

質問項目のコウホート分析

—— 多項ロジット・コウホートモデル ——

統計数理研究所 中 村 隆

(受付 1999 年 12 月 24 日；改訂 2000 年 2 月 14 日)

要 旨

継続調査データから年齢・時代・コウホート効果を分離するコウホート分析において、択一多項選択法の質問項目を、個々の選択肢ごとに分析するのではなく、全選択肢を同時に分析するベイズ型多項ロジット・コウホートモデルを提案した。モデルの記述、パラメータの推定法、赤池のベイズ型情報量規準 (ABIC) の導出、モデル選択における注意点を述べ、選択肢数が 2 の場合に既存のベイズ型ロジット・コウホートモデルに一致することを示した。日本人の国民性調査のある質問項目について、個々の選択肢についてロジットモデルを適用した結果と、全選択肢を同時に扱う多項ロジットモデルを適用した結果を対比し、ベイズ型多項ロジット・コウホートモデルの必要性を示した。

キーワード：択一多項選択法、日本人の国民性調査、ベイズ型モデル、ABIC、宗教心は大切な。

1. はじめに

「日本人の国民性調査」をはじめとする社会調査や世論調査で用いられる質問項目の回答形式としては、2 つ以上の選択肢から 1 つを選んで回答してもらう方法——二項選択法、択一多項選択法、評定尺度法——が多くを占める（たとえ二項選択法であっても、実際には“その他”や“わからない”があるから、分析の段階では択一多項選択法と変わらないことになる）。これまでこのようなカテゴリカル・データをコウホート分析するには、選択肢ごとに 2 項分布に基づくベイズ型ロジット・コウホートモデルを適用してきた。

1 つの質問項目の選択肢を個別に分析したときの問題点は、年齢×調査時点別の各集計セルについて、モデルによる推定確率の全選択肢にわたる合計が 1 にならないことである。このため選択肢ごとの分析結果を 1 つの質問項目として総合するときに矛盾する結論になることがありうる。本論文では、このような問題点を解消するために、1 つの質問項目の選択肢を個別に分析するのではなく、同時に 1 つの質問項目として分析する多項分布に基づくベイズ型多項ロジット・コウホートモデルを提案する。

コウホート分析は、継続調査データの分析方法であり、同一調査項目について得られる年齢×調査時点別の集計データから年齢・時代・世代（コウホート）効果を分離することによって、社会の変化の要因を明らかにしようとする方法である。データの変動が主に年齢効果によるものであることがわかれば、世代を問わず社会の成員の意見や態度は加齢にともなって同じように変化するが、社会全体としての意見や態度の分布は長期間にわたって安定するということがい

える。これに対しデータの変動が主にコウホート効果によるものであることがわかれば、個々の成員の意見や態度は変わりにくいが、世代交代によって社会全体での分布はゆるやかに変化していくことが予測できる。またデータの変動が主に時代効果によるものであることがわかれば、年齢や世代を超えて社会の成員全体の意見がある一定の方向に変化しているので流動的であり、ある時点を境に逆の方向に転換する可能性もある。このように3つの要因を区別して明らかにすることが社会変化の機構を解明する上で重要であり、コウホート分析がそのための有力な方法であることが指摘されてきた(Ryder (1965), Glenn (1977), Mason and Fienberg (1985))。

コウホートモデルは、年齢・時代・コウホート効果を3つの説明要因とする一般化線形モデル(McCullagh and Nelder (1989))の応用であるとみられるが、数学的には3効果の間に1次従属の関係が存在するために何らかの制約条件がなければ3効果を一義に推定できないという識別問題を抱えている。この困難への対応方法としては、大きく2つに分かれ、何らかの制約条件を付加して3効果のパラメータを推定しようとするものと、3効果のパラメータそのものの推定は不可能とし統計学的に推定可能な(非線形)成分の推定に議論を限るものがある(関連文献は中村(1995)を参照)。華山(1999)は、時代効果とコウホート効果に特殊な構造を仮定した年齢・時代環境効果モデル(AEモデル)を提案している。このモデルは前者の立場にたつものであり、3効果の別の見方を提案しているが、特殊な制約をおくことにより識別問題を避けている。

コウホート分析の本来の目的が3効果の分離であることから、中村(1982)は前者の付加条件を課す立場にたち、パラメータの漸進的変化の条件を取り込んだベイズ型コウホートモデルを定式化、赤池のベイズ型情報量規準ABICにより最適なモデルを選択し、3効果のパラメータを推定する方法を提案した。この方法により識別問題を克服し、3効果の分離に成功した。つづいてNakamura(1986)は、パラメータの漸進的変化の条件の柔軟性を利用して、年齢区分幅と調査間隔が一致しない一般のコウホート表データの分析を可能にし、また回答比率以外のデータを分析するための数量型コウホートモデルを開発した。さらに中村(1989)は、年齢効果を拡張した年齢×時代の交互作用効果をもつモデルを提案し、中村(1995)は、複雑なサンプリングによるデータに対応するため、一般化線形モデルの枠組みに準拠した過大分散項をもつベイズ型コウホートモデルを提案し、日本人の国民性調査データに適用した。

以下、まず第2節では、コウホート分析が対象とするコウホート表とコウホートモデル、識別問題などについて簡単に説明し、これまで用いてきたベイズ型ロジット・コウホートモデルについて記述する。日本人の国民性調査のある質問項目の3選択肢個々についてこのモデルを用いて分析した結果を示し、その問題点について例示する。第3節では、多項分布を仮定するベイズ型多項ロジット・コウホートモデルについて説明し、ABICの導出やモデル選択における注意点を述べる。第4節では、第2節で選択肢ごとに分析したのと同じ質問項目をベイズ型多項ロジット・コウホートモデルを用いて分析した結果を示し、比較検討を行なう。付録に、ベイズ型コウホートモデルの場合についても、多項ロジットモデルがロジットモデルを特別な場合として含むことを示す。

2. ベイズ型ロジット・コウホートモデル

2.1 コウホート表

年齢区分×調査時点の形式に何らかの数量を集計・整理した表を、コウホート分析の立場からはコウホート表と呼ぶ。コウホート表には、形式上、調査間隔と年齢区分幅が一致する標準コウホート表と、調査間隔と年齢区分幅が一致しない一般コウホート表が区別できる。また、

集計された数量の性質上、回答比率の場合を特に比率型のコウホート表として区別する。以下では5年ごとに実施されている国民性調査を念頭に比率型の標準コウホート表に話を限るが、以下で述べるロジット・コウホートモデルを含むベイズ型コウホートモデルは、一般コウホート表の場合や回答比率以外の数量型データの場合へも容易に拡張できる (Nakamura (1986))。

標準コウホート表は次のようにして得られる。Y₁年からΔ年ごとにY_J年までJ回の調査が実施されているとし、各回の調査結果は調査間隔と同じΔ歳幅のA₁からA_IまでのI個の年齢区分について集計されているものとする。Y₁年の一番高齢であるA_I年齢区分が一番古いコウホート区分になるからこれをC₁とすると、同Y₁年のA_{I-1}年齢区分と次の調査時点Y₂年のA_I年齢区分がコウホート区分C₂に対応する。以下、一般に、Y_j年のA_i年齢区分を(i, j)セルと呼ぶことにすれば、このセルにはk = j - i + Iとしてコウホート区分C_kが対応する。最新のY_J年では一番若いA₁年齢区分が一番新しいコウホート区分C_Kとなる。結局、生まれ年がΔ年幅の合計K(= I + J - 1)個のコウホート区分が現れる。

2.2 コウホートモデルと識別問題

比率型のロジット・コウホートモデルは、(i, j)セルの、ある1つの選択肢の正反応確率(セル確率)をπ_{ij}(> 0)とすると、そのロジット変換η_{ij}を次のように年齢・時代・コウホートの3効果の線形和に分解するモデルである (APCモデル, Age-Period-Cohort model, と呼ぶ)。

$$(2.1) \quad \eta_{ij} \equiv \log [\pi_{ij}/(1 - \pi_{ij})] = \beta_0 + \beta_i^A + \beta_j^P + \beta_k^C, \\ i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K.$$

ここで、β₀は総平均効果、β_i^A, β_j^P, β_k^Cはそれぞれ年齢、時代、コウホート効果であり、次のゼロ和制約を満たすように基準化しておく。

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^I \beta_i^A = \sum_{j=1}^J \beta_j^P = \sum_{k=1}^K \beta_k^C = 0.$$

各セルと各効果を対応づけるデザイン行列をXとすると、(2.1)は(2.2)を考慮して、

$$(2.3) \quad \eta = \log \pi - \log (1 - \pi) = X\beta$$

と書くことができる。ここで、

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \eta &= (\eta_{11}, \eta_{21}, \dots, \eta_{IJ})', \\ \pi &= (\pi_{11}, \pi_{21}, \dots, \pi_{IJ})', \\ \beta &= (\beta_0, \beta_*')', \\ \beta_* &= (\beta_1^A, \dots, \beta_{I-1}^A, \beta_1^P, \dots, \beta_{J-1}^P, \beta_1^C, \dots, \beta_{K-1}^C)', \\ X &= (1 \quad X_*), \quad 1 = (1, \dots, 1)', \end{aligned}$$

であり、logはベクトルや行列の要素ごとに自然対数をとるものとする。デザイン行列X_{*}の例を付録Bに与えた。また、

$$(2.5) \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \beta} = X',$$

$$(2.6) \quad \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} = (\text{diag } \pi)(I - \text{diag } \pi)$$

に注意する。diagはベクトルを対角要素に配した対角行列を作る操作、Iは単位行列である。

デザイン行列X_{*}の各列ベクトルは、年齢・時代・コウホート間にあるk = j - i + Iという関係に起因して1次従属であり、何らかの付加条件を課さなければ3効果のパラメータを一義

に決定できないという問題——コウホート分析における識別問題——が存在する。ここでは識別問題そのものについてはこれ以上触れない（詳しくは中村（1995）を参照）。

2.3 対数尤度

各セルの観測度数が互いに独立な2項分布に従うと仮定し、 (i, j) セルの標本の大きさを m_{ij} 、ある選択肢の正反応観測度数を y_{ij} とする。同時確率関数を $f_B(\mathbf{y}|\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}))$ とすると、対数尤度の核 $\ell(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}))$ は、

$$(2.7) \quad \ell(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta})) = \mathbf{y}' \log \boldsymbol{\pi} + (\mathbf{m} - \mathbf{y})' \log (1 - \boldsymbol{\pi})$$

と書ける。ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_{11}, m_{21}, \dots, m_{IJ})', \\ \mathbf{y} &= (y_{11}, y_{21}, \dots, y_{IJ})' \end{aligned}$$

