

# ジャンプ拡散過程モデルによる 非ガウス時系列のフィルタリングと予測

総合研究大学院大学\* 飯 野 光 徳  
統計数理研究所 尾 崎 統

(受付 1999 年 4 月 8 日; 改訂 1999 年 7 月 13 日)

## 要 旨

本稿では、ジャンプを含んだ時系列モデルの新たな推定方法を提示した。

我々の方法は、複数のカルマン・フィルターと新たなジャンプ検出アルゴリズムから構成される。観測値は、有限個の状態のひとつから生じると仮定し、事後確率を用いて事後的に検出を行う。その結果、これまでの研究では検出されることの無かった低頻度で大きな振幅を持つジャンプを検出することが可能である。

キーワード：ジャンプ拡散過程, 状態空間モデル, AIC, ジャンプ検出, ファイナンス。

## 1. はじめに

ジャンプ拡散過程モデルは、金融資産価格の不連続な変動を表現するために、一般的に用いられているモデルである。

数理ファイナンスにおいては、Merton (1976) は資産価格の変動を一時的な需給不均衡や経済見通しの変化に伴う正常な変動 (normal vibrations) と重要な情報の偶発的な発生に伴う異常な変動 (abnormal vibrations) に分類し、前者をブラウン運動、後者をポアソン過程を用いて表現し、不連続な価格変動を考慮したオプション価格を導出している。更に、Bates (1996a) 等は Merton モデルを一般化して、資産価格の変動特性の一つである不均一分散を考慮したオプション評価モデルを考案している。

また、実証分析においては、Ball and Torous (1983, 1985) が Merton モデルの推定を行い、株価の変動におけるジャンプの存在を主張しており、Akgiray and Booth (1988) は外国為替レート of 価格変動モデルとして、ジャンプ拡散過程が安定分布等よりもあてはまりが良好であることを主張している。更に、Jorion (1988) は ARCH モデルを用いて不均一分散を考慮した後でも、ジャンプが存在することを示している。これらの分析では、価格変化をガウス分布とジャンプの大きさが対数正規分布に従う複合ポアソン過程の混合分布で表現して、最尤法を用いて推定を行っており、いずれも高頻度で振幅の小さなジャンプを検出する結果となっている。

この高頻度で振幅の小さなジャンプは、Merton の記述にある異常な変動や時系列モデルを構築する際に問題となるショット・ノイズ的な変動とは明らかに異なるものである。Bates (1996b) は、これまでのアプローチが、マクロ経済や個別企業に関する情報を拾い上げているにすぎず、より重要と思われる低頻度で大きな振幅のジャンプを検出するのが困難であることを

\* 統計科学専攻：〒106-8569 東京都港区南麻布 4-6-7。

指摘している。

本稿の目的は、情報量規準とジャンプ拡散過程から導入された局所ガウス局所線形状態空間モデルを用いて、低頻度で大きな振幅のジャンプを含む非ガウス時系列の新たな推定方式を提示することである。また、外国為替レートを対象にした実証分析を通して、少数の異常な変動の影響の大きさを示すことである。

本稿の構成は次の通りである。

2節では、ジャンプを考慮したモデルの推定方法を述べる。推定手続きは、非ガウス・モデルのガウス・モデルを用いた近似、予測とフィルタリング、ジャンプの検出、パラメータの推定から構成される。

3節では、外国為替レートを対象にした分析を行い、金融データのモデリングにおいて少数のジャンプを考慮することの影響の大きさを示す。

4節では、シミュレーション・データを用いて、我々の手法の有効性を示す。

5節では、簡単な結論を述べる。

## 2. 非ガウス・モデルの推定方法

対象とするモデルは、次式で表現されるような不均一分散を考慮したジャンプ拡散過程である。

$$(2.1) \quad dS_t = (\alpha + \beta S_t) dt + \sigma_t dW_{1,t} + \kappa_t dq_t$$

$$(2.2) \quad d \log \sigma_t^2 = (\gamma + \delta \log \sigma_t^2) dt + \varepsilon dW_{2,t}$$

ここで、

$S_t$ : 時点  $t$  における資産価格の自然対数値

$\sigma_t^2$ :  $S_t$  の条件付分散

$W_{1,t}, W_{2,t}$ : 独立なブラウン運動

$q_t$ : ポアソン・レート  $\lambda$  のポアソン過程

$\kappa_t$ : ジャンプの大きさ,  $\kappa_t \sim N(0, \theta_\kappa^2)$

である。

ジャンプ拡散過程の一般的な推定方法は、離散時間近似を行った後に最尤法を用いるものである (Ball and Torous (1983, 1985), Akgiray and Booth (1988), Jorion (1988))。この場合の尤度関数は、ポアソン分布の密度関数を加重とする混合正規分布で近似されるため、ジャンプの影響は混合正規分布の裾の厚さによって表現されることになる。この結果、Bates (1996b) の指摘にあるように、高頻度で小さな振幅のジャンプを検出することが可能なものの、モデル構築の際に重大な影響を持つことが予想される低頻度で大きな振幅のジャンプを検出することは困難である。

以下で述べる我々のアプローチは、各時点において通常の変動と異常に大きな変動は異なる状態から生じていると考え、各時点においてその観測値が生じた状態を事後的に判定するものである。この時、それぞれの状態はパラメータ値の異なるガウス・モデルで表現され、事後確率は複数のカルマン・フィルタを用いて算出される。

このように、非ガウス・モデルを状態によって異なるガウス・モデルを用いて表現する方法は、multiprocess, multiple model, partitioning approach 等と呼ばれるもので、以前から存在するものである (Harrison and Stevens (1976), Tugunait and Haddad (1979), Tugunait

(1982)). また、ジャンプの検出への利用も Willsky (1976), Smith and West (1983), Kirkendall (1992) 等に見られる。しかし、我々のアプローチは、ジャンプの検出、パラメータの推定等を一貫して尤度原理あるいは赤池のエントロピー最大化原理に基づいて行う点、ジャンプの検出において1期先の観測値を含めた事後確率を考慮している点で従来のものとは異なるものである。

