統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 143-156

特集「統計基礎理論」
[研究詳解]

正則変動性で特徴付けられる分布族の分解問題 (II)

統計数理研究所　志 村 隆 彰

(受付 1998 年 11 月 6 日；改訂 1999 年 2 月 23 日)

要　旨

正則変動性で特徴付けされる分布族に対し，Mellin-Stieltjes 合成積 (MS-合成積と記す) 及び，その意味での分解について考察した．$[0, \infty)$ 上の分布 μ, ν の MS-合成積とは X, Y をそれぞれ μ, ν に従う独立な確率変数としたときの積 XY の分布をいい，$\mu \circ \nu$ で表す．μ, ν を $\mu \circ \nu$ の因子と呼ぶ．α 次の切断積率が緩慢変動する分布の全体を $\boldsymbol{M}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$，分布の裾が指数 $-\alpha$ の正則変動する分布の全体を $\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha \geq 0)$ とする．これらはともに MS-合成積について閉じた分布族であるが，主な関心はこれらに属する分布の因子が元の分布族に属するのかということにある．$\boldsymbol{M}(\alpha)$ の部分族のいくつかについてはそれに属する分布の全ての因子が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入ることがいえる．ところが，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ 自身については 必ずしもそれに属する分布の全ての因子が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するとは限らない．このことはそれ自身は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ には属さないが，α 次の積率が発散する任意の $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布との MS-合成積が常に $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入るような分布が存在することによって示される．一方，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ については $\alpha = 0$ と $\alpha > 0$ で結果がかなり異なる．$\mu \circ \nu \in \boldsymbol{D}(\alpha)$ を仮定したとき，$\alpha = 0$ ならば，ν の $\varepsilon(> 0)$ 次の積率が有限であることから，$\mu \in \boldsymbol{D}(0)$ がいえる．ところが，$\alpha > 0$ の場合は ν の台が有限集合であっても $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属さない分布との MS-合成積が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に入ることがありうることが分った．

キーワード：正則変動関数，Mellin-Stieltjes 合成積，分布の裾，切断積率，分布の分解．

1. 序

正則変動性の概念は 1930 年に J. Karamata によって導入されて以降，様々な分野で活用されてきており，確率論や統計学においては極限定理と関連して現れる重要な分布の特徴付けなどにしばしば用いられる．α 次の切断積率 (truncated moment) $\int_0^x t^\alpha \mu(dt)$ が緩慢変動する分布の族と分布の裾 $\mu(x, \infty)$ (tail, 以下裾と呼ぶ) が正則変動する分布の族はその代表的なものである．志村 (1994 b) ではこれらの分布族に対して，合成積及びその意味での分解問題，即ち，$\boldsymbol{D}$ を適当な $\boldsymbol{R}^1$ 上の分布族とし，それに属する分布 μ, ν に対し，それらの合成積 $\mu * \nu$ が $\boldsymbol{D}$ に属するかという合成積に関する閉性の問題，或いは逆に，合成積 $\mu * \nu$ が $\boldsymbol{D}$ に属していると仮定したとき，因子 μ, ν は $\boldsymbol{D}$ に属するのかという分解についての閉性の問題を扱った．これに対し，本稿は上述のふたつの分布族に対して，通常の合成積の代りに MS-合成積とし，その意味での合成と分解の問題を考察して得られた結果をまとめたものである．MS-合成積とは，通常の意味での分布の合成積がそれぞれの分布に従う確率変数の独立積の分布を表すのに対し

て，独立積の分布に相当するものである（$\mu\circ\nu$ と記す）．この問題は，正規分布の吸引域（$\boldsymbol{D}_2$ と記す）についての Maller (1981) による次の結果に起因する．彼は正規分布の吸引域について次のことを示した．X, Y がともに $\boldsymbol{D}_2$ に属する分布に従う独立確率変数ならば，その積 XY の分布も $\boldsymbol{D}_2$ に属する．逆に，2つの独立確率変数の積の分布が $\boldsymbol{D}_2$ に属し，その一方の確率変数の分散が有限ならば、もう一方の分布も $\boldsymbol{D}_2$ に属する．Maller はこの結果を応用して，分散が有限とは限らない線形回帰における回帰係数の漸近正規性を証明し，さらにより強い結果として積の分布が $\boldsymbol{D}_2$ に属していれば，各々の分布も $\boldsymbol{D}_2$ に入るであろうという予想をした．$\boldsymbol{D}_2$ は2次の切断積率 $\int_{|t|<x}t^2\mu(dt)$ が緩慢変動する非退化分布からなる族であることが知られているので，Maller の予想は $\boldsymbol{D}_2$ に属する分布のMS-合成積の意味での非退化因子は $\boldsymbol{D}_2$ の分布に限るであろうということである．そのような背景の下に，第3章で $[0,\infty)$ 上の分布で α 次の切断積率 $\int_0^x t^\alpha\mu(dt)$ が緩慢変動するような分布の全体 $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に対して，MS-合成積に関する合成と分解を扱う．即ち，通常の合成積と同様，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属する分布 μ, ν に対し，それらの MS-合成積 $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するかという問題，或いは逆に，MS-合成積 $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属しているならば，因子 μ, ν は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するのかといった問題について論ずる．そして，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ は MS-合成積について閉じた分布族であり，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ の幾つかの部分族に対してはその因子は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布になるけれども，一般的には Maller の予想は成立しないことを示す．彼の予想が成立しないことは，“μ を α 次の積率が発散するような $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布とすれば，$\mu\circ\nu$ が必ず $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するような $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入らない分布 ν が存在する”という形で示される．こうした結果は Maller (1981) の延長線上にあるものであるが，証明は彼のものとは異なる．本稿では証明には触れないが，第2章で簡潔に紹介する非減少緩慢変動関数の分解の結果が用いられる．第4章では同様の問題を裾が正則変動する分布に対して考察する．切断積率の場合とは異なり，正則変動する裾をもつ分布と有界な台をもつ分布との MS-合成積の裾が正則変動することは容易に分る．従って，問題はともに正則変動しない裾をもつ分布の MS-合成積が正則変動することがありうるのかというものになる．結果として，裾が緩慢変動する（正則変動の指数が0）場合とそれ以外（正則変動の指数が負）の場合で結果が全く異なるという興味深い事実が得られた．裾が緩慢変動する場合は，その一方の因子がある $\varepsilon>0$ に対して ε 次の積率が有限ならば，他方の因子の裾は緩慢変動する．これに対し，裾が指数が負の正則変動をする場合は片方の因子の台が2点であってもその上に適当な確率測度を与えることによって，その分布と正則変動する裾をもたない分布との MS-合成積の裾が正則変動するようにできることが分った．