である。

通常は最尤法により $\boldsymbol{\beta}$ を推定すればよいが、コウホート分析では識別問題が存在するためこのままでは実行できない。

2.4 パラメータの漸進的变化の条件

コウホート分析における識別問題を克服するために、パラメータの漸進的变化の条件——各効果で隣り合うパラメータの値の変化を小さくするという条件——をモデルに付加する。具体的には、次のような各効果の1次階差の2乗和を小さくする。

$$(2.8) \quad \frac{1}{\sigma_A^2} \sum_{i=1}^{I-1} (\beta_i^A - \beta_{i+1}^A)^2 + \frac{1}{\sigma_P^2} \sum_{j=1}^{J-1} (\beta_j^P - \beta_{j+1}^P)^2 + \frac{1}{\sigma_C^2} \sum_{k=1}^{K-1} (\beta_k^C - \beta_{k+1}^C)^2 \longrightarrow \text{小}.$$

ここで、 σ_A^2 , σ_P^2 , σ_C^2 は3効果に対する適当な重み（の逆数）であり、超パラメータとも呼ばれる。上の条件（2.8）を正規分布の密度関数を用いて書き換えれば

$$(2.9) \quad \pi(\boldsymbol{\beta}_* | \sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2) = (2\pi)^{-\frac{M}{2}} |D_*' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} D_*|^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_*' D_*' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} D_* \boldsymbol{\beta}_* \right\}$$

となり、 $\boldsymbol{\beta}_*$ の事前密度と考えることができる。ここで、 D_* は3効果の1次階差を表現する行列である（例は付録Bを参照）。また、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は超パラメータを対角要素に並べた対角行列

$$(2.10) \quad \boldsymbol{\Sigma} = \text{diag} \{ \sigma_A^2, \dots, \sigma_A^2, \sigma_P^2, \dots, \sigma_P^2, \sigma_C^2, \dots, \sigma_C^2 \}$$

であり、 $M = I + J + K - 3$ とおいた。

2.5 ベイズ型モデルとABIC最小化法

パラメータの推定は事後密度 $f_B \cdot \pi$ のモードにより行なう。すなわち、

$$(2.11) \quad f_B(\mathbf{y}|\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta})) \cdot \pi(\boldsymbol{\beta}_* | \sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2) \longrightarrow \max$$

である。

$$\begin{aligned} (2.12) \quad \phi(\boldsymbol{\beta}) &= \ell(\boldsymbol{\beta}) + \log \pi(\boldsymbol{\beta}_* | \sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2) \\ &= \ell(\boldsymbol{\beta}) - \frac{M}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log |D_*' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} D_*| - \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta}_*' D_*' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} D_* \boldsymbol{\beta}_* \end{aligned}$$

とおけば、 $D = (\mathbf{0} \quad D_*)$ として

$$(2.13) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \beta} = X'(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) - D' \Sigma^{-1} D_* \beta_*,$$

$$(2.14) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta \partial \beta'} = -X' V X - D' \Sigma^{-1} D$$

であることに注意する。ここで、

$$(2.15) \quad V = (\text{diag } \mathbf{m})(\text{diag } \boldsymbol{\pi})(I - \text{diag } \boldsymbol{\pi})$$

である。

超パラメータ ($\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$) を固定すれば、最大化問題 (2.11) は、 $\partial \phi / \partial \beta = 0$ を適当な初期値から出発して Newton-Raphson 法を繰り返し適用して解く問題に帰着する。

未知である超パラメータ $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ は次の ABIC 最小化法により決定する (Akaike (1980))。

$$(2.16) \quad \text{ABIC} = -2 \log (\text{周辺尤度}) + 2h = -2 \log \int f_{B^*} \pi d\beta_* + 2h.$$

ここで、 h_* を超パラメータの数とすれば、 β_0 の分も入れて $h = h_* + 1$ である。

コウホートモデルについて上の ABIC を超パラメータの関数として近似的に評価すると次のようになる (詳細は中村 (1995), 付録 B を参照。ただし、記号の使い方が変わっているので注意)。

$$(2.17) \quad \text{ABIC} \simeq \chi_L^2 + \hat{\beta}'_* D'_* \Sigma^{-1} D_* \hat{\beta}_* - \log |D'_* \Sigma^{-1} D_*| + \log |X'_* \hat{V} X_* + D'_* \Sigma^{-1} D_*| + 2h$$

ここで、

$$(2.18) \quad \chi_L^2 = 2\mathbf{y}'(\log \mathbf{y} - \log \hat{\boldsymbol{\mu}}) + 2(\mathbf{m} - \mathbf{y})'[\log(\mathbf{m} - \mathbf{y}) - \log(\mathbf{m} - \hat{\boldsymbol{\mu}})],$$

$$(2.19) \quad \hat{V} = (\text{diag } \mathbf{m})(\text{diag } \hat{\boldsymbol{\pi}})(I - \text{diag } \hat{\boldsymbol{\pi}})$$

である。

ABIC を最小にする ($\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$) は簡便な格子探索法で見つける。より具体的には、 $\sigma_A^2, \sigma_P^2, \sigma_C^2$ のそれぞれについてあらかじめ候補を与え、これらのすべての組合せについて ABIC の値を求めた後、それらの中で最小の ABIC を与える組合せを超パラメータの推定値 ($\hat{\sigma}_A^2, \hat{\sigma}_P^2, \hat{\sigma}_C^2$) とする。

超パラメータの候補としては、たとえば下の σ^2 の $\{2^{-7}, 2^{-6}, \dots, 2^{-1}, 1, 2, \dots, 2^6, 2^7\}$ 倍を考える。ここで σ^2 は任意であるが、すべてのセルについての観測ロジットの分散の相乗平均に相当する

$$(2.20) \quad \bar{\sigma}^2 = \sqrt[11]{\prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J m_{ij} / [y_{ij}(m_{ij} - y_{ij})]}$$

を用いている。以下では煩雑になるのを避けるため、 $\bar{\sigma}^2$ を σ_A^2 等の 1 単位と考えて、 $\hat{\sigma}_A^2$ 等の推定値としては 2 のべき乗部分のみを示しているので注意。

2.6 コウホートモデル群とモデル選択

これまでに述べた 3 効果モデル (APC モデル) の他に、各効果の有無によって次のようなコウホートモデルの変種を考えることができる。すなわち、無効果モデル (β_0 モデル), 単効果モデル (A, P, C モデル), 2 効果モデル (AP, AC, PC モデル) である。たとえば PC モデルは、年齢効果の存在しない

$$(2.21) \quad \eta_{ij} = \beta_0 + \beta_j^P + \beta_k^C,$$

というモデルである。ここで、A は年齢効果、P は時代効果、C はコウホート効果を表わす。中村 (1995) で述べた交互作用効果モデルも含めることができるが、本論文では3効果モデルまでの計8モデルに限って話を進める。個々のモデルに関するパラメータの推定や ABIC の計算は、デザイン行列 X 、階差行列 D 、超パラメータ行列 Σ を適当に定め、 h に注意するだけで、前に述べた ABIC 最小化法により同様に行なうことができる。

候補となる以上のモデルを ABIC の値が小さい順に並べて、最上位の (ABIC の一番小さい) モデルを最適モデルとして選択する。上位の複数のモデルをみれば、どの効果が大きいのか、あるいはほとんど影響力がないのか、といった判断を下すこともできる。

2.7 分析例 — “#3.2b 宗教心は大切な” (日本人の国民性調査)

ベイズ型ロジット・コウホートモデルを選択肢個別に適用して分析した例を示す。分析した質問項目は #3.2b として引用される “宗教心は大切な” である (中村 他 (1999))。具体的な質問文は、“#3.1 宗教を信じるか” の質問につづいて、「それでは、いままでの宗教にはかわりなく、『宗教的な心』というものを、大切だと思いますか、それとも大切だとは思いませんか?」と問うものである。第2次から第6次調査までは前問の “宗教を信じるか” で “信じている” と答えた人には聞いていなかった。第7次調査以降は、前問の回答に関わりなくすべての人に聞いている。ここでは、第7次以降の調査結果を男女別に分析した。

“宗教心は大切な” の選択肢は “大切” と “大切でない” で二項選択法であるが、これら以外に実際には “その他” と “D.K. (わからない)” がある。ここで、選択結果は調査員の聞き取りによる判断であることも記しておく必要があるだろう。分析にあたっては “その他” と “D.K.” を併せて択一三項選択法によるデータとして扱った。

表1は、女の “大切でない” のデータを8つのモデルについて ABIC の値を比較したモデル選択表である。この表によれば、PC モデルの ABIC が一番小さく、女のこの選択肢については、年齢効果のない時代・コウホートモデルが最適モデルとして選ばれたことになる。

男女別に3つの選択肢について同様に最適モデルを選択すれば、表2のようになる。

図1と図2は、上の各最適モデルによる効果パラメータの推定値を、それぞれ男と女について示したものである。

表1. “#3.2b 宗教心は大切な (大切)” [女] のベイズ型ロジット・コウホートモデルによるモデル選択表。

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	σ_A^2	σ_P^2	σ_C^2
PC	73.5250	—	3	—	1	1
APC	74.8274	1.3024	4	1/4	1	1
AP	76.8614	3.3363	3	1	2	—
C	81.3025	7.7774	2	—	—	1
AC	82.3910	8.8660	3	1/4	—	2
A	137.2090	63.6839	2	1	—	—
P	224.8879	151.3628	2	—	2	—
β_0	269.2032	195.6782	1	—	—	—

表2. “#3.2b 宗教心は大切な”の最適モデル(ベイズ型ロジット・コウホートモデル)。

選択肢	男	女
大 切	AP モデル	PC モデル
大切にない	C モデル	PC モデル
その他+D.K.	C モデル	AP モデル

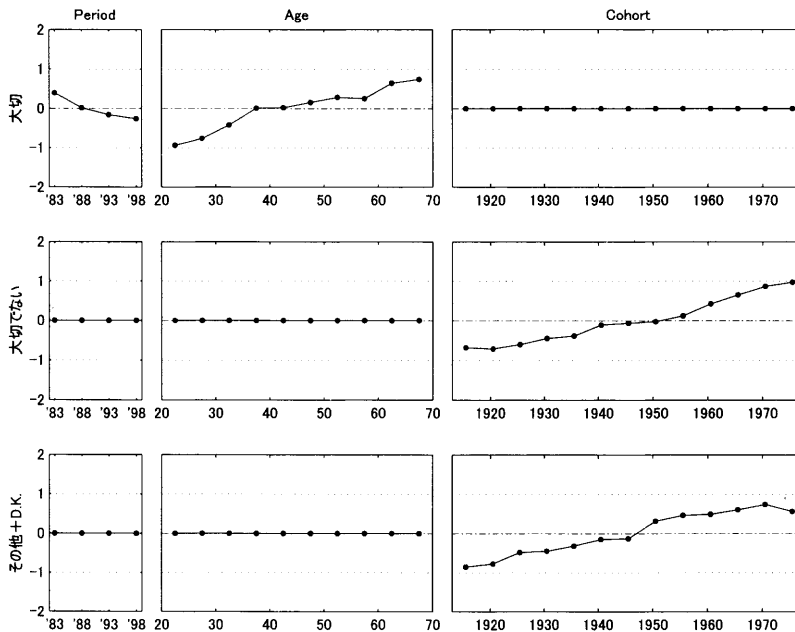


図1. “#3.2b 宗教心は大切な”[男]のベイズ型ロジット・コウホートモデルによる分析結果。

まず、図1の男の結果を見ると、“大切”の年齢効果と時代効果それぞれに呼応する動きが他の選択肢に見られず、逆に“大切にない”と“その他+D.K.”のコウホート効果に呼応する動きが“大切”のコウホート効果に見られない。また、図2の女の結果を見ると、“大切”と“大切にない”のコウホート効果の動きは呼応しているものの、“その他+D.K.”の年齢効果に呼応する動きが他の選択肢に見られない。時代効果の動きは“大切”と“大切にない”の動きを足せば変化の幅が小さく、とても“その他+D.K.”の時代効果の動きを補うものではない。男と女の結果とも、個別に分析した3つの選択肢の結果を総合すると解釈に悩む例といえる。