以下に示すように、手続きは、ガウス・モデルを用いた近似、予測とフィルタリング、ジャンプ検出、パラメータ推定から構成される。

## 2.1 ガウス・モデルを用いた近似

ここでは、ジャンプ拡散モデルを各時点において状態によって異なるパラメータ値を持つ2つのガウス・モデルで近似する。

まず、(2.1) をオイラー法を用いて離散時間近似を行い、ポアソン・レート  $\lambda$  が十分小さいものと仮定して、ポアソン分布をベルヌーイ変数を用いて近似すると次式が得られる。

$$S_t = \alpha + (1 + \beta) S_{t-1} + \sigma_{t-1} \xi_{1,t} + \kappa_{t-1} \iota_{\kappa,t}$$

ここで、 $\xi_{1,t} \sim N(0, 1)$ ,  $\iota_{\kappa,t}$  はベルヌーイ変数であり、 $E(\iota_{\kappa,t}) = \lambda$  とする。

更に、 $\kappa_t \sim N(0, \theta_\kappa^2)$  に着目すると、 $\xi_{1,t}$  の定義を変えることによって、次の表現が可能である。

$$S_t = \alpha + (1 + \beta) S_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}^2 + \theta_\kappa^2} \xi_{1,t}$$

次に、(2.2) をオイラー法を用いて離散時間近似を行うと、次式が得られる。

$$\log \sigma_t^2 = \gamma + (1 + \delta) \log \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon \xi_{2,t}$$

ここで、 $\xi_{2,t} \sim N(0, 1)$  である。ところが、この不均一分散モデルは推定が困難なことが知られており (Tayler (1994)), 取り扱いが容易な ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) モデルを用いた近似を行うことが多い (Nelson (1990), Nelson and Foster (1994) 参照)。

そこで、Nelson and Foster (1994) の拡散近似を用いて、 $\xi_{2,t}$  を  $\xi_{1,t}$  の決定的な関数で近似すると次式が得られる。

$$\log \sigma_t^2 = \gamma + (1 + \delta) \log \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

以上をまとめると、対象とするシステムは次式で表現される。

$$(2.3) \quad S_t = \alpha + (1 + \beta) S_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}^2 + \theta_\kappa^2} \xi_{1,t}$$

$$(2.4) \quad \log \sigma_t^2 = \gamma + (1 + \delta) \log \sigma_{t-1}^2 + \varepsilon \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

このシステムは、時点  $t$  における観測値を  $z_t$  とすると、次の状態空間モデルを用いて表現される。

$$(2.5) \quad X_t = F_t X_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim N(0, Q_t)$$

$$(2.6) \quad z_t = H_t X_t$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 X_t &= [S_t \quad \log \sigma_{t-1}^2 \quad 1]' \\
 F_t &= \begin{bmatrix} 1 + \beta & 0 & \alpha \\ 0 & 1 + \delta & \gamma + \varepsilon \frac{\xi_{1,t-1}^2 - 1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 H_t &= [1 \quad 0 \quad 0] \\
 Q_t &= \begin{bmatrix} \sigma_{t-1}^2 + \theta_k^2 \iota_{k,t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

であり,  $\xi_{1,t-1}$  は時点  $t-1$  における予測誤差を基準化したものである.

## 2.2 予測, フィルタリング

以下では, 時点  $t$  におけるモデルの状態  $M_t$  をベルヌーイ変数  $\iota_{k,t}$  の値で分類し,  $M_t^{(1)}$  で通常の状態,  $M_t^{(2)}$  でジャンプが生じた状態を表すことにする.

$$M_t = \begin{cases} M_t^{(1)} & \text{if } \iota_{k,t} = 0 \\ M_t^{(2)} & \text{if } \iota_{k,t} = 1 \end{cases}$$

ここで, 時点  $t$  における状態を  $M_t = M_t^{(i)}$  と仮定すると, カルマン・フィルターを利用することが可能になり, 1期先予測とフィルタリングを逐次的に計算することができる. アルゴリズムは次の通りである.

### (1期先予測)

$M_t = M_t^{(i)}$  を仮定して, 時点  $t-1$  までの観測値  $Z_{t-1} = \{z_1, z_2, \dots, z_{t-1}\}$  にもとづいた1期先予測の平均と共分散行列を  $X_{t|t-1}^{(i)}$ ,  $P_{t|t-1}^{(i)}$  とすると,

$$(2.7) \quad X_{t|t-1}^{(i)} = F_t X_{t-1|t-1}^{(i)}$$

$$(2.8) \quad P_{t|t-1}^{(i)} = F_t P_{t-1|t-1}^{(i)} F_t' + Q_t.$$

### (フィルタリング)

$M_t = M_t^{(i)}$  を仮定して, 時点  $t$  までの観測値  $Z_t = z_1, z_2, \dots, z_t$  にもとづいたフィルター値の平均と共分散行列を  $X_{t|t}^{(i)}$ ,  $P_{t|t}^{(i)}$  とすると,

$$(2.9) \quad X_{t|t}^{(i)} = X_{t|t-1}^{(i)} + K_t^{(i)} (z_t - H_t X_{t|t-1}^{(i)})$$

$$(2.10) \quad P_{t|t}^{(i)} = (I - K_t^{(i)} H_t) P_{t|t-1}^{(i)}$$

$$(2.11) \quad K_t^{(i)} = P_{t|t-1}^{(i)} H_t' (H_t P_{t|t-1}^{(i)} H_t')^{-1}.$$

ただし,  $S_t$  の予測誤差の基準化値  $\xi_{1,t}$  は,  $z_t = S_t$  の関係から,  $z_t$  の予測誤差を基準化して算出する.

$$(2.12) \quad \xi_{1,t} = \frac{z_t - H_t X_{t|t-1}^{(i)}}{H_t P_{t|t-1}^{(i)} H_t'}$$

以上のアルゴリズムを  $\{M_t^{(1)}, M_t^{(2)}\}$  に対して同時に用いることにより, 時点  $t$  における各モデルの予測誤差  $z_t - H_t X_{t|t-1}^{(i)}$  と誤差分散  $H_t P_{t|t-1}^{(i)} H_t'$  から尤度が算出される.