2. 準　　備

この章では本稿で扱う正則変動関数についての基本事項，関連する分布族とその確率論的な意味などについての簡潔な紹介をする．2.1 節で正則変動性，2.2 節で確率論に関する必要事項を準備する．前者については Bingham et al. (1987), Feller (1971), Seneta (1976), Shimura (1991)，志村 (1994 b)，後者についてはこれらに加え，Darling (1952), Gnedenko and Kolmogorov (1968) からの抜粋であり，証明や詳細についてはこれらの文献を参考にして頂きたい．

2.1 正則変動関数とその分解

最初は，本稿で最も重要な概念である正則変動性の定義から始める．

定義 2.1.（緩慢変動関数と正則変動関数） 正値可測関数 l は任意の $k>0$ に対し，$\lim_{x\to\infty}$

$l(kx)/l(x)=1$ を満たすとき，緩慢変動関数 (slowly varying function) といわれる．l が単調(非減少または非増加) であれば，$\lim_{x\to\infty} l(2x)/l(x)=1$ を満たせば緩慢変動関数であるのに十分である．緩慢変動関数 l と実数 ρ により，$f(x)=x^\rho l(x)$ と表されるものを指数 ρ の正則変動関数 (regularly varying function) という．指数 0 の正則変動関数が緩慢変動関数である．

以下に具体例と基本的な性質を述べる．

例． 以下の 1 から 5 は緩慢変動関数である．

1．定数関数 $l(x)=c\ (>0)$.
2．対数関数 $l(x)=\log x$.
3．$l(x)=(\log x)^2$.
4．$l(x)=\exp\{\sqrt{\log x}\}$.
5．振動する関数 $l(x)=\exp\{(\log x)^{1/3}\cos((\log x)^{1/3})\}$.
6．$2+\sin x$ は緩慢変動関数でない．

このように緩慢変動関数はその名の通りゆっくり変化する関数であり，その族は定数関数，対数関数の他にも様々な関数を含む豊富なものである．

命題 2.2.（緩慢変動関数の基本的性質） $l(x)$ を緩慢変動関数とする．

(i) $\lim_{x\to\infty}\log l(x)/\log x=0$.
(ii) 任意の実数 α に対し，$(l(x))^\alpha$ は緩慢変動関数である．
(iii) 任意の $\rho>0$ に対し，$\lim_{x\to\infty} x^\rho l(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} x^{-\rho} l(x)=0$.
また，非減少関数 f_1 と非増加関数 f_2 が存在して，

$$\lim_{x\to\infty} f_1(x)/x^\rho l(x)=\lim_{x\to\infty} f_2(x)/x^{-\rho} l(x)=1\,.$$

即ち，緩慢変動でない正則変動関数は全て漸近的に単調である．
(iv) l_1，l_2 が緩慢変動関数ならば，積 $l_1(x)l_2(x)$，和 $l_1(x)+l_2(x)$，$\lim_{x\to\infty} l_2(x)=\infty$ ならば，合成関数 $l_1(l_2(x))$ はみな緩慢変動関数である．

非負単調関数に対し，その分解を以下のように定義する．

定義 2.3.（単調関数の分解） 非負非減少 (resp. 非増加) 関数 f は f_1 と f_2 が非負非減少 (resp. 非増加) で $f=f_1+f_2$ なるとき，成分 f_1 と f_2 に分解されるという．

非減少 (resp. 非増加) 緩慢変動関数の和は非減少 (resp. 非増加) 緩慢変動関数であるが (命題 2.2 (iv))，非減少 (resp. 非増加) 緩慢変動関数の成分が必ずしもそうであるとは限らない．以下に述べることは単調 (主に非減少) 緩慢変動関数の分解に関する基本的な結果である．

定義 2.4. 非負非減少関数 f が有界増分 (dominatedly non-decreasing) であるとは，$\limsup_{x\to\infty}(f(2x)-f(x))<\infty$ を満たすときをいう．

有界増分関数が非減少緩慢変動関数であることは容易に分る．先の例で挙げた非減少緩慢変

動関数のうち，1と2は有界増分であり，3と4はそうでない．

次の定理は，有界増分性の非減少緩慢変動関数の分解における重要性を示すものである．

定理 2.5. 有界増分関数の任意の成分は，有界増分（従って，緩慢変動関数）である．逆に，任意の成分が緩慢変動関数である正値可測非減少関数は，有界増分である．

定理 2.6.

(i) 単調な緩慢変動関数 f の成分 f_1 が $\liminf_{x\to\infty} f_1(x)/f(x) > 0$ を満たせば，これは緩慢変動成分である．

(ii) f が有界増分関数ならば，$\limsup_{x\to\infty} f(x)/\log x < \infty$ である．

(iii) 発散する任意の有界増分関数 f に対して，$\lim_{x\to\infty} f_1(x)/f(x) = 1$ を満たす有界増分でない非減少関数 f_1 が存在する．

2.2 正則変動性で特徴付けられる確率分布族

次に本稿で扱う分布族を紹介する．これらはいずれも α 次の切断積率 $\int_0^x t^\alpha \mu(dt)$ と裾 $\mu(x, \infty)$ により特徴付けられる．分布の切断積率や裾の挙動は様々な極限定理と密接に関連しており，こうした分布族はその意味で重要なものである．後半ではそうした極限定理の一部を紹介する．

