表わすことができる．ここで，$K_\nu(z)$ は第二種変形 Bessel 関数

$$
K_\nu(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty \exp\left\{-\tau-\frac{z^2}{4\tau}\right\}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}}\,,\quad \Re z^2>0
$$

である．$K_{-\nu}(z)=K_\nu(z)$ より

$$
I_n=e^{2kb/a}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n-1/2}K_{n-1/2}\left(\frac{2bk}{a}\right)
$$

となり，また整数 m に対しては

$$
K_{m+1/2}(z)=\left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\sum_{r=0}^{m}\frac{(m+r)!}{r!(m-r)!(2z)^r}
$$

となるので，

$$
\begin{aligned}
I_n &= e^{2kb/a}\frac{1}{(ab)^{n-1/2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2bk/a}\right)^{1/2}e^{-2kb/a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!(4kb/a)^r} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^rk^ra^{n-1-r}b^{n+r}}
\end{aligned}
$$

を得る．

等式 13.

$$J_n = \frac{1}{2}e^{2kb/a}\int_0^\infty \frac{(b^2k)^n}{t^n}\exp\left\{-\left(t+\left(\frac{bk}{a}\right)^2\frac{1}{t}\right)\right\}(b^2k)^{1/2}t^{-3/2}\,dt$$
$$= e^{2kb/a}\frac{(b^2k)^{n+1/2}}{(bk/a)^{n+1/2}}\frac{1}{2}\left(\frac{bk}{a}\right)^{n+1/2}\int_0^\infty \frac{1}{t^{(n+1/2)+1}}\exp\left\{-\left(t+\frac{(2bk/a)^2}{4t}\right)\right\}dt$$
$$(*)\qquad = e^{2kb/a}(ab)^{n+1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{2bk}{a}\right)$$
$$= e^{2kb/a}(ab)^{n+1/2}\left(\frac{\pi a}{4bk}\right)^{1/2}e^{-2kb/a}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!(4kb/a)^r}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}a^{n+1}b^n\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!4^rk^rb^ra^{-r}}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^rk^r}\,.$$

$(*)$ より，$J_n = I_{-n}$ が成り立つことがわかる．

等式 14. $\gamma > 0$ の場合のみ証明する．$x^\gamma = \sqrt{b^2k/t}$ とおけば

$$k\left(\frac{x^\gamma}{a}-\frac{b}{x^\gamma}\right)^2 = k\left(\frac{1}{a}\sqrt{\frac{b^2k}{t}}-b\sqrt{\frac{t}{b^2k}}\right)^2 = k\left(\frac{b^2k}{a^2t}-2\frac{b}{a}+\frac{t}{k}\right) = t+\left(\frac{b^2k^2}{a^2}\right)\frac{1}{t}-2k\frac{b}{a}$$

となり，$dx = -(b^2k)^{1/(2\gamma)}t^{-1/(2\gamma)-1}dt/(2\gamma)$ から，

$$I_n^* = e^{2kb/a}\int_0^\infty \left(\frac{t}{b^2k}\right)^{n-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\gamma}}\exp\left\{-\left(t+\left(\frac{bk}{a}\right)^2\frac{1}{t}\right)\right\}\frac{1}{2\gamma}(b^2k)^{\frac{1}{2\gamma}}t^{-\frac{1}{2\gamma}-1}dt$$
$$= e^{2kb/a}\frac{1}{2\gamma}\frac{1}{(b^2k)^{n-1/2}}\int_0^\infty \frac{1}{t^{-n+3/2}}\exp\left\{-\left(t+\frac{b^2k^2}{a^2t}\right)\right\}dt$$
$$= e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}\frac{(bk/a)^{n-1/2}}{(b^2k)^{n-1/2}}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{bk}{a}\right)^{-(n-1/2)}\int_0^\infty \frac{1}{t^{-(n-1/2)+1}}\exp\left\{-\left(t+\frac{(2bk/a)^2}{4t}\right)\right\}dt$$
$$= e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n-1/2}K_{-(n-1/2)}\left(\frac{2bk}{a}\right) = e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n-1/2}K_{n-1/2}\left(\frac{2bk}{a}\right).$$

ここで，$K_\nu(z)$ は，第二種変形 Bessel 関数

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\int_0^\infty \exp\left\{-\tau-\frac{z^2}{4\tau}\right\}\frac{d\tau}{\tau^{\nu+1}},\quad \Re z^2 > 0$$

である．$K_{-\nu}(z) = K_\nu(z)$ より

$$I_n = e^{2kb/a}\left(\frac{1}{ab}\right)^{n-1/2}K_{n-1/2}\left(\frac{2bk}{a}\right)$$

となり，また整数 m に対して

$$K_{m+1/2}(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2}e^{-z}\sum_{r=0}^{m}\frac{(m+r)!}{r!(m-r)!(2z)^r}$$