## 2.3 ジャンプ検出

大別すると, ジャンプの表現方法には2通りの考え方がある.

ひとつは、非ガウス・ノイズによる裾の厚い分布関数を用いるものである。これまでのファイナンスにおける研究は、この考え方に従っており、高頻度で小さな振幅のジャンプを表現するものの、より重要と考えられる低頻度で大きな振幅のジャンプを表現できない結果となっている (Bates (1996b))。

もうひとつは、Kwakernaak (1980) 等のように点過程を用いてジャンプを表現するものである。この場合には、低頻度で大きな振幅のジャンプの表現が可能となる。しかし、各時点においてジャンプの有無を判断する必要があるため、効率的なジャンプの検出方法が不可欠である。以下では、本稿で用いる新たな逐次的なジャンプ検出アルゴリズムについて述べる。

状態の系列を

$$O = \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$$

で表すと、ジャンプ検出の問題は、全ての観測値  $Z^N = \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$  を所与とした  $O$  の最尤推定の問題と考えることができ、最尤検出  $O^*$  は次式で定義される。

$$O^* = \arg \max p(Z^N|O)$$

ここで、 $p(Z^N|O)$  は  $O$  を所与とした場合の  $Z^N$  の確率密度関数である ((2.14) 式)。

このとき注意すべきことは、 $O$  が離散値のみをとるため、全ての系列に対する尤度関数を算出することが、尤度関数を最大化する唯一の方法であることである。上記モデルにおいては、 $\epsilon_{k,t}$  が各時点において 0 か 1 の可能性があるので、尤度関数は  $2^N$  通り考えられる。したがって、最大尤度は、この  $2^N$  通りの場合に対して全てのパラメータを最適化することによって得られる。このようにして得られる推定値が最尤推定値となるが、計算量が指数的に増大するため一般的には実行不可能である。

このような複雑性は、観測値  $z_s (s > t)$  が過去の状態  $M_t$  に依存するために生じている。ところが、その影響は  $z_s$  のマルコフ性のため時間とともに指数的に減衰する。そこで、 $M_t$  の  $z_s$  への影響が局所的なものに留まるものと仮定し、 $z_s (s > t+1)$  の  $M_t$  との関係を無視すると、次のような検出方法が導出される。

$$M_t^* = \arg \max p(M_t|Z^{t+1}), \quad \text{for } t = 1, 2, \dots, N-1$$

ここで、 $p(M_t|Z^{t+1})$  は  $Z^{t+1}$  を所与とした場合の  $M_t$  の確率密度関数である。

このような検出は、大域的には最適ではないが、計算負荷を大きく軽減し、オンラインに近い処理が可能である。検出ルールは、次式で表現される。

$$\hat{M}_t = \begin{cases} M_t^{(1)} & \text{if } \Pr(M_t = M_t^{(1)}|Z^{t+1}) > \Pr(M_t = M_t^{(2)}|Z^{t+1}) \\ M_t^{(2)} & \text{if } \Pr(M_t = M_t^{(1)}|Z^{t+1}) < \Pr(M_t = M_t^{(2)}|Z^{t+1}) \end{cases}$$

$Z^{t+1}$  の下での  $M_t^{(i)}$  の事後確率  $\Pr(M_t = M_t^{(i)}|Z^{t+1})$  は、ベイズの定理を用いて次式から算出される。

$$(2.13) \quad \Pr(M_t = M_t^{(i)}|Z^{t+1}) = \frac{\sum_{k=1}^2 f_{i,k}(t+1|t) f_i(t|t-1) \pi_i \pi_k}{\sum_{k=1}^2 \sum_{i=1}^2 f_{i,k}(t+1|t) f_i(t|t-1) \pi_i \pi_k}$$

ここで、 $\pi_i$  は各状態  $M_t^{(i)}$  の事前確率、 $f_i(t|t-1)$  は  $M_t^{(i)}$  を所与とした場合の  $z_t$  の条件付き密度、 $f_{i,k}(t+1|t)$  は  $M_t^{(i)}$ 、 $M_{t+1}^{(k)}$  を所与とした場合の  $z_{t+1}$  の条件付き密度を表す。

$$\begin{aligned}\pi_i &= \Pr(M_t = M_t^{(i)}) \\ &= \begin{cases} 1-\lambda & \text{if } M_t = M_t^{(1)} \\ \lambda & \text{if } M_t = M_t^{(2)} \end{cases} \\ f_i(t|t-1) &= \Pr(z_t|M_t^{(i)}, Z^{t-1}) \\ f_{i,k}(t+1|t) &= \Pr(z_{t+1}|M_t^{(i)}, M_{t+1}^{(k)}, Z^t)\end{aligned}$$

これらの値は、カルマン・フィルターを用いて容易に算出することができる。

## 2.4 パラメータ推定

状態の系列  $O = \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  を所与とすると、対数尤度関数は次式で表現される。

$$\begin{aligned}(2.14) \quad \log p(z_1, \dots, z_N | O) &= -\frac{N}{2} \log 2\pi - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^2 I(M_t = M_t^{(i)}) \log(V_t^{(i)}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \sum_{i=1}^2 I(M_t = M_t^{(i)}) \frac{v_t^{(i)}}{V_t^{(i)}} \\ v_t^{(i)} &= z_t - H_t X_{t-1}^{(i)} \\ V_t^{(i)} &= H_t P_{t-1}^{(i)} H_t'\end{aligned}$$

ここで、 $I(M_t = M_t^{(i)})$  は、時点  $t$  におけるジャンプの有無を表す指示関数である。

$$I(M_t = M_t^{(i)}) = \begin{cases} 1 & \text{if } M_t = M_t^{(i)} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

パラメータの推定値は、この対数尤度関数を非線形最適化の手続きを用いて最大化することによって算出される。

このため、最尤推定値は、考えられる  $2^N$  通りの状態  $O = \{M_1, M_2, \dots, M_N\}$  に対応する対数尤度関数を最大化し、それらの中で最大となるものの引数として算出されることになる。ただし、このような手続きは膨大な計算を必要とするため、一般的には実行不可能であり、実際的なものではない。そこで、本稿では大域的な最適化を行わずに、前述のジャンプ検出アルゴリズムを利用してヒューリスティックに対数尤度関数の最大化を行う。最適化の手続きは次の通りである。