3. ベイズ型多項ロジット・コウホートモデル

3.1 セル・カテゴリ確率

記号の簡素化のため、コウホート表の全 IJ 個のセル全体を1列に並べたと考え、第 j 調査時点第 i 年齢区分の (i, j) セルを、あらためて $j \leftarrow i + (j-1)I$ のように対応させて第 j セルと呼ぶことにする。全部で $c = IJ$ 個のセルが存在することになる。各セルには r 個の排反な反応カ

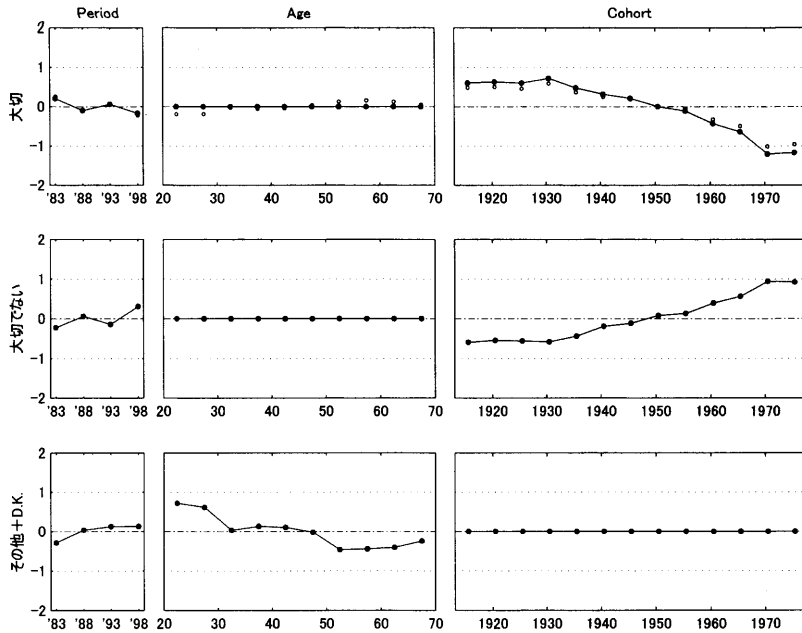


図2. “#3.2b 宗教心は大切なことか” [女] のベイズ型ロジット・コウホートモデルによる分析結果 (“大切” の図中の白丸は APC モデルによる推定値)。

テゴリ (選択肢) があるものとし、以降は添字 i でカテゴリを、添字 j でセルを参照する。

第 j セルの第 i カテゴリの反応確率をセル・カテゴリ確率と呼び、 π_{ij} (> 0) で表わす (2 節の π_{ij} とは意味が異なるので注意)。第 j セルについての r 個のカテゴリ確率を集めたセル確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}_j$ を

$$(3.1) \quad \boldsymbol{\pi}_j = (\pi_{1j}, \dots, \pi_{rj})', \quad j = 1, \dots, c$$

とすると、

$$(3.2) \quad \mathbf{1}' \boldsymbol{\pi}_j = \sum_{i=1}^r \pi_{ij} = 1$$

である。一方、第 i カテゴリについての確率を c 個すべてのセルにわたって集めたベクトルを $\tilde{\boldsymbol{\pi}}_i$ とおくと、

$$(3.3) \quad \tilde{\boldsymbol{\pi}}_i = (\pi_{i1}, \dots, \pi_{ic})', \quad i = 1, \dots, r$$

である。セル確率ベクトルを次のように $r \times c$ の行列 $\boldsymbol{\Pi}$ にまとめれば、

$$(3.4) \quad \boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{\pi}_1 \cdots \boldsymbol{\pi}_c) = (:\boldsymbol{\pi}_j:) = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{\pi}}_1' \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\pi}}_r' \end{pmatrix}$$

である。簡便のため本論文では、上式の中程にあるように $:'$ で挟んだ記法も使う。

行列 $\boldsymbol{\Pi}$ の列ベクトルを縦に並べてベクトル化したものを $\text{vec } \boldsymbol{\Pi}$ で表わし、 $\boldsymbol{\pi}$ とおく。また、ベクトル化に関する交換行列 (Magnus and Neudecker (1999), p. 46) を $\mathbf{K}_{rc}$ などとすると、

$$(3.5) \quad \boldsymbol{\pi} = \text{vec } \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{K}_{cr} \text{vec } \boldsymbol{\Pi}' = \boldsymbol{K}'_{rc} \tilde{\boldsymbol{\pi}},$$

$$(3.6) \quad \tilde{\boldsymbol{\pi}} = \text{vec } \boldsymbol{\Pi}' = \boldsymbol{K}_{rc} \boldsymbol{\pi}$$

である (ベクトル化と交換行列については付録 A も参照)。

多項分布モデルでは、 $\boldsymbol{\pi}_j$ に関する (3.2) の制約と、 $\tilde{\boldsymbol{\pi}}_j$ についてのモデルの記述 (後の (3.57)) を考える必要があり、このとき行列のベクトル化 vec 、交換行列 $\boldsymbol{K}_{rc}$ 、行列のクロネッカー積 $\otimes$ 、行列の直和 $\oplus$ などを使うと見通しがよくなる。以下で述べる多項分布に関する結果はすでによく知られているものであるが、これらの行列記号を使って書き直し、あわせて後に必要な関係式を導いておく。

さて、カテゴリ確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}_j$ の最初の $r-1$ 個の要素を取り出して $\check{\boldsymbol{\pi}}_j$ とおけば、

$$(3.7) \quad \check{\boldsymbol{\pi}}_j = (\pi_{1j}, \dots, \pi_{r-1,j})' = \boldsymbol{L} \boldsymbol{\pi}_j$$

である。ここで、

$$(3.8) \quad \boldsymbol{L} = (\boldsymbol{I} \quad \mathbf{0})$$

であり、 $\mathbf{0}$ はすべての要素が 0 であるような適当な大きさのベクトルまたは行列とする。 $\mathbf{1}' \boldsymbol{\pi}_j = 1$ に注意すれば、

$$(3.9) \quad \boldsymbol{\pi}_j = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{J} \check{\boldsymbol{\pi}}_j,$$

$$(3.10) \quad \boldsymbol{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} \\ -\mathbf{1}' \end{pmatrix}$$

という関係があり、

$$(3.11) \quad \boldsymbol{\Pi} = \boldsymbol{j} \mathbf{1}' + \boldsymbol{J} \check{\boldsymbol{\Pi}},$$

$$(3.12) \quad \check{\boldsymbol{\Pi}} = (\boldsymbol{\pi}_j : \boldsymbol{\pi}_j : \boldsymbol{\pi}_j : \boldsymbol{\pi}_j) = \boldsymbol{L} \boldsymbol{\Pi},$$

$$(3.13) \quad \boldsymbol{\pi} = \text{vec } \boldsymbol{\Pi} = (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{j}) \mathbf{1} + (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{J}) \check{\boldsymbol{\pi}},$$

$$(3.14) \quad \check{\boldsymbol{\pi}} = \text{vec } \check{\boldsymbol{\Pi}} = (\boldsymbol{I} \otimes \boldsymbol{L}) \boldsymbol{\pi}$$

である。ここで、 $\otimes$ は行列のクロネッカー積である。

3.2 セルの標本の大きさとセル・カテゴリの観測度数

第 j セルの標本の大きさを m_j 、標本の大きさを配したベクトルを $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_c)'$ とする。また、第 j セル第 i カテゴリの観測度数を y_{ij} とし、第 j セルの観測度数ベクトル $\boldsymbol{y}_j$ を

$$(3.15) \quad \boldsymbol{y}_j = (y_{1j}, \dots, y_{rj})', \quad j = 1, \dots, c$$

とすると、

$$(3.16) \quad \mathbf{1}' \boldsymbol{y}_j = \sum_{i=1}^r y_{ij} = m_j$$

である。

セル・カテゴリ確率の場合と対応させて、観測度数のベクトルや行列を次のように定める。

$$(3.17) \quad \check{\boldsymbol{y}}_i = (y_{i1}, \dots, y_{ic})',$$

$$(3.18) \quad \check{\boldsymbol{y}}_j = (y_{1j}, \dots, y_{r-1,j})' = \boldsymbol{L} \boldsymbol{y}_j,$$

$$(3.19) \quad Y = (:y_j:) = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1' \\ \vdots \\ \tilde{y}_r' \end{pmatrix} = j\mathbf{m}' + J\check{Y},$$

$$(3.20) \quad \check{Y} = (: \check{y}_j:) = LY,$$

$$(3.21) \quad \mathbf{m} = Y'1,$$

$$(3.22) \quad \mathbf{y} = \text{vec } Y = K_{cr}\tilde{\mathbf{y}} = [(\text{diag } \mathbf{m}) \otimes J]1 + (I \otimes J)\check{\mathbf{y}},$$

$$(3.23) \quad \tilde{\mathbf{y}} = \text{vec } Y' = K_{rc}\mathbf{y},$$

$$(3.24) \quad \check{\mathbf{y}} = \text{vec } LY = (I \otimes L)\mathbf{y}.$$

3.3 多項分布

第 j セル第 i カテゴリについて $\mu_{ij} = m_j\pi_{ij}$ とおいて、これまでと同様、ベクトルや行列を以下のように定める。

$$(3.25) \quad \boldsymbol{\mu}_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{rj})' = m_j\boldsymbol{\pi}_j,$$

$$(3.26) \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}}_i = (\mu_{i1}, \dots, \mu_{ic})',$$

$$(3.27) \quad \check{\boldsymbol{\mu}}_j = (\mu_{1j}, \dots, \mu_{r-1,j})' = m_j\check{\boldsymbol{\pi}}_j,$$

$$(3.28) \quad \mathbf{M} = (: \boldsymbol{\mu}_j:) = \Pi(\text{diag } \mathbf{m}),$$

