統計数理 (1999)
第 47 巻 第 1 号 119-142

特集「統計基礎理論」
[原著論文]

不完全ガンマ関数比の評価不等式

統計数理研究所 松縄 規
中央大学大学院* 武井 智裕

(受付 1998 年 10 月 14 日；改訂 1999 年 3 月 3 日)

要 旨

統計学の基礎理論をはじめ自然科学の理論の多くの分野で非常にしばしば遭遇する不完全ガンマ関数比についての近似の評価を様々な状況の下で系統的に与える．各近似はできるだけ精密に上下からの不等式を用いて行えるように与えられている．本稿では，不完全ガンマ関数のパラメータが [a] 正整数の場合，[b] 一般の正の実数の場合，について詳しい近似解析が行われている．両者の上下界の導出はかなり異なる形でなされている．[a] に関して，重要な三つの型の存在とそれぞれに対する精度の高い上下界が与えられている．[b] については，不完全ガンマ関数比の主要変数が大きい時と小さい時の二通りについて考察されている．従来これはという結果がなかったと思われる前者の場合について，詳しい評価不等式が導出されている．応用として，正規分布の裾確率を理論的に評価する有用な上下界が与えられている．[b] で主要変数が小さい時についても精度の良い新しい二重評価不等式が与えられている．得られた諸不等式の精度を視覚的に把握するために，関連する数値計算やグラフも示されている．

キーワード：不完全ガンマ関数比，近似理論，二重評価不等式，Maclaurin 公式，逆階乗級数，絶対収束級数，Ramanujan 予想．

1. はじめに

不完全ガンマ関数あるいはそれとそれに対応する完全ガンマ関数との比は統計学をはじめ自然科学の理論の様々な分野で現われてくる．特に統計学においては分布の裾の確率などの評価をする際に，直接または間接的に，不完全ガンマ関数比 (incomplete gamma function ratio) の評価に帰着することが非常に多い．通常は不完全ガンマ関数は計算機プログラムに組み込まれたものを使用すれば十分精度の良い数値結果を得る (cf. 熊本・酒巻 (1990))．しかしながら，理論的にこの関数を不等式で評価したいという場面もしばしば起きる．近似誤差の符号が重要な場合もある．不思議なことに，筆者等の知る限り，論文や成書でこれらのことをまとまった形で解析的に論じているものは無いように思われる．また個別の文献においても，そこで使われている評価不等式は近似精度の観点からはそれほど満足すべきものが使われてきたとは見えない．そこで本稿では種々な場合を考慮した不完全ガンマ関数比の，両側不等式を用いた近似評価を行うことを考える．このような扱いをすることの重要な意義の一つは，ある分布が不完

* 理工学研究科：〒112-8551 東京都文京区春日 1-13-27.

全ガンマ関数比を含む形で表現されるとき，その分布の理論的近似分布を得る際に大いに役立つからである．特にその際の近似の主領域にどのくらいの確率が集中しているかを評価するためには不可欠なものとなる．これに関連して本稿では，得られた結果を標準正規分布の裾の確率を評価するための応用にとどめ，他の重要な分布についての議論は機会を改めて行うことにする．

本稿では次式で定義される不完全ガンマ関数比 $\gamma(p,x)$ を主として考える：

$$(1.1)\qquad \gamma(p,x):=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x y^{p-1}e^{-y}dy\,,\qquad (x>0,p>0).$$

また，これに対応する

$$(1.2)\qquad \Gamma(p,x):=1-\gamma(p,\,x)=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_x^\infty y^{p-1}e^{-y}dy$$

を正規分布などの裾の部分の確率の評価を考える際等に用いることにする．

さて，我々は

$$(1.3)\qquad \underline{\gamma}(p,x)\leq\gamma(p,x)\leq\bar{\gamma}(p,x)$$

となる $\gamma(p,x)$ の下界 $\underline{\gamma}(p,x)$ と上界 $\bar{\gamma}(p,x)$ をなるべく精密に与えることを目的としている．このことに関して本稿では基本的にパラメータ p が [a] 正の整数 $n(\geq 1)$ の場合と [b] 正の実数の場合に分けて考える．p に付ける条件のため前者は必ずしも後者の特別な場合になっていない．後で見るように，前者には特有な近似の接近が可能であり，重要な三つの型の近似のあることが示される．その内の重要な一つに Ramanujan による指数関数の近似に関する予想が有効に利用される．[a]を得るための基本的方針は指数関数 e^x を Maclaurin 近似してその剰余項を $\gamma(p,x)$ と結び付ける方法を取る．[b] については [a] の接近方法やその結果を応用することは必ずしも効果的でないため別の接近方法が取られる．特に $0<p<1$ の場合が基本的である．その場合に得られる結果が正規分布の裾の確率等の評価に利用できる．なお，[a]，[b] とも x の大きさ，p との関係も考慮する必要があるのは当然である．これらのことは以下の議論の中で言及される．

本稿の以下の構成は次の通りである．次章にまず本稿の主要な結果を記す．不完全ガンマ関数比に関して得た重要な諸不等式を定理 2.1 としてまとめてある．また，定理に関連するいくつかのコメントを注として述べてある．得られた不等式に基づく興味のある極限定理を系 2.1 として取り上げている．第3章に前章の主要結果を証明するための必要な四つの補題とその証明を準備してある．これらの補題を助けとして，第4章において，第2章に記した主要定理の証明を与える．そして第5章で，第2章で得た主要不等式およびそれらに関連するいくつかの結果を基に近似の概要を視覚化するために，いくつかのグラフおよび数値計算に基づく若干の数表を与える．

注 1.1.　前述の様に本稿では記号 $\gamma(p,x)$ と $\Gamma(p,x)$ を不完全ガンマ関数比の記述に用いることにした．これは我々のこれまでの関連した仕事の中での記法に整合させる必要からである．文献によってはこれらの記号を，$\Gamma(p)$ で割らない，不完全ガンマ関数の意味に使う著者も多い．文脈から混乱することはないと思われるが他の文献との比較の際には注意が必要である．

2. 主要結果

本章で不完全ガンマ関数比の評価不等式の種々な場合についての結果および関連する注意事項を記す．証明は第4章に与える．

定理 2.1. 次の諸不等式が成立する：

[**a.1**] $x > 0, n$ を $x/n > 1, n \geq 1$ を満たす整数とする．この時

$$\gamma(n,x) > 1 - \frac{nx^{n-1}e^{-x}}{\Gamma(n)} > 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{x}\right)\cdot\exp\left[-x\left\{\left(1+\frac{n}{x}\ln\frac{n}{x}-\frac{n}{x}\right)-\frac{1}{2x}\ln n\right\} - \frac{1}{12n}+\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}+\bar{R}(n)\right], \tag{2.1}$$

ここで

$$\bar{R}(n) = \frac{23n^3+129n^2+242n+180}{960n^2(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}. \tag{2.2}$$

[注意. 指数の肩の $1+\frac{n}{x}\ln\frac{n}{x}-\frac{n}{x} \geq 0$ である．$\because 1+t\ln t - t \geq 0 (t>0)$]．

$$\gamma(n,x) \leq 1 - \left\{1-\left(\frac{1}{1+n/x}\right)^n\right\}\cdot\exp\left[-x\left\{1+\frac{n}{x}\ln\left(\frac{n}{x}\right)-\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right\}\right]. \tag{2.3}$$

[**a.2**] $x > 0, n$ を $x/n < 1, n \geq 1$ を満たす整数とする．この時

$$\gamma(n,x) > \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}}\exp\left[-x\left\{1-\frac{n}{x}+\frac{n}{x}\ln\frac{n}{x}\right\}+\frac{5}{12(n+1)} + \frac{1}{6(n+1)^2}+\frac{1}{360(n+1)(n+2)(n+3)}+\underline{R}(n+1)\right] =: \underline{\gamma_1}(n,x), \tag{2.4}$$

ここで

$$\underline{R}(n+1) = \frac{5n^2+35n+74}{960(n+1)(n+2)^2(n+3)^2(n+4)} \tag{2.5}$$