1. 時点  $t$  において、ジャンプの検出  $\hat{M}_t$  を行う。
2. ジャンプの検出結果  $\hat{M}_t$  を所与として、 $z_t$  の対数尤度  $\log p(z_t | \hat{M}_t)$  を算出する。
3. 1, 2 の手続きを  $t = 1, 2, \dots, N$  に対して反復し、得られた  $\hat{O} = \{\hat{M}_1, \hat{M}_2, \dots, \hat{M}_N\}$  を所与とした対数尤度  $\log p(z_1, \dots, z_N | \hat{O})$  を非線形最適化の手続きを用いて最大化する。

このような手続きは、ダイナミックなマルコフモデルの時間局所的特性を利用して検索ルートを極力押さえた方法となっており計算負荷が著しく小さくなり、オンラインに近い処理が可能になる。この方法においては、当然大域的最適解でなく局所最適解に到達する可能性が存在することは ARMA モデルの最尤計算など通常の非線形最適化アルゴリズムに頼る最尤計算の場合と同様である。したがって、その有効性についてはシミュレーションデータを用いた数値的検討が必要であり、これに関しては 4 節で議論する。

## 3. 外国為替レートモデリング

本節では、外国為替レートを対象にして、(2.3), (2.4) 式で表現されるモデルの推定結果を示す。

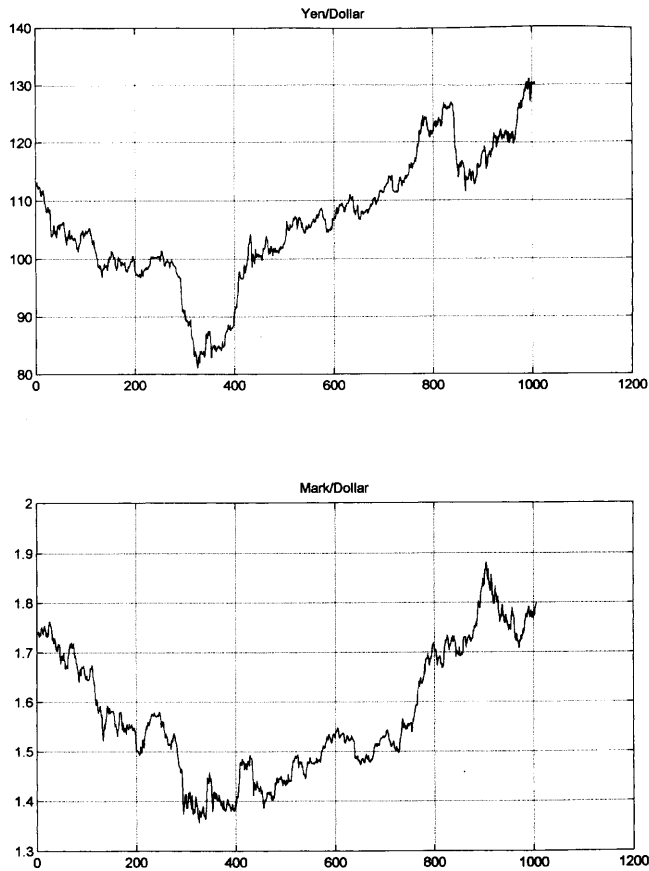


図1. 対象データ  $P_t$  の推移 (円/ドル, マルク/ドル)。

対象データは、円／ドル、マルク／ドルの日次データ、対象期間は1994年1月から1997年12月までとする（図1参照）。データの出所は、「Federal Reserve Statistical Release H. 10」である。

以下では、ジャンプを考慮しないモデルとジャンプを考慮したモデルの推定結果をAICを用いて比較する。ただし、使用するデータは、時点  $t$  における価格  $P_t$  を用いて、次式から算出し、システム変数の初期値  $\{S_0, \log \sigma_0^2\}$  はパラメータとして推定した。

$$S_t = \log(P_t) \times 100$$

### 3.1 ジャンプを考慮しないモデル

まず、ジャンプの生じる事前確率を  $\lambda = 0$  として、不均一分散のみを考慮したモデルの推定結果を示す。

(円/ドル)

$$S_t = 0.1572 + 0.9996S_{t-1} + \sigma_{t-1}\xi_{1,t}$$

$$\log \sigma_t^2 = -0.0092 + 0.9893 \log \sigma_{t-1}^2 + 0.0358 \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

対数尤度: -988.2

AIC: 1,990.4

平均二乗誤差: 0.4547

(マルク/ドル)

$$S_t = 0.1329 + 0.9972S_{t-1} + \sigma_{t-1}\xi_{1,t}$$

$$\log \sigma_t^2 = -0.0202 + 0.9813 \log \sigma_{t-1}^2 + 0.0472 \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

