

高次一般化 2 項係数の導出法と 2 変量非心 F 分布への応用

ソニー株式会社* 青 柳 俊 昭
新情報開発機構** 橋 口 博 樹
東京理科大学*** 仁 木 直 人

(受付 2000 年 8 月 15 日 ; 改訂 2000 年 10 月 30 日)

要 旨

一般化 2 項係数は、通常の 2 整数に対する 2 項係数を、2 つの分割に対するように拡張したものである。この係数間に成立する漸化式や係数自身の効率的な計算法は、特別な場合を除き、知られていない。本論文では、ゾーナル多項式の基本対称式展開を用いた高次 2 項係数の導出算法を提示する。その成果の多変量解析における応用例として、非心 F 行列の最大固有根分布を数値計算することにより、Roy の検定における帰無・対立両仮説の下での平均、分散、パーセント点、検出力等の値を実際に求める。

キーワード：基本対称式, 固有値分布, ゾーナル多項式, 多変量解析, 非心 F 行列, 分割.

1. はじめに

多変量解析においては、多変量正規母集団からの標本により構成される確率行列 (特にその固有根) の関数として定義される統計量がしばしば使われる。それらの統計量の精密分布は、ゾーナル多項式やその無限級数として定義される一般化超幾何関数、あるいは、一般化 2 項係数を含む一般化ラゲール多項式や一般化ラゲール展開によって表現される。ゾーナル多項式および一般化 2 項係数については Muirhead (1981) などが詳しい。

次数 $k \geq 0$ 、長さ p 以下の分割全体の集合を

$$\Pi_p^k = \{ \kappa = (k_1, \dots, k_p) \mid k_1 + \dots + k_p = k, k_1 \geq \dots \geq k_p \geq 0 \}$$

で表し、 $\kappa = (k_1, \dots, k_p)$ 、 $\lambda = (l_1, \dots, l_p) \in \Pi_p^k$ に対して、

$$k_1 > l_1 \vee \exists i (k_i = l_i, \dots, k_{i-1} = l_{i-1}, k_i > l_i) \Leftrightarrow \kappa \succ \lambda$$

で Π_p^k 上の全順序 \succ を定義する (辞書式順序と呼ばれる)。また、分割 κ の次数を $\deg(\kappa)$ で、 κ の非零要素数を $\ell(\kappa)$ で表す。なお、 $p = 2$ の場合、明らかに

$$(1.1) \quad \#\Pi_2^k = \lfloor k/2 \rfloor + 1$$

* コーポレート IS ソリューションズ ネットワーク技術部：〒141-0001 東京都品川区北品川 4-7-35.

** つくば研究センター：〒305-0032 茨城県つくば市竹園 1-6-1 つくば三井ビル 13F.

*** 工学部：〒162-8601 東京都新宿区神楽坂 1-3.

である。ただし、 $[\]$ はガウス記号である。

$p \times p$ 対称行列 Y および $\kappa \in \Pi_p^k$ に対するゾーナル多項式を $C_\kappa(Y)$ と書くとき、 p 変量 2 項係数 $\binom{\kappa}{\sigma}$ ($\kappa \in \Pi_p^k, \sigma \in \Pi_p^s, s \leq k$) は

$$(1.2) \quad \frac{C_\kappa(I+Y)}{C_\kappa(I)} = \sum_{s=0}^k \sum_{\sigma \in \Pi_p^s} \binom{\kappa}{\sigma} \frac{C_\sigma(Y)}{C_\sigma(I)}$$

で定義される。ここに、 I は p 次単位行列であり、

$$(1.3) \quad C_\kappa(I) = 2^{2k} \left[\frac{1}{2} p \right]_\kappa \frac{\prod_{i < j}^{\ell(\kappa)} [2k_i - 2k_j - i + j]}{\prod_{i=1}^{\ell(\kappa)} [2k_i + \ell(\kappa) - i]}$$

であることが知られている (James (1968) など) ただし、

$$[a]_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \text{ のとき} \\ a(a-1) \cdots (a-j+1), & j \geq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

と書けば

$$\left[\frac{1}{2} p \right]_\kappa = \prod_{i=1}^{\ell(\kappa)} \left[\frac{1}{2} (p - i + 1) \right]_{k_i}$$

である。また、次数 $k = 0$ のとき、任意の Y について $C_{(0 \dots 0)}(Y) = 1$ と規定する。以後、混乱の恐れがない場合、“一般化 2 項係数”を単に“2 項係数”と呼ぶ。

ゾーナル多項式については、Hashiguchi et al. (2000), Hashiguchi and Niki (1997) によって、その基本対称式展開の係数が満たす漸化式が求められるとともに、その生成アルゴリズムが提案されている。さらに Hashiguchi et al. (1998) は、Hashiguchi and Niki (1997) のアルゴリズムを C 言語で実装し、3 変量 120 次までのゾーナル多項式の数値計算を行ない、それによるウィシャート行列の最大固有根の分布関数近似を得ている。

一方、Constantine (1966) によって導入された一般化 2 項係数は、通常の 2 整数に対する 2 項係数を 2 つの分割に拡張したものであり、Bingham (1974), Muirhead (1981), Richards (1982) らによって理論的な考察がなされている。しかし、実際の係数値は Pillai and Jouris (1969) によって次数 8 までの数表が与えられているにすぎず、特別な場合を除き、一般的な漸化式や効率のよい計算方法が未だ知られていない。

本論文では、高次の 2 項係数の導出方法を議論し、また、最も基本的な 2 変量の場合について実際にこの係数を含む分布関数の計算を行なう。

まず、Hashiguchi et al. (2000) が提案したゾーナル多項式と基本対称式の基底変換算法を発展させることにより、高次 2 項係数導出の裏付けとなる方法論を展開する。次に、具体的に 2 変量の場合の計算アルゴリズムを作成して、30 次までの 2 変量 2 項係数を全て求める。さらに、その応用例として、 F 統計量を 2 変量に拡張した“ 2×2 非心 F 行列”の最大固有根の分布関数値計算等を行う。この分布は、Khatri (1972) が一般化ラゲール多項式を用いて求めたものであるが、実際の数値計算には、ゾーナル多項式と一般化 2 項係数を必要とする。また、その結果をもとに、 F 行列の最大固有根を用いた Roy の検定について議論する。

2. 一般化 2 項係数の計算法

2.1 ゾーナル多項式の基本対称式展開

対称行列 Y ($p \times p$), 分割 $\kappa = (k_1, \dots, k_p) \in \Pi_p^k$ の組に対応する基本対称式 $\mathcal{E}_\kappa(Y)$ を, Y の固有根 y_1, \dots, y_p の基本対称式

$$e_1 = y_1 + \dots + y_p, \quad e_2 = y_1 y_2 + \dots + y_{p-1} y_p, \quad \dots, \quad e_p = y_1 y_2 \dots y_p$$

の積として,

$$\mathcal{E}_\kappa(Y) = \mathcal{E}_\kappa(y_1, \dots, y_p) = e_1^{k_1 - k_2} \dots e_{p-1}^{k_{p-1} - k_p} e_p^{k_p}$$

で定義する.