を表す．さらに，$x^2/(2n) < 1$ の時，即ち x がより小さい時

$$\gamma(n,x) > \max\{\underline{\gamma_1}(n,x),\ \underline{\gamma_2}(n,x)\}, \tag{2.6}$$

ここで

$$\underline{\gamma_2}(n,x) =: 1 - e^{-x}\left[\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{-1}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \frac{x^2}{2n}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\right\}-\frac{x^n}{n!}\right], \quad \left(\frac{x^2}{2n}<1\right). \tag{2.7}$$

一方，$x > 0, n$ を $x/n < 1, n \geq 1$ の時

$$\gamma(n, x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1-x/n)} \exp\left[-x\left\{1+\frac{n}{x}\ln\frac{n}{x}-\frac{n}{x}\right\} -\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}+\bar{R}(n)\right] \tag{2.8}$$

が成立する．ここで，$\bar{R}(n)$ は (2.2) 式で与えられる．

[**a.3**] $x>0, n$ を $x/n=1, n\geq 1$ を満たす整数とする．この時

$$\gamma(n, n) > \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{4}{135(n+8/45)}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}+\underline{R}(n)\right\}, \tag{2.9}$$

$$\gamma(n, n) < \frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left\{\frac{1}{3}+\frac{4}{135(n+2/21)}\right\} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}+\bar{R}(n)\right\}, \tag{2.10}$$

ここで $\bar{R}(n)$ は (2.2) 式で，$\underline{R}(n)$ は次式で与えられる．

$$\underline{R}(n) = \frac{5n^2+25n+44}{960n(n+1)^2(n+2)^2(n+3)}. \tag{2.11}$$

[**b.1**] (x の値が大きい時有効な定理) $x>1, 0<p<1, n$ を $n\geq 2$ の整数とする．この時

$$\gamma(p, x) > 1-\frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p)} \cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i \alpha_i(p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}+\frac{2\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\right], \tag{2.12}$$

$$\gamma(p, x) < 1-\frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p)} \cdot\left[\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i \alpha_i(p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}-\frac{2\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\right]. \tag{2.13}$$

ここに，$\alpha_0(p)=1, \alpha_1(p)=-p+1, \alpha_2(p)=p^2-2p+1, \alpha_3(p)=-p^3+3p^2-4p+2, \alpha_4(p)=p^4-4p^3+10p^2-11p+4, \alpha_5(p)=-p^5+5p^4-20p^3+35p^2-33p+14,\ldots.$ 一般に

$$\alpha_i(p) := \sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j} d_{i-j,i-1}(j-p)(j-1-p)\cdots(1-p), \quad (0<p<1\,;\, i=1,2,\ldots) \tag{2.14}$$

で与えられる．ただし $d_{\alpha,\beta}$ は第1種の Stirling 数の絶対値を表す．

注 2.1. 定理の条件 $0<p<1$ を緩和化して，数値計算等での評価不等式の適用範囲を拡張できる．そのために不完全ガンマ関数比 $\Gamma(p, x)$ の p に関する次の差分方程式を利用すればよい：

$$\Gamma(p, x) = \frac{x^{p-1}e^{-x}}{\Gamma(p)}+\Gamma(p-1, x) \qquad (x>0, p>1)$$

右辺第 2 項に部分積分を逐次行えば，$x>0, 2\le N\le p<N+1$ (N：整数) の時

$$\Gamma(p,x)=e^{-x}\sum_{i=1}^{N}\frac{x^{p-1}}{\Gamma(p-i+1)}+\begin{cases}0 & \text{if} \quad p=N\ge 2,\\ \Gamma(p-N,x) & \text{if} \quad p>N\ge 2\end{cases}$$

と表現できる．最終項 $\Gamma(p-N,\,x)$ に上記定理を適用すればよいことになる．

[**b.2**] (x の値が小さい時有効な定理) $x>0,\ p>0$ とし，m を $2m>x$ を満たす整数とする．この時

$$\frac{x^p}{\Gamma(p)}\sum_{i=0}^{2m-1}\frac{(-1)^i}{i!\,(p+i)}x^i<\gamma(p,x)<\frac{x^p}{\Gamma(p)}\sum_{i=0}^{2m}\frac{(-1)^i}{i!\,(p+i)}x^i. \tag{2.15}$$

上の定理の [**a.1**] 〜 [**a.3**] から次の極限定理が直ちに成立する：

系 2.1. $x=x(n)$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\gamma(n,x)=\begin{cases}\text{(a)}\ \ 1, & \text{if} \quad x>n,\\ \text{(b)}\ \ 0, & \text{if} \quad x<n,\\ \text{(c)}\ \ 1/2, & \text{if} \quad x=n.\end{cases} \tag{2.16}$$

定理の [**b.1**] から，正規分布の裾の確率の評価に関する次の有用な不等式を得る．標準正規分布 $N(0,1)$ の分布関数は，$x>0$ の時

$$\begin{aligned}\Phi(x)&:=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\,dv \\ &=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\,dv+\int_{0}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\,dv=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2},\frac{x^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

と表現できる．これより x が正の大きな値の時有効な次の結果が直ちに成立する：

系 2.2. $x>\sqrt{2}, n\ge 2$ の時

$$\Phi(x)>1-\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i\,2^i\,\alpha_i(1/2)}{x^2(x^2+2)\cdots(x^2+2i)}+\frac{2^n\,\Gamma(n)}{x^2(x^2+2)\cdots(x^2+2(n-1))}\right\}, \tag{2.18}$$

$$\Phi(x)<1-\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\frac{(-1)^i\,2^i\,\alpha_i(1/2)}{x^2(x^2+2)\cdots(x^2+2i)}-\frac{2^n\,\Gamma(n)}{x^2(x^2+2)\cdots(x^2+2\,(n-1))}\right\}. \tag{2.19}$$

ここで，$\alpha_0(1/2)=1, \alpha_1(1/2)=1/2, \alpha_2(1/2)=1/4, \alpha_3(1/2)=5/8, \alpha_4(1/2)=9/16, \alpha_5(p)=129/32,\ldots$. 一般には (2.14) 式で $p=1/2$ として与えられる．

注 2.2. 上の系で与えた不等式は x が大きな値の時 $\Phi(x)$ の優れた上下界を与える．それらは固定された x に対して項数 n を増やせば増やすほど近似の精度は向上する．この性質は次の良く引用される不等式 (例えば，Feller (1968), p. 193) と著しく異なる：k を正の整数として，

$$\Phi(x)>1-\frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}+\frac{1\cdot 3}{x^5}+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{x^{2n+1}}\right] \quad \text{if } n=2k, \tag{2.20}$$

$$(2.21)\quad \Phi(x) < 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}x^2}}{2\sqrt{\pi}}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{1\cdot 3}{x^5} + \cdots + (-1)^n \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{x^{2n+1}}\right] \quad \text{if } n = 2k-1.$$

これらの不等式は固定された x に対して項数 n を増やせば増やすほど近似の精度は絶対誤差の意味で悪くなる．それはこれらが発散級数に基づく不等式であるからである．この点をあまり意識せずに不等式 (2.20) や (2.21) が利用されている文献も散見されるので注意を要する．

定理の [**b.2**] から，x が正の小さな値の時有効な次の結果が直ちに成立する：

系 2.3. $x > 0, m$ を $m > (x/2)^2$ なる整数とする時，

$$(2.22)\qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{2m-1}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{i!\,(2i+1)\,2^{i+1/2}} < \Phi(x) < \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{2m}\frac{(-1)^i x^{2i+1}}{i!\,(2i+1)\,2^{i+1/2}}.$$

注 2.3. 定理 [**b.2**] で p が自然数 n となる時，定理 [**a.2**] との比較は興味深い．理論的比較は困難なので，$m=3$ として，$\gamma(n,x)$ の若干の数値計算を行った．n が 5 より小さい時は概して [**b.2**] の方が優れていることが観察できた．しかしこの場合でも正数 x が十分小さくなれば両者に顕著な絶対誤差は現われない．一方，$m=3$ として，n が 10 より大きく，x が 2 以上の時の数値計算からは，[**a.2**] の方が圧倒的に優れていることが確かめられた．勿論，後者の場合も十分小さな正数 x については両者からの限界値の差異は殆どない．