対数尤度: -861.6

AIC: 1,737.2

平均二乗誤差: 0.3595

図2～3は、推定したモデルを用いて算出した予測誤差、誤差分散、基準化した予測誤差の推移と基準化した予測誤差のヒストグラムを示したものである。

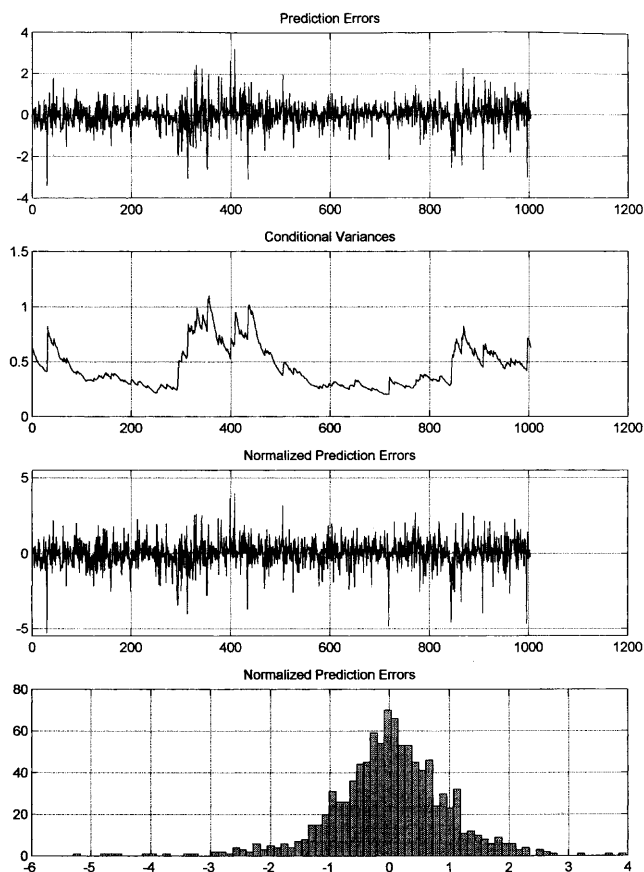


図2. 推定結果 (円/ドル, ジャンプ無し).

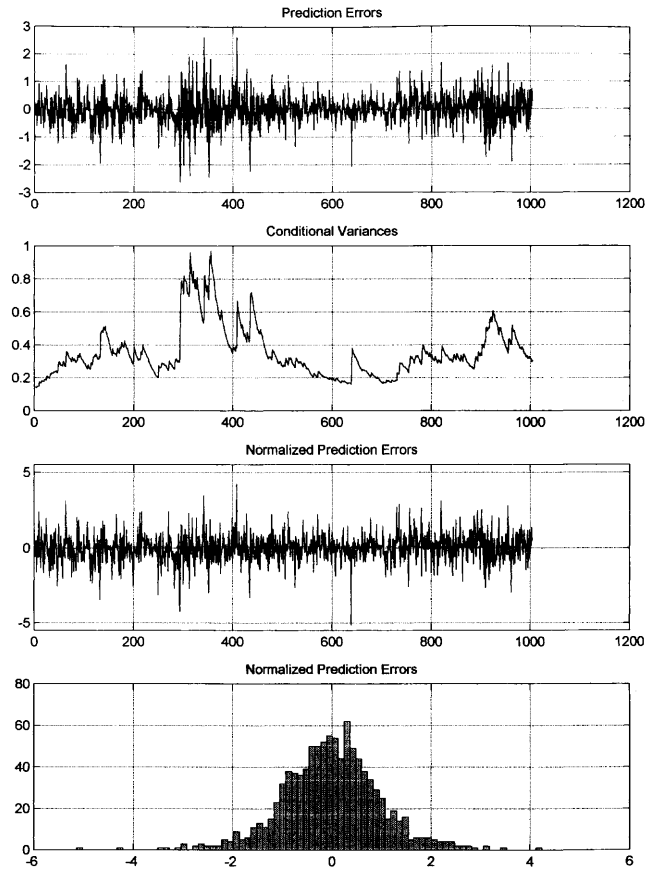


図3. 推定結果 (マルク/ドル, ジャンプ無し)。

円/ドル (図2), マルク/ドル (図3) のいずれについても, 少数ながら中心から大きく乖離して絶対値が4を超えているものが存在しており, このモデルでは外国為替レートの変動を十分に説明していないことを示している。

### 3.2 ジャンプを考慮したモデル

次に, ジャンプの生じる事前確率を  $\lambda = 0.01$  として推定した結果を示す。

もちろん,  $\lambda$  は推定すべきパラメータであり, 様々な値の  $\lambda$  に対して推定を行い, これらの中で尤度関数を最大にする値を選択する必要がある。ただし, 以下では低頻度のジャンプの影響の大きさの例示を目的とするため,  $\lambda = 0.01$  の場合のみを示してある。

(円/ドル)

$$S_t = 0.0680 + 0.9999S_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}^2 + 4.0127\epsilon_{\kappa,t}} \xi_{1,t}$$

$$\log \sigma_t^2 = -0.0071 + 0.9953 \log \sigma_{t-1}^2 + 0.1101 \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

対数尤度: -920.3

AIC: 1,856.6

平均二乗誤差: 0.4548

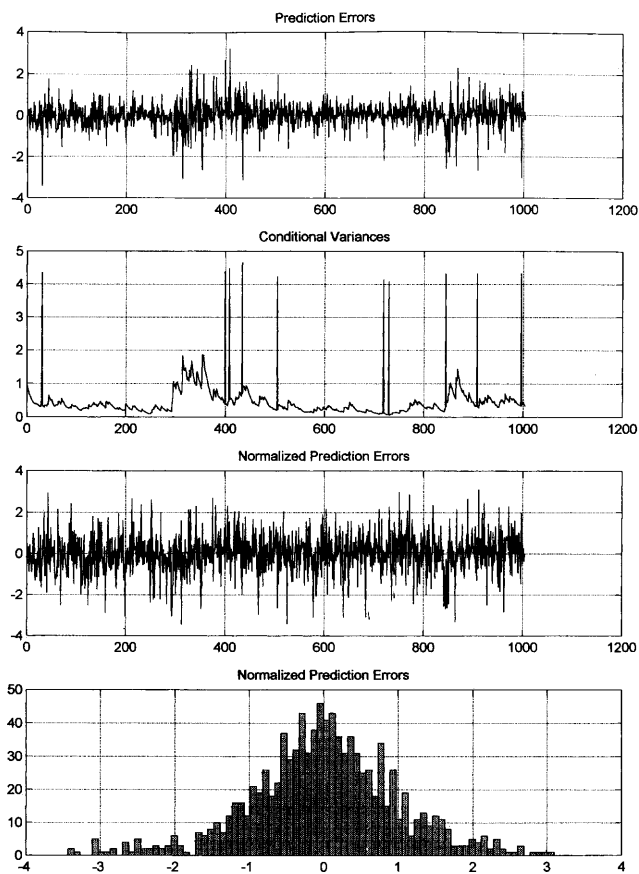


図4. 推定結果 (円/ドル, ジャンプ有り).