対称式の基本定理により, $\{\mathcal{E}_\kappa(Y) \mid \kappa \in \Pi_p^k\}$ は y_1, \dots, y_p の k 次対称多項式が作るベクトル空間の基底を成す. したがって, ゾーナル多項式 $C_\kappa(Y)$ ($\kappa \in \Pi_p^k$) は, y_1, \dots, y_p の k 次の同次対称多項式であるから, $\{\mathcal{E}_\lambda(Y) \mid \lambda \in \Pi_p^k\}$ の要素の一次結合で一意に表現される. その結果は, “ゾーナル多項式の基本対称式展開” と呼ばれ, 次の補題で与えられる.

補題 1. (Hashiguchi et al. (2000)) ゾーナル多項式の基本対称式展開について

$$C_\kappa(Y) = \sum_{\lambda \leq \kappa} q[\kappa, \lambda] \mathcal{E}_\lambda(Y)$$

が成り立つ. ここに, 展開の係数 $q[\kappa, \lambda]$ は,

$$p_j = \sum_{i=1}^p y_i^j = \det \begin{bmatrix} e_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 2e_2 & e_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j e_j & e_{j-1} & e_{j-2} & \dots & e_1 \end{bmatrix}$$

として,

$$D_p = \sum_{s=1}^p \sum_{t=1}^p \left(\sum_{h=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} (-1)^{s+t-h-j} e_h e_j p_{s+t-h-j} \right) \frac{\partial^2}{\partial e_s \partial e_t} \\ + \sum_{i=1}^p \left(p \ i - \frac{i(i+1)}{2} \right) e_i \frac{\partial}{\partial e_i},$$

$$d(\kappa) = \sum_{i=1}^p k_i (k_i + p - i - 1)$$

と書くとき,

$$D_p \mathcal{E}_\kappa(Y) = d(\kappa) \mathcal{E}_\kappa(Y) + \sum_{\lambda \leq \kappa} b[\kappa, \lambda] \mathcal{E}_\lambda(Y)$$

により定まる $b[\kappa, \lambda]$ を用いた漸化式

$$(2.1) \ q[\kappa, \lambda] = \begin{cases} \frac{2^k k!}{\prod_{i=1}^p (2k_i - i + p)!!} \prod_{1 \leq i < j \leq p} \frac{(2k_i - 2k_j - i + j)!!}{(2k_i - 2k_j - i + j - 1)!!}, & \lambda = \kappa \text{ のとき;} \\ \frac{1}{d(\kappa) - d(\lambda)} \sum_{\lambda \leq \mu < \kappa} b[\mu, \lambda] q[\kappa, \mu], & \lambda < \kappa \text{ かつ } d(\kappa) \neq d(\lambda) \text{ のとき;} \\ 0, & \text{それ以外;} \end{cases}$$

を満たす.

漸化式 (2.1) の初期値である $q[\kappa, \kappa]$ は明らかに正の値をもつので, 補題 1 から, 次の系が直ちに得られる.

系 1. 次数 k , 行列 Y のゾーナル多項式を辞書式で降順に並べたベクトル, および基本対称基底を同じ順序で並べたベクトルを, それぞれ

$$C_k(Y) = \begin{bmatrix} C_{(k,0,\dots,0)}(Y) \\ C_{(k-1,1,0,\dots,0)}(Y) \\ \vdots \\ C_{(k-(p-1)\lfloor k/p\rfloor, \lfloor k/p\rfloor, \dots, \lfloor k/p\rfloor)}(Y) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{E}_k(Y) = \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{(k,0,\dots,0)}(Y) \\ \mathcal{E}_{(k-1,1,0,\dots,0)}(Y) \\ \vdots \\ \mathcal{E}_{(k-(p-1)\lfloor k/p\rfloor, \lfloor k/p\rfloor, \dots, \lfloor k/p\rfloor)}(Y) \end{bmatrix}$$

と表すと,

$$(2.2) \quad C_k(Y) = Q_k \mathcal{E}_k(Y)$$

なる正方行列 Q_k が存在し, 正の対角要素をもつ上三角行列である. また, 上三角行列 Q_k^{-1} が存在し, ガウスの消去法で容易に計算できる.

2.2 2変量の場合の基本対称式展開

補題 1 で 2 変量, すなわち, $p = 2$ のときの結果は James (1968) がすでに求めている.

系 2. (James (1968)) ゾーナル多項式 $C_\kappa(Y)$ ($\kappa \in \Pi_2^k$) の基本対称式展開

$$(2.3) \quad C_\kappa(Y) = \sum_{\lambda \in \Pi_2^k} q[\kappa, \lambda] \mathcal{E}_\lambda(Y)$$

において, 係数 $q[\kappa, \lambda]$ は, 次の漸化式を満たす.

$$(2.4) \quad q[\kappa, \lambda] = \begin{cases} \frac{2^k k! (2k_1 - 2k_2 + 1)!!}{(2k_2)!! (2k_1 + 1)!! (2k_1 - 2k_2)!!}, & \lambda = \kappa \text{ のとき;} \\ \frac{2(l_1 - l_2 + 2)(l_1 - l_2 + 1)}{d(\lambda) - d(\kappa)} q[\kappa, (l_1 + 1, l_2 - 1)], & \lambda \prec \kappa \text{ のとき;} \\ 0, & \text{それ以外;} \end{cases}$$

ここに, $d(\lambda) = l_1^2 + l_2^2 - l_2$ であり, $\kappa \neq \lambda \Leftrightarrow d(\kappa) \neq d(\lambda)$ である.

系 2 を解いて得られる 2 変量ゾーナル多項式の明示的表現も James (1968) に示されている. 次の系は, それとは異なる 2 変量ゾーナル多項式の新しい表現を与える.

系 3. 任意の $\kappa = (k_1, k_2) \in \Pi_2^k$ に対して,

$$(2.5) \quad C_\kappa(Y) = \sum_{\substack{\lambda \in \Pi_2^k \\ \lambda \preceq \kappa}} \frac{(2k)! (2k_1 - 2k_2 + 1)!! \mathcal{E}_\lambda(Y)}{2^{l_1} k_2! (2k_1 + 1)!! (2k + 2k_1 - 2l_1 - 1)!! (l_1 - l_2)! (k_1 - l_1)!} \\ = \frac{(2k)! [2(k_1 - k_2) + 1]!!}{2^{k_1} k_2! (2k_1 + 1)!!} \sum_{i=0}^{\lfloor k/2 \rfloor - k_2} \frac{2^i \mathcal{E}_{(k_1-i, k_2+i)}(Y)}{i! [(k_1 - k_2) - 2i]! (2k + 2i - 1)!!}$$

が成り立つ.

なお, ゾーナル多項式を計算する場合, 全ての $\kappa \succeq \lambda$ について $q[\kappa, \lambda]$ を求める必要があり, 系 3 のような明示表現をそのまま用いるより, 系 2 の漸化式を用いて数値計算の方が効率的である.

2.3 一般化 2 項係数の算出法

$\mathcal{E}_k(I+Y)$ の各要素は, p 次対称行列 $I+Y$ の固有値 $1+y_1, \dots, 1+y_p$ の k 次対称多項式であるから, 高々 k 次の項から成る y_1, \dots, y_p の対称多項式である. したがって, 対称式の基本定理より, ある行列 V_k を用いて,

$$(2.6) \quad \mathcal{E}_k(I+Y) = V_k \begin{bmatrix} \mathcal{E}_0(Y) \\ \mathcal{E}_1(Y) \\ \vdots \\ \mathcal{E}_k(Y) \end{bmatrix}$$

のように表すことができる. 明らかに行列 V_k の要素は非負整数であり, この V_k を用いてゾーナル多項式の展開ができる.

