

多変量時系列構造モデルの構築における AIC の役割

総合研究大学院大学 近 藤 文 代*

(受付 1999 年 3 月 31 日; 改訂 1999 年 6 月 15 日)

要 旨

本稿は多変量時系列構造モデルの構築における POS データの分析を通して、モデル選択規準としての AIC (Akaike (1980) ではベイズモデルの情報量規準は ABIC となっているが、本稿では AIC と記述する。) の役割に焦点を当てたものである。年々強力となるコンピューターの計算力と小売業における膨大な量の詳細データの蓄積を背景に、個別のモデルではなく、多くのデータの変動要素を統一的に取り扱うことが可能なフレームワークで数十のモデル設定を行った。モデルはトレンド成分、曜日変動成分、値下げ効果成分からなり、さらに定係数に加えて時変係数も取り扱える柔軟なモデルであるため、POS データの特性としての競合商品間の関係や時間的関連を直接モデル化することが可能である。以下の 3 段階でモデル群を構成し、それらの比較を行った: 1) 各商品における価格と販売量の変動の関係を表す価格関数の決定 (一変量モデル); 2) 価格関数と販売量に関する各商品間の競合構造を表す多変量モデル; 3) 競合構造が変化しても対応可能な時変係数構造モデル。モデル選択の規準としては異なるモデル間で統一的に比較が可能な AIC を使用し、日次および週次の POS データの分析を行った。分析の結果、各段階において経験的に納得のいくモデルが最良のモデルとして選択された。例えば、最終段階の定係数モデルと時変係数モデルの比較では、競合関係の時間的変化も表現できる時変係数モデルの方が良いモデルであることが AIC により示された。このように、分析者が自由に想定したモデル構成において、統一的な選択規準である AIC を用いることによって初めて最良のモデルを探しだすことが可能になる。

キーワード: 状態空間モデル, 統一的なモデル選択規準, 日次・週次 POS データ, 時変係数, 競合構造。

1. はじめに

マーケティング・リサーチの分野では POS データやスキャンパネル (消費者購買データ) などのように加算の度合いが非常に低いマイクロデータを対象とした分析が主に行われる。この分野ではそれぞれのデータに最も強く現われている支配的な現象をマネジメントの観点からモデル化し、分析することに主眼が置かれるため、それぞれの現象に特化した数多くのモデルが個別に使われている。その一方で、その背後にあるゆっくりと変化する季節要因などの環境的なデータの変動要因は無視されがちである。そこで、近藤 (1999) は年々強力となるコンピューターの計算力を背景に、個別のモデルではなく、環境的な要因も含めて多くのデータの変動要

* 現 筑波大学 社会工学系: 〒305-8573 茨城県つくば市天王台 1-1-1.

素を統一的に取り扱うことが可能な多変量時系列構造モデルのフレームワークで日次および週次の POS データをモデル化する方法を提案した。本稿では多変量時系列構造モデルの構築に基づく POS データの分析を通して、統一的なモデル選択規準としての AIC の役割を示す。

POS データは商品数が非常に多く、これまでは各商品間の関係に分析の重点が置かれ、時間的なダイナミクスは一部の特定の場合を除いてモデルの中に取り入れられてこなかった。一方、我々のモデルではベイズの方法によって POS データの特性としての競合商品間の関係と時間的関連を直接モデル化している。類似のベイズアプローチによって週次の POS データを扱った最近の研究としては Curry et al. (1995), マーケティングデータを使った時系列モデルのアプローチをとる研究には Smith et al. (1994), Dekimpe and Hanssens (1995a, 1995b) がある。我々の目的は、より複雑なモデルを表現できる統一的なフレームワークを用意し、分析者がその中で興味のある部分を分析できるようにすることにある。小売業においては、昨今の膨大な量の詳細なデータの蓄積に伴い、様々な視点からのモデル化が可能となっている。したがって、限られたタイプのモデル化ではなく、POS データの特性を柔軟に表現できる統一的なフレームワークの上で自由にモデル化できることが求められている。

さて、自由にモデル化しようとすれば必然的にパラメーター数が多くなるが、統計学の観点からすれば不必要に多くのパラメーターを用いるとかえって結果が悪くなることは良く知られている。できるだけ多くの変動要素を入れたいという要望と少ない変数でモデルを構成するという変数節約という二つの相反する目的についてトレードオフを決定してくれるのが情報量規準である。モデル選択の規準としては、実際の現場において実務に直接結びつく「効用 (utility)」を最大化するような選択規準を定義し、使用する方法も考えられるが、そのようなアプローチは個別対応的であり、本稿のように各段階で異なった変動要素を取り入れているモデリングには客観的で統一的なモデル選択規準が不可欠である。

本稿では幅広いモデル選択肢の中で、より良いモデルを選択するという意味で、統一的なモデル選択規準として AIC を使用する。AIC は本稿において数十のモデルの中から最良のモデルを選択する統一的な規準として、大きな役割を果たす。非常に簡単なモデルはより複雑なモデルと比較してモデル上表現されていない部分が多く残されている。それらの取り残された部分、実務上切り捨ててしまう部分を次の段階でさらにモデル化していくこの統一的なモデリングの過程における AIC の役割を示す。

2. 分析対象データ

本稿では、値下げに非常に敏感に反応する牛乳の日次および週次の販売量と価格のデータを取り扱う。消費者が購入商品を決定する際、様々な要因によって影響を受ける。そこで、経験的な観点から考えられる要因を徐々にモデルの中に取り込んでいき、選択可能なモデル群を構成し、その中で最良のモデルを決定する。日次のデータでは週次のデータには不要な曜日変動成分も考慮した。店舗 A では 62 週間の週次の POS データを、店舗 B は 2 年間 (1994/2/28-1996/3/3, $N = 735$) の日次の POS データを分析に使用した。4 大ブランド合計の販売量は両店舗ともに 7~8 割を占めるため、それぞれ 4 大ブランドおよびその他合計の 5 変量を考えた。この実証分析に関するブランドはブランド・サイズ、販売量はリットルと定義している。

図 1 および図 2 の左側はそれぞれ店舗 A および店舗 B の観測データのグラフで、共に販売促進政策を行っていない場合のベースライン販売量だけでなく、販売促進政策を行った場合の効果を表す増分販売量も滑らかに変化している様子を表している。従って、次節ではブランド間の競合関係に加えてベースライン販売量および増分販売量共に影響を与える季節性など、環境要因を含むモデルを考慮した。

3. 基本モデル

店頭に並べられている個々の商品をそれぞれ一つのブランドとする。ただし、直接分析の対象としない残りの商品は一括して一つのその他ブランドとする。\$n\$ 期における \$k\$ 個のブランドの販売量を \$k\$ 変量の時系列 \$y_n = (y_n^{(1)}, \dots, y_n^{(k)})^T\$ で表し、以下のように分解できるものとする (\$y_n^{(k)}\$ はその他合計のブランドを表す)。

$$(3.1) \quad y_n = t_n + d_n + x_n + w_n$$

ただし、\$t_n\$ は長期のベースライン販売量 (トレンド) 成分、\$d_n\$ は周期的な曜日変動成分、\$x_n\$ は短期的な説明変数成分、\$w_n\$ は観測ノイズを表す \$k\$ 次元のベクトルとする。観測ノイズ \$w_n\$ は平均がゼロで分散共分散行列が \$\Sigma_w\$ の正規分布に従うものとする。(3.1) 式は観測された変動を傾向的な変化、曜日の影響、説明変数による影響、その他の偶然の変動に分解し、説明するものである。

3.1 長期のベースライン販売量成分 \$t_n\$

あるブランドの長期のベースライン販売量とは時系列において比較的長期の動きをする成分をさす。対象とするカテゴリーは成熟製品カテゴリーで、この長期のベースライン販売量成分は習慣的なリピート購入に対応する。長期のベースライン販売量成分 \$t_n = \{t_n^{(i)}\}\$, \$i = 1, \dots, k\$ を以下の \$I\$ 次の確率差分方程式で表現する。

$$(3.2) \quad \Delta^I t_n^{(i)} = v_{t_n}^{(i)}, \quad v_{t_n}^{(i)} \sim N(0, \sigma_{t_n}^2)$$