(マルク/ドル)

$$S_t = 0.1530 + 0.9970S_{t-1} + \sqrt{\sigma_{t-1}^2 + 2.7512\iota_{\kappa,t}} \xi_{1,t}$$

$$\log \sigma_t^2 = -0.0097 + 0.9933 \log \sigma_{t-1}^2 + 0.0804 \frac{\xi_{1,t}^2 - 1}{\sqrt{2}}$$

対数尤度: -836.3

AIC: 1,688.6

平均二乗誤差: 0.3598

図4～5は、予測誤差、誤差分散、基準化した予測誤差の推移と基準化した予測誤差のヒストグラムを示したものである。また、図6～7は、事後確率の推移を示している。

事後確率の推移は、円/ドルで10回(図6)、マルク/ドルで4回(図7)、ジャンプが検出されたことを示している。ここで、ヒストグラムに着目すると、絶対値が4を超えるものが存在しておらず、ジャンプを考慮しないモデルで指摘した外れ値は全てジャンプとして検出されたことを示している。

次に、AICを比較すると、円/ドルが133、マルク/ドルが48程度と大きく改善しており、少数の大きな変動が非常に大きな影響を持っていることを示している。

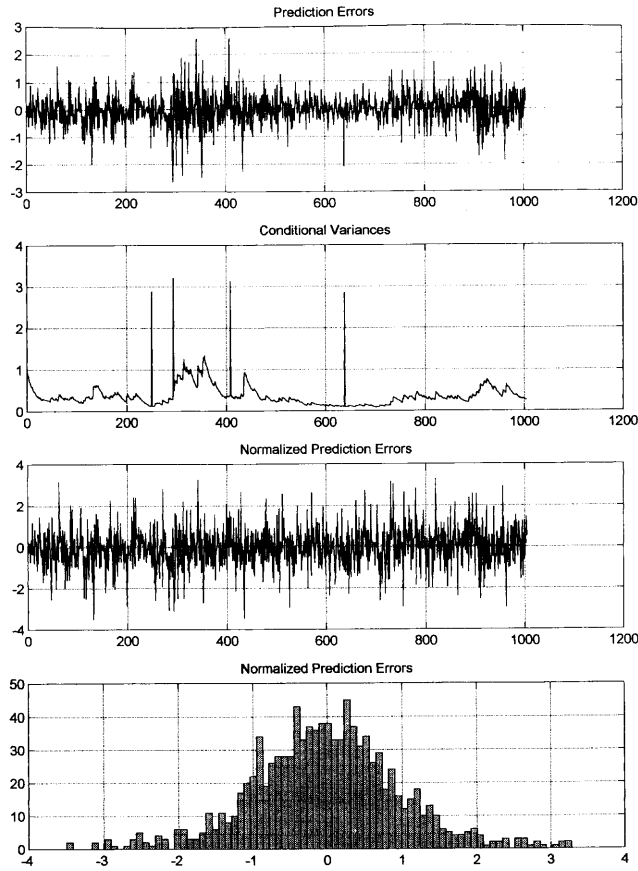


図5. 推定結果 (マルク/ドル, ジャンプ有り).

#### 4. シミュレーション

本節では, 簡単なシミュレーションによって, 前述の検出アルゴリズムの有効性を示す. シミュレーション・データは以下の手続きによって作成される.

1. ジャンプが時点  $t = \{50, 150, 250, \dots, 950\}$  において発生すると仮定し, この場合に  $S_t$  は次式を用いて作成される.

$$S_t = S_{t-1} + \phi_t$$

$$\phi_t = \begin{cases} \phi & \text{with probability } \frac{1}{2} \\ -\phi & \text{with probability } \frac{1}{2} \end{cases}$$

2. ジャンプが発生しない場合には,  $S_t$  は次式を用いて作成される.

$$S_t = S_{t-1} + \sigma_{t-1}\varepsilon_{1,t}$$

$$\log \sigma_t^2 = \alpha + \beta' \log \sigma_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{2,t}$$

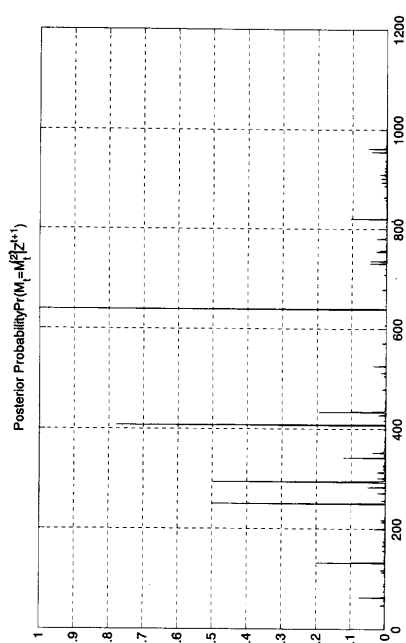
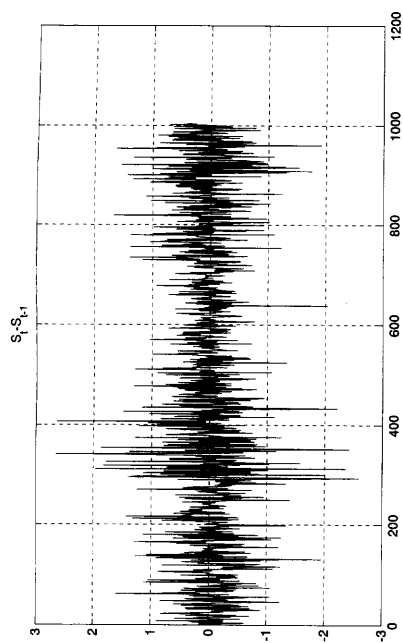


図7. 事後確率  $\Pr(M_t = M_t^{(2)} | Z^{t+1})$  の推移 (マルク/ドル).