$[0, \infty)$ 上の分布全体からなるクラスを $\boldsymbol{P}$ と書く．$\boldsymbol{P}$ の部分族 $\boldsymbol{M}(\alpha), \boldsymbol{F}(\alpha), \boldsymbol{S}(\alpha), \boldsymbol{C}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ 及び $\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha \ge 0)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{M}(\alpha) &= \left\{\mu \in \boldsymbol{P} : \int_0^x t^\alpha \mu(dt) \text{ が緩慢変動する}\right\},\\
\boldsymbol{F}(\alpha) &= \left\{\mu \in \boldsymbol{P} : \int_0^x t^\alpha \mu(dt) \text{ が有界増分である}\right\},\\
\boldsymbol{S}(\alpha) &= \left\{\mu \in \boldsymbol{P} : \lim_{x\to\infty} \int_0^{x^2} t^\alpha \mu(dt) \Big/ \int_0^x t^\alpha \mu(dt) = 1\right\},\\
\boldsymbol{C}(\alpha) &= \left\{\mu \in \boldsymbol{P} : \limsup_{x\to\infty} \int_0^{x^2} t^\alpha \mu(dt) \Big/ \int_0^x t^\alpha \mu(dt) < \infty\right\},\\
\boldsymbol{D}(\alpha) &= \{\mu \in \boldsymbol{P} : \mu(x, \infty) \text{ が指数 } -\alpha \text{ の正則変動する}\}.
\end{aligned}
$$

これらの分布族相互の関係について述べる．$\beta > \alpha$ ならば，$\boldsymbol{D}(\beta)$ の分布は有限な α 次の積率をもつことが容易に分り，各 $\alpha > 0$ に対して，$\boldsymbol{D}(\alpha) \subset \boldsymbol{M}(\alpha)$ であることも知られている．従って，$\cup_{\beta \ge \alpha} \boldsymbol{D}(\beta) \subset \boldsymbol{M}(\alpha)$ である．$\boldsymbol{S}(\alpha)$，$\boldsymbol{F}(\alpha)$ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の部分族であり，これらは $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布のうち 切断積率がゆっくり増加するものだといえる．但し，$\boldsymbol{F}(\alpha)$ と $\boldsymbol{S}(\alpha)$ の間に包含関係はない．特に，μ が $\boldsymbol{S}(\alpha)$ に入るということは，切断積率が非減少緩慢変動関数 l によって $\int_0^x t^\alpha \mu(dt) = l(\log x)$ と書けることである．一方，$\boldsymbol{C}(\alpha)$ に入ることは有界増分関数 f によって $\int_0^x t^\alpha \mu(dt) = \exp f(\log x)$ と表されることである．しかし，次の例で分るように $\boldsymbol{C}(\alpha)$ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の部分集合ではない．

例. **($\nu \in \boldsymbol{C}(\alpha) \backslash \boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布)** 離散確率 ν を

$$\nu(\{e^{e^k}\}) = ce^{-2e^k + k},\ k = 1, 2, \ldots, \qquad \text{ここで，} c \text{ は規格化定数である}$$

で定めると，ν は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入らず，その2次の切断積率は

$$\limsup_{x\to\infty}\int_0^{x^2} t^2\nu(dt)\Big/\int_0^x t^2\nu(dt) \le e < \infty$$

を満たすので，$\nu \in \boldsymbol{C}(\alpha)\backslash\boldsymbol{M}(\alpha)$ である.

次に分布族の確率論的な意味について述べる. $\boldsymbol{M}(\alpha)$, $\boldsymbol{D}(\alpha)$ と関連する確率論の事実は数多くあるが，ここでは志村 (1994 b) でも触れたものの中からその一部を簡潔に紹介する.
$X_1, X_2,\dots, X_n,\dots$ を分布 ν に従う実数値の独立確率変数列とし，$S_n = \sum_{j=1}^n X_j$ と書く.

例. (安定分布とその吸引域) 適当な定数列 $B_n > 0$, $A_n \in \boldsymbol{R}^1$ により，$B_n^{-1}\sum_{j=1}^n X_j - A_n$ の分布が $n \to \infty$ のとき μ に収束するとき，ν は μ に吸引されるといわれ，μ に吸引される分布の全体は μ の吸引域 (domain of attraction) と呼ばれる. また，ν が μ の部分吸引域 (domain of partial attraction) に属するとは，増加自然数列 m_n $(n \in \boldsymbol{N})$ と適当な定数列 $B_n > 0, A_n \in \boldsymbol{R}^1$ により，$B_n^{-1}\sum_{j=1}^{m_n} X_j - A_n$ の分布が $n \to \infty$ のとき μ に収束するときをいう. 空でない吸引域をもつ分布は，任意の $a > 0$ と $b > 0$ に対して，$\hat{\mu}(az)\,\hat{\mu}(bz) = \hat{\mu}(cz)\,e^{idz}$ ($\hat{\mu}$ は分布 μ の特性関数を表す) を満たす $c > 0$, $d \in \boldsymbol{R}^1$ が存在することで定義される安定分布の族と一致することが知られている. このとき，μ が非退化であれば $a^\alpha + b^\alpha = c^\alpha$ を満たす α $(0 < \alpha \le 2)$ がただひとつ存在し，この α は安定分布 μ の指数と呼ばれる. 正規分布は指数 2 の安定分布であり，その吸引域 $\boldsymbol{D}_2$ は非退化で 2 次の絶対切断積率 $\int_{|t|<x} t^2\nu(dt)$ が緩慢変動する分布族と等しい. コーシー分布 (指数 1) のような正規分布以外の安定分布の吸引域も右側の裾と左側の裾の和 $\nu(x, \infty) + \nu(-\infty, -x)$ が指数 $-\alpha$ $(0 < \alpha < 2)$ の正則変動し，比 $\nu(x, \infty)/\nu(-\infty, -x)$ が $x \to \infty$ のとき収束する (極限は ∞ も含む) ことで特徴付けられる.

$[0, \infty)$ 上の分布に限れば，正規分布の吸引域は $\boldsymbol{M}(2)$ であり，指数 α の安定分布の吸引域は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ である.

この他にも相対安定分布 (relatively stable distribution：その分布に従う独立同分布確率変数列の和 S_n がある定数列 B_n によって，$n \to \infty$ としたとき S_n/B_n が 1 に確率収束する分布) の族は台が正のとき，1 次の切断積率 $\int_0^x t\mu(dt)$ が緩慢変動する分布族と一致すること，緩慢変動する裾をもつ分布に対して，$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{P}(n\nu(S_n, \infty) \ge x) = e^{-x}, x > 0$ が成立つことなどが知られている.