3. 必 要 補 題

本章では，前章で記述した主要定理を証明するために必要となる幾つかの補題を準備する．

補題 3.1. $x > 0$ とし，n を自然数とする．この時

$$(3.1)\qquad \gamma(n,x) = 1 - e^{-x}\left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right\} = 1 - \Gamma(n,x).$$

注 3.1. 上の関係式は平均 n (= 自然数) のガンマ分布の下側裾確率 $P(X \le x)$ [resp. 上側裾確率 $P(X \ge x)$] が平均 x (= 実数) の Poisson 分布の上側裾確率 $P(N \ge n)$ [resp. 下側裾確率 $P(N < n)$] に等しいことを表している．これはよく知られている関係であるが，以下の議論に自己充足性を持たせるために取り上げる．通常，その証明は $\gamma(n,x)$ [resp. $\Gamma(n,x)$] に部分積分法を用いるか，置換積分と二項展開を用いて行われるが，ここではそれらに比べて指数関数の性質に基づいた簡明な証明を示す．その接近方法から，$\gamma(n,x)$ が e^x と $1 + x + x^2/2! + \cdots + x^{n-1}/(n-1)!$ との間の相対誤差であることも良く分かる．

証明. Maclaurin の定理を利用する．原点の近傍で n 回連続微分可能な関数 $f(x)$ は

$$(3.2)\qquad f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2} + \cdots + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

と表せる．ただし剰余項 $R_n(x)$ は次の様に表現される：

$$R_n(x) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt.$$

さて，$f(x)=e^x$ として上の定理を適用すると

$$(3.3)\quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}e^t dt.$$

$$\therefore\ e^{-x}\left\{1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right\} = 1 - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}e^{t-x}dt$$

$$= 1 - \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x y^{n-1}e^{-y}dy = 1 - \gamma(n,x) = \Gamma(n,x).$$

これより (3.1) が直ちに得られる．

次の補題は定理 2.1 の [**a.1**] ～ [**a.3**] の証明の過程における，自然数 n に対する $\Gamma(n)$ の近似に必要である．補題はより一般的に，正の実数に対しても使用可能な形で与える．命題は Matsunawa (1977) の Lemma 2.2 での誤差項の項数を $M=3$ として，具体的に誤差項の上下界を与えた．ここで与える結果は通常の Stirling の漸近公式と違って，絶対収束級数に基づく近似であり，絶対誤差の評価も不等式で行える点で有用である．

補題 3.2. $p>0$ に対して

$$(3.4)\quad \ln\Gamma(p) = \frac{1}{2}\ln 2\pi + \left(p-\frac{1}{2}\right)\ln p - p + \frac{1}{12p} - \frac{1}{360p(p+1)(p+2)} - R(p),$$

ただし誤差項は次式で与えられる：

$$(3.5)\quad R(p) = \sum_{i=4}^{\infty}\frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i+j-1}d_{j,i-1} \cdot\left(\frac{1}{i-j+1} - \frac{2}{i-j+2}\right)\frac{1}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+i-1)},$$

ここで，$d_{\alpha,\beta}$ は第 1 種 Stirling 数の絶対値を表す．また，誤差項は

$$(3.6)\quad 0 < \underline{R}(p) < R(p) < \overline{R}(p)$$

と評価され，下界および上界は次のように与えられる：

$$(3.7)\quad \underline{R}(p) = \frac{5p^2+25p+44}{960p(p+1)^2(p+2)^2(p+3)},$$

$$(3.8)\quad \overline{R}(p) = \frac{23p^3+129p^2+242p+180}{960p^2(p+1)^2(p+2)^2(p+3)}.$$

補題 3.3. $x>0$, n を自然数とする．この時次の不等式が成立する：

$$(3.9)\quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \geq \left(1+\frac{x}{n}\right)^n,$$

$$(3.10)\quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \leq \left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{-1}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n - \frac{x^2}{2n}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}\right)\right\}, \quad \left(\frac{x^2}{2n}<1\right).$$

証明.
不等式 (3.9) の誘導：

$$
\begin{aligned}
1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} &\geq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{x^3}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots \\
&\quad +\frac{x^n}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big) \\
&= 1+\frac{n}{1!}\Big(\frac{x}{n}\Big)+\frac{n(n-1)}{2!}\Big(\frac{x}{n}\Big)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Big(\frac{x}{n}\Big)^3+\cdots \\
&\quad +\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-\overline{n-1})}{n!}\Big(\frac{x}{n}\Big)^n \\
&= \Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n.
\end{aligned}
$$

不等式 (3.10) の誘導：$\prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)\geq 1-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$, $(0<\alpha_k<1\,;\,k=1,\ldots,n)$ であるから

$$
\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{i-1}{n}\Big)\geq 1-\Big(\frac{1}{n}+\cdots+\frac{i-1}{n}\Big)=1-\frac{(i-1)i}{2n}, \qquad (i=1,\ldots,n).
$$

よって

$$
\begin{aligned}
\Big(1+\frac{x}{n}\Big)^n &\geq 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}\Big(1-\frac{1\cdot 2}{2n}\Big)+\frac{x^3}{3!}\Big(1-\frac{2\cdot 3}{2n}\Big)+\frac{x^4}{4!}\Big(1-\frac{3\cdot 4}{2n}\Big)+\cdots \\
&\quad +\frac{x^n}{n!}\Big(1-\frac{(n-1)n}{2n}\Big) \\
&= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}-\frac{1}{2n}\Big\{x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{(n-2)!}\Big\} \\
&= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^i}{i!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}-\frac{x^2}{2n}\Big\{1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\Big\} \\
&\quad +\frac{x^2}{2n}\Big(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\Big) \\
&= \Big(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{2n}\Big)+\frac{x^2}{2n}\Big(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\Big).
\end{aligned}
$$

$x^2/(2n)<1$ を仮定しているから，所要の不等式を得る.

次の補題は定理 2.1 の［**b.1**］の証明に必要である.

補題 3.4.　$x>0, t>0$ とし，$n(\geq 2)$ を関係 $n>t+1$ を満たす整数とする時

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x+t} &= \frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)} \\
&\quad +\frac{\eta_n\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{t}{x+t}
\end{aligned}
$$

と表現できる. ここに η_n は $|\eta_n|<1$ を満たす量である.

証明.　$(x+t)^{-1}$ の積分表現を考える：

$$\frac{1}{x+t}=\int_0^1 z^{x+t-1}dz=\int_0^1 z^{x-1}z^t dz=\int_0^1 z^{x-1}\{1+(z-1)\}^t\,dz\,,\qquad (x>0,\,t>0)\,.$$

積分範囲が $0<z<1$ であるから，$\{1+(z-1)\}^t$ に Taylor の定理を適用して

$$\frac{1}{x+t}=\int_0^1\left[z^{x-1}\left\{\sum_{i=0}^{\nu-1}\binom{t}{i}(z-1)^i+r_\nu(t,z)\right\}\right]dz\,,\qquad (\nu\geq 2)$$

と表せる．ただし

$$r_\nu(t,z)=\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{\nu-1})}{(\nu-1)!}\int_0^{z-1}(1+u)^{t-\nu}(z-1-u)^{\nu-1}du=:C_\nu(t)\cdot I_\nu(t,z)\,,$$

ここで

$$C_\nu(t)=\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{\nu-1})}{(\nu-1)!}\ \text{および}\ I_\nu(t,z)=\int_0^{z-1}(1+u)^{t-\nu}(z-1-u)^{\nu-1}du$$

と置いた．$y:=-u$ として，積分の第1平均値定理を適用すると

$$I_\nu(t,z)=(-1)^\nu\int_0^{1-z}(1-y)^{t-\nu}(1-z-y)^{\nu-1}dy=(-1)^\nu(1-\xi)^{t-\nu}(1-z-\xi)^{\nu-1}(1-z)\,,$$