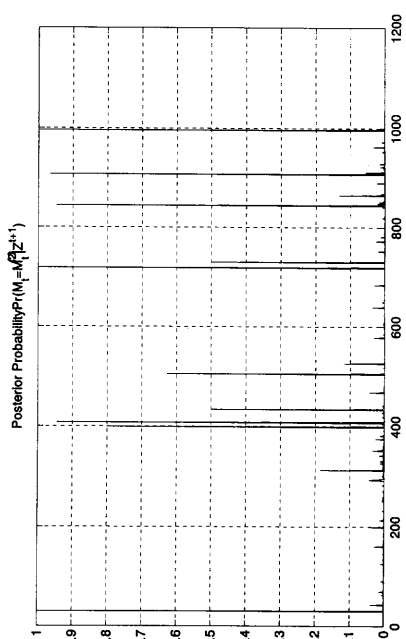
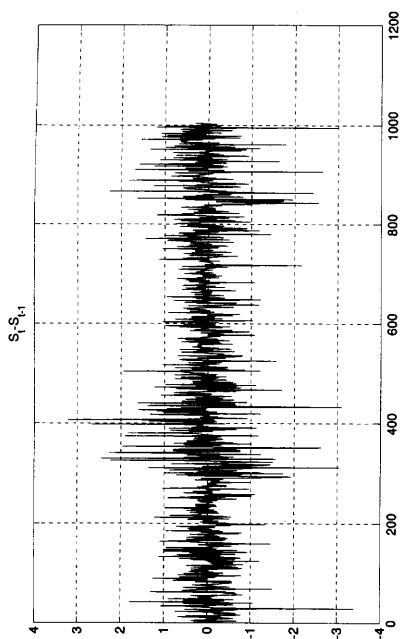


図6. 事後確率  $\Pr(M_t = M_t^{(2)} | Z^{t+1})$  の推移 (円/ドル).