定義 2.7. (Mellin-Stieltjes 合成積) X, Y をそれぞれ分布 μ, ν に従う正値独立確率変数とする. このとき，積 XY の分布を μ と ν の Mellin-Stieltjes 合成積 (MS-合成積と略す) と呼び，$\mu\circ\nu$ で表す. 逆に，μ 及び ν を $\mu\circ\nu$ の 因子 (factor) という.

注意. 志村 (1994b) では通常の合成積の場合として factor を要素と訳したが その場合も含め，因子の方が適当であるので以後これを用いる.

3. 緩慢変動する切断積率をもつ分布と MS-合成積

この章では，緩慢変動する切断積率をもつ分布の MS-合成積に関する性質について扱う. 前半では，因子が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属していることを仮定した話であり，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ が MS-合成積について閉じた分布族であることなどを示す. 逆に後半では，ふたつの分布の MS-合成積として表される分布が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属していると仮定したときの因子の性質を見る. Maller (1981) は正規分布の吸引

域 $\boldsymbol{D}_2$ (ここでは，$\boldsymbol{M}(2)$ に当る) が MS-合成積について閉じていることを示すとともに，その因子は再び $\boldsymbol{D}_2$ に属するであろうという予想をした．そして，片方の因子の分散が有限であるという仮定の下に，残りの因子は $\boldsymbol{D}_2$ の分布であることを証明した．ここでは $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属する分布の因子の性質についてさらなる考察を加える．以下に予め結果の概略を述べる．まず全ての因子が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するような，あるいは MS-合成積とその意味での分解について閉じた $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の部分族を与える．次に α 次の積率が発散する任意の $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布との MS-合成積が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するが，それ自身は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属さない分布が存在することを示す．これは Maller の予想が成立しないことを意味している．尚，この章の内容は，志村 (1995)，Shimura (1997b) のものである．証明は参考文献に譲ることにするが，主に非減少緩慢変動関数の分解の理論を用いてなされる．

3.1 緩慢変動する切断積率をもつ分布の MS-合成積

最初の補題は，裾の軽い分布との MS-合成積に対して，$\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属するという性質が不変であるということを意味する．

補題 3.1. (志村 (1993)) $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布 μ に対し，次が成立つ (右辺は ∞ を許す)．

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^\alpha \mu\circ\nu(dt)\Big/\int_0^x t^\alpha\mu(dt)=\int_0^\infty t^\alpha\nu(dt). \tag{3.1}$$

これから，直ちに ν の α 次の積率が有限ならば，$\mu\circ\nu$ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属することが分る．特に，$\nu\in \boldsymbol{M}(\beta)$ $(\alpha<\beta)$ であれば，ν の α 次の積率は有限である．さらに $\alpha=\beta$ の場合も含めて，次の定理が成立つ．

定理 3.2. μ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に，ν が $\boldsymbol{M}(\beta)$ $(\alpha\le\beta)$ にそれぞれ属するならば，$\mu\circ\nu$ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属する．

極限定理との関連で $\alpha=\beta=2$ と $\alpha=\beta=1$ の場合を系として述べておく (系 3.3(1) は Maller (1981) の結果である)．

系 3.3.
(1) 正規分布の吸引域は MS-合成積について閉じている．
(2) $[0,\infty)$ 上の相対安定分布の全体からなる分布族は MS-合成積について閉じている．

注意. α 次の積率が有限な場合では，MS-合成積の α 次の積率は各因子の α 次の積率の積に等しい．(3.1) は α 次の積率が無限となる場合でも，切断積率を用いることによって，それと類似の関係が成立つことを暗示しているように見える．しかし，一般には，切断積率と因子のそれとの関係は単純なものではなく，以下の 3 つの漸近的な増加の度合いは互いに異なる：

$$\int_0^x t^\alpha\mu\circ\nu(dt),\qquad \int_0^x t^\alpha\mu(dt)\int_0^x t^\alpha\nu(dt),\qquad \int_0^{x^2} t^\alpha\mu\circ\nu(dt).$$

但し，次の不等式が成立つ．μ, $\nu\in\boldsymbol{P}$ に対し，直ちに

$$\int_0^{x^2} t^\alpha\mu\circ\nu(dt)\Big/\left(\int_0^x t^\alpha\mu(dt)\int_0^x t^\alpha\nu(dt)\right)\ge 1. \tag{3.2}$$

さらに $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布であれば，

$$\limsup_{x\to\infty}\int_0^x t^\alpha \mu\circ\nu(dt)\Big/\Big(\int_0^x t^\alpha\mu(dt)\int_0^x t^\alpha\nu(dt)\Big)\le 1$$

であることも分っている。

3.2 緩慢変動する切断積率をもつ分布の分解問題

次に分解問題，即ち MS-合成積が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属していると仮定して因子が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入るかという問題についての結果を述べる．まず $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の部分族である $\boldsymbol{S}(\alpha)$ においては MS-合成積に関する合成及び分解についての閉性が成立つ．

定理 3.4. $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{S}(\alpha)$ に属するための必要十分条件は μ と ν がともに $\boldsymbol{S}(\alpha)$ に属することである．このとき，

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^\alpha \mu\circ\nu(dt)\Big/\Big(\int_0^x t^\alpha\mu(dt)\int_0^x t^\alpha\nu(dt)\Big)=1$$

が成り立つ．

次の定理は Maller (1981) の結果の拡張である．

定理 3.5. $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布で ν の α 次の積率が有限ならば，μ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に属する．従って，(3.1) が成り立つ．

補題 3.1 と定理 3.5 により，片方の因子の α 次の積率が有限の場合には MS-合成積で表される分布の切断積率と因子のそれらの積との関係が一応分ったといえる．

次に，切断積率が有界増分する分布族 $\boldsymbol{F}(\alpha)$ について述べる．

定理 3.6. $\boldsymbol{F}(\alpha)$ に属する分布の因子は $\boldsymbol{F}(\alpha)$ に属する．

注意. $\boldsymbol{F}(\alpha)$ は MS-合成積について閉じてはいない：μ は $\boldsymbol{F}(\alpha)$ の分布でその切断積率は $\log x$ のオーダーであるとする．すると (3.2) から $\mu\circ\mu$ の切断積率は $(\log x)^2$ のオーダーとなり，定理 2.6 (ii) から，このようなものは有界増分ではないことが分る．

次に，Maller の予想が成立しないことを示す定理を挙げる．

定理 3.7. μ を α 次の積率が無限である $\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布，ν を $\boldsymbol{C}(\alpha)$ に属する分布とすれば，$\mu\circ\nu$ は $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入る．

従って，ν として第 2 章の例のような $\boldsymbol{C}(\alpha)\backslash\boldsymbol{M}(\alpha)$ の分布を取れば，Maller の予想に対する反例が得られる．

注意.