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\mu} = \text{vec } \mathbf{M} &= [(\text{diag } \mathbf{m}) \otimes I]\boldsymbol{\pi} = K_{cr}\tilde{\boldsymbol{\mu}} \\ &= [(\text{diag } \mathbf{m}) \otimes J]1 + (I \otimes J)\check{\boldsymbol{\mu}}, \end{aligned}$$

$$(3.30) \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \text{vec } \mathbf{M}' = K_{rc}\boldsymbol{\mu},$$

$$(3.31) \quad \check{\boldsymbol{\mu}} = \text{vec } [L\Pi(\text{diag } \mathbf{m})] = (I \otimes L)\boldsymbol{\mu}.$$

以上より,

$$(3.32) \quad \mathbf{y} - \boldsymbol{\mu} = (I \otimes J)(\check{\mathbf{y}} - \check{\boldsymbol{\mu}}),$$

$$(3.33) \quad \begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\boldsymbol{\mu}} &= K_{rc}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu}) \\ &= K_{rc}(I \otimes J)(\check{\mathbf{y}} - \check{\boldsymbol{\mu}}) = (I \otimes J)K_{r-1,c}(\check{\mathbf{y}} - \check{\boldsymbol{\mu}}) \end{aligned}$$

であることに注意しておく。また,

$$(3.34) \quad \frac{\partial \boldsymbol{\mu}'}{\partial \boldsymbol{\pi}} = (\text{diag } \mathbf{m}) \otimes I$$

である。

さて、各セルの $y_j (j=1, \dots, c)$ が独立に、標本の大きさ m_j 、確率 π_j の多項分布に従うと仮定すると、期待値と分散はそれぞれ、

$$(3.35) \quad E(y_j) = m_j\pi_j = \mu_j,$$

$$(3.36) \quad V(y_j) \equiv V_j = m_j[(\text{diag } \boldsymbol{\pi}_j) - \boldsymbol{\pi}_j\boldsymbol{\pi}_j']$$

であり、最後の要素を落とした $\check{y}_j$ についても

$$(3.37) \quad E(\check{y}_j) = m_j\check{\pi}_j = \check{\mu}_j,$$

$$(3.38) \quad V(\check{\mathbf{y}}_j) \equiv \check{\mathbf{V}}_j = m_j[(\text{diag } \check{\boldsymbol{\pi}}_j) - \check{\boldsymbol{\pi}}_j \check{\boldsymbol{\pi}}_j']$$

である。

以上より、全セルについて

$$(3.39) \quad E(\mathbf{y}) = \boldsymbol{\mu},$$

$$(3.40) \quad V(\mathbf{y}) \equiv \mathbf{V} = \bigoplus_{j=1}^c \mathbf{V}_j,$$

$$(3.41) \quad E(\check{\mathbf{y}}) = \check{\boldsymbol{\mu}},$$

$$(3.42) \quad V(\check{\mathbf{y}}) \equiv \check{\mathbf{V}} = \bigoplus_{j=1}^c \check{\mathbf{V}}_j$$

であり、

$$(3.43) \quad \mathbf{V} = V[(\mathbf{I} \otimes \mathbf{J})\check{\mathbf{y}}] = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{J})\check{\mathbf{V}}(\mathbf{I}' \otimes \mathbf{J}')$$

となる。ここで、 $\oplus$ は行列の直和であり、ブロック対角行列を作る操作とする（直和については付録 A も参照）。

各セルに独立な多項分布を仮定し、同時確率関数を $f_M(\mathbf{y}|\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta}))$ とすると、対数尤度の核 $\ell(\boldsymbol{\pi})$ は

$$(3.44) \quad \ell(\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{\beta})) = \sum_{j=1}^c \mathbf{y}'_j \log \boldsymbol{\pi}_j = \mathbf{y}' \log \boldsymbol{\pi}$$

と書ける。ここで、

$$(3.45) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \boldsymbol{\pi}} = \text{vec}(:(\text{diag } \boldsymbol{\pi}_j)^{-1} \mathbf{y}_j:) = \left[\bigoplus_{j=1}^c (\text{diag } \boldsymbol{\pi}_j)^{-1} \right] \mathbf{y}$$

である。

3.4 リンク関数——多項ロジット変換

セル確率 $\boldsymbol{\pi}_j$ のリンク関数として、ここでは多項ロジット変換

$$(3.46) \quad \boldsymbol{\eta}_j \equiv \begin{pmatrix} \log(\pi_{1j}^r / \prod_{i=1}^r \pi_{ij}) \\ \vdots \\ \log(\pi_{rj}^r / \prod_{i=1}^r \pi_{ij}) \end{pmatrix} = \mathbf{A} \log \boldsymbol{\pi}_j$$

を考える。ここで、

$$(3.47) \quad \mathbf{A} = (r\mathbf{I} - \mathbf{1}\mathbf{1}'),$$

$$(3.48) \quad \mathbf{A}^+ = r^{-1}(\mathbf{I} - r^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}'),$$

$$(3.49) \quad \mathbf{A}^+ \mathbf{A} = (\mathbf{I} - r^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}')$$

である（ $\mathbf{A}^+$ は $\mathbf{A}$ のムーア・ペンローズ逆行列）。

$\boldsymbol{\eta}_j$ についても

$$(3.50) \quad H = (: \eta_j :) = \begin{pmatrix} \tilde{\eta}'_1 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}'_r \end{pmatrix},$$

$$(3.51) \quad \eta = \text{vec } H = K_{cr} \tilde{\eta} = J \check{\eta},$$

$$(3.52) \quad \tilde{\eta} = \text{vec } H' = K_{rc} \eta,$$

$$(3.53) \quad \check{\eta} = L \eta$$

などとする.

逆リンク関数は

$$(3.54) \quad \pi_j = \exp A^+ \eta_j / (1' \exp A^+ \eta_j)$$

で与えられる. これより,

$$(3.55) \quad \frac{\partial \pi'_j}{\partial \eta_j} = r^{-1} [(\text{diag } \pi_j) - \pi_j \pi'_j]$$

を得る. したがって,

$$(3.56) \quad \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} = r^{-1} \bigoplus_{j=1}^c [(\text{diag } \pi_j) - \pi_j \pi'_j]$$

である.

3.5 多項分布モデル

モデルは, あるカテゴリの全セルにわたる確率ベクトル $\hat{\pi}_i$ を, リンク関数 $\tilde{\eta}_i$ を介してセルについての $c \times p$ の共変量行列 X とパラメータ $\beta_i (p \times 1)$ によって記述するものとなる. すなわち,

$$(3.57) \quad \tilde{\eta}_i = X \beta_i, \quad i = 1, \dots, r$$

である. r 個のパラメータ・ベクトルについてゼロ和制約

$$(3.58) \quad \sum_{i=1}^r \beta_i = 0, \quad \text{すなわち,} \quad \beta_r = - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i$$

を課せば,

$$(3.59) \quad \begin{aligned} \text{vec } (\beta_1 \cdots \beta_r) &= \text{vec } \left(\beta_1 \cdots \beta_{r-1} \quad - \sum_{i=1}^{r-1} \beta_i \right) \\ &= \text{vec } [(\beta_1 \cdots \beta_{r-1}) J'] \\ &= (J \otimes I) \beta \end{aligned}$$

となる. ここで,

$$(3.60) \quad \beta = \text{vec } (\beta_1 \cdots \beta_{r-1})$$

とおいた.

すべてのカテゴリについてまとめれば,

$$(3.61) \quad \begin{aligned} \eta &= K_{cr} \tilde{\eta} = K_{cr} \text{vec } (: X \beta_i :) \\ &= K_{cr} (I \otimes X) \text{vec } (: \beta_i :) = K_{cr} (I \otimes X) (J \otimes I) \beta \\ &= K_{cr} (J \otimes X) \beta \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$(3.62) \quad \check{X} = K_{cr}(J \otimes X)$$

とおけば、

$$(3.63) \quad \frac{\partial \eta'}{\partial \beta} = \check{X}'$$

である。

スコア・ベクトルとヘッセ行列は、それぞれ

$$(3.64) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta} = r^{-1} \check{X}'(y - \mu),$$

$$(3.65) \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta'} = -r^{-2} \check{X}' V \check{X}$$

である（詳しくは付録 D を参照）。

3.6 ベイズ型 1 次階差制約モデル

パラメータ・ベクトル β を

$$(3.66) \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_a \\ \beta_b \end{pmatrix}$$

のように分け、対応してデザイン行列 $\check{X}$ を

$$(3.67) \quad \check{X} = (X_a \ X_b)$$

のように分ける（ $\check{X}$ の例は付録 B を参照）。 β_b は 1 次階差制約を課す各カテゴリの年齢・時代・コウホート効果のパラメータをまとめたものであり、 β_a は各カテゴリの総平均効果のパラメータ、および必要に応じて導入可能な 3 効果以外の共変量に対応するパラメータである。 β_a と β_b のパラメータ数をそれぞれ p_a , p_b とする（ $p_a + p_b = p$ ）。

3 効果のパラメータ β_b には 1 次階差制約

$$(3.68) \quad D_b \beta_b \sim N(0, (D_b' \Sigma^{-1} D_b)^{-1})$$

を課す。ここで、 D_b は 1 次階差を表現するデザイン行列であり、 $D_b' D_b$ は非特異とする（ D_b の例は付録 B を参照）。また、 Σ は超パラメータを対角要素にもつ対角行列である。 β_b の事前密度は (2.9) と同様に

$$(3.69) \quad \pi(\beta_b | \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{p_b}{2}} |D_b' \Sigma^{-1} D_b|^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta_b' D_b' \Sigma^{-1} D_b \beta_b \right\}$$

となる。

さて、対数事後尤度 $\phi(\beta | y, \Sigma)$ は

$$(3.70) \quad \begin{aligned} \phi(\beta | y, \Sigma) &= \ell(\pi) + \log \pi(\beta_b | \Sigma) \\ &= y' \log \pi - \frac{p_b}{2} \log 2\pi + \frac{1}{2} \log |D_b' \Sigma^{-1} D_b| - \frac{1}{2} \beta_b' D_b' \Sigma^{-1} D_b \beta_b \end{aligned}$$

となる。パラメータ β の推定は、超パラメータ行列 Σ を所与として、この対数事後尤度の最大

化により行なう(詳細は付録Eを参照)。

3.7 ABIC

超パラメータ Σ の決定には赤池のベイズ型情報量規準 ABIC を用いる。(2.16) と同じであるが、モデルの比較には関係のない定数部分は適当に処理するものとして、ここでは

$$(3.71) \quad \text{ABIC} = -2 \log \int \exp \{ \phi(\beta) \} d\beta_b + 2h$$

と表わせる。 h_* は超パラメータの数であり、 $h = h_* + p_a$ である。ベイズ型多項ロジットモデルの場合、より具体的には、

$$(3.72) \quad \text{ABIC} \simeq \chi_L^2 + \hat{\beta}_b' D_b' \Sigma^{-1} D_b \hat{\beta}_b - \log |D_b' \Sigma^{-1} D_b| + \log |r^{-2} X_b' \bar{V} X_b + D_b' \Sigma^{-1} D_b| + 2h$$