ただし、システムノイズ \$v_{t_n}^{(i)}\$ は正規白色過程であり、\$\Delta \equiv 1 - B\$ を \$\Delta t_n^{(i)} = t_n^{(i)} - t_{n-1}^{(i)}\$ で定義されるシフトオペレーターとする (Kitagawa and Gersch (1984))。

3.2 周期的な曜日変動成分 \$d_n\$

周期的な曜日変動は一週間のサイクルで同様なパターンを繰り返す成分である。曜日変動成分 \$d_n = \{d_n^{(i)}\}\$, \$i = 1, \dots, k\$ は以下のように一周期の和がほぼゼロとなる成分としてモデル化される。

$$(3.3) \quad \sum_{j=0}^6 d_{n-j}^{(i)} = v_{d_n}^{(i)}, \quad v_{d_n}^{(i)} \sim N(0, \sigma_{d_n}^2)$$

ただし、システムノイズ \$v_{d_n}^{(i)}\$ は正規白色過程であり、曜日変動のパターンの変化に対応する (Kitagawa and Gersch (1984))。

3.3 説明変数成分

説明変数成分は、値引きがブランドの販売量に影響を及ぼす成分とする。説明変数成分 \$x_n = \{x_n^{(i)}\}\$, \$i = 1, \dots, k\$ は次節で定義される価格関数 \$u_n\$ を用いて以下のように表現できるものとする。

$$(3.4) \quad x_n = B_n u_n, \quad B_n = \{b_n^{(ij)}\}$$

ただし、\$b_n^{(ij)}\$, \$i, j = 1, \dots, k\$ は競合構造を表す係数で制約条件 \$b_n^{(ii)} \leq 0\$, \$b_n^{(ij)} \geq 0\$ (\$i \neq j\$) を満たす。さらに、係数 \$b_n^{(ij)}\$ は市場の変化に反応し、時間的に緩やかに変化する時変係数であるとする。このような時変係数に対してランダムウォーク型のモデル

$$(3.5) \quad b_n^{(ij)} - b_{n-1}^{(ij)} = v_{bn}^{(ij)}, \quad v_{bn}^{(ij)} \sim N(0, \sigma_{bij}^2)$$

を導入し、システムノイズ $v_{bn}^{(ij)}$ は正規白色過程であるとする。ただし、その分散はベースライン販売量成分の変動の大きさに比例し、 σ_b^2 をブランド間で共通な分散に関するパラメーター、 σ_{it}^2 はブランド i のベースライン販売量成分のシステムノイズ分散とすると、

$$(3.6) \quad \sigma_{bij}^2 = \sigma_b^2 \left(\sigma_{it}^2 / \sum_{j=1}^k \sigma_{itj}^2 \right)$$

が成り立つものとする。

説明変数成分のシステムノイズ分散がベースライン販売量成分のシステムノイズ分散との関係で大きくなり過ぎないように、日次のデータでは (3.7) 式において R を価格関数のレンジの半分とし、値下げ成分の上限を与えている (Kondo and Kitagawa (1998b)).

$$(3.7) \quad \sigma_b \leq R^{-1} \sqrt{\sum_{j=1}^k \sigma_{itj}^2}$$

4. 状態空間表現に基づくモデルの同定と時系列の分解

(3.1)-(3.5) 式のモデルは以下の状態空間モデルで統合することができる。

$$(4.1) \quad y_n = H_n \alpha_n + w_n \quad \text{観測モデル}$$

$$(4.2) \quad \alpha_n = F \alpha_{n-1} + G v_n \quad \text{システムモデル}$$

ただし、 α_n は状態ベクトル、 w_n は観測ノイズ、 v_n はシステムノイズで、以下のように正規分布に従うものとする。

$$(4.3) \quad \begin{bmatrix} w_n \\ v_n \end{bmatrix} \sim N \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_w & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \right)$$

(3.1) 式の時系列モデルに対するシステムモデルは具体的に以下のように書き表すことができる。

$$(4.4) \quad \begin{pmatrix} t_n \\ d_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_T & 0 \\ & F_D \\ 0 & I_{k^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_{n-1} \\ d_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_T & 0 \\ & G_D \\ 0 & G_B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{tn} \\ v_{dn} \\ v_{bn} \end{pmatrix}.$$

状態ベクトル、 t_n, d_n, b_n , システムノイズ、 v_t, v_d, v_b , システムモデルの行列 F_T, F_D, G_T, G_D, G_B のそれぞれの成分および観測モデルの行列 $H_n = (H_T \ H_D \ H_{Bn})$ は Kondo and Kitagawa (1998b) を参照。状態空間表現の利用により、モデルの同定、時系列の予測・分解を統一的な枠組の下で行うことができる。

4.1 モデルの同定

モデルに含まれるパラメーターを θ , 観測値を $y_1, \dots, y_N$ とする時、尤度関数は条件付き分布を用いて以下のように表される。

$$(4.5) \quad L(\theta) = f(y_1, \dots, y_N | \theta) = \prod_{n=1}^N f(y_n | Y_{n-1}, \theta)$$

ただし、 $Y_{n-1} \equiv \{y_1, \dots, y_{n-1}\}$ で、右辺の各項は以下のように与えられる。

$$(4.6) \quad f(y_n | Y_{n-1}) = (2\pi)^{-k/2} (|V_{n|n-1}|)^{-1/2} \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \varepsilon_{n|n-1}^T V_{n|n-1}^{-1} \varepsilon_{n|n-1} \right\}$$

ここで、 $\varepsilon_{n|n-1} = y_n - y_{n|n-1}$ は時系列の予測誤差、 $y_{n|n-1}$ と $V_{n|n-1}$ は観測値 y_n の予測値および分散共分散行列で以下のように求めることができる。

$$(4.7) \quad y_{n|n-1} = H_n \alpha_{n|n-1}$$

$$(4.8) \quad V_{n|n-1} = H_n W_{n|n-1} H_n^T + \Sigma_w$$

ここでは $\alpha_{n|n-1}$ および $W_{n|n-1}$ は状態ベクトル α_n の一期先予測値および分散共分散行列でカルマンフィルターによって簡単に求められる (片山 (1983))。 (4.6) を (4.5) に代入し、対数変換を施すと (4.9) を得る。

$$(4.9) \quad \log L(y|\theta) = -\frac{1}{2} \left\{ Nk \log 2\pi + \sum_{n=1}^N \log |V_{n|n-1}| + \sum_{n=1}^N \varepsilon_{n|n-1}^T V_{n|n-1}^{-1} \varepsilon_{n|n-1} \right\}$$

これを最大化することによって θ の最尤推定値を求めることができる。

いくつかの時系列モデルの候補がある場合は、それぞれのモデルの統計的あてはまりの良さを情報量規準 AIC によって評価し、比較することができる。

$$(4.10) \quad \text{AIC}(m) = -2(\text{最大対数尤度}) + 2(\text{パラメーター数})$$

$$= -2 \sum_{n=1}^N \log f_m(y_n | \hat{\theta}_m) + 2|\hat{\theta}_m|.$$

(4.10) では $f_m(y_n | \hat{\theta}_m)$ は尤度の最大値を表し、 $|\hat{\theta}_m|$ はベクトル $\hat{\theta}_m$ の次元を表す。AIC の最も小さな値をとるモデルを採用することによって、客観的なモデル選択が実現できる (Akaike (1973))。