(1) この定理から，仮に $\lim_{x\to\infty}\int_0^x t^\alpha\mu(dt)/\int_0^x t^\alpha\nu(dt)=0$ であったとしても $\mu\in\boldsymbol{M}(\alpha)$，$\nu\notin\boldsymbol{M}(\alpha)$ に対して，$\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{M}(\alpha)$ に入りうることが分る．これは大きい切断積率をもつ因子が必ずしも MS-合成積の性質を支配しないという点で通常の合成積と大いに異なる点である (cf. Theorem 4.1 (Shimura (1994 a)))．

(2) 定理3.5をみれば分るように，定理3.7でμのα次の積率が無限であるという仮定は不可欠である．

$\boldsymbol{D}_2$の因子の性質についての結果をひとつ加えておく．これは2次未満の任意の積率が有限な分布は正規分布の部分吸引域に属するということ (Maller (1980)) から直ちに得られる．

命題 3.8. $\boldsymbol{D}_2$の分布の因子は正規分布の部分吸引域に属する．

3.3 $\boldsymbol{M}(\alpha)$に関する未解決問題

$\boldsymbol{M}(\alpha)$の分解問題について，“ともに$\boldsymbol{M}(\alpha)$に入らない分布同士のMS-合成積が$\boldsymbol{M}(\alpha)$に属することがあるか？”という問題が残される．これについては，同分布を仮定する，即ち，“$\mu\circ\mu \in \boldsymbol{M}(\alpha)$のとき$\mu$は$\boldsymbol{M}(\alpha)$に入るか？”といった一見容易に見えるものさえその真偽が分らない．今の所，$\mu\circ\mu$が$\boldsymbol{C}(\alpha)\cap\boldsymbol{M}(\alpha)$に属せば，$\mu$は$\boldsymbol{C}(\alpha)\cap\boldsymbol{M}(\alpha)$に入ることはいえるものの，一般には難しい問題であると思われる．

4. 正則変動する裾をもつ分布と MS-合成積

第3章で扱った緩慢変動する切断積率をもつ分布族$\boldsymbol{M}(\alpha)$についての問題と同様なことを，この章では正則変動する裾をもつ分布族$\boldsymbol{D}(\alpha)$に対して考える．$\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha \geq 0)$も$\boldsymbol{M}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$と同じくMS-合成積について閉じた分布族である．しかし，やはりこの場合も$\mu\circ\nu$が$\boldsymbol{D}(\alpha)$に属していると仮定した場合の因子μ，νの性質を考察することが主目的である．但し，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ではそれに属する分布と，例えば有界な台をもつ分布のような裾の軽いものとのMS-合成積は$\boldsymbol{M}(\alpha)$に入ることが容易に分る．従って，この場合は両方の因子ではなく，少なくともひとつの因子が$\boldsymbol{D}(\alpha)$に属するのかということが問題となる．

この問に対して，得られた結果は次のようなものである．$\boldsymbol{D}(0)$ (緩慢変動する裾) の場合には，片方の因子νがある$\varepsilon > 0$に対して有限なε次の積率をもつならば，これを除いても残りの因子μの裾の緩慢変動性は維持される．ところが，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$の場合はこのようなことは成立たず，裾が正則変動しない分布同士のMS-合成積が$\boldsymbol{D}(\alpha)$に属するようなものが存在し，しかも一方の分布の台は有限集合とすることができる．$\alpha > 0$の場合には，νの台が (有限) 等比数列をなすと仮定する．そしてνにどのような確率を与えれば，正則変動しない裾をもつ分布μにより，$\mu\circ\nu$が (負の指数の) 正則変動する裾をもつようにできるかについて考察し，そのための必要十分条件を与える．

以上の結果の証明は，$\boldsymbol{D}(0)$の場合は前章同様，非増加緩慢変動関数の分解についての結果が用いられる．$\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$の場合も指数負の非増加正則変動関数の分解を考えていることに違いはない．しかし，その本質は緩慢変動関数を含んだ漸化式の解の漸近挙動をみることにあり，証明も$\alpha = 0$の場合とは異なる．尚，この章の出典を明記していない結果は志村 (1997 a, 1998 a, 1998 b) のものである．

4.1 正則変動する裾をもつ分布の MS-合成積

まず，切断積率の場合と同様，裾の正則変動性はそれよりもある程度裾が軽い分布とのMS-合成積では保存されることから始める．

補題 4.1. (志村 (1993)) μが$\boldsymbol{D}(\alpha)$に属し，ある$\varepsilon > 0$に対してνの$(\alpha+\varepsilon)$次の積率が有限ならば，$\mu\circ\nu \in \boldsymbol{D}(\alpha)$で次の等式が成り立つ．

$$\lim_{x\to\infty} \mu\circ\nu(x,\infty)/\mu(x,\infty) = \int_0^\infty t^\alpha \nu(dt). \tag{4.1}$$

注意. 補題 4.1 で $\varepsilon = 0$ とすることはできない．即ち，切断積率の場合（補題 3.1）とは異なり，μ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属し，ν の α 次の積率が有限という条件だけでは，(4.1) は成り立たない．例えば，$\mu = \nu$ とすれば，

$$\liminf_{x\to\infty} \mu\circ\mu(x,\infty)/\mu(x,\infty) \geq 2\int_0^\infty t^\alpha \mu(dt)$$

となることが，ファトゥーの補助定理を使うなどして導かれる．

この補題から特に $\mu \in \boldsymbol{D}(\alpha), \nu \in \boldsymbol{D}(\beta)$ $(0 \leq \alpha < \beta)$ ならば，$\int_0^\infty t^{\alpha+\frac{\beta-\alpha}{2}}\nu(dt)$ が有限であるから，$\mu\circ\nu \in \boldsymbol{D}(\alpha)$ である．そして，$\boldsymbol{D}(\alpha)$ の場合も $\boldsymbol{M}(\alpha)$ と同じく，MS-合成積に関する閉性がいえる．