命題 1. 2 つの行列 Q_k, V_k を (2.2), (2.6) で定義する. このとき, 次の展開公式が成立つ.

$$(2.7) \quad C_k(I+Y) = Q_k V_k \begin{bmatrix} Q_0^{-1} C_0(Y) \\ Q_1^{-1} C_1(Y) \\ \vdots \\ Q_k^{-1} C_k(Y) \end{bmatrix}$$

よって, 漸化式 (2.1) で $Q_0 = Q_1 = [1]$, Q_2, \dots, Q_k を求め, $Q_2^{-1}, \dots, Q_k^{-1}$ を計算することにより, 命題 1 を用いて $C_\kappa(I+Y)$ を $\{C_\sigma(Y) \mid \deg(\sigma) \leq \deg(\kappa)\}$ の要素の 1 次結合として書くことができるので, (1.2) における係数比較から一般化 2 項係数が得られる.

2.4 2 変量 2 項係数

2 変量, すなわち, $p = 2$ の場合は, V_k に対応する具体的な表現が得られる.

命題 2.

$$(2.8) \quad \mathcal{E}_{(k_1, k_2)}(I+Y) = \sum_{i=0}^{k_1-k_2} \sum_{j=0}^{k_2} \sum_{h=0}^j 2^{k_1-k_2-i} \binom{k_1-k_2}{i} \binom{k_2}{j} \binom{j}{h} \mathcal{E}_{(i+j, j-h)}(Y).$$

証明. $I+Y$ の固有値は $1+y_1, 1+y_2$ であるから,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(k_1, k_2)}(I+Y) &= [(y_1 + y_2) + 2]^{k_1-k_2} [y_1 y_2 + (y_1 + y_2) + 1]^{k_2} \\ &= \left[\sum_{i=0}^{k_1-k_2} \binom{k_1-k_2}{i} 2^{k_1-k_2-i} e_1^i \right] \left[\sum_{j=0}^{k_2} \binom{k_2}{k_2-j} \sum_{h=0}^j \binom{j}{h} e_1^h e_2^{j-h} \right] \end{aligned}$$

より (2.8) を得る. なお, $i+j = (i+h) + (j-h) \geq j-h$ は明らかである. \square

よって, 命題 1 および命題 2 から, $C_k(I+Y)$ の要素は次の系で与えられる.

系 4. $\kappa \in \Pi_2^k$ のとき,

$$(2.9) \quad C_\kappa(I+Y) = \sum_{\lambda \preceq \kappa} q[\kappa, \lambda] \left\{ \sum_{i=0}^{l_1-l_2} \sum_{j=0}^{l_2} \sum_{h=0}^j 2^{l_1-l_2-i} \binom{l_1-l_2}{i} \binom{l_2}{j} \binom{j}{h} \right. \\ \left. \times \sum_{\rho \preceq (i+j, j-h)} \bar{q}[(i+j, j-h), \rho] C_\rho(Y) \right\}.$$

ただし, $q[\kappa, \lambda]$ は (2.2) で定義された上三角行列 Q_κ の (κ, λ) 成分であり, $\bar{q}[\mu, \rho]$ は $Q_{\mu_1+\mu_2}^{-1}$ の (μ, ρ) 成分である.

系 4 により求められた 30 次以下の 2 変量 2 項係数は, 青柳 (2000) にすでに公開されている. ここでは, 紙面の制約上, $k = 9, 10$ に対する値のみを表 1, 表 2 に示す.

表 1. 次数 9 の 2 変量 2 項係数.

σ	κ				
	(9,0)	(8,1)	(7,2)	(6,3)	(5,4)
(9,0)	1				
(8,1)		1			
(7,2)			1		
(6,3)				1	
(5,4)					1
(8,0)	9	$\frac{16}{15}$			
(7,1)		$\frac{119}{15}$	$\frac{24}{11}$		
(6,2)			$\frac{75}{11}$	$\frac{24}{7}$	
(5,3)				$\frac{39}{7}$	$\frac{16}{3}$
(4,4)					$\frac{11}{3}$
(7,0)	36	$\frac{111}{13}$	$\frac{168}{143}$		
(6,1)		$\frac{357}{13}$	$\frac{590}{39}$	$\frac{80}{21}$	
(5,2)			$\frac{650}{33}$	$\frac{299}{15}$	$\frac{48}{5}$
(4,3)				$\frac{429}{35}$	$\frac{132}{5}$
(6,0)	84	$\frac{329}{11}$	$\frac{272}{33}$	$\frac{320}{231}$	
(5,1)		$\frac{595}{11}$	$\frac{3450}{77}$	$\frac{1248}{55}$	$\frac{256}{35}$
(4,2)			$\frac{650}{21}$	$\frac{143}{3}$	$\frac{352}{7}$
(3,3)				$\frac{429}{35}$	$\frac{132}{5}$
(5,0)	126	$\frac{539}{9}$	$\frac{521}{21}$	$\frac{176}{21}$	$\frac{128}{63}$
(4,1)		$\frac{595}{9}$	$\frac{220}{3}$	$\frac{169}{3}$	$\frac{352}{9}$
(3,2)			$\frac{195}{7}$	$\frac{429}{7}$	$\frac{594}{7}$
(4,0)	126	75	$\frac{291}{7}$	$\frac{744}{35}$	$\frac{384}{35}$
(3,1)		51	$\frac{500}{7}$	$\frac{533}{7}$	$\frac{528}{7}$
(2,2)			13	$\frac{143}{5}$	$\frac{198}{5}$
(3,0)	84	$\frac{301}{5}$	42	$\frac{147}{5}$	$\frac{112}{5}$
(2,1)		$\frac{119}{5}$	42	$\frac{273}{5}$	$\frac{308}{5}$
(2,0)	36	$\frac{91}{3}$	26	23	$\frac{64}{3}$
(1,1)		$\frac{17}{3}$	10	13	$\frac{44}{3}$
(1,0)	9	9	9	9	9
(0,0)	1	1	1	1	1

表 2. 次数 10 の 2 変量 2 項係数.