5. ベースライン販売量成分と曜日変動への分解

ベースライン販売量成分のみを持つモデル 1 を両店舗のデータに、ベースライン販売量成分 + 周期的成分を持つモデル 2 を店舗 B の日次のデータにあてはめた。

モデル 1 (ベースライン販売量成分のみ)

$$(5.1) \quad y_n = t_n + w_n$$

モデル 2 (ベースライン販売量成分 + 周期的成分)

$$(5.2) \quad y_n = t_n + d_n + w_n$$

全ての商品がゼロ販売量の場合、欠落データとして取り扱った。これらのゼロ販売量は店舗が休業日の場合や存在していたデータが失われた場合である。状態空間モデルにおいては状態の初期値が必要である。仮定したモデルが定常状態にあり、理論的に状態の定常分布が計算できる場合にはその平均値を使用する。また、非定常な場合でも過去のデータや分析から経験的に状態の初期値が得られている場合にはその値を使用した方が良い。本稿のモデルの場合、モデルが非定常であり過去に分析が行われていないので、初期値も未知数として扱い、尤度を最大化することにより決定した。具体的には状態の初期値は各段階における最初に設定したモデル (通常は最も単純なモデル)、例えばモデル 1 では一階のトレンド成分のみの多変量モデルにおいて、尤度が最大 (または AIC が最小) となるように初期値を決定した。モデル選択では、この最も単純な一階のトレンド成分モデルの AIC 値と他のモデルの値との相対的な比較で、最良

のモデルが決定される。

モデル1およびモデル2の分析における対数尤度, AIC, およびパラメーター数をそれぞれ表1, 表2に示す。添え字の i はベースライン成分の階差次数を表し, j は仮定した周期を表す。店舗AのブランドはA1~A4, その他合計, 店舗BのブランドはB1~B4, その他合計のそれぞれ5つとする。A4およびB4に対するベースライン成分は, このブランドが新しく店頭に置かれたものであり, 他のブランドよりベースライン成分に変動が少なく, データ数も少ないため, 時間的に変化しない成分とした。(5.1), (5.2) 式において1次から3次の階差の3つの差分モデルをAICで比較したところ, 1次のベースライン成分モデル(1, 1), すなわち, 局所的に一定な成分を持つモデルが両店舗において良い結果を得た。これは週次や日次では累積スパンが非常に短いので, 局所的に一定な成分で表現するほうが良いことを示唆している。

また, 表1, 表2において観測ノイズを独立にした場合のモデルは *ind* の添え字で表している。いずれの場合にも観測ノイズが独立なモデルより共分散構造を持つモデルの方がAICの値が小さくなっており, 直接モデルの形で考慮していない競合的な要因を観測ノイズの共分散構造が吸収していることを示唆している。

さらに, 店舗Bに関してベースライン成分に曜日変動を加えたモデルと加えないモデルとの比較では, 曜日変動を加えることによってAICの値が39354.0から39118.0へと200以上も大幅に減少し, モデルの改善が見られた。

図1は店舗Aに関するグラフで左は観測データ, 右はモデルから得られたベースライン成分を表す。図2は店舗Bに関する同様なグラフである。図2の右のグラフはモデルから得られたベースライン成分+曜日変動をそれぞれ表す。これら2つの図からこの節で考慮したモデルの範囲ではたとえAICの値が最小となる最も「良い」モデルを用いても両店舗のデータに関してかなり大きな残差が存在することがわかる。AICはモデルの族を与件としたときにその中から

表1. 店舗Aにおけるモデル(i (次数), j (周期))の対数尤度, AIC, パラメーター数。

Model(i, j)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model(1, 1) ^{ind}	-2051.7	4131.4	14
Model(1, 1)	-1997.3	4042.7†	24
Model(2, 1)	-2042.9	4143.8	29
Model(3, 1)	-2094.8	4257.6	34

表2. 店舗Bにおけるモデル(i (次数), j (周期))の対数尤度, AIC, パラメーター数。

Model(i, j)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model(1, 1) ^{ind}	-19865.3	39758.6	14
Model(1, 1)	-19653.0	39354.0†	24
Model(2, 1)	-19862.3	39782.6	29
Model(3, 1)	-23665.2	47398.4	34
Model(1, 2)	-19661.4	39386.8	32
Model(1, 3)	-19669.5	39411.0	36
Model(1, 4)	-19671.1	39422.2	40
Model(1, 5)	-19681.7	39451.4	44
Model(1, 6)	-19684.6	39465.2	48
Model(1, 7) ^{ind}	-19761.5	39607.0	42
Model(1, 7)	-19507.0	39118.0‡	52
Model(2, 7)	-19727.2	39568.4	57
Model(3, 7)	-23973.6	48071.2	62

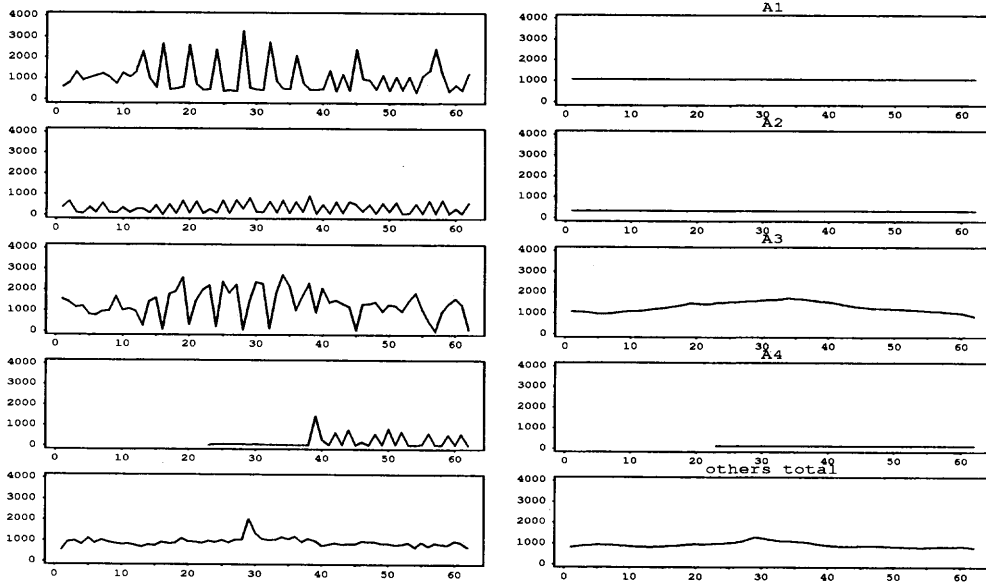


図1. 店舗 A に関する (1994/1 週-1995/10 週) 観測データ (左) ; ベースライン (右).

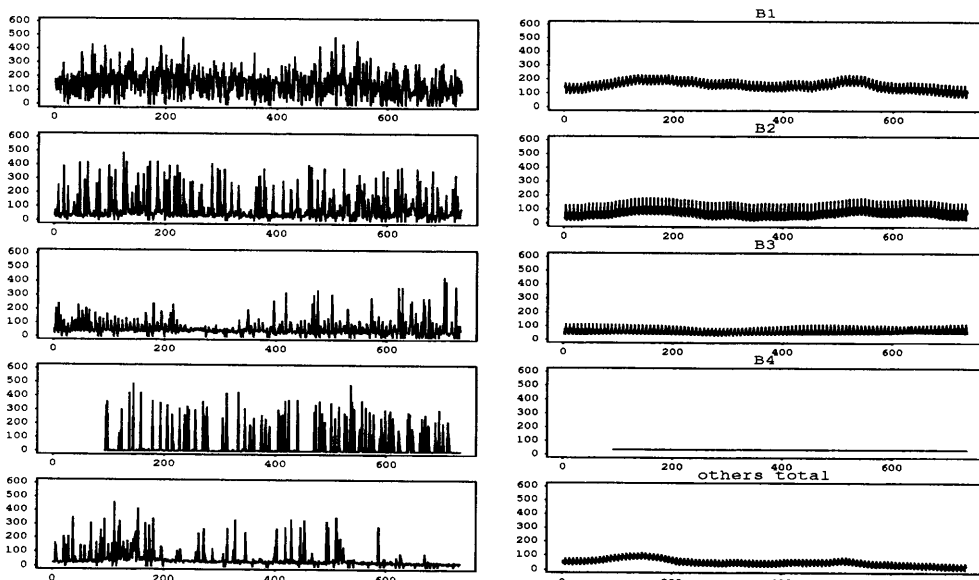


図2. 店舗 B に関する (1994/2/28-1996/3/3) 観測データ (左) ; ベースライン+曜日変動 (右).