となる。ここで、

$$(3.73) \quad \chi_L^2 = 2y'(\log y - \log \hat{\mu})$$

である(詳細は付録Fを参照)。

3.8 コウホートモデル群と注意点

ロジット・コウホートモデルでは3効果の有無により8つのモデルを考えた(2.6節)。同様に、多項ロジット・コウホートモデルでも、カテゴリごとに3効果の有無を組み合わせた複数のモデルが設定できる。ベイズ型多項ロジット・コウホートモデルの表記法として、各カテゴリの効果を '/' で区切る方法を採用する。たとえば、APC/APC/APC モデルは、3つのカテゴリすべてに3効果が存在するモデルである。AP/C/APC モデルは、第1カテゴリには年齢と時代効果、第2カテゴリにはコウホート効果のみ、第3カテゴリには3効果が存在するモデル、ということになる。

注意しなければならないのは、カテゴリ間にわたるパラメータのゼロ和制約(3.58)が課されていることである。このため、年齢効果(あるいは時代効果あるいはコウホート効果)が1つのカテゴリにしか存在しないというモデルはない。ある1つのカテゴリに、たとえば年齢効果が存在したとすると、必ず別の1つ以上のカテゴリに年齢効果が存在して埋め合わせをしなければならない、ということである。

この段階で比較すべきモデルの数を調べてみる。ある1つの効果が、どのカテゴリにも存在しないモデルは1通り、1つのカテゴリにしか存在しないモデルはなく、 $k(\geq 2)$ 個のカテゴリに存在するモデルは (k) 通りである。したがって、1つの効果について $(2^r - r)$ 通りであり、 $r = 3$ なら5通り、 $r = 4$ なら12通り、 $r = 5$ なら27通りとなる。これを3効果の組合せで考えて、 $r = 3$ なら全部で $5^3 = 125$ 通り、 $r = 4$ なら $12^3 = 1728$ 通り、 $r = 5$ なら $27^3 = 19683$ 通りのモデルを比較することになる。

さらに注意しなければならないのは、パラメータの漸進的変化の条件(1次階差制約)をどのカテゴリに設定するかである。上と同じくカテゴリ間にわたるパラメータのゼロ和制約のため、たとえば年齢効果の最後のカテゴリのパラメータは推定値を求める際には落とすことになるが、それによって最後のカテゴリに課す1次階差制約の程度が十分考慮されないことが起こりうる。

簡単のため A/A/A モデル(すべてのカテゴリについて年齢効果のみのモデル)を考えてみる。第 i カテゴリの年齢効果のパラメータを β_i^A 、年齢効果の1次階差行列を (B.3) の $D_{(i)}$ とし、対応する超パラメータを $\alpha_{A,i}$ とする。第1と第2カテゴリに1次階差制約を課すことは、 β_i^A

($i = 1, 2$) に事前分布として正規分布 $N(0, \sigma_{A,i}^2(D_{(1)}D_{(1)})^{-1})$ を仮定することであり, $\beta_3^A = -\beta_1^A - \beta_2^A$ だから, 第3カテゴリについては $\beta_3^A \sim N(0, (\sigma_{A,1}^2 + \sigma_{A,2}^2)(D_{(1)}D_{(1)})^{-1})$ を仮定することになる. そのため, $0 < \sigma_{A,1}^2, \sigma_{A,2}^2 < \infty$ の範囲に対して, 最後のカテゴリの超パラメータ $\sigma_{A,3}^2$ については $\sigma_{A,1}^2 + \sigma_{A,2}^2$ 以下の範囲は検討されることがないのである.

この, ゼロ和制約により落とすカテゴリの $\sigma_{A,r}^2$ について値の小さいある範囲が検討されないという問題は, 1次階差制約を課さないカテゴリを順番に変えたモデルを比較の対象に加えれば回避することができる. こうして実際上比較すべきモデルの数は, ある1つの効果について $1 + (\hat{g}) + \sum_{k=3}^r k(\hat{k})$ 通りとなり, $r = 3$ なら7通り, $r = 4$ なら23通り, $r = 5$ なら66通りとなる. これを3効果の組合せで考えて, $r = 3$ なら全部で $7^3 = 343$ 通り, $r = 4$ なら $23^3 = 12167$ 通り, $r = 5$ なら $61^3 = 287496$ 通りのモデルを比較する必要がある. 残念ながら, カテゴリ数 $r \geq 5$ のデータを扱うのは現段階では現実的でない.

4. ベイズ型多項ロジット・コーホートモデルによる国民性調査データの分析例

表3, 表4は, それぞれ男と女について, 2.7節と同じ“#3.2b 宗教心は大切か”を, ($r = 3$ であるから) 125 (実際上は343) のベイズ型多項ロジット・コーホートモデルで分析し, それらのABICの値を比較したモデル選択表である. ここでは, ABICの小さい順に上位20のモデルを示した (ただし, 各効果の有無に関して実質的に同じモデルは最も小さいABICを与えるものの以外は省いている).

表3の男の結果では, AP/C/APCモデルがABIC最小の最適モデルとして選ばれる. 表4の女の結果では, 最適モデルはAPC/PC/Aモデルである. 表5に, 表2と対比して, 各選択肢について男女それぞれの最適モデルを構成する効果が何であるかを整理した.

男の最適モデルAP/C/APCモデルの超パラメータ数は, 年齢効果については2つのカテゴリにしかないから1個, 時代効果・コーホート効果についても同様に1個ずつであり, 計3個である. したがって, h は, $p_a = 2$ (全カテゴリの総平均効果の数 - 1) を足して $h = 5$ である. ちなみに, 第3位のAPC/C/APCモデルでは, 超パラメータ数は, 年齢と時代効果については各1個であり, コウホート効果については3つのカテゴリに存在するから2個で, 計4個, したがって $h = 6$ となっている. 表の右側には, ()で囲って各カテゴリ順の推定された超パラメータの値が示されている (ただし, σ^2 に対する倍率である). (*)はそのカテゴリの当該効果についてはパラメータの階差制約を直接課していないことを, (.)は当該効果がそのカテゴリにはないことを意味する.

図3は, “#3.2b 宗教心は大切か”の男の最適モデルAP/C/APCによる効果パラメータの推定値を示したものである. 選択肢の“大切”および“大切でない”については, 個々の選択肢をロジットモデルで分析した図1の結果とほとんど変わらない. すなわち, “大切”については, 時代効果があり時代とともに減少していること, また年齢効果として高齢になるにつれ増加していることがわかる. “大切でない”については, 各効果の動きが“大切”と呼応して反対の動きをするというわけではなく, コウホート効果のみであり, 若い世代ほど増加していることが確認できる.

しかし“その他+D.K.”については, 図3と図1の結果はだいぶ違う. 図1ではコーホート効果だけであったのに対し, 図3では3効果とも見られ, しかもコーホート効果は両図でまったく逆の動きをしている. 単独の選択肢のコーホート分析結果としては, 図1のコーホート効果のみの結果の方が節約的といえるが, 3つのカテゴリを同時に考慮する場合には, 単独の選択肢としては必ずしも節約的とはいえない結果となっている. 合併した選択肢である“その他+D.K.”は, “その他”と“D.K.”の性格が異なること, 合わせても10%前後であり比率が少ない

表3. “#3.2b 宗教心は大切な” [男] のベイズ型多項ロジット・コウホートモデルによるモデル選択表.

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	大切 ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)	大切でない ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)	その他+D.K. ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)
AP/C/APC	111.9808	-	5	(4/2/-)	(-/-/1)	(4/2/1)
AC/C/AC	113.3897	1.4089	5	(1/-/*)	(-/-/1)	(1/-/2)
APC/C/APC	113.5980	1.6172	6	(1/1/*)	(-/-/1)	(1/1/1)
APC/C/AP	113.7537	1.7729	5	(2/1/1)	(-/-/1)	(2/1/-)
AP/AC/APC	113.9870	2.0062	6	(* / 2 / -)	($\frac{1}{128}$ / - / 1)	(4 / 2 / 1)
AP/PC/APC	113.9949	2.0141	6	(4 / * / -)	(- / $\frac{1}{128}$ / 1)	(4 / 2 / 1)
APC/AP/C	114.7540	2.7731	5	(1/1/1)	(1/1/-)	(-/-/1)
APC/PC/AC	115.3020	3.3211	6	(1 / $\frac{1}{16}$ / *)	(- / $\frac{1}{16}$ / 1)	(1 / - / 2)
AP/AP/AP	115.3402	3.3594	6	(* / * / -)	(1 / 1 / -)	(2 / 1 / -)
AC/AC/AC	115.4111	3.4303	6	(* / - / *)	($\frac{1}{128}$ / - / 1)	(1 / - / 2)
AC/PC/APC	115.4147	3.4339	6	(1 / - / *)	(- / $\frac{1}{128}$ / 1)	(1 / $\frac{1}{128}$ / 2)
C/C/C	115.4197	3.4388	4	(- / - / *)	(- / - / 1)	(- / - / 1)
APC/AC/APC	115.6078	3.6270	7	(* / 1 / *)	($\frac{1}{128}$ / - / 1)	(1 / 1 / 1)
APC/PC/APC	115.6230	3.6422	7	(1 / * / *)	(- / $\frac{1}{128}$ / 1)	(1 / 1 / 1)
APC/PC/AP	115.7605	3.7796	6	(2 / * / 1)	(- / $\frac{1}{128}$ / 1)	(2 / 1 / -)
APC/AC/AP	115.7642	3.7833	6	(* / 1 / 1)	($\frac{1}{128}$ / - / 1)	(2 / 1 / -)
APC/AP/AC	115.8790	3.8982	6	(* / 1 / 1)	(1 / 1 / -)	($\frac{1}{2}$ / - / 1)
AP/APC/APC	116.0150	4.0342	7	(* / 2 / -)	($\frac{1}{128}$ / $\frac{1}{128}$ / 1)	(4 / * / 1)
AC/AC/C	116.3551	4.3743	5	($\frac{1}{4}$ / - / *)	($\frac{1}{4}$ / - / 1)	(- / - / 1)
PC/C/PC	116.4644	4.4836	5	(- / $\frac{1}{2}$ / *)	(- / - / 1)	(- / $\frac{1}{2}$ / 1)

ことなどから、他のメインの選択肢の影響を受けやすいことが考えられよう。男については、“大切”と“大切でない”が排反な選択肢として変化しているのではなく、“その他+D.K.”を緩衝地帯として変化していることが示唆される。

図4は、女の最適モデル APC/PC/A による効果パラメータの推定値を示したものである。選択肢の“大切”および“大切でない”については、図2における個々の選択肢をロジットモデルで分析した結果と比べると、“大切”で年齢効果が現れている点以外はほぼ同じ結果である。すなわち、時代効果とコウホート効果については、“大切”と“大切でない”が排反な動きをしており、年齢効果は“大切”にだけ見られる。“その他+D.K.”については、図2で見られた時代効果がなくなっている。女については、“大切”と“大切でない”が排反な選択肢として変化する傾向のあることが示唆される。

女の“大切”の年齢効果が図4の多項ロジットモデルで認められるようになったのは、高齢になるにつれ宗教的な心が大切になるという年齢効果の成分が男女ともにあることで説得的であるといえよう。実は、選択肢個々を分析したロジットモデルでは、表1に見るように、次善のモデルは APC モデルであり、このとき図2の白丸で示したような弱い年齢効果が認められるのであった。

ところで、表4の女のモデル選択表を見ると、上位の4モデルは、第1カテゴリについては

表 4. “#3.2b 宗教心は大切か” [女] のベイズ型多項ロジット・コウホートモデルによるモデル選択表.