定理 4.2. (Embrechts and Goldie (1980)) μ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に ν が $\boldsymbol{D}(\beta)$ $(0 \leq \alpha \leq \beta)$ に属するならば，$\mu\circ\nu$ は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属する．

4.2 正則変動する裾をもつ分布の分解問題

次に緩慢変動する切断積率をもつ分布の場合の定理 3.5 と対応して，補題 4.1 の逆に当る問題を考える．即ち，"$\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属し，ν がある $\varepsilon > 0$ に対して $(\alpha+\varepsilon)$ 次の積率が有限ならば，μ は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属すであろうか？" 先に結論を述べれば，この問に対する答えは $\alpha = 0$ のときは "Yes" だが，$\alpha > 0$ のときは "No" である．

定理 4.3. $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{D}(0)$ に属し，ν がある $\varepsilon > 0$ に対して ε 次の積率が有限ならば，μ は $\boldsymbol{D}(0)$ に属す．従って，(4.1) が成立つ．

これに対して，$\alpha > 0$ の場合には，以下で示すように $\int_0^\infty t^{\alpha+\varepsilon}\nu(dt)$ が有限であるのはもちろん，分布 ν が有界な台をもつ場合でもこれと $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属さない分布 μ との MS-合成積 $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に入ることがありうる．次の補題は緩慢変動でない負の指数を持つ正則変動関数に関するものであり，分布についての結果はこれから容易に導くことができる．

補題 4.4. 正数 α，定数 a $(0 < a < 1)$，実数列 b_k $(k = 0,\dots, n-1)$ は，$\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k\alpha}b_k > 0$ を満たすものとし，これらにより，集合 $\boldsymbol{E}$ を次のように定める．

$$\boldsymbol{E} = \left\{|z| : \sum_{k=0}^{n-1} a^{-k\alpha} b_k z^k = 0\right\}.$$

(i) $1 \notin \boldsymbol{E}$ ならば，次が成立つ：$[0,\infty)$ 上の指数 $-\alpha$ (<0) の正則変動関数 F が，$\sup_{x\geq 0} |f(x)/F(x)| < \infty$ を満たす可測関数 f により

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f(a^k x) \tag{4.2}$$

とあらわされるならば，f は正則変動関数である．

(ii) $1 \in \boldsymbol{E}$ ならば，次が成立つ：任意の指数 $-\alpha$ の正則変動関数 F に対して次の式を満たす正値非増加関数で正則変動する f_1 と正則変動しない f_2 が存在する．

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} b_k f_i(a^k x)/F(x) = 1 \qquad (i = 1, 2). \tag{4.3}$$

以下にいくつかの注意を述べておく.

注意.

(1) 補題 4.4 は負の指数の非増加正則変動関数に関するものであるが, 正の指数の非減少正則変動関数に対しても同様の事実が成立つ. F が単調で $b_k \geq 0$ の場合に限れば (4.2) は単調正則変動関数 F の分解となる. F が緩慢変動関数 ($\alpha = 0$) の場合は, (4.2) のような形の分解をすれば, f は必ず緩慢変動することが分っている (定理 2.6 (i)). 一方, F が緩慢変動でない正則変動関数の場合は, 補題 4.4 (ii) から f は必ずしも正則変動するとは限らない. このような差は指数が 0 かそうでないかによって一般的に現れるものであるといえる (Shimura (1994 a)).

(2) $\sum_{k=0}^{n-1} a^{-k\alpha} b_k = 0$ の場合に (4.2) が成立しているならば, $\sup_{x\geq 0}|f(x)/F(x)| = \infty$ となることが分っている.

(3) $F(x) = cx^{-\alpha}$ (c は正の定数, $\alpha > 0$) ならば, 補題 4.4 (ii) の条件の下に (4.3) ではなく, (4.2) が成立つような正則変動しない f が存在する. しかし, 一般には必ずしもこのようなことはいえない.

(4) (4.2) に $F(x) = x^{-\alpha}L(x)$, $f(x) = x^{-\alpha}l(x)$, さらに $x = a^{-j}$ を代入すれば,

$$L(a^{-j}) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k a^{-k\alpha} l(a^{k-j}).$$

数列 $\{x_j = l(a^{-j}) : j = 1, 2, \ldots\}$ は緩慢変動関数 L を含んだ漸化式で定まる数列である.

この補題から, $\boldsymbol{D}(\alpha)$ ($\alpha > 0$) の分布の分解に関する次の結果が得られる.

定理 4.5. α を正の定数, ν をその台がある有限個の等比数列 $\{t_k = t_0 r^k : k = 0, 1, \ldots, n-1, r > 1\}$ に含まれる分布とし, 集合 $\boldsymbol{C}$ を

$$\boldsymbol{C} = \left\{|z| : \sum_{k=0}^{n-1} r^{k\alpha}\nu(\{t_k\})z^k = 0\right\}$$

と定める.

(i) $1 \notin \boldsymbol{C}$ で $\mu\circ\nu \in \boldsymbol{D}(\alpha)$ ($\alpha > 0$) ならば, μ は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属する分布である.

(ii) $1 \in \boldsymbol{C}$ ならば, 指数 $-\alpha$ (< 0) の任意の正則変動関数 F に対し, $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属する分布 μ_1 と $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属さない分布 μ_2 が存在して

$$\lim_{x\to\infty} \mu_1\circ\nu(x, \infty)/F(x) = \lim_{x\to\infty} \mu_2\circ\nu(x, \infty)/F(x) = 1$$

を満たす.

注意. $\boldsymbol{D}(\alpha) \subset \boldsymbol{M}(\alpha)$ ($\alpha > 0$) と定理 3.5 から定理 4.5 (ii) の分布 μ_2 は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ には入らないが $\boldsymbol{M}(\alpha)$ には入ることがわかる.

上記の補題及び定理の $n = 2$ の場合を改めて書いておく.

補題 4.4′. α, a, b を $\alpha > 0$, $0 < a < 1$ をみたす定数とする.