ベストなモデル選択を可能にするものである。モデルを改善する際により本質的に重要なことは、記述したい現象を十分に表現する観点からより適切なモデル群を用いることであり、この節で考慮したモデルでは大きな残差という点で現象を十分に表現できていない。次節では値下げ効果も考慮したモデルで、両店舗のデータの分析を行う。

6. 値下げ効果を考慮したモデル化

前節の分析では、たとえ AIC 最小のモデルを用いても大きな残差が残されたので、次にモデルを拡張し、値下げの影響を表す成分 x_n を加えた値下げ効果モデルを導入する。6.1 節ではあるブランドの価格と販売量の関係を表す一変量モデルによる価格関数を決定する。次に 6.2 節、6.3 節で価格関数と販売量に関して競合構造を表す多変量モデルを構築し、6.4 節は競合構造が時間的に変化する時変係数モデルを取り扱う。

6.1 価格関数による販売量増加のモデル化

価格は消費者の購入商品決定の際に利用される一連の入力情報と見なすことができ、結果的に生じる販売量の増減効果は消費者の心理プロセスを通じた断続的な効果である。ここでのモデル化は消費者の価格に対する反応のうち、ある一つのブランドの値引きがそのブランドの短期的な販売量増加をもたらす場合のみを考え、競合ブランドに対する影響は価格関数においては考慮せず、次節の競合構造モデルの中で取り扱うことにする。そのためには、あるブランドの値引きによってそのブランドの販売量が増加するかどうかを考慮する必要がある。入力-出力の関係を記述するモデルがこの点において重要な役割を果たす。値引きによるパルス状の販売量増加をモデル化したものを「価格関数」と呼ぶことにし、 $u_n = \{u_n^{(i)}\}, i = 1, \dots, k$ を以下の k 変量の価格関数とする。

$$(6.1) \quad u_n^{(i)} = f(p_n^{(i)}) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k$$

ただし、 $p_n = \{p_n^{(i)}\}, i = 1, \dots, k$ は k 変量ベクトルで、ある製品カテゴリーにおける実際のブランドの価格とする。考慮された価格関数は中心点を通り、中心点での基本となる販売量レベルはベースライン成分 (+曜日変動) の販売量レベルと一致する。価格関数の絶対値が大きくなるほど販売量は増加する。

最も簡単な価格関数 u_n は以下のように定義される実際の価格と全期間の最高価格 (通常価格の代用) からの差 $\tilde{u}_n$ そのものである。

$$(6.2) \quad \tilde{u}_n^{(i)} = p_n^{(i)} - \max_{n \in \{1, \dots, N\}} p_n^{(i)} \leq 0$$

本稿における価格関数は Kondo and Kitagawa (1998a, 1998b) において使われたものを使用する。この価格関数決定の際にデータの観察によって得られた情報をそのままモデル化できるように、(6.1) 式では非線型モデルも含む非常に柔軟な形になっている。価格関数は値下げ効果成分 x_n に関する (3.4) 式において係数 $b_n^{(i)}$ が時間的に変化しない一変量モデルで表現する。

価格関数 $f_1 \sim f_3$ は次の共通式を使って表すことができる。

$$(6.3) \quad \begin{aligned} u_n^{(i)} &= \tilde{u}_n^{(i)} - c_n && \text{条件 A を満たす場合} \\ &= 0 && \text{条件 A を満たさない場合} \end{aligned}$$

f_1 値引きレベル：全期間における最高価格と実際の価格との価格差

$$(6.4) \quad \text{無条件に } c_n = 0$$

f_2 競合ブランドとの相対値引きレベル：あるブランドの販売増は競合ブランドの値引きレベル以上の場合のみ

$$(6.5) \quad c_n = 0, \quad \text{条件 A は } \tilde{u}_n^{(i)} \leq \min_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} \tilde{u}_n^{(j)}$$

f_3) 競合ブランド間における最大値引きレベル：販売増は f_2 と同じ条件だが、その入力レベルは競合ブランドとの値引きレベル差により決定

$$(6.6) \quad c_n = \min_{j \in \{1, \dots, k\}, j \neq i} \tilde{u}_n^{(j)}, \quad \text{条件 A は } \tilde{u}_n^{(i)} \leq c_n$$

f_4) 上限および下限のしきい値：販売増は価格差がある範囲にある場合のみ

$$(6.7) \quad u_n^{(i)} = \tilde{u}_n^{(i)} \quad Lth \leq -\tilde{u}_n^{(i)} \leq Uth \text{ の場合} \\ = 0 \quad \text{その他}$$

ただし、 $0 < Lth < Uth$ により上限および下限のしきい値を決定。

f_5) 値引き効果減衰関数：値引きが 2 期以上続けて行われた場合、値引き効果が減衰する。店頭での在庫切れなどの物理的な状況も考慮し、初期の効果レベルに復帰するリセット機能を有する。 $f_b[]$ は f_1 から f_4 における最良の価格関数を表す。

$$(6.8) \quad u_n^{(i)} = \exp \{-\gamma(n - n_0)\} f_b[u_n^{(i)}]$$

ただし、 $\gamma \geq 0$ は定数パラメーター、 n_0 は値下げ開始時点、 η はある正の数で、 $n - n_0 > \eta$ である場合、 n にリセットされる。

価格関数に使用したブランドは A1～A4, B1～B4 で、各 4 ブランドの通常価格および特徴を表 3 に示す。以下に店舗 B の日次のデータの分析例を示した。表 4 は B1～B4 の価格関数に関する分析結果をまとめたもので、符号の T, W, $f_1 \sim f_5$ はそれぞれトレンド成分、曜日変動成分、

表 3. 店舗 A および店舗 B の各ブランドの通常価格および特徴。

	ブランド	通常価格	タイプ	特徴
店舗 A	A1	228	レギュラー	NA ¹⁾
	A2	188	A1 の低脂肪タイプ	NA
	A3	195	レギュラー	PB ²⁾
	A4	228	レギュラー	NW ³⁾
店舗 B	B1	198	レギュラー	PB
	B2	228	レギュラー	NA
	B3	178	B2 の低脂肪タイプ	NA
	B4	215	レギュラー	NW, ST ⁴⁾

注 1) NA: ナショナルブランド; 注 2) PB: プライベートブランド

注 3) NW: 新規取り扱いブランド; 注 4) ST: 特に週の後半に単発的に店頭在庫有り

表 4. B1～B4 の価格関数に関する AIC 値。

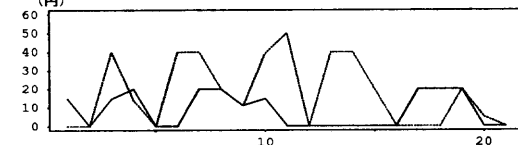
モデル (T, W, f_k)	B1	B2	B3	B4
モデル (, ,)	8071	8249	7400	3449
モデル (T, W,)	8046	8256	7388	-
モデル (T, W, f_1)	7930	7793 †	6659 †	3394
モデル (T, W, f_2)	7863	7902	6802	-
モデル (T, W, f_3)	7839 ‡	7878	6880	-
モデル (T, , f_4)	-	-	-	3220 †
モデル (T, W, f_5)	7841	7755 ‡	6602 ‡	3054 ‡

価格関数 $f_1 \sim f_3$ を表す。AIC によるモデル比較の結果、 f_1, f_2, f_3 の中では、B2, B3 においては f_1 が選ばれ、B1 では f_3 が良い価格関数であることが分かった。つまり、低価格商品であるプライベートブランド (B1) の値引きは他のブランドが値引きしていない場合にのみ、しかも、他のブランドの値引きを上回る値引き額差に関して有効であることが分かった。表5に B1 の販売量、価格関数 f_1 (値引き)、 f_2 及び B2, B3, B4 の価格関数 f_1 に関する実データの一部を表示した。B2, B3, B4 が値引きしていない時のみに B1 の値引きがそのブランドの販売量増加に貢