ここで ξ は $0<\xi<1-z<1$ を満たす数である．よって

$$r_\nu(t,z)=\left[(-1)^\nu\,C_\nu(t)\cdot(1-z)^\nu\left\{\frac{1-z-\xi}{1-z}\cdot\frac{1}{1-\xi}\right\}^{\nu-1}\right]\cdot(1-\xi)^{t-1}=:a_\nu\cdot(1-\xi)^{t-1}\,,$$

と表現できる．ここで

$$a_\nu:=(-1)^\nu C_\nu(t)\cdot(1-z)^\nu\{(1-z-\xi)/(1-z-\xi+z\xi)\}^{\nu-1}$$

と置いた．与えられた $t>0$ に対し ν を $\nu>t+1$ と取ると，$0<z<1-\xi<1$ に注意すれば

$$\left|\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|=\left(1-\frac{t}{\nu}\right)\cdot\left(1-\frac{z}{1-\xi}\right)<1$$

となる．よって $r_\nu(t,z)\to 0,\ \text{as}\ \nu\to\infty$．即ち，無限級数表示が可能である：

$$\begin{aligned}\text{(3.11)}\qquad \frac{1}{x+t}&=\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{\infty}\left\{(-1)^i\frac{\Gamma(t+1)}{\Gamma(i+1)\,\Gamma(t-i+1)}\cdot\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(i+1)}{\Gamma(x+i+1)}\right\}\\&=\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}\,.\end{aligned}$$

そこで上式を最初の $n(\geq 2)$ 項とそれ以降に分け，次の様に表現する

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}+\frac{(-1)^n\,t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\\&\quad\cdot\left[\frac{1}{x+n}+\sum_{i=n+1}^{\infty}(-1)^{i-n}\frac{(t-n)(t-\overline{n+1})\cdots(t-n-\overline{i-n-1})}{(x+n)(x+n+1)\cdots(x+i)}\right].\end{aligned}$$

(3.11) の2行目と1行目左辺に注目すると上式の $[\cdots]$ の部分は前者で x を $x+n$, t を $t-n$ と変えたものであるから，後者にも同様な変換を行うことで

$$[\cdots]=((x+n)+(t-n))^{-1}=(x+t)^{-1}$$

と表現できる．故に

$$\frac{1}{x+t}=\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}+(-1)^n \cdot\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{1}{x+t},\qquad (x>0,\ t>0,\ n\ge 2). \tag{3.12}$$

そこで上式の最終項を

$$R_n(t,x):=(-1)^n\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{1}{x+t}$$

と置いてこの評価を考える．一時的に固定された $t>0$ に対して，$m-1\le t<m$ となる正整数mが存在するから，$n\ge m+1$ (従って $t<m\le n-1$) と仮定すれば次の変形が可能である：

$$\begin{aligned}&\frac{(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\\&=\left(\frac{t-1}{1}\cdots\frac{t-\overline{m-1}}{m-1}\right)\left(\frac{t-m}{m}\cdots\frac{t-\overline{n-1}}{n-1}\right)\left(\frac{1}{x+1}\cdots\frac{n-1}{x+n-1}\right)\\&=\prod_{i=1}^{m-1}\frac{t-i}{m-i}\cdot(-1)^{n-m}\prod_{i=0}^{n-m-1}\left(1-\frac{t}{m+i}\right)\cdot\frac{\Gamma(n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\\&=\eta_n\frac{\Gamma(n)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)},\end{aligned}$$

ここに，

$$\eta_n=\eta_n(t,m):=(-1)^{n-m}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{t-i}{m-i}\cdot\prod_{i=0}^{n-m-1}\left(1-\frac{t}{m+i}\right)$$

と置いた．従って，$m-1\le t<m, n\ge m+1$ の条件の下で，$|\eta_n|<1$ となる．よって

$$|R_n(t,x)|<\frac{\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{t}{x+t}$$

が成立する．結局 $x>0, t>0, n\ge 2, n>t+1$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+t}=&\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}\\&+\frac{\eta_n\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{t}{x+t}.\end{aligned}$$

4. 定理の証明

[a.1] **不等式 (2.1) の証明．** 補題3.1から n が自然数の時

$$\gamma(n,x)=1-e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}=:1-e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}a_i(x)$$

が成立する．$a_n(x)/a_{n-1}(x)=x/n\ (n=1,2,\ldots)$ であるから，定理の条件の下で

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$< n\cdot\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=\frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n)}, \qquad \left(\frac{x}{n}>1\right)$$

が成立する．よって

$$\gamma(n,x)=1-e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}\geq 1-e^{-x}\frac{nx^{n-1}}{\Gamma(n)}=1-\frac{n^n}{\Gamma(n)}\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}e^{-x}$$

ここで $\Gamma(n)$ に補題 3.2 の近似不等式を適用すると

$$>1-\frac{n^n}{\sqrt{2\pi}\,n^{n-1/2}\exp[-n+1/(12n)-1/\{360n(n+1)(n+2)\}-\bar{R}(n)]}\left(\frac{x}{n}\right)^{n-1}e^{-x}$$
$$=1-\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\left(\frac{x}{n}\right)^n\left(\frac{n}{x}\right)\exp\left[-x\left(1-\frac{n}{x}\right)-\frac{1}{12n}+\frac{1}{360n(n+1)(n+2)}+\bar{R}(n)\right].$$

これより所要の不等式を得る．

（注意．平均 x の Poisson 分布に対して Chebychev の不等式を適用すると $\gamma(n,x)\geq 1-x/(x-n+1)^2$ が得られるが，これは上記の下界に比べ一般に精度が悪い．）

不等式 (2.3) の証明． 補題 3.3 の不等式 (3.9) から

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\geq\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

これと補題 3.1 から

$$\gamma(n,x)\leq 1-e^{-x}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\left(\frac{x}{n}\right)^n\right\}=1-e^{-x}\cdot\left[\exp\left\{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right\}-\exp\left\{n\ln\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\right]$$
$$=1-e^{-x}\cdot\left[\exp\left\{n\left\{\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)-\ln\left(\frac{n}{x}\right)\right\}\right\}-\exp\left\{-n\ln\left(\frac{n}{x}\right)\right\}\right]$$
$$=1-\exp\left[-x\left\{1+\frac{n}{x}\ln\left(\frac{n}{x}\right)-\frac{n}{x}\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right\}\right]\cdot\left[1-\exp\left\{-n\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\right\}\right],$$

これより所要の結果を得る．

［**a.2**］ **不等式 (2.4) の証明．** Maclaurin の定理により

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{e^{\vartheta x}}{n!}x^n, \qquad \left(0<\vartheta<1\right).$$

よって

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}=e^x-\frac{e^{\vartheta x}}{n!}x^n<e^x-\frac{1}{n!}x^n.$$

これを補題 3.1 の関係式に適用し，

$$\gamma(n,x)=1-e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}>1-e^{-x}\left(e^x-\frac{1}{n!}x^n\right)=\frac{e^{-x}}{n!}x^n.$$

補題 3.2 を用い整理すると

$$> \frac{1}{\sqrt{2\pi(n+1)}} \exp\left[-x\left\{1-\frac{n+1}{x}+\frac{n}{x}\ln\left(\frac{n+1}{x}\right)\right\} - \frac{1}{12(n+1)} + \frac{1}{360(n+1)(n+2)(n+3)} + \underline{R}(n+1)\right].$$

ここで

$$-x\left\{1-\frac{n+1}{x}+\frac{n}{x}\ln\left(\frac{n+1}{x}\right)\right\} = -x\left(1-\frac{n}{x}+\frac{n}{x}\ln\frac{n}{x}\right) + \left\{1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\},$$

$$1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1-n\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n(n+1)}-\frac{1}{6n(n+1)^2}\right\} = \frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{6(n+1)^2}$$

に注意すれば所要の下界 (2.4) を得る.