(1)　$b \neq a^\alpha$ ならば，次が成立つ：$[0, \infty)$ 上の指数 $-\alpha$ (<0) の正則変動関数 F が，$\sup_{x\geq 0}|f(x)/F(x)| < \infty$ を満たす可測関数 f により，

$$F(x) = f(x) + bf(ax)$$

と書かれているならば，f は正則変動関数である．

(2)　$b = a^\alpha$ ならば，次が成立つ：任意の指数 $-\alpha$ の正則変動関数 F に対して，

$$\lim_{x\to\infty}(f_i(x) + bf_i(ax))/F(x) = 1 \qquad (i = 1, 2)$$

を満たす正値非増加関数で正則変動する f_1 と正則変動しない f_2 が存在する．

定理 4.5′.

(1)　$\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ に属し，ν は台が 2 点の分布 $(\nu(\{t_i\}) = \nu_i > 0$ $(i = 1, 2))$ であるとする．このとき $t_1^\alpha\nu_1 \neq t_2^\alpha\nu_2$ ならば，$\mu \in \boldsymbol{D}(\alpha)$ である．

(2)　$\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属さない分布 μ と台が 2 点の分布 ν でその MS-合成積 $\mu\circ\nu$ が $\boldsymbol{D}(\alpha)$ に属するものが存在する．

4.3　$\boldsymbol{D}(\alpha)$ に関する未解決問題

$\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha \geq 0)$ の分解問題についても，次のような問題が残されている．裾が緩慢変動する場合には，ともに $\boldsymbol{D}(0)$ に入らない分布同士の MS-合成積で表されるもので $\boldsymbol{D}(0)$ に入るものがあるのか？　裾が指数負の正則変動する場合は $\boldsymbol{D}(\alpha)$ $(\alpha > 0)$ でも片方の因子の台が必ずしも等比数列とはならないような，より一般的な条件の下ではどうなるか？　これらについては現在の所，予想も含めて何も分ってはいない．

5.　あとがき

本文は証明を省いて結果だけを羅列したようなものになったこともあり，ここで研究の動機や経緯，関連する事柄などについて述べておきたい．

分布の分解といえば，通常の合成積に関して，任意の数の同分布の因子に分解可能であるという無限分解可能性，あるいは正規分布の因子は正規分布に限られるという Lévy-Cramer の定理（Linnik and Ostrovskii (1977)）に代表される分布族の合成・分解についての閉性が古くから研究されている．一方，志村(1994 b) や本稿などでは分布族として，正則変動性で特徴付けられるものを取上げ，主に単調正則変動関数の分解という視点から研究したものである．

こうした研究の最初のきっかけは Hahn and Klass (1980) にある正規分布の吸引域は合成積に関する分解について閉じているのではないかという H. G. Tucker の予想であり，Shimura (1991) では，非減少緩慢変動関数の分解を用いて，これに否定的かつ一般的に答えた．その後，裾が正則変動する分布族に対する同様な問題についての考察（Shimura (1994 a)）を経て，第 1 章でも触れたように Tucker の予想の通常の合成積を MS-合成積にした R. A. Maller の予想について扱った（Shimura (1997 b)）．この結果と裾が正則変動する分布族についての最近の研究（志村 (1997 a, 1998 a, 1998 b)）をまとめたものが本稿である．

通常の合成積を扱った志村 (1994 b) と本稿の結果を比較してみれば，前者が正則変動関数の分解についての結果ときれいな対応が付くのに対して，後者はそれが余りうまくいっておらず，十分な結果が得られているとはいえない．このような差については和と積の間の難易度の差は思いの他大きいことによるのだが，一方で，和と積とは変換すれば単に見方の違いに過ぎない

ともいえる．第4章で扱った正則変動する裾をもつ分布族での MS-合成積は指数 $\alpha > 0$ の指数的裾 (exponential tail) をもつ分布 ($[0, \infty)$ 上の分布で任意の $u \geq 0$ に対して $\lim_{t\to\infty} \mu(t-u, \infty)/\mu(t, \infty) = e^{\alpha u}$ で定義される)，或いは $\alpha = 0$ としたときの長い裾をもつ分布 (long-tailed distribution) と呼ばれる分布での合成積に他ならない．実際，第4章で扱った正則変動する裾をもつ分布の MS-合成積については 指数的裾をもつ分布とそれに関連する劣指数的分布 (subexponential distribution)，合成積同値分布 (convolution equivalent distribution) といった分布族の問題として扱われている (定理 4.2 (Embrechts and Goldie (1980)) もそうした形で述べられている)．この方面の結果の一例を挙げておく．劣指数的分布は $\lim_{x\to\infty} \mu * \mu(x, \infty)/\mu(x, \infty) = 2$ で定義される $[0, \infty)$ 上の分布であるが，分枝過程，待ち行列理論，更新過程，無限分解可能性との関連で重要である．この分布族が合成積について閉じているかという問題はしばらくの間未解決であったが，J. R. Leslie (1989) によって否定的に解決されている．Cline (1986, 1987)，Embrechts and Goldie (1982)，Klüppelberg and Villaseñor (1991) なども関連する話題を扱っている．

最後に，本稿は「統計基礎理論」というテーマとしてはやや特殊な話題であるきらいがある．しかし，近年正則変動関数の理論は確率論においてはもちろん，統計学においても従来からの極値理論への応用にとどまらず，より広い分野で用いられつつある．本稿が正則変動関数とその関連分野について興味を持つきっかけになれば幸いである．

謝　辞

査読者からは本稿に対する有益な助言を頂きました．ここに謝意を表します．

参 考 文 献

Bingham, N. H., Goldie, C. M. and Teugels, J. L. (1987). Regular variation, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge.

Cline, D. B. H. (1986). Convolution tails, product tails and domains of attraction, *Probab. Theory Related Fields*, **72**, 529-557.

Cline, D. B. H. (1987). Convolutions of distributions with exponential and subexponential tails, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **43**, 347-365.

Darling, D. A. (1952). The influence of the maximum term in the addition of independent random variables, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **73**, 95-107.

Embrechts, P. and Goldie, C. M. (1980). On closure and factorization properties of subexponential and related distributions, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **29**, 243-256.

Embrechts, P. and Goldie, C. M. (1982). On convolution tails, *Stochastic Process. Appl.*, **13**, 263-278.

Feller, W. (1971). *An introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. II, 2nd ed., Wiley, New York.

Gnedenko, B. V. and Kolmogorov, A. N. (1968). *Limit Distributions for Sums of Independent Random Variables* (English translation), 2nd ed., Addison, Cambridge, Massachusetts.