表5. B1 の販売量、 f_1 (値引き) f_2 , および B2~B4 の f_1 (値引き)。

B1			B2	B3	B4
販売量	f_1	f_2	f_1		
132	0	0	-40	0	0
0	0	0	0	0	0
368	-20	-20	0	0	0
157	0	0	0	-20	0
195	0	0	0	0	0
165	-20	0	0	0	-47
212	0	0	0	0	0
53	0	0	0	0	0
176	-9	-9	0	0	0
186	-20	0	0	0	-47
202	0	0	0	-13	0
34	0	0	-40	0	0
212	0	0	0	0	0
271	0	0	0	0	0
207	0	0	0	0	0
197	0	0	0	0	0
111	0	0	-50	0	0
241	0	0	-40	-20	0
289	0	0	-50	0	0
305	-20	-20	-13	0	0
254	0	0	0	0	0
178	0	0	0	0	0
218	0	0	0	0	0
99	0	0	0	0	-47
207	0	0	0	-7	0
396	-10	-10	0	0	0
257	0	0	-30	0	0

B1 の値下げ額(実線) 対 競合の値下げ額最大値(点線)



価格関数, f_1 (実線), f_2 (点線), f_3 (破線)

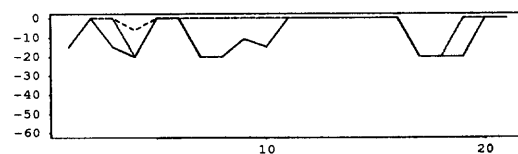
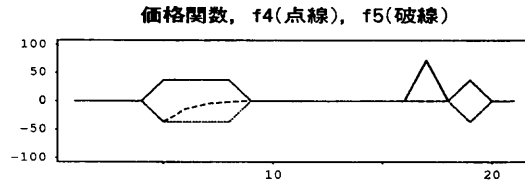
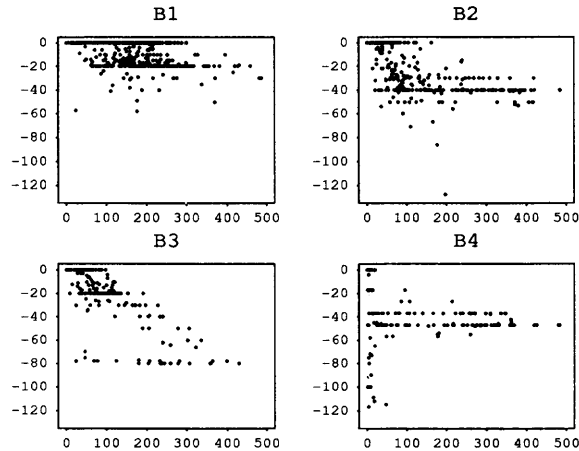


図3. f_1, f_2, f_3 の価格関数。

図 4. f_4 , f_5 の価格関数.図 5. 各ブランドの値下げ (y 軸) に対する販売量 (x 軸).

献していることが読み取れる。このようにデータの観察によって得た情報をモデル化した価格関数 f_2 , f_3 の評価も AIC によって可能なことがわかる。図 3, 図 4 に実際の店舗 B のデータを分析して得られた価格関数を図示した。図 3 の上のグラフは価格関数 B1 の値下げ額 (実線) と競合における最大の値下げ額 (点線) である。下のグラフにその価格関数 f_1 , f_2 , f_3 が図示してある。 f_1 は B1 の値下げ額の符号を単に逆にしたものになっている。下のグラフの点線は f_2 を表し、競合の値下げ額より値下げ幅が大きい場合にのみ販売量に影響を及ぼす。破線は f_3 を表し、競合の値下げ額と B1 の値下げ額の差だけが価格関数として販売量に影響を及ぼす。

図 5 は 4 ブランドの値下げレベル (y 軸) と販売量 (x 軸) のグラフである。B4 に関するグラフを見ると、値下げに関して 2 つのグループが異なる動きをしていることが分かる。値下げが販売量の増加をもたらす条件のみを価格関数としてモデル化しているため、第 4 の価格関数として上限および下限のしきい値を持つ価格関数 f_4 をつけ加えた。値下げが明らかに販売量に貢献しないグループが存在するのは B4 のみであり、B4 のみ価格関数 f_4 を考慮した。さらに B4 では常時店頭在庫があるとは限らない為、価格関数 f_2 , f_3 は考慮しないで f_1 と f_4 を AIC で比較した結果、 f_4 が良いモデルとして選ばれた。ここでも AIC によって上限 (57 円) および下限 (18 円) のしきい値の推定値も決定した。図 4 の実線はブランド B4 の値下げ額である。点線は f_4 を表し、値下げ額が 18 円から 57 円の間にある場合のみ価格関数がゼロではない。

B1 の値を除く B2, B3, B4 では f_1 から f_4 の条件に加えて値引き効果の減衰を加えた f_5 の関数を持つモデルの AIC が最小となり、一番良いことが分かった。図 4 の破線は B4 の f_5 を表し、B4 の値下げが連続するとその値下げ効果は減衰する。

表6. 店舗Aの定係数モデルに関する対数尤度およびAIC.

Model (T,X)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model (T,)	-1997.3	4042.7 (93.1)	24
Model Full	-1979.3	4086.6 (137.0)	64
Model M10	-1975.2	4076.4 (126.8)	63
Model M17	-1971.0	4062.1 (112.5)	60
Model M4	-1966.9	4047.7 (98.1)	57
Model M9	-1959.2	4030.3 (80.7)	56
Model M5	-1959.2	4024.3 (74.7)	53
Model M20	-1955.4	4010.8 (61.2)	50
Model M14	-1951.8	4001.5 (51.9)	49
Model M6	-1950.7	3997.3 (47.7)	48
Model M18	-1950.1	3990.2 (40.6)	45
Model M15	-1949.3	3986.6 (37.0)	44
Model M13	-1946.1	3978.3 (28.7)	43
Model M8	-1943.6	3971.4 (21.8)	42
Model M2	-1942.4	3962.8 (13.2)	39
Model M11	-1940.9	3957.9 (8.3)	38
Model M12	-1938.7	3951.5 † (1.9)	37
Model M16	-1940.8	3949.6 †† (0.0)	34
Model M3	-1951.8	3965.7 (16.1)	31
Model M1	-1966.8	3989.7 (40.1)	28
Model M19	-1966.3	3982.7 (33.1)	25
Model M7	-1997.3	4042.7 (93.1)	24

6.2 値下げ効果を考慮した多変量定係数モデルの分析例

次のステップとして値下げ効果を考慮し、店舗Aの週次のデータに対してはモデル3により、店舗Bの日次のデータに対してはモデル4により定係数回帰を伴う多変量時系列分析を行った。すなわち、(3.4)式～(3.6)式において値下げ効果を加えた定係数モデル ($\sigma_0^2 = 0$) で定係数 $b^{(i)}$ を全て含めたフルモデルを当てはめた。

モデル3 (ベースライン成分+値下げ効果)

$$(6.9) \quad y_n = t_n + x_n + w_n$$

モデル4 (ベースライン成分+曜日変動+値下げ効果)

$$(6.10) \quad y_n = t_n + d_n + x_n + w_n$$

表6および表8は店舗Aおよび店舗Bに関してそれぞれ対数尤度、AIC、およびパラメーター数をまとめたものであり、フルモデル (Model Full) に関する値は2行目である。Tはベースライン成分、Wは曜日変動成分、Xは説明変数成分を表し、1行目は5節の値下げ効果を考慮しない最良のモデルに関する値である。値下げ効果を考慮しない場合と比べると店舗Aでは対数尤度は改善したものの、パラメーター数の増大によりAICは4042.7から4086.6へと逆に大きくなった。一方、店舗BではAICの値は値下げ効果を考慮しない場合の39118.0から値下げ効果を考慮した場合の36810.4へと2300以上減少し、モデルのあてはまりは著しく改善した。