下界 (2.7) の証明. 補題 3.3 から

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{i!}x^i+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$\le\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{-1}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\frac{x^2}{2n}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\right\}-\frac{x^n}{n!}, \qquad \left(\frac{x^2}{2n}<1\right).$$

補題 3.1 の関係を再び用いて下界 (2.5) が得られる：

$$\gamma(n,x)=1-e^{-x}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{x^i}{i!}\ge 1-e^{-x}\left[\left(1-\frac{x^2}{2n}\right)^{-1}\left\{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\frac{x^2}{2n}\left(\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}\right)\right\}-\frac{x^n}{n!}\right].$$

不等式 (2.8) の証明. 全ての x に対し

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{1}{n!}x^n+\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}+\cdots.$$

よって，$0\le x<n$ に対し

$$\le 1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{1}{n!}x^n\left\{1+\frac{x}{n}+\left(\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{x}{n}\right)^3+\cdots\right\}$$
$$=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+\frac{1}{(n-1)!\,(n-x)}x^n.$$
$$\therefore\ \varDelta E:=e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right)\le\frac{1}{(n-1)!\,(n-x)}x^n$$

と評価できる. これと関係式 (3.1) から

$$\gamma(n,x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x y^{n-1}e^{-y}dy=e^{-x}\left\{e^x-\left(1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}\right)\right\}$$
$$\le\frac{x^ne^{-x}}{(n-1)!\,(n-x)}.$$

補題 3.2 を利用して

$$<\frac{x^ne^{-x}}{\sqrt{2\pi}\,n^{n-1/2}(n-x)\exp[-n+1/(12n)-1/\{360n(n+1)(n+2)\}-\bar{R}(n)]}.$$

この結果を整理すれば，所要の結果を得る．

［a.3］ **不等式 (2.9)，(2.10) の証明．** 補題 3.1 から

$$\gamma(n, n) = 1 - e^{-n}\left\{1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right\}$$

と表現できる．次の Ramanujan 予想 (1913) の Watson (1929) の証明した結果を利用する：

$$e^{-n}\left\{1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} + \theta_n \frac{n^n}{n!}\right\} = \frac{1}{2},$$

ここに

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{135\,(n+8/45)} < \theta_n < \frac{1}{3} + \frac{4}{135\,(n+2/21)}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

従って，この場合我々は

$$\gamma(n, n) = 1 - e^{-n}\left\{1 + \frac{n}{1!} + \frac{n^2}{2!} + \cdots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}\right\} = \frac{1}{2} + \theta_n e^{-n}\frac{n^n}{n!}$$

と表せる．上の θ_n に対する不等式を考慮すれば直ちに

$$\frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{135\,(n+8/45)}\right\} e^{-n}\frac{n^n}{n!} < \gamma(n, n) < \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{4}{135\,(n+2/21)}\right\} e^{-n}\frac{n^n}{n!}$$

が得られる．階乗の近似に補題 3.2 を適用すれば所要の結果を得る．

［b.1］ **不等式 (2.12), (2.13) の証明．** p が微小な実数パラメーターであることから，ここまでの証明方法とかなり違ったものになる．式 (1.1) に従って不完全ガンマ関数比を考える：

$$\gamma(p, x) = \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x y^{p-1}e^{-y}dy, \qquad (x > 0, 0 < p < 1).$$

$y =: x(1+w)$ と置くと，$w = y/x - 1, dy = xdw$ に注意して，次の様に変形される：

$$\begin{aligned}
\gamma(p, x) &= 1 - \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^\infty \frac{1}{x^{1-p}(1+w)^{1-p}}\, e^{-x(1+w)}\, xdw \\
&= 1 - \frac{1}{\Gamma(p)}\, x^p e^{-x}\int_0^\infty \frac{1}{(1+w)^{1-p}}\, e^{-xw}\, dw \\
&= 1 - \frac{1}{\Gamma(p)}\, x^p e^{-x}\int_0^\infty \left\{\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty t^{-p}e^{-(1+w)t}dt\right\} e^{-xw}\, dw \\
&= 1 - \frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}\int_0^\infty \left[t^{-p}e^{-t}\left\{\int_0^\infty e^{-(x+t)w}\, dw\right\}\right] dt \\
&= 1 - \frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)}\int_0^\infty \frac{1}{x+t}\, t^{-p}e^{-t}dt.
\end{aligned}$$

そこで，最後の積分の評価を考える：

$$S(x\,;p) := \frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^\infty \frac{1}{x+t}\, t^{-p}e^{-t}\, dt =: w(p, n, x) + W(p, n, x), \qquad (0 < p < 1, n \geq 2)$$

と分割して扱う．ここに

$$w(p,n,x):=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_0^{n-1}\frac{1}{x+t}t^{-p}e^{-t}\,dt,\qquad W(p,n,x)=:\frac{1}{\Gamma(1-p)}\int_{n-1}^{\infty}\frac{1}{x+t}t^{-p}e^{-t}dt$$

を表す．そこで補題 3.4 を援用する．$|\eta_n(t,m)|<1$ に注意して

$$\begin{aligned}w(p,n;x)&<\frac{1}{x}\gamma(1-p,n-1)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sum_{j=1}^{i}(-1)^j d_{i-j,i-1}\,\gamma(j-p+1,n-1)\,\Gamma(j-p+1)/\Gamma(1-p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}\\&\quad+\left(1-\frac{x}{x+n-1}\right)\frac{\Gamma(n)\,\gamma(1-p,n-1)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\end{aligned}$$

が成立する．また，(3.12) から

$$\begin{aligned}W(p,n;x)&=\frac{1}{x}\Gamma(1-p,n-1)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\sum_{j=1}^{i}(-1)^j d_{i-j,i-1}\,\Gamma(j-p+1,n-1)\,\Gamma(j-p+1)/\Gamma(1-p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}\\&\quad+\frac{(-1)^n}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)}\cdot\frac{1}{\Gamma(1-p)}\\&\quad\cdot\int_{n-1}^{\infty}\frac{t}{x+t}(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})\,t^{-p}e^{-t}dt\end{aligned}$$

と表せる．上の不等式の最終部分は更に次のように評価できる：

$$\begin{aligned}&\int_{n-1}^{\infty}\frac{t}{x+t}(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{n-1})\,t^{-p}e^{-t}dt\\&\le\frac{1}{x+n-1}\int_{n-1}^{\infty}t^{n-p}e^{-t}dt<\frac{n\Gamma(n)}{\Gamma(1-p)(x+n-1)(n-1)^p}\{1-\gamma(n+1,n-1)\}.\end{aligned}$$

従って，$\gamma(1-p,n-1)+\Gamma(1-p,n-1)=1$ 等の関係と式 (2.14) の $\alpha_i(p)$ の定義を用いれば，

$$\begin{aligned}S(x;p)&=w(p,n;x)+W(p,n;x)\\&<\frac{1}{x}+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\frac{\alpha_i(p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}+\frac{\varepsilon_n(p,x)\,\Gamma(n)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)},\end{aligned}$$

と表現できる．ただし $\varepsilon_n(p,x)$ は次式で与えられる量である：

$$\begin{aligned}\varepsilon_n(p,x)&=\left(1-\frac{x}{x+n-1}\right)\gamma(1-p,n-1)+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\\&\quad\cdot\frac{n}{(x+n-1)(n-1)^p}\{1-\gamma(n+1,n-1)\}.\end{aligned}$$

この量を含んだままの不等式は精度がそれなりに良いが複雑であり，その中に今現在の評価の対象の一部分となっている量 $\gamma(1-p,n-1)$ が入っている．本定理は x がある程度大きい時有効である不等式を得ることを目指しており，結果の簡明化も考慮して $x>1$ と仮定する．不完全ガンマ関数比は任意の p と $n\,(0<p<1,\,n\ge 2)$ に対して 1 を越えない正の値を取ること，$0<1/\Gamma(1-p)<1\,(0<p<1)$ であることに注意すれば直ちに

$$0 < \varepsilon_n(p, x) < \frac{n}{x+n-1}\left(2-\frac{1}{n}\right) < \begin{cases} 2 & \text{if} \quad 1 < x < n+1, \\ 1 & \text{if} \quad x \geq n+1 \end{cases}$$