σ	κ					
	(10,0)	(9,1)	(8,2)	(7,3)	(6,4)	(5,5)
(10,0)	1					
(9,1)		1				
(8,2)			1			
(7,3)				1		
(6,4)					1	
(5,5)						1
(9,0)	10	$\frac{18}{17}$				
(8,1)		$\frac{152}{17}$	$\frac{28}{13}$			
(7,2)			$\frac{102}{13}$	$\frac{10}{3}$		
(6,3)				$\frac{20}{3}$	$\frac{24}{5}$	
(5,4)					$\frac{26}{5}$	10
(8,0)	45	$\frac{143}{15}$	$\frac{224}{195}$			
(7,1)		$\frac{532}{15}$	$\frac{2822}{165}$	$\frac{40}{11}$		
(6,2)			$\frac{3825}{143}$	$\frac{1755}{77}$	$\frac{288}{35}$	
(5,3)				$\frac{130}{7}$	$\frac{572}{21}$	$\frac{80}{3}$
(4,4)					$\frac{143}{15}$	$\frac{55}{3}$
(7,0)	120	$\frac{496}{13}$	$\frac{1316}{143}$	$\frac{560}{429}$		
(6,1)		$\frac{1064}{13}$	$\frac{2312}{39}$	$\frac{2300}{91}$	$\frac{128}{21}$	
(5,2)			$\frac{1700}{33}$	$\frac{728}{11}$	$\frac{728}{15}$	32
(4,3)				$\frac{572}{21}$	$\frac{2288}{35}$	88
(6,0)	210	$\frac{980}{11}$	$\frac{355}{11}$	$\frac{2120}{231}$	$\frac{128}{77}$	
(5,1)		$\frac{1330}{11}$	$\frac{9010}{77}$	$\frac{5787}{77}$	$\frac{14144}{385}$	$\frac{128}{7}$
(4,2)			$\frac{425}{7}$	$\frac{2210}{21}$	$\frac{858}{7}$	$\frac{880}{7}$
(3,3)				$\frac{143}{7}$	$\frac{1716}{35}$	66
(5,0)	252	$\frac{1204}{9}$	$\frac{4078}{63}$	$\frac{194}{7}$	$\frac{640}{63}$	$\frac{256}{63}$
(4,1)		$\frac{1064}{9}$	$\frac{1292}{9}$	124	$\frac{4264}{45}$	$\frac{704}{9}$
(3,2)			$\frac{306}{7}$	$\frac{702}{7}$	$\frac{5148}{35}$	$\frac{1188}{7}$
(4,0)	210	134	$\frac{569}{7}$	$\frac{327}{7}$	$\frac{928}{35}$	$\frac{128}{7}$
(3,1)		76	$\frac{782}{7}$	$\frac{870}{7}$	$\frac{884}{7}$	$\frac{880}{7}$
(2,2)			17	39	$\frac{286}{5}$	66
(3,0)	120	$\frac{448}{5}$	$\frac{328}{5}$	48	$\frac{184}{5}$	32
(2,1)		$\frac{152}{5}$	$\frac{272}{5}$	72	$\frac{416}{5}$	88
(2,0)	45	$\frac{116}{3}$	$\frac{101}{3}$	30	$\frac{83}{3}$	$\frac{80}{3}$
(1,1)		$\frac{19}{3}$	$\frac{34}{3}$	15	$\frac{52}{3}$	$\frac{55}{3}$
(1,0)	10	10	10	10	10	10
(0,0)	1	1	1	1	1	1

3. 2 変量分散分析への応用

分散共分散行列 Σ を共有する k 個の 2 次元正規母集団 $N_2(\mu_i, \Sigma)$ ($i = 1, \dots, k$) からの大きさ n の無作為標本をそれぞれ $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in})$ とし, 母平均に関する仮説 $\mu_1 = \dots = \mu_k$ に対する Roy の検定を考える.

群間 2 乗和行列 H と群内 2 乗和行列 E をそれぞれ

$$H = n \sum_{i=1}^k (\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})(\bar{x}_i - \bar{\bar{x}})', \quad E = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_i)(x_{ij} - \bar{x}_i)'$$

で定義すれば, H, E はそれぞれ 非心 Wishart 分布, (中心) Wishart 分布

$$H \sim W_2(k-1, \Sigma, \Omega), \quad E \sim W_2(k(n-1), \Sigma)$$

に従う. ただし, ' は転置を表し,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad \bar{\bar{x}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \bar{x}_i$$

である. また, 非心度行列 Ω は,

$$\Omega = \Sigma^{-1} M M', \quad M = (\mu_1 - \mu, \dots, \mu_k - \mu)$$

で与えられる.

Roy の検定では F 行列 HE^{-1} の最大固有根 η_1 を使った統計量

$$\theta = \frac{\eta_1}{1 + \eta_1}$$

を用いる. しかし, θ は η_1 の単調増加関数であるので, θ の代わりに η_1 の分布を考えても同等である.

最大固有根 η_1 の分布関数は, Khatri (1972) の結果より, 一般化 2 項係数およびゾーナル多項式を含む一般化ラゲール多項式 \mathcal{L} を用いて, 以下の命題 3 のように表現される.

命題 3. (Khatri (1972)) $H \sim W_2(n_1, \Sigma, \Omega)$, $E \sim W_2(n_2, \Sigma)$ とする. このとき, $t = \frac{1}{2}(n_2 - 3)$ が整数ならば, HE^{-1} の最大固有根 η_1 の分布関数は

$$(3.1) \quad F(x) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^{n_1} \exp \left[-\text{tr} \frac{1}{2(1+x)} \Omega \right] \\ \times \sum_{k=0}^{n_2-3} \frac{1}{(1+x)^k k!} \sum_{\kappa \leq (t, k-t)} \mathcal{L}_\kappa^r \left[-\frac{x}{2(1+x)} \Omega \right]$$

である. ただし, $r = \frac{1}{2}(n_1 - 3)$ であり,

$$[b]_\kappa = [b]_{k_1} \left[b - \frac{1}{2} \right]_{k_2} = \prod_{i=0}^{k_1-1} (b+i) \prod_{j=0}^{k_2-1} \left(b+j - \frac{1}{2} \right)$$

と書くことにすれば

$$(3.2) \quad \mathcal{L}_\kappa^r(\mathbf{X}) = \left[r + \frac{3}{2} \right]_\kappa C_\kappa(\mathbf{I}) \sum_{s=0}^{\deg(\kappa)} \sum_{\sigma \in \Pi_2^s} \binom{\kappa}{\sigma} \frac{C_\sigma(-\mathbf{X})}{\left[r + \frac{3}{2} \right]_\sigma C_\sigma(\mathbf{I})}$$

である.

なお, 安芸 (1984) は, 10 次までの 2 変量 2 項係数を必要とする $(n_1, n_2) = (5, 11)$ と $(n_1, n_2) = (5, 13)$ の場合に対し, (3.1) と同等な式の計算プログラムを与えている.

ここでは, 簡単な例として,

$$k = 3, \quad \mu_1 = (a, -a)', \quad \mu_2 = (-a, a)', \quad \mu_3 = (a, a)', \quad \Sigma = I$$

なる設定を考える. このとき,

$$(3.3) \quad H \sim W_2(2, I, \Omega), \quad E \sim W_2(3(n-1), I)$$

であり, 非心度行列 Ω は,

$$\begin{aligned} \Omega &= n \Sigma^{-1} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & -\frac{4}{3}a & \frac{2}{3}a \\ -\frac{4}{3}a & \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a & -\frac{4}{3}a \\ -\frac{4}{3}a & \frac{2}{3}a \\ \frac{2}{3}a & \frac{2}{3}a \end{pmatrix} \\ &= \frac{4}{3} a^2 n \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4a^2n & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}a^2n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と対角化できる. 最大固有根 η_1 の分布は座標軸の回転に対して不変であるから, 以降では

$$\Omega = \text{diag} \left(4a^2n, \frac{4}{3}a^2n \right)$$

として扱う.