6.3 価格関数の変数選択の手順

さらに価格関数の最良の組み合わせを決定するため、AICを用いて変数選択を行った。変数

選択はまず変数減少法で行い、ある変数を削除した場合に AIC の値が一番小さくなる順序で、フルモデルから変数の削除を行った。ある変数を削除した際に AIC の値が増加する場合はその変数はサブセットに戻される。この過程を最後の回帰パラメーターが削除されるまで続けた。例えば、表 6 のモデル M10 は表 7 の全ての価格関数を含む Model Full から表 7 の 10 の数字を示す価格関数、つまり、ブランド A2 の価格関数がその他合計の販売量に影響を与える部分のみを取り除いた残り全ての変数を含むモデルである。

表 7. 店舗 A の販売量および価格関数 (NO.: パラメーター数)。

販売量 NO.	価格関数			
	U_{A1}	U_{A2}	U_{A3}	U_{A4}
	3	1	1	3
Y_{A1}	(1)	6	11	(16)
Y_{A2}	2	(7)	12	17
Y_{A3}	(3)	8	13	18
Y_{A4}	4	9	14	(19)
Y_{OT}	5	10	15	20

表 8. 店舗 B の定係数モデルに関する対数尤度および AIC。

Model (T,W,X)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model (T,W,)	-19507.0	39118.0 (2490.8)	52
Model Full	-18293.2	36810.4 (183.2)	112
Model M4, 9,14	-18276.0	36760.0 (132.8)	104
Model M8	-18270.9	36741.8 (114.6)	100
Model M20	-18267.8	36727.6 (100.4)	96
Model M18	-18260.9	36705.8 (78.6)	92
Model M12	-18260.0	36700.0 (72.8)	90
Model M11	-18253.8	36683.6 (56.4)	88
Model M5	-18251.4	36674.8 (47.6)	86
Model M10	-18248.8	36661.6 (34.4)	82
Model M15	-18246.4	36652.8 (25.6)	80
Model M3	-18240.3	36636.6 (9.4)	78
Model M2	-18237.6	36627.2 † (0.0)	76
Model M17	-18249.7	36643.5 (16.3)	72
Model M16	-18308.2	36752.4 (125.2)	68
Model M6	-18340.0	36808.0 (180.8)	64
Model M1	-18451.6	37027.2 (400.0)	62
Model M7	-18808.8	37733.6 (1106.4)	58
Model M13	-19262.2	38636.4 (2009.2)	56
Model M19	-19507.0	39118.0 (2490.8)	52
Model M12+	-18237.0	36630.0 † (2.8)	78

表 9. 店舗 B の販売量および価格関数 (NO.: パラメーター数)。

販売量 NO.	価格関数			
	U_{B1}	U_{B2}	U_{B3}	U_{B4}
	2	4	2	4
Y_{B1}	(1)	(6)	11	(16)
Y_{B2}	2	(7)	(12)	(17)
Y_{B3}	3	8	(13)	18
Y_{B4}	4	9	14	(19)
Y_{OT}	5	10	15	20

変数選択に関する分析結果は表6および表8の3行目以降にまとめた。この変数選択の結果、最良の定係数モデルはフルモデルと比較して、店舗A(店舗B)では変数が16(13)減少し、AICも137.0(182.8)減少し、3949.6(36627.2)となった。最良の定係数モデルについて表7(店舗A)および表9(店舗B)に各ブランドの価格関数と販売量の関係を数字で表し、各変数に対する必要なパラメーター数も表示した。サブセットモデルの中で最小のAIC値を持つ最良のモデルとして、店舗AではM16、店舗BではM2がそれぞれ選ばれた。さらに、2番目に良いモデルは店舗Aでは最大対数尤度値を持つモデルM12となった。次に、選択されたサブセットにある変数を加えた時に一番小さいAICの値を持つ変数を加えていく変数増加法で変数選択を行ったが、最良のモデルは変化しなかった。店舗Bのデータでは二つ目の選択肢として、変数を加えた際にAICこそ減少しなかったが、対数尤度が改善したモデルとしてM12+(モデルM2に表9で12の数字の示す価格関数を加えたモデル)を選んだ。

最良の定係数モデルは表7および表9で示すように価格関数の説明変数がどのように各ブランドの販売量に影響を与えるかを反映している。括弧で囲まれている数字を含むモデルが最良のモデル、<>印で囲まれている数字を含むモデルは二番目に良いモデルである。

6.4 多変量定係数モデルと多変量時変係数モデルの比較

前節では多変量間での回帰係数の構造が時間的に変化しない定係数モデルの構築を行った。しかし、新しい商品が棚に置かれた場合に競合構造が変化せずに、新商品の販売量が既存商品の販売量の上に加算されることも考えられるが、競合構造が変化すると考えるのが自然である。そこで、回帰係数が固定ではなく、時間的に変化する時変係数モデルを考慮した。時変係数モデルは定係数モデルにおいて $\sigma_0^2 > 0$ と指定することによって得られる。

表10. 店舗Aの時変係数モデルに対する対数尤度およびAIC.

Model (T, X)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model ($T_C, ,$)	-2024.5	4089.1 (145.1)	20
Model ($T_M, ,$)	-1997.3	4042.7 (98.7)	24
Model M12 (T_C, X_C)	-1954.8	3959.7 (15.7)	33
Model M16 (T_C, X_C)	-1957.8	3975.6 (31.6)	30
Model M12 (T_M, X_C)	-1938.7	3951.5 (7.5)	37
Model M16 (T_M, X_C)	-1940.8	3949.6 (5.6)	34
Model M12 (T_M, X_M)	-1934.0	3944.0 †† (0.0)	38
Model M16 (T_M, X_M)	-1937.4	3944.7 † (0.7)	35

表11. 店舗Bの時変係数モデルに対する対数尤度およびAIC.

Model (T, W, X)	対数尤度	AIC	パラメーター数
Model ($T_C, ,$)	-19747.1	39534.2 (2931.1)	20
Model ($T_M, ,$)	-19653.0	39354.0 (2750.9)	24
Model ($T_C, W_C, ,$)	-19637.9	39363.8 (2760.7)	44
Model ($T_M, W_M, ,$)	-19507.0	39118.0 (2514.9)	52
Model M2 (T_C, W_C, X_C)	-18458.9	37053.8 (450.7)	68
Model M12+(T_C, W_C, X_C)	-18448.2	37036.4 (433.3)	70
Model M2 (T_M, W_M, X_C)	-18237.6	36627.2 (24.1)	76
Model M12+(T_M, W_M, X_C)	-18237.0	36630.0 (26.9)	78
Model M2 (T_M, W_M, X_M)	-18224.5	36603.1 †† (0.0)	77
Model M12+(T_M, W_M, X_M)	-18223.9	36605.8 † (2.7)	79