が言える．最も安全な限界値 2 を取って下界 (2.12) を得る．上界 (2.13) も上と並行した議論により示すことができ，所要の定理を得る．

注 4.1. 無限積分の項別積分に関する Hardy の定理 (cf. 藤原 (1937), p. 386) を援用すれば前述の証明中の $S(x\,;p)$ は

$$\begin{aligned} S(x\,;p) &= \frac{1}{x}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{i=1}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}(-1)^i\frac{t(t-1)(t-2)\cdots(t-\overline{i-1})}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}t^{-p}e^{-t}dt\right\} \\ &= \frac{1}{x}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}\left(\sum_{j=1}^{i}(-1)^{i-j}d_{i-j,i-1}\int_0^{\infty}t^{j-p}e^{-t}dt\right) \\ &= \frac{\alpha_0(p)}{x}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{(-1)^i\,\alpha_i(p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}, \end{aligned}$$

と表せる．$\alpha_0(p)=1$ に注意すれば p が微小な時の不完全ガンマ関数比の無限級数表示

$$\gamma(p, x) = 1-\frac{x^p e^{-x}}{\Gamma(p)}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i\,\alpha_i(p)}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+i)}, \qquad (0 < p < 1, x > 0)$$

を得る．上で証明した定理 [**b.1**] は上記の無限級数表示が可能なこととその大きさの評価を同時に行ったことになる．

[b.2] 不等式 (2.15) の証明． 不完全ガンマ関数比の被積分関数に含まれる e^{-t} を級数展開して

$$\begin{aligned} \gamma(p, x) &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x t^{p-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x t^{p-1}\left\{1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\right\}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(p)}\int_0^x\left\{t^{p-1}-\frac{1}{1!}t^p+\frac{1}{2!}t^{p+1}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}t^{p+n-2}+\cdots\right\}dt \\ &= \frac{x^p}{\Gamma(p)}\left[\frac{1}{p}x^0-\frac{1}{p+1}x^1+\frac{1}{2!(p+2)}x^2-\cdots\right. \\ &\qquad \left.+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!(p+n-1)}x^{n-1}+\cdots\right]. \end{aligned}$$

ここで $a_n := \dfrac{1}{(n-1)!(p+n-1)}x^{n-1}$ と置くと，$n > x$ および $p > 0$ に対して

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n-1)!(p+n-1)}{n!(p+n)}\cdot\frac{x^n}{x^{n-1}} = \frac{x}{n}\left(1-\frac{1}{p+n}\right)\to 0, \qquad \text{as } n\to\infty.$$

よって上の [ ] 内の級数は絶対収束する．よって $m=1,2,\ldots;2m>x$ および $p>0$ に対して

$$\gamma(p,x) > \frac{x^p}{\Gamma(p)}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}x^1 + \frac{1}{2!(p+2)}x^2 - \cdots \right.$$
$$\left. + (-1)^{2m-1}\frac{1}{(2m-1)!(p+2m-1)}x^{2m-1}\right],$$
$$\gamma(p,x) < \frac{x^p}{\Gamma(p)}\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}x^1 + \frac{1}{2!(p+2)}x^2 - \cdots + (-1)^{2m}\frac{1}{(2m)!(p+2m)}x^{2m}\right]$$

が求まる.

5. 不等式の視覚化

第2章で与えた諸不等式が広範囲な応用を持つことが期待される. 例えば正規分布, 対数正規分布, 逆正規分布など多くの連続型の分布関数は不完全ガンマ関数比を用いて表現できることから, それらの裾の近似確率を本稿で与えた結果に基づいて上下からかなり精密に評価できることになる. 関連する漸近的結果あるいは極限の挙動もほぼ自動的に得られることになる. 本章では, 紙数の関係も考慮し, 第2章で述べた結果の一部分について, それぞれの不等式による近似の様子を知る上での参考とするために, いくつかの場合についてのグラフと若干の数値計算結果を与える.

5.1 定理 [a.1] の視覚化

図1に不完全ガンマ関数比 $\gamma(2,x)$ $(x>2)$ とそれに対する, 不等式 (2.1) および (2.3) による近似を図示している. 図2は $\gamma(4,x)$ $(x>4)$ についての対応する図である. x が大きくなるほど, n が小さいほど近似精度が良いことが分かる. このことは, 系2.1の式 (2.16) における極限過程 (a) に良く対応している.

5.2 定理 [a.2] の視覚化

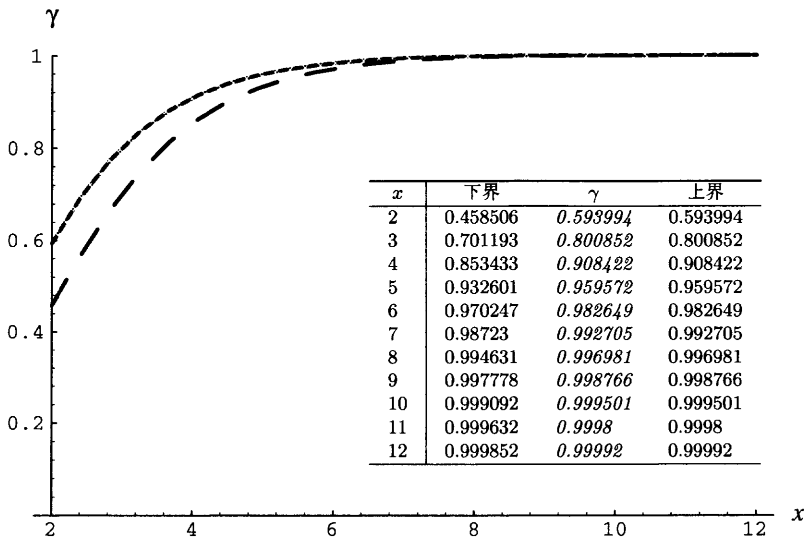
図3に不完全ガンマ関数比 $\gamma(2,x)(x>0)$ とそれに対する, 下界 (2.7) および上界 (2.8) による近似を図示している. $n=2$ の時, 下界 (2.7) は $\gamma(2,x)$ に数値的に殆ど一致していることが分かる. 図4は $\gamma(4,x)(x>0)$ についての対応する図である. 下界は (2.4) が採用されている. 下界 (2.7) の方は $n=4$ の時 $x=1.5$ の近辺で正値を取るが, その他の所で微小ではあるが負値を取り意味がないことが数値計算で確かめられる. n が適度に大きくなると下界 (2.4) が有効であることが分かる. 両図から x が小さく, n が大きいほど近似精度が良いことが分かる. このことは, 系2.1の式 (2.16) における極限過程 (b) に良く対応している.

5.3 定理 [a.3] の数値計算

表1に定理 [**a.3**] で与えた不等式 (2.9), (2.10) を用いて, n を $1 \le n \le 10000$ の範囲で適当に選択した時の $\gamma(n,n)$ とその上下界の数値をまとめた. そこに見るように驚くほど高い精度で近似が実現されていることが分かる. このことからも Ramanujan の神秘的な洞察力, 直感力に驚かされる (cf. Berndt and Rankin (1995)). またこの場合, 系2.1の式 (2.16) における極限過程 (c) の成立がはっきりと認識できる.