Hahn, M. G. and Klass, M.J. (1980). Matrix normalization of sums of random vectors in the domain of attraction of the multivariate normal, *Ann. Probab.*, 8(2), 262-280.

Klüppelberg, C. and Villaseñor, J. A. (1991). The full solution of the convolution closure problem for convolution-equivalent distributions, *J. Math. Anal. Appl.*, **160**, 79-92.

Leslie, L. R. (1989). On the non-closure under convolution of the subexponential family, *J. Appl. Probab.*, **26**, 58-66.

Linnik, Ju. V. and Ostrovskii, I. V. (1977). Decomposition of random variables (English translation), *Translations of Mathematical Monographs*, Vol. 48, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.

Maller, R. A. (1980). A note on domain of partial attraction, *Ann. Probab.*, 8(3), 576-583.

Maller, R. A. (1981). A theorem on products of random variables, with application to regression, *Austral. J. Statist.*, **23**, 177-185.

Seneta, E. (1976). Regularly varying functions, *Lecture Notes in Math.*, **508**, Springer, Berlin.

Shimura, T. (1991). Decomposition of non-decreasing slowly varying functions and the domain of attraction of Gaussian distributions, *J. Math. Soc. Japan*, **43**(4), 775-793.

志村隆彰 (1993). Mellin-Stieltjes convolution of distributions characterized by regular variation, 「加法過程の諸問題」, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 51, 6-12.

Shimura, T. (1994a). Decomposition problem of probability measures related to monotone regularly varying functions, *Nagoya Math. J.*, **135**, 87-111.

志村隆彰 (1994b). 正則変動性で特徴付けられる分布族の分解問題, 統計数理, **42**, 247-258.

志村隆彰 (1995). 緩慢変動する truncated moment をもつ確率変数の独立積とその応用, 「加法過程の諸問題(2)」, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 75, 1-9.

志村隆彰 (1997a). Decomposition of distributions with regularly varying tails in the sense of Mellin-Stieltjes convolution, 「無限分解可能分布に関連する諸問題」, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 102, 54-61.

Shimura, T. (1997b). The product of independent random variables with slowly varying truncated moments, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **62**, 186-197.

志村隆彰 (1998a). Decomposition of distributions with regularly varying tails in the sense of Mellin-Stieltjes convolution (II), 「無限分解可能分布に関連する諸問題(2)」, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 109, 67-75.

志村隆彰 (1998b). Decomposition of distributions with regularly varying tails in the sense of Mellin-Stieltjes convolution (III), 「無限分解可能分布に関連する諸問題(3)」, 統計数理研究所共同研究リポート, No. 112, 69-85.

Decomposition Problem of Distributions Characterized by Regular Variation (II)

Takaaki Shimura
(The Institute of Statistical Mathematics)

The Mellin-Stieltjes convolution (MS-convolution) and related decomposition of distributions in some classes characterized by regular variation are investigated. Maller shows that if X and Y are independent non-negative random variables with distributions μ and ν, respectively, and both μ and ν are in $\boldsymbol{D}_2$, the domain of attraction of Gaussian distribution, then the distribution of the product XY (that is, the MS-convolution $\mu\circ\nu$ of μ and ν) also belongs to it and he shows that if a distribution of product of two independent random variables belongs to $\boldsymbol{D}_2$ and one of them has finite variance, then the other is in $\boldsymbol{D}_2$. He conjectures that, conversely, if $\mu\circ\nu$ belongs to $\boldsymbol{D}_2$, then both μ and ν (factors of $\mu\circ\nu$) are in it. The first purpose of this paper is to deal with this problem in detail. It is well-known that $\boldsymbol{D}_2$ is identical with the class of distributions whose truncated variance $\int_{|t|<x} t^2\mu(dt)$ is slowly varying. We deal with the following class that is an extension of $\boldsymbol{D}_2$: the class of distributions μ on $[0, \infty)$ with slowly varying α-th truncated moments $\int_0^x t^\alpha \mu(dt)$. Some subclasses of $\boldsymbol{M}(\alpha)$ are given with the property that if $\mu\circ\nu$ belongs to it, then μ and ν are in $\boldsymbol{M}(\alpha)$. But, in general, a distribution in $\boldsymbol{M}(\alpha)$ could have a factor that does not belong to $\boldsymbol{M}(\alpha)$: there exist distributions $\mu\in\boldsymbol{D}_2$ and $\nu\notin\boldsymbol{D}_2$ such that $\mu\circ\nu$ belongs to $\boldsymbol{D}_2$. This implies that Maller's conjecture is not true. A non-negative non-decreasing (resp. non-increasing) f is said to be decomposed into components f_1 and f_2, if both f_1 and f_2 are non-negative non-decreasing (resp. non-increasing) and $f = f_1 + f_2$. A component of non-decreasing slowly varying function is not necessarily slowly varying. Proof depends on the results on decomposition of non-decreasing slowly varying functions.

The second purpose is to consider same problem for $\boldsymbol{D}(\alpha)$ (the class of distributions μ on $[0, \infty)$ with regularly varying tails $\mu(x, \infty)$ with index $-\alpha$ ($\alpha \geq 0$)). These classes are related to various limit theorems for i.i.d. sequence. On the class $\boldsymbol{D}(\alpha)$ ($\alpha \geq 0$), there exists a big difference between slowly varying tails and regularly varying tails with negative index. In the case of $\boldsymbol{D}(0)$, if $\mu\circ\nu$ is in $\boldsymbol{D}(\alpha)$ and $\int_0^\infty t^\varepsilon \nu(dt) < \infty$ for some $\varepsilon > 0$, then μ belongs to $\boldsymbol{D}(0)$. But, in the case of $\boldsymbol{D}(\alpha)$ ($\alpha > 0$), there exist two distributions μ and ν such that neither μ nor ν has regularly varying tail but their MS-convolution $\mu\circ\nu$ belongs to $\boldsymbol{D}(\alpha)$. Further, under the assumption that the support of ν is a finite geometric progression, a necessary and sufficient condition for measure of ν is given such that there exists a distribution μ that is not regularly varying tail but their MS-convolution $\mu\circ\nu$ has regularly varying tail.

Key words: Regularly varying function, Mellin-Stieltjes convolution, tail of distribution, truncated moment, decomposition of distribution.