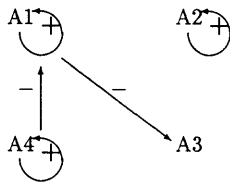


図6. 店舗 A の各ブランドにおける
価格関数と販売量の関係。

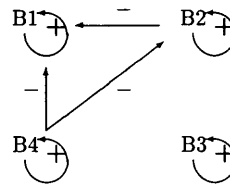


図7. 店舗 B の各ブランドにおける
価格関数と販売量の関係。

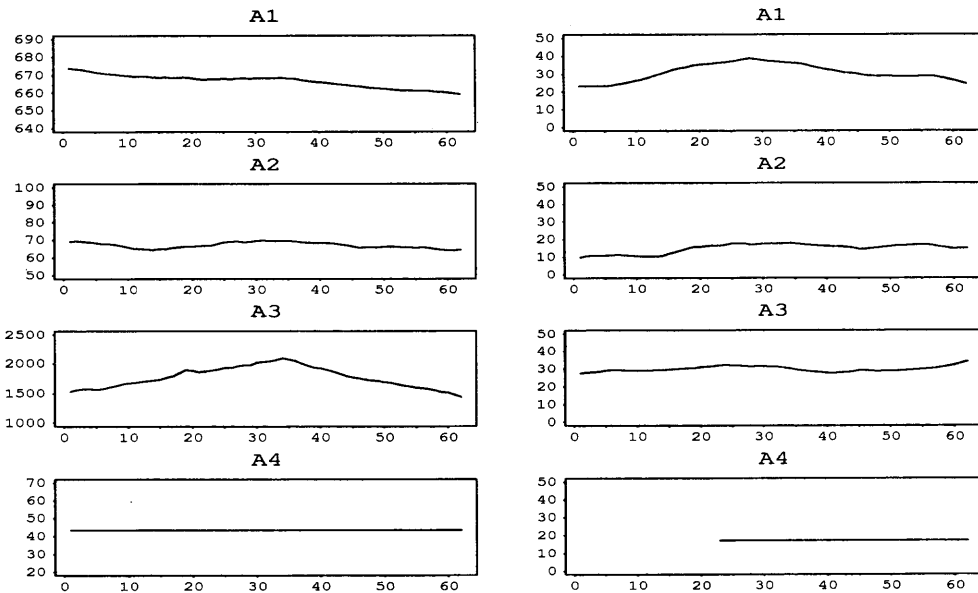


図8. 店舗 A の時変係数の動き：ベースライン成分 (左) および説明変数成分 (右)。

表 10 および表 11 はそれぞれ店舗 A および店舗 B での最良の (または 2 番目の) モデル, M16 (または M12), M2 (または M12+) について定係数モデルと時変係数モデルとを比較した結果をまとめたものである。記号の T , W , X は以前と同じで, 添え字 C , M はそれぞれ定係数と時変係数を指す。結果は店舗 A では時変係数モデルの M12, 店舗 B では時変係数モデルの M2 が最良のモデルとして選ばれた。

図 6 は店舗 A における最良のモデルの価格関数と販売量に関して, 各ブランドの競合関係をそれぞれ図解したものである。店舗 A ではプライベートブランドの A3 を除く 3 ブランドの値下げは各販売量増加に貢献していることが分かる。さらに, A3 は競合のナショナルブランドの A1 の値下げから一方的に負の影響を受け, 販売量が減少している。逆に A1 は A4 から負の影響を受けている。A2 (低脂肪タイプ), A4, その他合計は競合ブランドから全く影響を受けていない。

図 7 は店舗 B に関する同様なグラフである。各ブランドの値下げは少なくともそのブランドの販売量増加に貢献していることがわかる。プライベートブランド B1 の販売量は競合 B2 および B4 の値下げによって減少している。また, ナショナルブランドの B2 は競合ブランド B4 の値下げによって負の影響を受けている。B3 (低脂肪タイプ), B4, その他合計の販売量は競合ブ

ランドから影響を全く受けていない。

店舗 A および店舗 B ともに低脂肪タイプが他のブランドから独立していることが分かった。つまり、競合構造の発見において AIC で得られた最良のモデルでは経験的に納得のいく結論を導き出していることが分かる。このように独立したブランドと競合関係にあるブランドを分別することにより、新しいマーケットセグメンテーションが可能になる。

図 8 は店舗 A に関するもので、左側にベースライン成分の係数の動きを、右側に説明変数成分の係数の動きを表している。A3 は競合の価格によって、それ以外のブランドは自分の価格関数によって影響を受けている係数の動きを表す。説明変数成分の符号は価格関数がゼロまたは負の値で定義されている為、左側のベースライン成分との比較で同方向に見えるように、競合の価格関数によって影響を受けている A3 を除いて y 軸について符号を逆にしたものをグラフ化している。

図 9 は店舗 B に関する同様なグラフである。B2 の明らかな例外を除いて、説明変数成分はほぼ類似した動きを示している。つまり、ベースライン成分と説明変数成分はしばしば類似した要因によって影響を受けるが、時々、異なった変動をする。B2 に関するベースライン成分の係数の動きは主に季節性によるが、説明変数成分の動きは競合関係による。これは強い競合関係が支配的な場合はバックグラウンドとなる季節性が見えにくくなることを示している。店舗 A、店舗 B ではともに期間の途中から棚に置かれたブランド A4、B4 がある。店舗 B における回帰係数の減少は新規商品の B4 の投入によって競合関係が変化したことが考えられる。(3.6) 式においてシステムノイズ分散に関してたった一つのパラメーター σ_0^2 を追加することによって、AIC により回帰係数の減少を伴う競合関係の変化も検出できたといえよう。係数の変化の度合いは店舗 A では A3、A1、A2、A4、店舗 B では、B1、B2、B3、B4 の順で大きくなっている。

図 11 は店舗 B に関するグラフで、左が時変係数モデル $M_2(T_M, W_M, X_M)$ の推定販売量、中央が実際の販売量、右が定係数モデル $M_2(T_C, W_C, X_C)$ の推定販売量である。上から 4 大ブランドの B1~B4 と続き、一番下が 4 大ブランドとその他合計を足し上げた店舗 B における牛乳

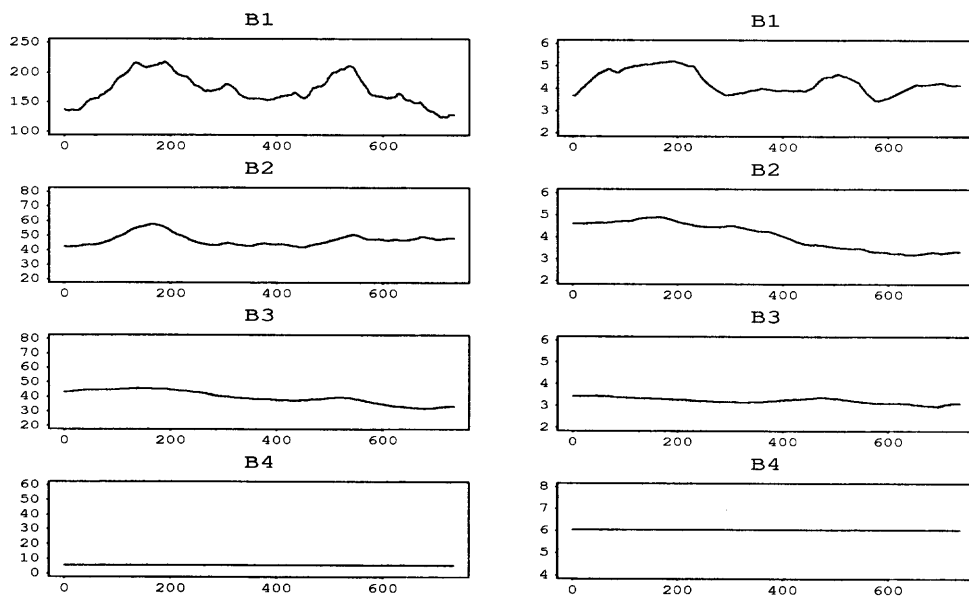


図 9. 店舗 B の時変係数の動き：ベースライン成分 (左) および説明変数成分 (右)。

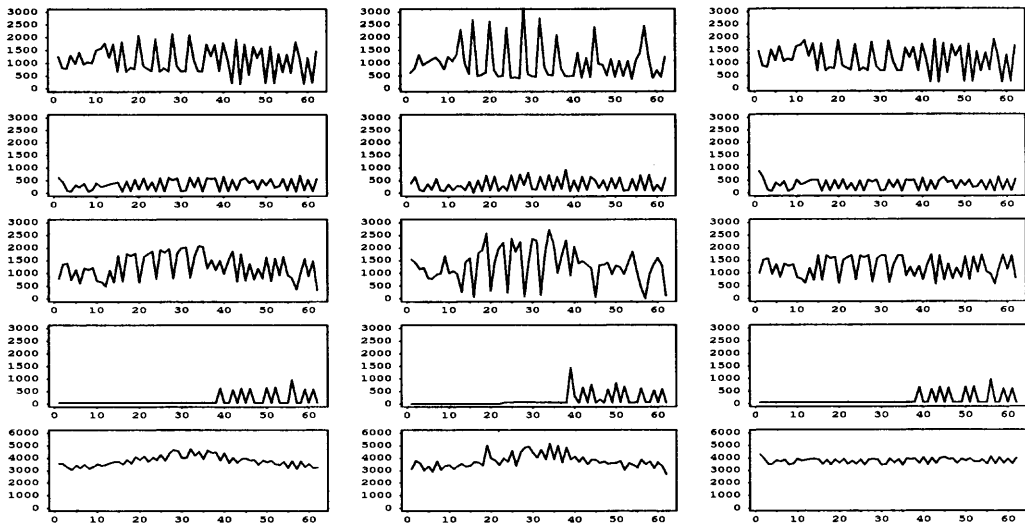


図 10. 店舗 A のモデル M12 (図 6 参照) に関する (1994/1 週-1995/10 週) 時変係数モデル (左)；観測データ (中)；定係数モデル (右)。