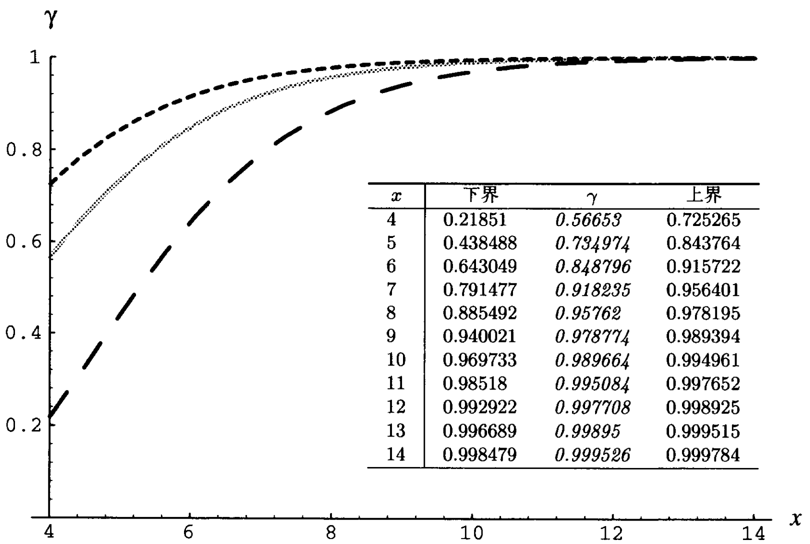
5.4 系2.2, 系2.3の視覚化

定理 [**b.1**], [**b.2**] の不等式 (2.12), (2.13) および (2.15) の代わりに, 系2.2, 系2.3の不等式 (2.18), (2.19) および (2.22) による標準正規分布関数 $\Phi(x)$ の近似結果をグラフにす



x	下界	γ	上界
2	0.458506	*0.593994*	0.593994
3	0.701193	*0.800852*	0.800852
4	0.853433	*0.908422*	0.908422
5	0.932601	*0.959572*	0.959572
6	0.970247	*0.982649*	0.982649
7	0.98723	*0.992705*	0.992705
8	0.994631	*0.996981*	0.996981
9	0.997778	*0.998766*	0.998766
10	0.999092	*0.999501*	0.999501
11	0.999632	*0.9998*	0.9998
12	0.999852	*0.99992*	0.99992

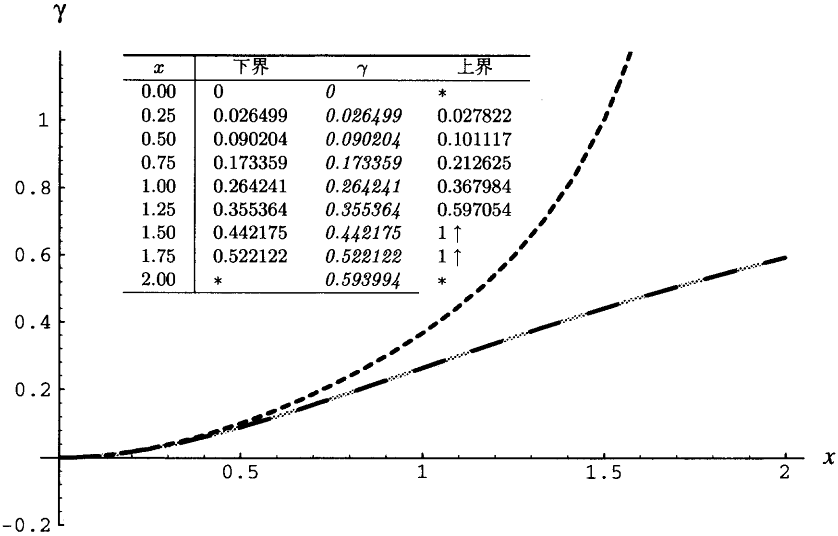
図1．定理 2.1 [a.1] 中の不等式による不完全ガンマ関数比 $\gamma(n=2,x)$ の評価．粗破線は下界，灰色線は γ，密破線は上界を表す．



x	下界	γ	上界
4	0.21851	*0.56653*	0.725265
5	0.438488	*0.734974*	0.843764
6	0.643049	*0.848796*	0.915722
7	0.791477	*0.918235*	0.956401
8	0.885492	*0.95762*	0.978195
9	0.940021	*0.978774*	0.989394
10	0.969733	*0.989664*	0.994961
11	0.98518	*0.995084*	0.997652
12	0.992922	*0.997708*	0.998925
13	0.996689	*0.99895*	0.999515
14	0.998479	*0.999526*	0.999784

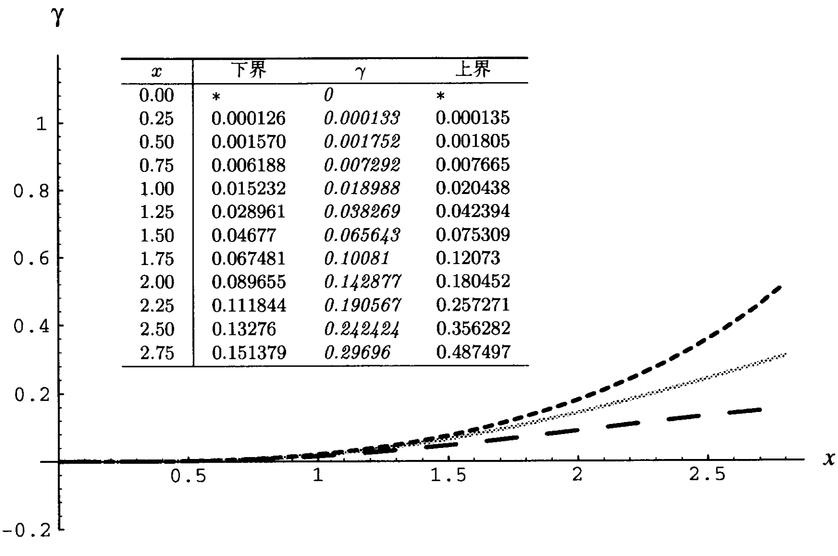
図2．定理 2.1 [a.1] 中の不等式による不完全ガンマ関数比 $\gamma(n=4,x)$ の評価．粗破線は下界，灰色線は γ，密破線は上界を表す．

る．多くの計算機に $\Phi(x)$ の計算プログラムが標準的に組み込まれているので近似の比較に便利なためである．図 5 (a) に，不等式 (2.18)，(2.19) で $n=2$，不等式 (2.22) で $m=1$ の場合の近似を図示した．またこれらに対応して図 5 (b) に $n=5, m=3$ の場合を示した．両図から，系 2.2 が x の値が大きい時に，系 2.3 が x の値が小さい時に非常に良い近似を与えることがはっきりと見て取れる．また，両系の不等式とも，項数 n や m を増やせば近似の精度が向上する様子も分かる．図 5 (b) では，採用すべき優れた方の上下界と $\Phi(x)$ との差異は肉眼では殆



x	下界	γ	上界
0.00	0	*0*	*
0.25	0.026499	*0.026499*	0.027822
0.50	0.090204	*0.090204*	0.101117
0.75	0.173359	*0.173359*	0.212625
1.00	0.264241	*0.264241*	0.367984
1.25	0.355364	*0.355364*	0.597054
1.50	0.442175	*0.442175*	1 ↑
1.75	0.522122	*0.522122*	1 ↑
2.00	*	*0.593994*	*

図3．定理2.1 [a.2] 中の不等式による不完全ガンマ関数比 $\gamma(n=2,x)$ の評価．粗破線は下界，灰色線は γ，密破線は上界を表す．



x	下界	γ	上界
0.00	*	*0*	*
0.25	0.000126	*0.000133*	0.000135
0.50	0.001570	*0.001752*	0.001805
0.75	0.006188	*0.007292*	0.007665
1.00	0.015232	*0.018988*	0.020438
1.25	0.028961	*0.038269*	0.042394
1.50	0.04677	*0.065643*	0.075309
1.75	0.067481	*0.10081*	0.12073
2.00	0.089655	*0.142877*	0.180452
2.25	0.111844	*0.190567*	0.257271
2.50	0.13276	*0.242424*	0.356282
2.75	0.151379	*0.29696*	0.487497

図4．定理2.1 [a.2] 中の不等式による不完全ガンマ関数比 $\gamma(n=4,x)$ の評価．粗破線は下界，灰色線は γ，密破線は上界を表す．

ど検出できない．このことに関連して，表2 (a) と (b) に，両系で与えた下界あるいは上界のどちらを採用すべきかの境界にある部分を中心として数値計算を行った結果を記してある．これらの表からも上記の精度の向上の様子が窺える．なお，図5 (a), (b) の不等式 (2.18)，(2.19) に基づく限界曲線は系2.2を厳密に適用すれば $x>\sqrt{2}$ の範囲に留めるべきであるが，参考のため少し小さな x の値のところまで計算して描いてある．