となるので，

$$I_n^* = e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma(ab)^{n-1/2}}\left(\frac{1}{2}\frac{\pi}{2bk/a}\right)^{1/2}e^{-2kb/a}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!(4kb/a)^r}$$
$$= \frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{(n-1+r)!}{r!(n-1-r)!4^r k^r a^{n-1-r}b^{n+r}}$$

を得る．

等式 15. 等式 14 の両辺を γ で偏微分する．

等式 16. $\gamma > 0$ の場合のみ証明する． $x^\gamma = \sqrt{b^2k/t}$ と置けば, $dx = -(b^2k)^{1/(2\gamma)}t^{-1/(2\gamma)-1}dt/(2\gamma)$ より

$$J_n^* = e^{2kb/a}\int_0^\infty\left(\frac{b^2k}{t}\right)^{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2\gamma}}\exp\left\{-\left(t+\left(\frac{bk}{a}\right)^2\frac{1}{t}\right)\right\}\frac{1}{2\gamma}(b^2k)^{\frac{1}{2\gamma}}t^{-\frac{1}{2\gamma}-1}dt$$
$$= e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}\frac{(b^2k)^{n+1/2}}{(bk/a)^{n+1/2}}\frac{1}{2}\left(\frac{bk}{a}\right)^{n+1/2}\int_0^\infty\frac{1}{t^{(n+1/2)+1}}\exp\left\{-\left(t+\frac{(2bk/a)^2}{4t}\right)\right\}dt$$
$$(*)\qquad = e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}(ab)^{n+1/2}K_{n+1/2}\left(\frac{2bk}{a}\right)$$
$$= e^{2kb/a}\frac{1}{\gamma}(ab)^{n+1/2}\left(\frac{\pi a}{4bk}\right)^{1/2}e^{-2kb/a}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!(4kb/a)^r}$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\frac{1}{\gamma}a^{n+1}b^n\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!}{r!(n-r)!4^rk^rb^ra^{-r}} = \frac{1}{2\gamma}\sqrt{\frac{\pi}{k}}\sum_{r=0}^{n}\frac{(n+r)!a^{n+1+r}b^{n-r}}{r!(n-r)!4^rk^r}.$$

$(*)$ より， $J_n^* = I_{-n}^*$.

等式 17. 等式 16 の両辺を γ で偏微分して得る．

参 考 文 献

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1972). *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover, New York.

Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969). A new family of life distributions, *J. Appl. Probab.*, **6**, 319–327.

Chhikara, R. S. and Folks, J. L. (1989). *The Inverse Gaussian Distribution, Theory, Methodology, and Applications*, Marcel Dekker, New York.

Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (1965). *Tables of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, New York.

岩瀬晃盛，平野勝臣 (1990). べき逆ガウス型分布とその応用，応用統計学，**19**(3)，163–176.

Jørgensen, B. (1982). *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution*, Lecture Notes in Statist., Vol. 9, Springer, New York.

Kullback, S. (1954). Certain inequalities in information theory and the Cramér-Rao inequality, *Ann. Math. Statist.*, **25**, 745–751.

松縄 規，武井智裕 (1999). 不完全ガンマ関数比の評価不等式，統計数理，**47**，119–142.

森口繁一，宇田川銈久，一松 信 (1987). 『岩波数学公式 I，II，III』，岩波書店，東京.

Seshadri, V. (1993). *The Inverse Gaussian Distribution, A Case Study in Exponential Families*, Oxford University Press, New York.

Watson, G. N. (1966). *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

Construction of a Family of Symmetric Reciprocal Distributions and Its Fundamental Properties

Tomohiro Takei

(Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

Tadashi Matsunawa

(The Institute of Statistical Mathematics)

A family of probability density functions with the part consisting of the sum of a main variable and its reciprocal is introduced as a family of symmetric reciprocal distributions. Various functional forms of the probability density functions in the family are given. Several interesting identities of the density functions which show characteristics of the family are shown. The family of probability distributions with reciprocal structures in exponential functions are introduced as a family of exponential reciprocal distributions. In this family there exist the inverse Gaussian distribution, the Birnbaum–Saunders distribution and other known important ones. Further, we see that the generalized inverse Gaussian distribution also belongs to the family. Some other symmetric reciprocal distributions which seem to be unknown are also derived. In addition, bounds for evaluating the probabilities of the reciprocal inverse Gaussian distribution are given based on the inequalities of incomplete gamma function ratio. Concerning those bounds some tables and figures are presented.

Key words: Symmetric reciprocal function, symmetric function in a wide sense, symmetric reciprocal arithmetic mean, symmetric reciprocal geometric mean, symmetric reciprocal family of distributions, generalized inverse Gaussian distribution.