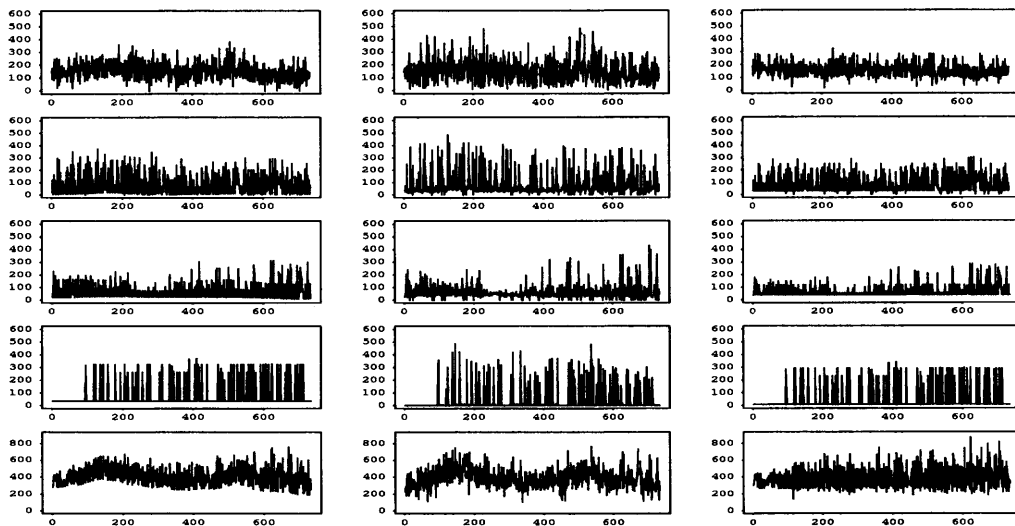


図 11. 店舗 B のモデル M2 (図 7 参照) に関する (1994/2/28-1996/3/3) 時変係数モデル (左)；観測データ (中)；定係数モデル (右)。

合計である。(図 10 は店舗 A に関する同様なグラフである。) 各ブランドについては時変係数モデルと定係数モデルではそれ程差がないように見えるが、牛乳合計では定係数モデルに対する時変係数モデルの優越性は歴然としている。この定係数モデルではノイズ項で共分散構造を仮定しているが、独立な分散のみを仮定した場合、つまり多変量回帰モデルの場合、モデルの当てはまりはもっと悪くなることが簡単に予想される。単純な多変量回帰モデルでは各ブランドの推定値はそこそこ許容できるとしても、牛乳合計といった全体像の情報を抽出することに

は向かず、全体像を適切に捕らえるには、競合関係の変化を表現できる時変係数モデルが必要ながことが示された。

このように、単純なモデルから複雑なモデルまで分析者が想定した幅広い選択肢の中からより良いモデルを選択しようとする時、統一的な選択規準である AIC を用いることによって適切にモデル選択が行われたことが本分析例によって示された。

7. ま と め

コンピュータによる計算力が年々増大し、より細分化されたデータが得られ、より複雑なモデル化が可能になってきている現在、沢山のモデルの中から、より良いモデルを選びたいというニーズは大きい。本分析例ではトレンド成分、曜日変動成分、値下げ効果成分を構成要素とする多変量時系列構造モデルを 1) 価格関数, 2) 競合構造モデル, 3) 時間的変化を許した競合構造モデルの 3 段階で、単純なモデルから複雑なモデルへと構成した。各モデル選択の段階で、AIC を統一的なモデル選択規準とし、各段階で経験的に納得のいくモデルが選ばれた。AIC は多様なモデルを一つの規準で評価することを可能とするものであり、POS データのような複雑な対象のモデリングには不可欠な道具といえる。AIC 自身は与えられた範囲のモデル族の中で、最良のモデルを選択するに過ぎないが、統一的なモデル評価規準としての AIC が存在してはじめて、自由なモデル構成とその検証が可能になる。

謝 辞

POS データを提供して下さった流通システム開発センターの小野耕三常務と西山智章上級研究員、貴重なコメントを下さった統計数理研究所の石黒真木夫教授および査読者には心よりお礼申し上げます。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium on Information Theory* (eds. B. N. Petrov and F. Csaki), 267-281, Akademiai Kiado, Budapest.
- Akaike, H. (1980). Likelihood and the Bayes procedure, *Bayesian Statistics* (eds. J. M. Bernardo, M. H. De Groot, D. V. Lindley and A. F. M. Smith), 143-166, University Press, Valencia.
- Curry, D. J., Divakar, S., Mathur, S. K. and Whiteman, C. H. (1995). Bvar as a category management tool: An illustration and comparison with alternative techniques, *Journal of Forecasting*, **14**, 181-199.
- Dekimpe, M. G. and Hanssens, D. M. (1995a). The persistence of marketing effects on sales, *Marketing Science*, **14**(1), 1-21.
- Dekimpe, M. G. and Hanssens, D. M. (1995b). Empirical generalizations about market evolution and stationarity, *Marketing Science*, **14**(2), 109-121.
- 片山 徹 (1983). 『応用カルマンフィルター』, 朝倉書店, 東京.
- Kitagawa, G. and Gersch, W. (1984). A smoothness priors — State space modeling of time series with trend and seasonality, *J. Amer. Statist. Assoc.*, **79**, 378-389.
- Kondo, F. N. and Kitagawa, G. (1998a). State space decomposition of daily scanner sales into trend, day-of-the-week effect and price promotion effect, Research Memo., No. 661, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Kondo, F. N. and Kitagawa, G. (1998b). Four time-varying aspects on scanner sales based on vector state space model, Research Memo., No. 677, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- 近藤文代 (1999). デイリーPOS データにおける曜日変動および値下げ効果の抽出, オペレーションズ・リサーチ, **44**(3), 40-49.

- Smith, S. A., McIntyre, S. H. and Achabal, D. D. (1994). A two-stage sales forecasting procedure using discounted least squares, *Journal of Marketing Research*, **31**, 44-56.

The Role of AIC on the Construction of Multivariate Structural Time Series Model

Fumiyo N. Kondo

(Department of Statistical Science, The Graduate University for Advanced Studies)

This paper focuses on the role of the AIC as a model selection criterion through empirical analyses of POS scanner data in order to construct a multivariate structural time series model. Computer calculation capacity improves year by year and a huge amount of very minute data are available at retailers. Under these environments, we set up dozens of models within a unified framework that enables us to deal with more factors of data variation. Our models consist of trend component, day-of-the-week variation, and price deal component. They are flexible enough to handle time-varying parameter, which can capture the characteristics of scanner data, i.e., a competitive structure among products and a temporal relationship among data points. A group of models was constructed at the following three stages and their comparisons were made: 1) the determination of price function expressing the relationship between the price and the sales of a product (univariate model); 2) multivariate model expressing competitive structure among products; 3) time-varying parameter structural models which can express changes in a competitive structure. The AIC criterion was used as a unified model selection criterion for a comparison among different models and analyses were conducted on daily and weekly POS data. The analyses showed that a reasonable model was chosen as the best model at each stage. For example, at the last stage comparison, a time-varying model which can express structural changes was shown to be superior to constant parameter models by the AIC. Thus, under the model framework that a researcher established freely, the usage of the AIC as a unified model selection criterion makes it possible to choose the best model among dozens of the alternatives.

Key words: State space model, unified model selection criterion, daily & weekly scanner data, time-varying parameter, competitive structure.