モデル	ABIC	Δ ABIC	h	大切 ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)	大切でない ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)	その他+D.K. ($\sigma_A^2/\sigma_P^2/\sigma_C^2$)
APC/PC/A	121.3839	—	5	(2 / 4 / 2)	(- / 4 / 2)	(2 / - / -)
APC/PC/AP	122.5468	1.1630	6	(2 / * / 2)	(- / 4 / 2)	(2 / $\frac{1}{2}$ / -)
APC/PC/AC	123.1235	1.7396	6	(1 / 4 / *)	(- / 4 / 2)	(1 / - / $\frac{1}{4}$)
APC/APC/A	123.4025	2.0186	6	(2 / 4 / 2)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	(* / - / -)
PC/PC/C	124.3637	2.9799	5	(- / 4 / *)	(- / 4 / 2)	(- / - / 1)
APC/PC/APC	124.5578	3.1740	7	(2 / * / *)	(- / 4 / 2)	(2 / $\frac{1}{2}$ / $\frac{1}{128}$)
APC/APC/AP	124.5656	3.1817	7	(2 / * / 2)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	(* / $\frac{1}{2}$ / -)
APC/APC/AC	125.1427	3.7588	7	(1 / 4 / *)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	(* / - / $\frac{1}{4}$)
AP/AP/A	126.1036	4.7198	5	(* / 8 / -)	(1 / 8 / -)	(2 / - / -)
PC/PC/PC	126.3580	4.9741	6	(- / 4 / *)	(- / * / 2)	(- / $\frac{1}{8}$ / 1)
PC/APC/AC	126.3778	4.9940	6	(- / 4 / *)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	($\frac{1}{128}$ / - / 1)
APC/APC/C	126.3803	4.9965	6	($\frac{1}{128}$ / 4 / *)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	(- / - / 1)
APC/APC/APC	126.5765	5.1927	8	(2 / * / *)	($\frac{1}{128}$ / 4 / 2)	(* / $\frac{1}{2}$ / $\frac{1}{128}$)
APC/AP/AC	126.8900	5.5061	6	(* / 8 / $\frac{1}{2}$)	(1 / 8 / -)	(1 / - / $\frac{1}{2}$)
APC/AP/C	126.9462	5.5623	5	(1 / 4 / 1)	(1 / 4 / -)	(- / - / 1)
AP/AP/AP	127.4205	6.0366	6	(* / * / -)	(1 / 8 / -)	(2 / $\frac{1}{2}$ / -)
PC/APC/A	127.9483	6.5645	5	(- / 4 / 4)	(1 / 4 / 4)	(1 / - / -)
AP/APC/AC	128.1515	6.7676	6	(* / 8 / -)	(1 / 8 / $\frac{1}{128}$)	(2 / - / $\frac{1}{128}$)
PC/APC/APC	128.3712	6.9873	7	(- / 4 / *)	($\frac{1}{128}$ / * / 2)	($\frac{1}{128}$ / $\frac{1}{8}$ / 1)
APC/APC/PC	128.3746	6.9907	7	($\frac{1}{128}$ / 4 / *)	($\frac{1}{128}$ / * / 2)	(- / $\frac{1}{8}$ / 1)

表 5. “#3.2b 宗教心は大切か” の最適モデル (ベイズ型多項ロジット・コウホートモデル).

選択肢	男	女
大 切	AP	APC
大切でない	C	PC
その他+D.K.	APC	A

APC, 第2カテゴリについてはPC, 第3カテゴリについてはAが共通しており, 各カテゴリに追加される効果も実際の推定値の動きは小さく, 上位4モデルは整合的であるといえる. 一方, 表3の男のモデル選択表を見ると, 上位の4モデルは必ずしも整合的ではない. たとえば, 最適モデルでは第1, 第2カテゴリに時代効果がみられるのに対し, 次善モデルではいずれのカテゴリにも時代効果はみられない. 男についての分析結果は不安定であることがいえる.

5. おわりに

択一多項選択法による質問項目の全選択肢を同時に分析するベイズ型多項ロジット・コウホートモデルについて述べた. 選択肢ごとにロジットモデルを用いて分析する場合には各セル

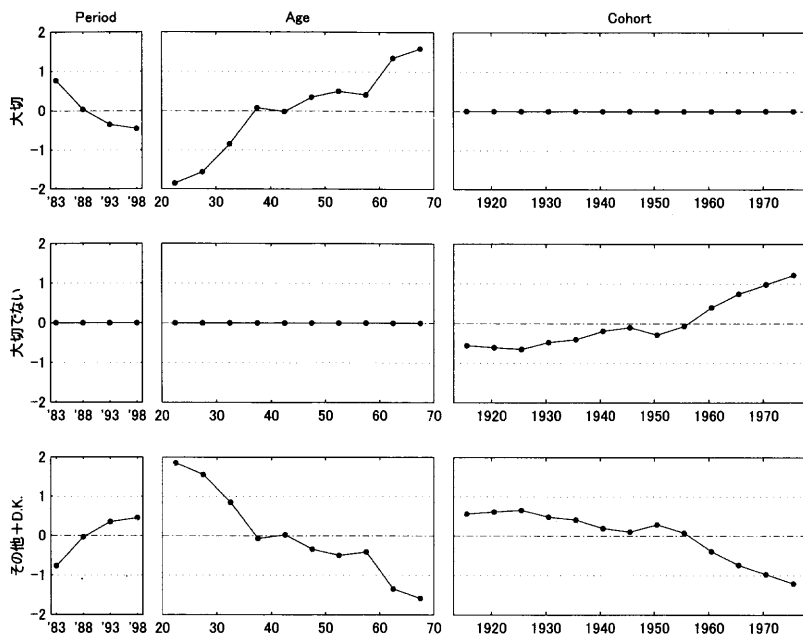


図3. “#3.2b 宗教心は大切な” [男] のベイズ型多項ロジット・コウホートモデル (AP/C/APC) による分析結果。

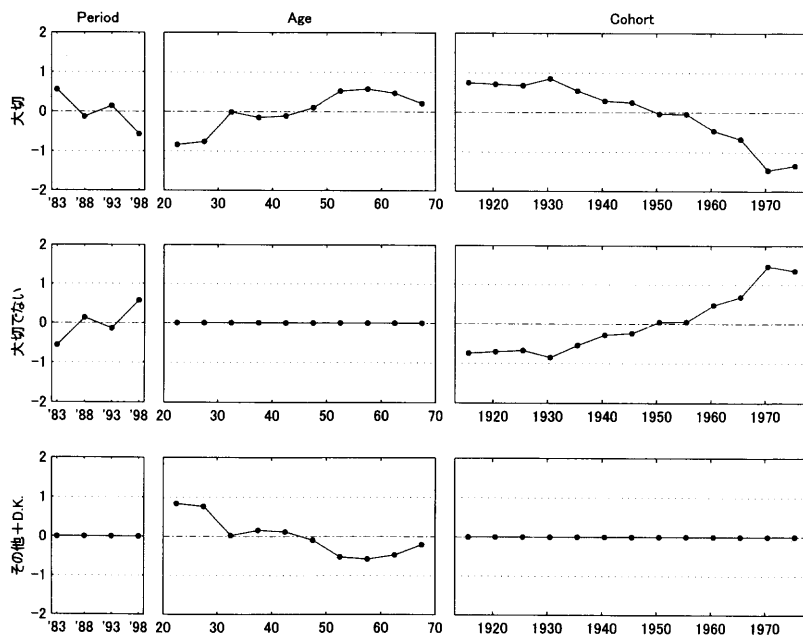


図4. “#3.2b 宗教心は大切な” [女] のベイズ型多項ロジット・コウホートモデル (APC/PC/A) による分析結果。

の選択肢にわたる推定確率の和が1にならないことが起こるが、多項ロジットモデルではこの問題を避けることができる。その上で、1つの質問項目について、選択肢間で年齢・時代・コウホート効果がどのように呼応して変化しているかを総合して捉えることにより、人々の意見や態度の変化の様相にさらに深く迫ることができるようになった。

ただ一方、比較すべきモデルの数が、選択肢数が多くなるにつれ急速に増大し、計算量が増え、事実上分析が困難になること、また、ABICの値が近い上位の複数のモデル間で一貫性がないような結果になることがあるなど、問題点も残されている。より適切なコウホートモデルを考えるとともに、より効率的なモデル選択の方法も開発してゆかなければならない。

今後に残された課題としては、

- ・多項ロジット変換以外のリンク関数をモデル選択の中に加えること、
- ・交互作用効果や過分散項をモデルに追加すること、
- ・評定尺度法により得られた質問項目について、“その他”や“D.K.”を考慮した累積ロジットモデルを開発すること、

などが挙げられる。

なお、ベイズ型多項ロジットモデルが、 $r = 2$ の場合にベイズ型ロジットモデルに一致することを付録Gに示した。

謝 辞

国民性調査委員会の先達および同僚諸氏、また調査に協力して下さった関係者の方々は、45年以上にもわたる貴重な調査データの蓄積を通してコウホート分析のための豊かな研究土壌を与えて下さいました。2名のレフェリーの方々には重要かつ適切なコメントをいただきました。ここに記して心より感謝いたします。なお、本研究の一部は、文部省科学研究費（平成10、11年度基盤研究(C)(2) 課題番号10680324）および統計数理研究所共同研究（9-共研A-96、10-共研A-81、11-共研-1021）の援助を受けています。

付録 A. 若干の行列演算

行列のベクトル化に関しては、一般に行列 $A(m \times n)$, $B(p \times q)$, $C(n \times p)$ について

$$(A.1) \quad \text{vec } ACB = (B' \otimes A) \text{vec } C$$

がいえる。

交換行列については、 $K_{cr} = K'_{rc} = K^{-1}_{rc}$ であり、一般に

$$(A.2) \quad K_{pm}(A \otimes B) = (B \otimes A) K_{qn}$$

であることに注意する。

また、行列の直和については、行列の積は適宜計算できるものとして、一般に、

$$(A.3) \quad \bigoplus_j A_j B_j = \left(\bigoplus_j A_j \right) \left(\bigoplus_j B_j \right),$$

$$(A.4) \quad \text{vec} (: A_j b_j :) = \left(\bigoplus_j A_j \right) \text{vec} (: b_j :)$$