パラメータ a, n により定まる η_1 の分布関数 $F_{a,n}(x)$ は, (3.1), (3.2) より, 有理式と有理式を引数に持つ指数関数の積である. したがって, その微分によって得られる密度関数も有理式と指数関数の積である. また, モーメントは有理式と指数関数の積および有理式と指数積分の積の極限計算により得ることができる. 一方, $100\alpha\%$ 点は, 方程式 $F_{a,n}(x) = \alpha$ を数値的に解くことにより得られる.

図 1 に $a = 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, n = 6, 8, 10$ に対する HE^{-1} の最大固有根 η_1 の密度関数を示す. これらの平均, 分散, パーセント点は表 3 に示す通りである. 表 4 は, 帰無仮説 $a = 0$ を有意水準上側 5% で片側検定する際の検出力 $1 - F_{a,n}(F_{0,n}^{-1}(0.95))$ を示す.

表 5~14 に上記の a, n の全ての組合せに対する分布関数 $F_{a,n}(x)$ を具体的に示す. 表 5 には帰無仮説 $a = 0$ の下での分布関数を掲げ, 表 6 以下に対立仮説 $a = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ の下における分布関数をそれぞれ与える. なお, ここでは, 最大 24 次の分割に対する 2 項係数を必要としている.

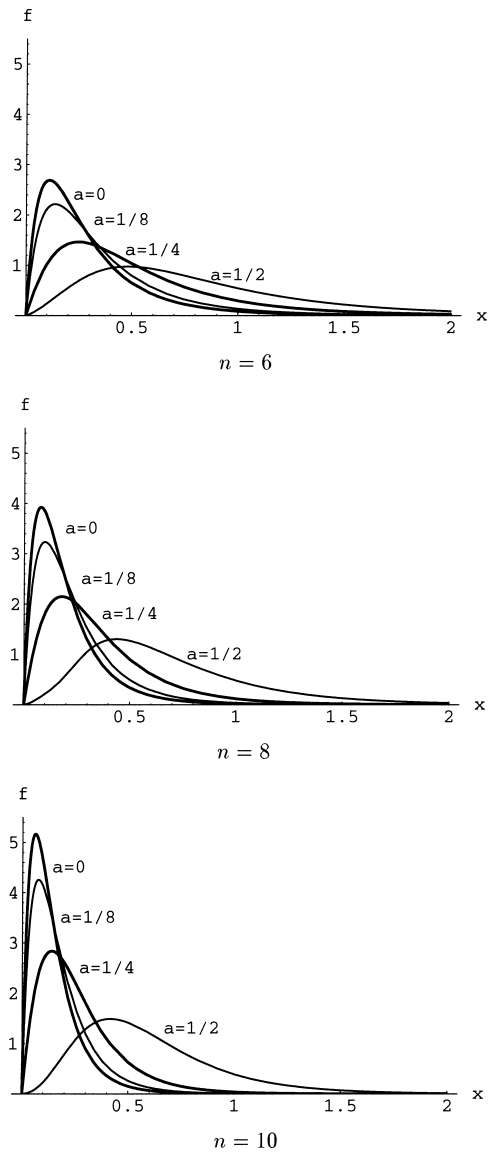


図 1. HE^{-1} の最大固有根の密度関数 .

表 3. HE^{-1} の最大固有根分布の平均, 分散, パーセント点.
 $n = 6$

	$a = 0$	$a = \frac{1}{8}$	$a = \frac{1}{4}$	$a = \frac{1}{2}$
Ω	diag(0, 0)	diag($\frac{3}{8}, \frac{1}{8}$)	diag($\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$)	diag(6, 2)
平均	0.302	0.365	0.545	0.867
分散	0.075	0.106	0.202	0.401
5%点	0.044	0.054	0.094	0.200
50%点	0.227	0.276	0.429	0.714
95%点	0.811	0.971	1.382	2.043

$n = 8$

	$a = 0$	$a = \frac{1}{8}$	$a = \frac{1}{4}$	$a = \frac{1}{2}$
Ω	diag(0, 0)	diag($\frac{1}{2}, \frac{1}{6}$)	diag($2, \frac{2}{3}$)	diag($8, \frac{8}{3}$)
平均	0.201	0.242	0.361	0.697
分散	0.028	0.040	0.075	0.186
5%点	0.024	0.038	0.066	0.205
50%点	0.156	0.189	0.294	0.600
95%点	0.521	0.624	0.882	1.509

$n = 10$

	$a = 0$	$a = \frac{1}{8}$	$a = \frac{1}{4}$	$a = \frac{1}{2}$
Ω	diag(0, 0)	diag($\frac{5}{8}, \frac{5}{24}$)	diag($\frac{5}{2}, \frac{5}{6}$)	diag($10, \frac{10}{3}$)
平均	0.150	0.181	0.270	0.604
分散	0.015	0.021	0.039	0.117
5%点	0.024	0.029	0.051	0.205
50%点	0.118	0.144	0.224	0.600
95%点	0.383	0.458	0.646	1.509

表 4. 棄却限界を上側 5%とした片側検定における
 検出力.

n	$a = \frac{1}{8}$	$a = \frac{1}{4}$	$a = \frac{1}{2}$
6	0.082	0.193	0.424
8	0.084	0.207	0.594
10	0.086	0.216	0.720

表 5. 帰無仮説の下での分布 ($a = 0$).

(a) $H \sim W_2(2, I), E \sim W_2(15, I)$.

(b) $H \sim W_2(2, I), E \sim W_2(21, I)$.

$$F_{0,6}(x) = \frac{x^2}{429(x+1)^{14}} \sum_{i=0}^{12} \alpha_i x^i$$

$$F_{0,8}(x) = \frac{x^2}{46189(x+1)^{20}} \sum_{i=0}^{18} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	15015
1	108108
2	374517
3	822250
4	1274975
5	1470280
6	1288287
7	858858
8	429429
9	156156
10	39039
11	6006
12	429

i	α_i
0	3233230
1	34918884
2	188312553
3	668816720
4	1747287880
5	3554111120
6	5807844266
7	7755414072
8	8533432740
9	7757904440

i	α_i
10	5818428330
11	3580571280
12	1790285640
13	716114256
14	223785705
15	52655460
16	8775910
17	923780
18	46189

(c) $H \sim W_2(2, I), E \sim W_2(27, I)$.

$$F_{0,10}(x) = \frac{x^2}{1300075(x+1)^{26}} \sum_{i=0}^{24} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	152108775
1	2190366360
2	16036610850
3	78719912700
4	289426782450
5	844539120600
6	2022554499105
7	4057137475650
8	6903543620925

i	α_i
9	10043984530800
10	12555629469900
11	13521551656392
12	12555734327500
13	10044587462000
14	6905653880125
15	4062149341250
16	2031074670625
17	855189335000

i	α_i
18	299316267250
19	85518933500
20	19436121250
21	3380195000
22	422524375
23	33801950
24	1300075

表 6. 対立仮説の下での分布 (1). $H \sim W_2(2, \mathbf{I}, \text{diag}(6, 2))$, $E \sim W_2(15, \mathbf{I})$ ($a = \frac{1}{2}$).