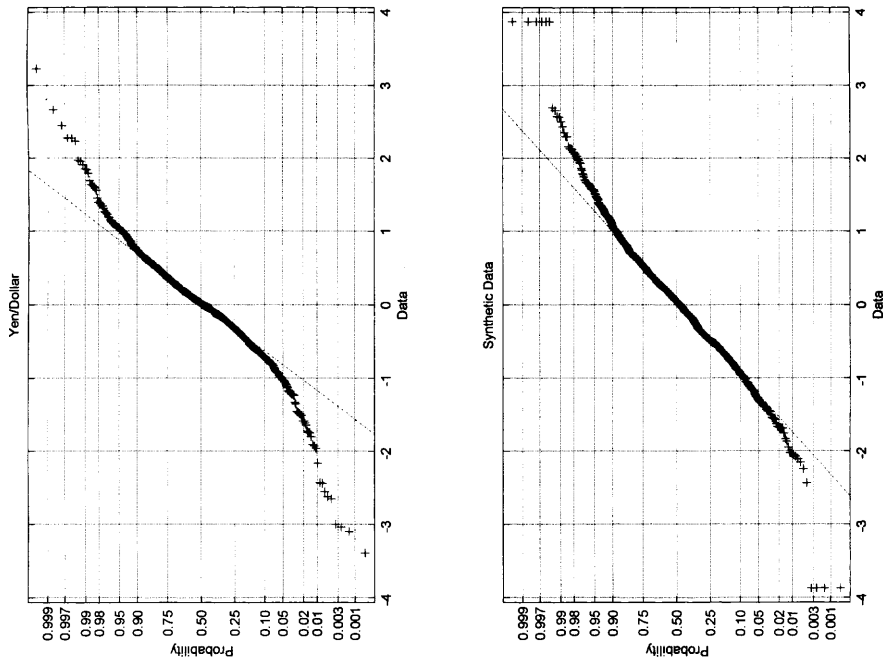


図9. 対象データ (円/ドル) とシミュレーション・データの分布関数。

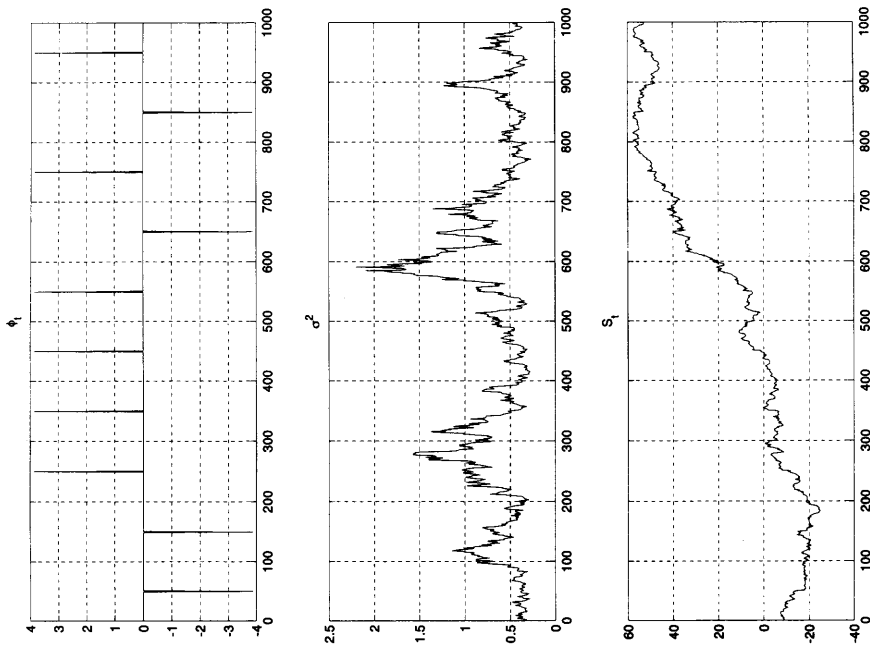


図8. シミュレーション・データ ( $\phi_t$ ,  $\sigma_t^2$ ,  $S_t$ ) の推移。

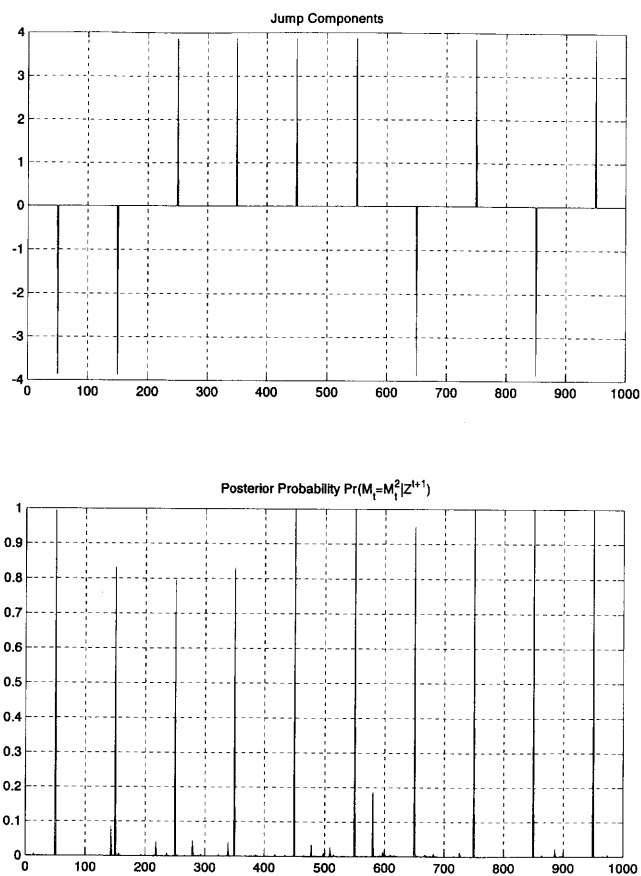


図10. 事後確率  $\Pr(M_t = M_t^{(2)} | Z^{t+1})$  の推移 (シミュレーション・データ)。

使用するパラメータ値は次の通りである。

$$\phi^2 = 15, \quad \alpha = -0.010, \quad \beta' = 0.980$$

上記の手続きを用いて作成した  $\phi_t$ ,  $\sigma_t^2$ ,  $S_t$  の推移が図8に示してある。また、図9には、このデータと実際の円/ドル・レートのリターンの分布をプロットしてあり、両者の分布が類似したものであることを示してある。

ジャンプ検出アルゴリズムの有効性は図10に示されている。ここでは、ジャンプ検出の精度が事後確率の推移を用いて表現されており、全てのジャンプが生じた時点において事後確率の値は0.5を上回っており、逆に、ジャンプが生じなかった時点においては事後確率の値は0.5を下回っていることが示されている。つまり、ジャンプは全て検出されており、誤った検出は1度も無い。パラメータの値を種々変えた別のシミュレーションにおいても同様のことが容易に確認できる。このことから、我々のジャンプ検出アルゴリズムは計算負荷が小さいだけでなく有効な方法であると言える。

## 5. おわりに

本稿では、少数の大きな振幅のジャンプを含むモデルの新たな推定方法を提示し、為替レートを対象にした分析によりジャンプの影響が非常に大きなものであることを示した。

金融資産の不連続な価格変化は、数理ファイナンス、実証ファイナンスのいずれにおいても重要なものであり、古くからジャンプの検出が試みられている。ただし、従来の手法では高頻度で振幅の小さなジャンプが検出され、本来興味があるはずの少数の異常な変動の存在やその影響については不明であった。

そこで、我々は、各時点における観測値が通常の状態と異常な状態のいずれかから生じているものと仮定し、事後確率を用いて事後的に検出を行った。その結果、これまでの研究では検出することができなかったジャンプを検出することが可能になり、外国為替レートの変動に大きな振幅のジャンプが存在しており、その影響を考慮することによって大幅に AIC が改善されることを示した。

## 参 考 文 献

- Akgiray, V. and Booth, G. G. (1988). Mixed diffusion-jump process modeling of exchange rate movements, *Review of Economics and Statistics*, **70**, 631-637.
- Ball, C. A. and Torous, W. N. (1983). A simplified jump process for common stock returns, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **18**, 53-65.
- Ball, C. A. and Torous, W. N. (1985). On jumps in common stock prices and their impact on call option pricing, *Journal of Finance*, **40**, 155-173.
- Bates, D. S. (1996a). Jumps and stochastic volatility: exchange rate process implicit in PHLX Deutschmark options, *Review of Finance Studies*, **9**, 69-107.
- Bates, D. S. (1996b). Testing option pricing models, *Handbook of Statistics, v.14: Statistical Methods in Finance* (eds. G. S. Maddala and C. R. Rao), 567-611, Elsevier, Amsterdam.
- Harrison, P. J. and Stevens, C. F. (1976). Bayesian forecasting (with discussion), *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, **38**, 205-247.
- Jorion, P. (1988). On jump processes in the foreign exchange and stock markets, *Review of Finance Studies*, **1**, 427-445.
- Kirkendall, N. J. (1992). Monitoring for outliers and level shifts in Kalman filter implementations of exponential smoothing, *Journal of Forecasting*, **11**, 543-560.
- Kwakernaak, H. (1980). Estimation of pulse heights and arrival times, *Automatica*, **16**, 367-377.
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous, *Journal of Financial Economics*, **3**, 124-144.
- Nelson, D. B. (1990). Arch models as diffusion approximations, *J. Econometrics*, **45**, 7-39.
- Nelson, D. B. and Foster, D. P. (1994). Asymptotic filtering theory for univariate arch models, *Econometrica*, **62**, 1-41.
- Smith, A. F. M. and West, M. (1983). Monitoring renal transplants: an application of the multiprocess Kalman filter, *Biometrics*, **39**, 867-878.
- Taylor, S. J. (1994). Modelling stochastic volatility: a review and comparative study, *Math. Finance*, **4**, 184-204.
- Tugnait, J. K. (1982). Detection and estimation for abruptly changing systems, *Automatica*, **18**, 607-615.
- Tugnait, J. K. and Haddad, A. H. (1979). A detection-estimation scheme for state estimation in switching environments, *Automatica*, **15**, 477-481.
- Willsky, A. S. (1976). A survey of design methods for failure detection in dynamic systems, *Automatica*, **12**, 601-611.

## Filtering and Prediction of Non-Gaussian Time Series via Jump Diffusion Process

Mitsunori Iino

(Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

Tohru Ozaki

(The Institute of Statistical Mathematics)

A new method of estimating time series model that contain jump components is developed.

Our method is composed of a bank of filters and a new jump detection algorithm. Assuming that observations come from one of finite states, we detect jumps after the events using a posterior probability. As a result, we can detect low-frequency large-amplitude jump components that could not be detected in the previous studies.