である。

付録 B. デザイン行列

年齢区分数 $I = 4$, 調査時点数 $J = 3$ の標準コウホート表についてデザイン行列を与える。コウホート区分数は $K = 6$ である。

ロジット・コウホートモデルの場合

年齢・時代・コウホート効果のデザイン行列をそれぞれ X_A , X_P , X_C とすると, ゼロ和制約を考慮して,

$$X_A = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ -1 & -1 & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & & & \end{pmatrix}, \quad X_P = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ 1 & & & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & \\ -1 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & & & & \\ -1 & -1 & & & & \end{pmatrix},$$

$$X_C = \begin{pmatrix} & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ 1 & & & & & \\ & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & 1 & & \\ & & 1 & & & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

である (0 の要素は空白とした)。これらを用いて, APC モデルの場合の (2.4) のデザイン行列 $X = (1 \ X_*)$ は

$$(B.1) \quad X_* = (X_A \ X_P \ X_C)$$

で与えられる。また, たとえば PC モデルの場合には,

$$(B.2) \quad X = (1 \ X_P \ X_C)$$

とする。

ある効果のゼロ和制約を課す前の要素数を l とするとき, その効果の 1 次階差を表現する $(l-1) \times (l-1)$ の行列を $D_{(l)}$ とすれば, ゼロ和制約を考慮して,

$$(B.3) \quad D_{(l)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

となる。これを用いれば, (B.1) の APC モデルに対応する階差行列 D_* は,

$$(B.4) \quad D_* = \begin{pmatrix} D_{(I)} & & \\ & D_{(J)} & \\ & & D_{(K)} \end{pmatrix}$$

で与えられる。(B.2)のPCモデルでは、

$$(B.5) \quad D_* = \begin{pmatrix} D_{(J)} & \\ & D_{(K)} \end{pmatrix}$$

とする。

多項ロジット・コウホートモデルの場合

カテゴリ数 $r = 3$ として、APC/APC/APCモデルの(3.67)のデザイン行列 $\check{X} = (X_a \ X_b)$ は、

$$(B.6) \quad X_a = K_{12,3} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix},$$

$$(B.7) \quad X_b = K_{12,3} \begin{pmatrix} X_A & X_P & X_C & & & \\ & X_A & X_P & X_C & & \\ -X_A & -X_P & -X_C & -X_A & -X_P & -X_C \end{pmatrix}$$

で与えられる。対応して(3.68)の1次階差行列 D_b の1つ(いずれの効果についても第1と第2カテゴリに1次階差制約を入れたとき)は、

$$(B.8) \quad D_b = \begin{pmatrix} D_{(I)} & & & & & \\ & D_{(J)} & & & & \\ & & D_{(K)} & & & \\ & & & D_{(I)} & & \\ & & & & D_{(J)} & \\ & & & & & D_{(K)} \end{pmatrix}$$

である。3.8節の議論から、 D_b としては全部で27通りを入れ換えて用いる必要がある。たとえば年齢効果の第1と第3カテゴリに階差制約を入れ換えたときには、

$$(B.9) \quad D_b = \begin{pmatrix} D_{(I)} & & & & & \\ & D_{(J)} & & & & \\ & & D_{(K)} & & & \\ -D_{(I)} & & & -D_{(I)} & & \\ & & & & D_{(J)} & \\ & & & & & D_{(K)} \end{pmatrix}$$

を用いる。

APC/APC/APCモデル以外の、たとえばAPC/PC/ACモデルは、第2カテゴリの年齢効果 $\beta_2^A = 0$ 、第3カテゴリの時代効果 $\beta_3^P = 0$ 、という制約を課すモデルだから、

$$(B.10) \quad X_b = K_{12,3} \begin{pmatrix} X_A & X_P & X_C & & \\ & -X_P & & X_C & \\ -X_A & & -X_C & -X_C & \end{pmatrix}$$

とすればよい。このときの階差行列として3つある内の1つを示せば、

$$(B.11) \quad D_b = \begin{pmatrix} D_{(I)} & & & \\ & D_{(J)} & & \\ & & D_{(K)} & \\ & & & D_{(K)} \end{pmatrix}$$

である。他の2つは、 $\begin{pmatrix} D_{(K)} & \\ & D_{(K)} \end{pmatrix}$ の部分を $\begin{pmatrix} D_{(K)} & \\ -D_{(K)} & -D_{(K)} \end{pmatrix}$ あるいは $\begin{pmatrix} & D_{(K)} \\ -D_{(K)} & -D_{(K)} \end{pmatrix}$ と入れ換えたものである。

付録 C. 多項分布の分散共分散行列の分解

多項分布の分散共分散行列 V_j (3.36) の一般逆行列 V_j^- は、ムーア・ペンローズ逆行列 V_j^+ と任意の行列 Q を用いて

$$(C.1) \quad V_j^- = V_j^+ + Q - V_j^+ V_j Q V_j V_j^+$$

とかける (Magnus and Neudecker (1999), p.38). ここで、

$$(C.2) \quad V_j^+ = m_j^{-1}[(\text{diag } \pi_j)^{-1} - \mathbf{1}\mathbf{1}'],$$

$$(C.3) \quad V_j^+ V_j = I - \mathbf{1}\pi_j', \quad V_j V_j^+ = I - \pi_j \mathbf{1}'$$

であり、とくに $Q = \mathbf{1}\mathbf{1}'/m_j$ ととれば、

$$(C.4) \quad V_j^- = m_j^{-1}(\text{diag } \pi_j)^{-1}$$

と簡単な一般逆行列が得られる。

これを用いれば、

$$(C.5) \quad V_j = V_j V_j^- V_j = U_j' U_j$$

と分解できる。ここで、

$$(C.6) \quad U_j = m_j^{-\frac{1}{2}}(\text{diag } \pi_j)^{-\frac{1}{2}} V_j = (\text{diag } \mu_j)^{\frac{1}{2}}(I - \mathbf{1}\pi_j')$$

である。また、 $\check{V}_j$ の方はコレスキー分解を用いれば

$$(C.7) \quad \check{V}_j = \check{U}_j' \check{U}_j$$

のように分解できる。

以上より、

$$(C.8) \quad U = \bigoplus_{j=1}^c U_j, \quad \check{U} = \bigoplus_{j=1}^c \check{U}_j$$

とおくと、

$$(C.9) \quad V = \bigoplus_{j=1}^c V_j = \bigoplus_{j=1}^c U_j' U_j = U' U,$$

$$(C.10) \quad \check{V} = \bigoplus_{j=1}^c \check{V}_j = \bigoplus_{j=1}^c \check{U}_j' \check{U}_j = \check{U}' \check{U}$$

である。

付録 D. 多項ロジットモデルのスコア・ベクトルとヘッセ行列

多項ロジットモデルのスコア・ベクトルは, (3.45), (3.56), (3.63) より

$$\begin{aligned}
 (D.1) \quad \frac{\partial \ell}{\partial \beta} &= \frac{\partial \eta'}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \ell}{\partial \pi} \\
 &= \check{X}' \left[r^{-1} \bigoplus_{j=1}^c [(\text{diag } \pi_j) - \pi_j \pi_j'] \right] \left[\bigoplus_{j=1}^c (\text{diag } \pi_j)^{-1} \right] y \\
 &= r^{-1} \check{X}' \left[\bigoplus_{j=1}^c [(\text{diag } \pi_j) - \pi_j \pi_j'] (\text{diag } \pi_j)^{-1} \right] y \\
 &= r^{-1} \check{X}' (: (I - \pi_j 1') y_j :) = r^{-1} \check{X}' (: y_j - \mu_j :) \\
 &= r^{-1} \check{X}' (y - \mu)
 \end{aligned}$$

であり, またヘッセ行列は, (3.34), (D.1) より

$$\begin{aligned}
 (D.2) \quad \frac{\partial^2 \ell}{\partial \beta \partial \beta'} &= \frac{\partial \eta'}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \pi'}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \mu'}{\partial \pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\partial \ell}{\partial \beta'} \right) \\
 &= -r^{-1} \check{X}' \left[r^{-1} \bigoplus_{j=1}^c [(\text{diag } \pi_j) - \pi_j \pi_j'] \right] [(\text{diag } m) \otimes I] \check{X} \\
 &= -r^{-2} \check{X}' V \check{X}
 \end{aligned}$$

である。

付録 E. ベイズ型多項ロジットモデルのパラメータの推定法

まず, $D = (\mathbf{0} \ D_b)$ において,

$$\begin{aligned}
 (E.1) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \beta} &= r^{-1} \check{X}' (y - \mu) - D' \Sigma^{-1} D_b \beta_b \\
 &= r^{-1} (X_a \ X_b)' V' V^{-1} (y - \mu) - D' \Sigma^{-1} D \beta,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (E.2) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta \partial \beta'} &= -r^{-2} \check{X}' V \check{X} - D' \Sigma^{-1} D \\
 &= -r^{-2} (X_a \ X_b)' U' U (X_a \ X_b) - D' \Sigma^{-1} D \\
 &= - \begin{pmatrix} X_a & X_b \\ \mathbf{0} & D_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-2} U' U & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a & X_b \\ \mathbf{0} & D_b \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

である。

超パラメータ行列 Σ を所与として, 対数事後尤度 $\phi(\beta|y, \Sigma)$ の最大化によりパラメータ β を推定する。すなわち, $\partial \phi / \partial \beta = \mathbf{0}$ を解く。このため, スコア・ベクトル $\partial \phi / \partial \beta$ を近似値 β_0 のまわりでテイラー展開し $\mathbf{0}$ において,

$$(E.3) \quad - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta_0 \partial \beta_0'} \hat{\beta} \simeq - \frac{\partial^2 \phi}{\partial \beta_0 \partial \beta_0'} \beta_0 + \frac{\partial \phi}{\partial \beta_0}$$

を得, これを繰り返し解いて $\hat{\beta}$ を求める。

ここで,

$$(E.4) \quad Z = \begin{pmatrix} r^{-1}U_0 & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a & X_b \\ 0 & D_b \end{pmatrix},$$

$$(E.5) \quad z = \begin{pmatrix} r^{-1}U_0 & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_0 + rV_0^-(y - \mu_0) \\ 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} r^{-1}U_0[\eta_0 + r\{(\text{diag } \mu_0)^{-1}y - 1\}] \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, (E.3) の左辺と右辺はそれぞれ

$$(\text{左辺}) = Z'Z\hat{\beta},$$

$$(\text{右辺}) = [r^{-2}(X_a \ X_b)'U_0'U_0(X_a \ X_b) + D'\Sigma^{-1}D]\beta_0 \\ + r^{-1}(X_a \ X_b)'V_0V_0^-(y - \mu_0) - D'\Sigma^{-1}D_b\beta_{b0} \\ = r^{-2}(X_a \ X_b)'U_0'U_0\eta_0 + r^{-1}(X_a \ X_b)'U_0'U_0V_0^-(y - \mu_0) \\ = Z'z$$

となるから, 結局, 重み付き最小2乗問題

$$(E.6) \quad Z'Z\hat{\beta} = Z'z$$

を繰り返し解いて, $\hat{\beta}$ を求めることに帰着する.