$$F_{\frac{1}{2}, 6}(x) = \frac{x^2}{675675(x+1)^{26}} \exp\left[\frac{4}{x+1}\right] \sum_{i=0}^{24} \alpha_i x^i$$

i	α_i	i	α_i	i	α_i
0	23648625	9	30722995525320	18	371146625850
1	681080400	10	38318305746525	19	91563331860
2	8933099175	11	39603097707222	20	17982414450
3	71077256250	12	34171337641404	21	2704501800
4	386065420650	13	24751695696420	22	292567275
5	1527898799700	14	15105626055897	23	20270250
6	4592213878070	15	7778789394950	24	675675
7	10786377196140	16	3375800890635		
8	20217648272325	17	1228476175920		

表 7. 対立仮説の下での分布 (2). $H \sim W_2(2, \mathbf{I}, \text{diag}(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}))$, $E \sim W_2(15, \mathbf{I})$ ($a = \frac{1}{4}$).

$$F_{\frac{1}{4}, 6}(x) = \frac{x^2}{743751379058688(x+1)^{26}} \exp\left[\frac{5}{3(x+1)}\right] \sum_{i=0}^{24} \alpha_i x^i$$

i	α_i	i	α_i
0	26031298267054080	13	11279127908303255856240
1	603926119795654656	14	7348530472909503500160
2	6561219717851774976	15	4076220023439956434560
3	44465437122147385344	16	1916720244531519375744
4	211340490858813947904	17	758068623465297629184
5	751054100287967723520	18	249142872956216279040
6	2077685141601517572096	19	66846024220858122240
7	4598879668860504416256	20	14268673174339584000
8	8307450904422681309312	21	2330994869954150400
9	12427245296486355482112	22	273741827014656000
10	15563989804325292716400	23	20577121487290368
11	16451761195683013668384	24	743751379058688
12	14760633434606206750489		

表 8. 対立仮説の下での分布 (3). $H \sim W_2(2, \mathbf{I}, \text{diag}(\frac{3}{8}, \frac{1}{8}))$, $E \sim W_2(15, \mathbf{I})$ ($a = \frac{1}{8}$).

$$F_{\frac{1}{8}, 6}(x) = \frac{x^2}{12478077536765485252608 (x + 1)^{26}} \exp \left[\frac{5}{12(x + 1)} \right] \sum_{i=0}^{24} \alpha_i x^i$$

i	α_i	i	α_i
0	436732713786791983841280	13	114353333891716846872962514240
1	8822000818493198073593856	14	77591603451056750260222556160
2	85094087287004300046237696	15	44974814936200692806073999360
3	521961756192124608681345024	16	22141168409958172133323014144
4	2287674498075714614527524864	17	9176071400635308160963313664
5	7631416664476243629881425920	18	3160841035818965112025251840
6	20153258043455479012336336896	19	888808543615068216848547840
7	43261737848987184122535346176	20	198807846540897914191872000
8	76907498351639248584687255552	21	34028907722339325994598400
9	114748482057694118225203003392	22	4186438340242934071296000
10	145072126926255479993673926400	23	329629214929554902089728
11	156426901235903691556186848384	24	12478077536765485252608
12	144424000573957761861742026169		

表 9. 対立仮説の下での分布 (4). $H \sim W_2(2, \mathbf{I}, \text{diag}(8, \frac{8}{3}))$, $E \sim W_2(21, \mathbf{I})$ ($a = \frac{1}{2}$).

$$F_{\frac{1}{2}, 8}(x) = \frac{x^2}{36534736806442875 (x + 1)^{28}} \exp \left[\frac{16}{3(x + 1)} \right] \sum_{i=0}^{36} \alpha_i x^i$$

i	α_i	i	α_i
0	2557431576451001250	19	10108904351443984958871536316
1	122756715669648060000	20	6893668098266310782422307946
2	2709817963670674481625	21	4210499627772205888486251360
3	36751151447531172902250	22	2303076148144175784470056380
4	345559836048476517570375	23	1126765408902601036596841800
5	2410461387899052014016000	24	491846784905461292317003140
6	3031260552032008001959250	25	190827005348262401568268560
7	56300886300130938254583900	26	65460619304785560653843220
8	198879504257864691489598650	27	19718013220049488895951400
9	584613875652654611197841400	28	5169622532193692473200300
10	1450298160178121240974045800	29	1166422680660789434282400
11	3071396187402232041562114800	30	223184842442699470207875
12	5605856094739939896892648320	31	35510112164270989094850
13	8889067584438136148212397280	32	4571724975896976022125
14	12329102794449971620830142935	33	457607952561765505500
15	15044663763886046395791489930	34	33413046517092367125
16	1623107549604076022557782875	35	1583171928279191250
17	15546244093599438070444325340	36	36534736806442875
18	13264609879645693687971879214		

表 10. 対立仮説の下での分布 (5). $H \sim W_2(2, I, \text{diag}(2, \frac{2}{3}))$, $E \sim W_2(21, I)$ ($a = \frac{1}{4}$).

$$F_{\frac{1}{4}, 8}^1(x) = \frac{x^2}{5021295992052468166950912(x+1)^{38}} \exp\left[\frac{5}{3(x+1)}\right] \sum_{i=0}^{36} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	351490719443672771686563840
1	12231877036639812454692421632
2	203189880628398157168272998400
3	2149211329048476249502796218368
4	16295743810726933247222574219264
5	94544550001017444026097655087104
6	437521018015090004905056654065664
7	1662121354334318742265912224645120
8	5294205238645912559703880510734336
9	14368595308848461950637500067217408
10	33650988693887297537769620878000128
11	68698339726069005754437559281254400
12	123258129456545693484475315666452480
13	195656569575435275428895798280388608
14	276260196337317051462544755674617344
15	348454287200167737862761901855217664
16	393921017680935899291627605487948784
17	400080609527570793648025236418453920
18	365619176942679078515687078975726045
19	300860516764703490067002889615894920
20	222905398461835106345384140233241320
21	148564878915024502808947925673452544
22	88925540538375818831127991407874560
23	47683356111832437930144832476291072
24	22827858167398784581070484075012096
25	9714370996187738214647268081401856
26	3654241498655500574379711964446720
27	1206611272937487945287543637934080
28	346639524834299441953504801849344
29	85667721570719506925428357988352
30	17947229532060255975272204992512
31	3125273755799074742286893973504
32	440203601087911328346726727680
33	48188230796519475632041623552
34	3846591690800637975227006976
35	199178074351414570622386176
36	5021295992052468166950912

表 11. 対立仮説の下での分布 (6) . $H \sim W_2(2, I, \text{diag}(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}))$, $E \sim W_2(21, I)$ ($a = \frac{1}{8}$).

$$F_{\frac{1}{8}, 8}(x) = \frac{x^2}{345060833110419627090163761237983232 (x+1)^{38}} \exp\left[\frac{5}{12(x+1)}\right] \sum_{i=0}^{36} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	24154258317729373896311463286658826240
1	731874027027200029058237337585762435072
2	10773567509218523176455855568599467950080
3	102705988846388209186061778404023423991808
4	713155129485128297522757945392125301489664
5	3846137257619101883710904923838415271624704
6	16776304490383418342987161144516100745068544
7	60848764800621278413407003618238423923425280
8	187251219514989733489812298421634907678703616
9	496343702639875470212959850794186763044651008
10	1146533657521006643748972046053239091760201728
11	2329139645548594830141737525535230910686822400
12	4191036893501254120782581696553253969204346880
13	6717457281295007536832429019611146274501296128
14	9632367678998869985726216349263317509155979264
15	12397257429919996083277899355054234170933510144
16	14354810223865076608049154132375506719171133184
17	1497631256502365373888811401413087195656120960
18	14088980476679063746807445882760992601053005805
19	11952297467455334544811470568057766497192952160
20	913821498391385906122238580558791700891479680
21	6288743128288709998773259086776126857392881664
22	3887920694030328650035263292336223712059719680
23	2153587226203142300682809457488272864976044032
24	1065082921542305451613014504740025556424196096
25	468220622037118389315807389674425042396512256
26	181943029129439795360627713761725347339960320
27	62056728176941369548379190765444625680302080
28	18414628168753825052520575206771048058978304
29	4700515230416368204561607182920988294643712
30	1017065993980133648712042487641070425341952
31	182912523392102430660246299957433565446144
32	26606816396722288853242820648706433351680
33	3007770044577405733764639192067061317632
34	247927406717729246576876725518106361856
35	13256087005325287340713791160892522496
36	345060833110419627090163761237983232

表 12. 対立仮説の下での分布 (7). $H \sim W_2(2, I, \text{diag}(10, \frac{10}{3}))$, $E \sim W_2(27, I)$ ($a = \frac{1}{2}$).

$$F_{\frac{1}{2}, 10}(x) = \frac{x^2}{3144566717772622116975 (x+1)^{50}} \exp \left[-\frac{20}{3(x+1)} \right] \sum_{i=0}^{48} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	367914305979396787686075
1	25901167140949533853099680
2	839678556726577975309672770
3	16773728073336121864607811180
4	233359468180792637294421130320
5	2422621216986833556416726083080
6	19628502837263328294739997979435
7	128108787026832771684344850720690
8	689629396686774511876447818939660
9	3118577733908351796135436214873040
10	12021745764220984119356204263697610
11	39981927431892125603083095398739276
12	115877723719834892817159180589571004
13	295168214661357214868357340744086016
14	665647562822325027674957313073701714
15	1337442292375829241867437678685535356
16	2407497356339673295502817941465415879
17	3901483040641349976854156208307973616
18	5716511688081701785909829902283436714
19	7601818339258754941302694823218930956
20	9205405901671420589646999248085519324
21	10180832906448073896077842652186009256
22	10309650802705245453040367659864269549
23	9579889259487408112938764669913224046
24	8182643803105390576982896331966270434
25	6433099823305768633795283761878507936
26	4659325068112722853156095071075686134
27	3110146872013621732203646624382654436
28	1913213437693467487360294741766980344
29	1083997088313888947580695235456648576
30	565094662206860678911814145568370229
31	270631854228130462104004577157957486
32	118830029300258143737995323555814919
33	47716595091730422494458731114858576
34	17469466040991317071564920545113104
35	5809825536236812453322462524637616
36	1747497608585395325341546542178500
37	472892847784696185527577050154000
38	114408814495548570145230519186750
39	24556864897436027694590939386500
40	4632286561618078506225131799750
41	758886757467962558096816154000
42	106343731234353611462202238500
43	12493051269806146548874365000
44	1196811481489162967226298500
45	89796402479960319277134000
46	4949198617472132476327875
47	178192114007115253295250
48	3144566717772622116975

表 13. 対立仮説の下での分布 (8) . $H \sim W_2(2, I, \text{diag}(\frac{5}{2}, \frac{5}{6}))$, $E \sim W_2(27, I)$ ($a = \frac{1}{4}$).

$$F_{\frac{1}{4}, 10}(x) = \frac{x^2}{221279210912538197304506965190246400 (x + 1)^{50}} \exp \left[\frac{5}{3(x + 1)} \right] \sum_{i=0}^{48} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	25889667676766969084627314927258828800
1	1201280580201987365526707412624809656320
2	26859112447130097948422395360261208801280
3	386185897534657048687338018968445879582720
4	4021321104681401004958280879377475520430080
5	32381756030248305894351032923764573308190720
6	210260342495293663244801239479046142102077440
7	1133367819620165828919351947159761861119836160
8	5181381993850555101166808134144172837453168640
9	20423093546688214510598343437840002351638773760
10	70314370211258740927361869707660360941819658240
11	213686933729158411023518664743558140667545780224
12	578196764023092562000776566260439392777515565056
13	1403003859614654146436324755505565557023901220864
14	3071458637884764984548954784328324614345474441216
15	6097269971256385722770495995674276118057822715904
16	11022603434415469943193168301439624195430201655296
17	18211400872454561202497423710783743347972432461824
18	27580477230324196463663330367398661238389787385856
19	38380781394723980409672412793787285483141683134464
20	49172572225048733368717875642447854371851863702016
21	58087323386067756891528609303040313866482259974144
22	63338370605171658674808874742109441985497383557536
23	63796526267114221799245535004693447324850455816384
24	59380113427545834035327482177444440161359414059121
25	51077448519595783727990976965149866556770562221024
26	40593801029862033894695257858128524893153990190016
27	29792184063261094196603515021668123315473363560704
28	20174318327028500487006297156711612529719170558976
29	12590996134155197867098754682064519702711808262144
30	7232007314056541324876770054821748034202948059136
31	3816092263266806853679021225824842071477487960064
32	1845859227779381426232252621441422658448001826816
33	816336717757154188349231732611216783513070075904
34	329068512474740276450772595740924045077382168576
35	120462088596023406836726964708757126625617772544
36	39871025729836065810960564442698673318526976000
37	11869455780282920848012572476098009475579904000
38	3158128015240986781012178079703578301169664000
39	745283571556444258441121740970685968154624000
40	154525394682767724823905131373556081360896000
41	27817358147037584664747581001845119647744000
42	4282181831599835823160958331491268427776000
43	552480615758583814841075256231752368128000
44	58110115934594695375093064767201345536000
45	4785702474800369705524378432431980544000
46	289445501163095103085256471966908416000
47	11432759230481140194066193201496064000
48	221279210912538197304506965190246400

表 14. 対立仮説の下での分布 (9) . $H \sim W_2(2, I, \text{diag}(\frac{5}{8}, \frac{5}{24}))$, $E \sim W_2(27, I)$ ($a = \frac{1}{8}$).