付録 F. ベイズ型多項ロジットモデルの ABIC の導出

対数事後尤度 $\phi(\beta)$ を $\hat{\beta}$ のまわりでテイラー展開して,

$$(F.1) \quad \exp\{\phi(\beta)\} \simeq \exp\{\phi(\hat{\beta})\} \\ \times \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \beta_a - \hat{\beta}_a \\ \beta_b - \hat{\beta}_b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} X_a & X_b \\ 0 & D_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r^{-2}\hat{V} & 0 \\ 0 & \Sigma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_a & X_b \\ 0 & D_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_a - \hat{\beta}_a \\ \beta_b - \hat{\beta}_b \end{pmatrix}\right\}.$$

したがって,

$$(F.2) \quad \int \exp\{\phi(\beta)\} \simeq \exp\{\phi(\hat{\beta})\} \\ \times \int \exp\left\{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \beta_a - \hat{\beta}_a \\ \beta_b - \hat{\beta}_b \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} r^{-2}X_a'\hat{V}X_a & r^{-2}X_a'\hat{V}X_b \\ r^{-2}X_b'\hat{V}X_a & r^{-2}X_b'\hat{V}X_b + D_b'\Sigma^{-1}D_b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_a - \hat{\beta}_a \\ \beta_b - \hat{\beta}_b \end{pmatrix}\right\} d\beta_b \\ = \exp\{\phi(\hat{\beta})\} \exp\left\{-\frac{1}{2r^2}(\beta_a - \hat{\beta}_a)'\Sigma_{aa}^{-1}(\beta_a - \hat{\beta}_a)\right\} \\ \times (2\pi)^{\frac{p_b}{2}} |r^{-2}X_b'\hat{V}X_b + D_b'\Sigma^{-1}D_b|^{-\frac{1}{2}}$$

を得る. 右辺の $-2\log$ をとり, ABIC が小さくなるように $\beta_a = \hat{\beta}_a$ ととれば,

$$(F.3) \quad \text{ABIC} \simeq -2\phi(\hat{\beta}) - p_b \log 2\pi + \log |r^{-2}X_b'\hat{V}X_b + D_b'\Sigma^{-1}D_b| + 2h \\ = -2y'\log \hat{\pi} + p_b \log 2\pi - \log |D_b'\Sigma^{-1}D_b| + \hat{\beta}_b'D_b'\Sigma^{-1}D_b\hat{\beta}_b \\ - p_b \log 2\pi + \log |r^{-2}X_b'\hat{V}X_b + D_b'\Sigma^{-1}D_b| + 2h.$$

ABIC の比較には定数 $2y'\log y - 2y'\log[(\text{diag } m) \otimes I]1$ を足してもかまわないから, 結局

$$(F.4) \quad \text{ABIC} \simeq 2\mathbf{y}' \log \mathbf{y} - 2\mathbf{y}' \log \hat{\boldsymbol{\pi}} - 2\mathbf{y}' \log [(\text{diag } \mathbf{m}) \otimes \mathbf{I}] \mathbf{1} \\ + \hat{\boldsymbol{\beta}}'_b \mathbf{D}'_b \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}_b \hat{\boldsymbol{\beta}}_b - \log |\mathbf{D}'_b \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}_b| + \log |r^{-2} \mathbf{X}'_b \hat{\mathbf{V}} \mathbf{X}_b + \mathbf{D}'_b \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}_b| + 2h$$

となり, (3.72) を得る.

付録 G. ベイズ型ロジットモデルとベイズ型多項ロジットモデルとの関係

多項分布で $r = 2$ の場合が二項分布であり, この場合にベイズ型多項ロジットモデルの推定値と ABIC が, ベイズ型ロジットモデルのそれぞれに一致することを示す.

まず, 両モデルの解 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の一致をみる. 多項ロジット変換は, $r = 2$ の場合, $\pi_{2j} = 1 - \pi_{1j}$ であるから,

$$(G.1) \quad \boldsymbol{\eta}_j = \begin{pmatrix} \log \pi_{1j}^2 / (\pi_{1j} \pi_{2j}) \\ \log \pi_{2j}^2 / (\pi_{1j} \pi_{2j}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log \pi_{1j} / (1 - \pi_{1j}) \\ -\log \pi_{1j} / (1 - \pi_{1j}) \end{pmatrix}$$

となり, 冗長なロジット変換であることがわかる. このとき,

$$(G.2) \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}'\mathbf{J} = 2$$

である.

多項ロジットモデルのデザイン行列 $\check{\mathbf{X}}$ を (2.4) の $\mathbf{X}$ と同じものを用いて

$$(G.3) \quad \check{\mathbf{X}} = \mathbf{K}_{c2}(\mathbf{J} \otimes \mathbf{X}) = (\mathbf{X} \otimes \mathbf{J})\mathbf{K}_{1c} = (\mathbf{X} \otimes \mathbf{J})$$

と表わすと, (E.1) と (3.32) より

$$(G.4) \quad \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\beta}} = \frac{1}{2} (\mathbf{X}' \otimes \mathbf{J}') (\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}) (\check{\mathbf{y}} - \check{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{D}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\beta}_b \\ = \mathbf{X}' (\check{\mathbf{y}} - \check{\boldsymbol{\mu}}) + \mathbf{D}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}_b \boldsymbol{\beta}_b.$$

また, (E.2) と (3.43) より

$$(G.5) \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \boldsymbol{\beta} \partial \boldsymbol{\beta}'} = -\frac{1}{4} (\mathbf{X}' \otimes \mathbf{J}') (\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}) \check{\mathbf{V}} (\mathbf{I} \otimes \mathbf{J}') (\mathbf{X} \otimes \mathbf{J}) - \mathbf{D}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D} \\ = -\mathbf{X}' \check{\mathbf{V}} \mathbf{X} + \mathbf{D}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{D}$$

となる. $\check{\mathbf{y}}, \check{\boldsymbol{\mu}}, \check{\mathbf{V}}, \mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b, \mathbf{D}_b$ がそれぞれロジットモデルの $\mathbf{y}, \boldsymbol{\mu}, \mathbf{V}, \mathbf{1}, \mathbf{X}_*, \mathbf{D}_*$ と同じであることに気をつければ, 上の 2 式は (2.13), (2.14) とそれぞれ同じであることがわかる. したがって, $r = 2$ の場合のベイズ型多項ロジット・コウホートモデルとベイズ型ロジット・コウホートモデルの解 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は一致する.

次に ABIC の一致をみる. 上の $-r^{-2} \check{\mathbf{X}}' \mathbf{V} \check{\mathbf{X}}$ に関する考察から $-r^{-2} \mathbf{X}'_b \hat{\mathbf{V}} \mathbf{X}_b$ は (2.17) の $\mathbf{X}'_* \hat{\mathbf{V}} \mathbf{X}_*$ と一致する. $r = 2$ のとき, $\check{\mathbf{Y}} = \mathbf{L}\mathbf{Y}$ は $1 \times c$ のベクトルだから $\check{\mathbf{y}} = \text{vec } \check{\mathbf{Y}} = \check{\mathbf{Y}}'$ であることに注意すると,

$$(G.6) \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{m}\mathbf{j}' + \check{\mathbf{y}}\mathbf{J}' = (\mathbf{0} : \mathbf{m}) + (\check{\mathbf{y}} : -\check{\mathbf{y}}) \\ = (\check{\mathbf{y}} : \mathbf{m} - \check{\mathbf{y}})$$

となり (誤解を避けるためにベクトルを仕切る $:$ を使った),

$$(G.7) \quad K_{rc}y = \tilde{y} = \text{vec } Y' = \begin{pmatrix} \tilde{y} \\ m - \tilde{y} \end{pmatrix}$$

となる。これを用いれば

$$(G.8) \quad y' \log y = y' K'_{rc} K_{rc} \log y = \tilde{y}' \log \tilde{y} + (m - \tilde{y})' \log (m - \tilde{y}),$$

同様に,

$$(G.9) \quad y' \log \hat{\mu} = \tilde{y}' \log \hat{\mu} + (m - \tilde{y})' \log (m - \hat{\mu})$$

を得る。以上より, (3.73) と (2.18) の χ^2 が一致し, したがって (3.72) と (2.17) の ABIC が $r = 2$ の場合一致することがわかる。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J. M. Bernardo, M. H. DeGroot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith), 143-166, University Press, Valencia.
- Glenn, N. D. (1977). *Cohort Analysis*, Sage Publications, Beverly Hills. (『コーホート分析法』(藤田英典訳), 朝倉書店, 東京)
- 華山宣胤 (1999). 時代環境と年齢の効果を解析する応答モデル, 応用統計学, **28**, 1-20.
- Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1999). *Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Revised Edition, Wiley, New York.
- Mason, W. M. and Fienberg, S. E. (eds.) (1985). *Cohort Analysis in Social Research*, Springer, New York.
- McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989). *Generalized Linear Models*, 2nd ed., Chapman and Hall, London.
- 中村 隆 (1982). ベイズ型コウホート・モデル——標準コウホート表への適用——, 統計研彙報, **29**, 77-97.
- Nakamura, T. (1986). Bayesian cohort models for general cohort table analyses, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **32**, 353-370.
- 中村 隆 (1989). 継続調査によって社会の変化を捉えるコウホート分析の方法, 理論と方法, **4**, 5-23.
- 中村 隆 (1995). 交互作用効果モデルと過大分散モデルを用いたコウホート分析——「日本人の国民性調査」データへの適用——, 統計数理, **43**, 99-119.
- 中村 隆, 土屋隆裕, 前田忠彦, 坂元慶行 (1999). 国民性の研究 第10次全国調査——1998年全国調査——, 統計数理研究所研究リポート, No. 83.
- Ryder, N. B. (1965). The cohort as a concept in the study of social change, *American Sociological Review*, **30**, 843-861.

A Bayesian Multinomial Logit Cohort Model for Data Obtained Using a Multiple Choice Question

Takashi Nakamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

This paper presents a Bayesian multinomial logit cohort model to analyze longitudinal social survey data obtained using a multiple choice question. It gives the description of the model, the estimation method of the parameters, the derivation of ABIC (Akaike's Bayesian information criterion), and the model selection scheme. It demonstrates the Bayesian multinomial logit cohort model is identical to the existing Bayesian logit cohort model when the number of response categories is two. A question on religious attitude from the study of the Japanese national character is analyzed both by using the logit model with each category separated, and by using the multinomial logit model on all categories simultaneously, to show the need for the latter model.

Key words: Cohort analysis, multiple choice question, the study of the Japanese national character, Bayesian model, ABIC, religious attitude.