$$F_{\frac{1}{8}, 10}^i(x) = \frac{x^2(x+1)^{-50}}{62284560738159026095630107862389142728326145638400} \exp\left[\frac{5}{12(x+1)}\right] \sum_{i=0}^{48} \alpha_i x^i$$

i	α_i
0	7287293606364606053188722619899529699214159039692800
1	294406661697130084548824393843940999848252025203589120
2	582789052237796285763232235851546399735807739617607680
3	75370373268728022375601879620933089873891757558721413120
4	716419804521013585998917137873753718200111015450776698880
5	5338637636969510162460928756772695533119274775600661790720
6	32485737310944647056418535746052345471145642649084535767040
7	166013689211835022854522769128734690298941115213861051432960
8	727225702334163650401507966758758067579980740829696690749440
9	2773377741596643752395294272356754599388118532231399850639360
10	9320195139297574116726050074343349645803171489263669991178240
11	27868268469896028754774208624524138139605574453622046545936384
12	74722908494708682802943656505530184928277097482392528104718336
13	180810370050835202689630173987319111885784763692856601051398144
14	396907910548816436794584304656344851390973619971225741873381376
15	793817421022170938558926106172729356806884432380678744051810304
16	1451608410240368300023389199346532744716636292860568036899291136
17	2434048326592234289847455122479105082782629079208457654966943744
18	3751232585325973037450178932140835981865063742145642477100466176
19	5323444158481785696905929708037260057162127980826567111715323904
20	6966511555955782935779336066551992322550114776911223838087970816
21	8416164563146631569967881434654254758333345406914046589613768704
22	939334063895955207136681035806458254602751550749027314649135616
23	9690239707781942657242923812846219971310521627552481550470609664
24	9241417439291855120521589177067705045793042304733787406354178481
25	8147006441165094452952382273362683134896592102915138876846737024
26	6636907710861324348246307339940674934831451232841454333935533056
27	4993224061596423524846285360528763102647053613270978435041030624
28	3466300641475549337097397315877204598228323687415451770541572096
29	2217789394398524018713439479648813333233928822349004602012073984
30	1305898484774792078399536985237637444510713307330975563394318336
31	706404921178325705510244223294684122158714931727588862956929024
32	350275631307121839158969755027326226991702414661362049871773696
33	158799317423734445996030759709038310551418106701381668054237184
34	65618266943773107815327385613149018504546399246370880813531136
35	24622890947348064207976716380272506214491599279996813017350144
36	8353863625677861742079870484548325396218803044896194166784000
37	2549137219748622657007755602202650723318557316399335735296000
38	695209521173607843374701436299697834174749153276830154752000
39	168159832883031154254588852116585743911110009794043314176000
40	35736046724868694841129184290896598649897032903445970944000
41	6593555531001150562227214954362335465101562923708317696000
42	104029681541646194896800909222978924508962426269466624000
43	137558949439088312505247968360449805314628902002360320000
44	14828406217440994131614826103688998164946154384523264000
45	1251557095155731803764063146895901157659825422729216000
46	77575636665212963387614575836035755008209132191744000
47	3140179937215517565654684604728785945886443175936000
48	62284560738159026095630107862389142728326145638400

謝 辞

査読者の方々には、丁寧に見ていただき、かつ、的確な指摘をいただいた。ここに記して感謝する。

参 考 文 献

- 安芸重雄 (1984). 数式処理の多変量解析への応用, 統計数理研究所創立 40 周年シンポジウム「数式処理と統計解析の接点」報告集, 28–36.
- 青柳俊昭 (2000). 30 次以下の 2 変量二項係数表, URL=<http://nikilab.ms.kagu.sut.ac.jp/aoyagi>.
- Bingham, C. (1974). An identity involving partitioned generalized binomial coefficients, *J. Multivariate Anal.*, **4**, 210–223.
- Constantine, A. G. (1966). The distribution of Hotelling's generalized T_0^2 , *Ann. Math. Statist.*, **37**, 215–225.
- Hashiguchi, H. and Niki, N. (1997). Algebraic algorithm for calculating coefficients of zonal polynomials of order three, *J. Japanese Soc. Comput. Statist.*, **10**, 41–46.
- Hashiguchi, H., Yamamuro, M. and Niki, N. (1998). Algebraic and numerical calculation of generalized hypergeometric functions in three independent variables, *Proceedings of the 3rd Conference on Statistical Computing of the Asian Regional Section of the International Statistical Institute*, 49–56.
- Hashiguchi, H., Nakagawa, N. and Niki, N. (2000). Simplification of the Laplace-Beltrami operator, *Math. Comput. Simulation*, **51**, 489–496.
- James, A. T. (1968). Calculation of zonal polynomial coefficients by use of the Laplace-Beltrami operator, *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1711–1718.
- Khatri, C. G. (1972). On the exact finite series distribution of the smallest or the largest root of matrices in three situations, *J. Multivariate Anal.*, **2**, 201–207.
- Muirhead, R. J. (1981). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*, Wiley, New York.
- Pillai, K. C. S. and Jouris, G. M. (1969). On the moments of elementary symmetric functions of the roots of two matrices, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **21**, 309–320.
- Richards, D. St. P. (1982). Differential operators associated with zonal polynomials, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **34**, 111–117.

Computation of Generalized Binomial Coefficients with Application to Roy's Largest Root Test in Bivariate Case

Toshiaki Aoyagi

(Sony Corporation)

Hiroki Hashiguchi

(Real World Computing Partnership)

Naoto Niki

(Department of Management Science, Science University of Tokyo)

Generalized binomial coefficients for partitions of nonnegative integers are involved in a class of distribution functions, arisen in multivariate analysis, including those of the eigenroots of non-central F matrices. The coefficients of degree up to and equal to eight have been tabulated in Pillai and Jouris (1969). No efficient algorithm, however, had been available for obtaining them of higher degree, because of difficulties in computation of zonal polynomials.

Recently, an algorithm for expressing zonal polynomials of arbitrary order in terms of elementary symmetric polynomials has been proposed by Hashiguchi, the second author of this article, and his coworkers including the third author. Based upon their works, a procedure for furnishing the partitional generalized binomial coefficients as rational numbers is proposed in this article.

Let $\mathcal{C}_\kappa(\mathbf{Y})$ and $\mathcal{E}_\kappa(\mathbf{Y})$ denote the zonal polynomial and the elementary symmetric polynomial, respectively, identified with a partition κ of which length is not greater than p and a $p \times p$ symmetric matrix \mathbf{Y} of independent variables. For obtaining the p -variate binomial coefficients, it is required to expand $\mathcal{C}_\kappa(\mathbf{I} + \mathbf{Y})$ into a linear combination of the elements in $\{\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{Y}) \mid \deg(\sigma) \leq \deg(\kappa)\}$, where \mathbf{I} is the identity matrix. Expansion is realized by transforming $\mathcal{C}_\kappa(\mathbf{I} + \mathbf{Y})$, by using the results due to Hashiguchi et al. (2000), into a linear combination of the elements in $\{\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{I} + \mathbf{Y}) \mid \deg(\lambda) = \deg(\kappa), \lambda \preceq \kappa\}$ to expand them into a series in $\mathcal{E}_\mu(\mathbf{Y})$ for $\deg(\mu) \leq \deg(\lambda)$ which is reversely transformed into a series in $\mathcal{C}_\sigma(\mathbf{Y})$, where $\deg(\sigma) = \deg(\mu)$ and $\sigma \preceq \mu$. The ordering signified by the symbol \preceq between two partitions of the same degree is the lexicographic ordering.

The authors have already obtained all the bivariate binomial coefficients of degree 30 and those of less degrees, and which have been published via World Wide Web. The coefficients of degrees 9 and 10 are shown also in this article. For the sake of illustration, application of them to Roy's largest root test is discussed with numerical computation of relevant values, including the means, variances, quantiles for the distributions of the largest eigenroots of F matrices as well as the powers of the tests.

Key words: Distribution of eigenroots, elementary symmetric function, multivariate analysis, non-central F matrix, partition of nonnegative integer, zonal polynomial.