表1．定理 2.1 [a.3] 中の不等式による不完全ガンマ関数比 $\gamma(n, n)$ の評価.

n	下界	γ	上界
1	0.6321907083	*0.6321205588*	0.6324100293
2	0.5939327049	*0.5939941503*	0.5940391711
3	0.5767754108	*0.5768099189*	0.5768229847
4	0.5665097734	*0.5665298796*	0.566535096
5	0.5594940236	*0.5595067149*	0.559509232
6	0.5543118038	*0.5543203586*	0.5543217349
7	0.5502828757	*0.5502889442*	0.5502897663
8	0.54703471	*0.5470391905*	0.5470397151
9	0.5443439801	*0.5443473957*	0.5443477479
10	0.5420676131	*0.5420702855*	0.5420705319
20	0.5297422232	*0.5297427332*	0.529742756
30	0.5242828244	*0.5242830139*	0.5242830195
40	0.5210287677	*0.5210288611*	0.5210288631
50	0.5188082617	*0.5188083155*	0.5188083164
60	0.5171692384	*0.5171692726*	0.5171692731
70	0.5158954387	*0.515895462*	0.5158954623
80	0.5148686878	*0.5148687046*	0.5148687048
90	0.5140182342	*0.5140182467*	0.5140182468
100	0.5132987886	*0.5132987983*	0.5132987984
300	0.5076777883	*0.5076777889*	0.5076777889
500	0.5059471460	*0.5059471462*	0.5059471462
1000	0.5042052441	*0.5042052442*	0.5042052442
3000	0.5024278899	*0.5024278899*	0.5024278899
5000	0.5018806340	*0.5018806340*	0.5018806340
10000	0.5013298083	*0.5013298083*	0.5013298083
30000	0.5007677649	*0.5007677649*	0.5007677649
50000	0.5005947081	*0.5005947081*	0.5005947081
100000	0.5004205221	*0.5004205221*	0.5004205221

5.5　注意 2.2 の視覚化

図 6 (a) は不等式 (2.18) および (2.19) によって標準正規分布関数 $\Phi(x)$ を，適度に大きな値以上の右裾の部分で近似したグラフで，項数 $n = 2 \sim 10$ の場合を示している．この図から項数を増やせば増やすほど近似の精度が上がっていることが分かる．一方，図 6 (b) は既存のよく知られた不等式 (2.20) および (2.21) (cf. Feller (1968)) で $k = 1 \sim 5$ (i.e. $n = 1 \sim 10$) として $\Phi(x)$ を近似した時の様子を示したものである．この図から，注 2.2 で述べたように，近似の項数を増やせば増やすほど近似の適用範囲が悪くなることが見て取れる．即ち既存の不等式 (2.20) および (2.21) による近似では項数が多くてもそれは見掛け上である場合もあり，その使用には注意を要する．

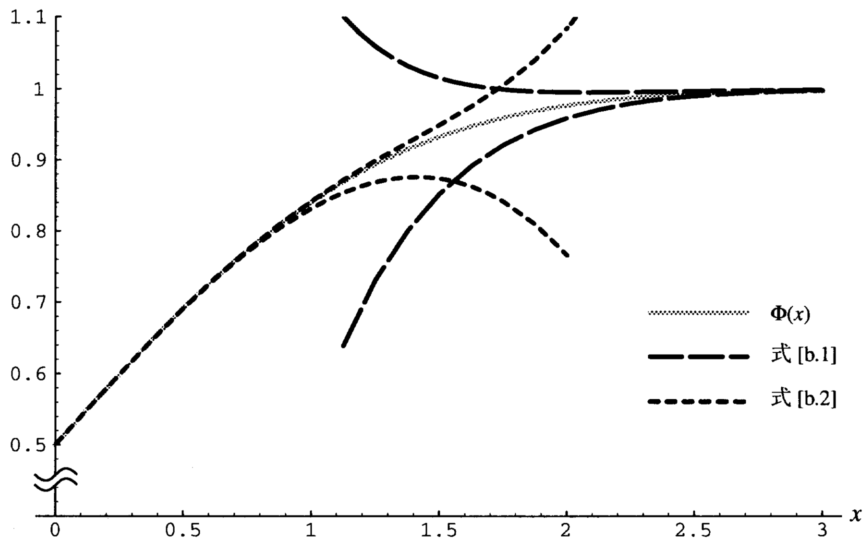


図5(a). 定理2.1[b]中の不等式による標準正規分布関数の評価—1. 式(2.18), (2.19)で $n=2$. 式(2.22)で $m=1$.

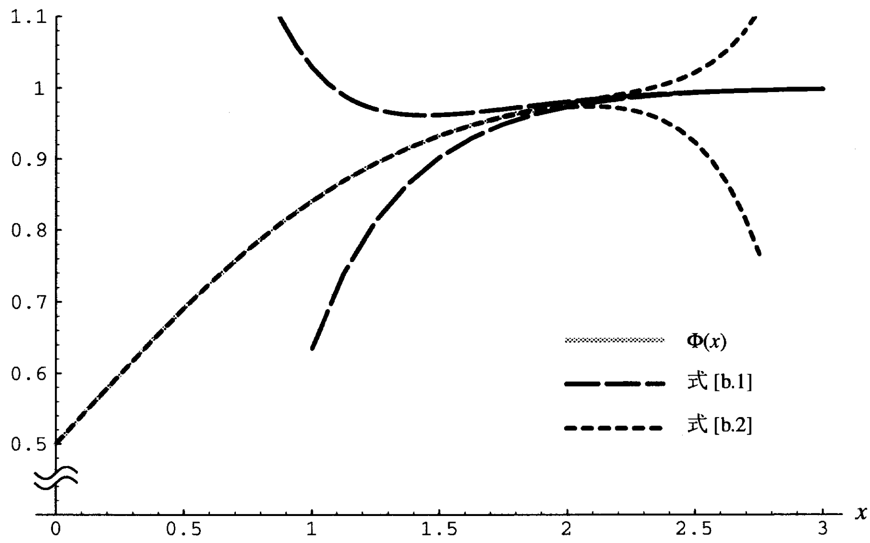


図5(b). 定理2.1[b]中の不等式による標準正規分布関数の評価—2. 式(2.18), (2.19)で $n=5$. 式(2.22)で $m=3$.

6. あとがき

本稿では不完全ガンマ関数比の大きさ，すなわちガンマ分布の分布関数の値を定量的に近似する問題に理論的に取り組んだ．ここでの問題解決の接近方法における特徴は，不完全ガンマ関数比を上下からなるべく精度良く評価するための両側不等式を与えることにより実現したことにある．第1章に述べたように，このような問題に対して解析的に上下界を与えた文献は意

表 2 (a). 図 5 (a) の各グラフの中央部の数値.

x	b.1(下界)	b.2(下界)	$\Phi(x)$	b.1(上界)	b.2(上界)
1.0	0.516059	0.832452	*0.841345*	1.16131	0.842425
1.1	0.616862	0.850338	*0.864334*	1.11044	0.8664
1.2	0.697055	0.863835	*0.88493*	1.07338	0.888653
1.3	0.761006	0.872546	*0.9032*	1.0468	0.909577
1.4	0.81203	0.87607	*0.919243*	1.02809	0.92971
1.5	0.852705	0.874008	*0.933193*	1.01524	0.949745
1.6	0.885066	0.865963	*0.945201*	1.00669	0.970543
1.7	0.910737	0.851535	*0.955435*	1.00124	0.993145
1.8	0.931027	0.830324	*0.96407*	0.997991	1.01878
1.9	0.946998	0.801933	*0.971283*	0.996245	1.04889
2.0	0.959507	0.765962	*0.97725*	0.995501	1.08512
2.1	0.969253	0.722011	*0.982136*	0.995393	1.12934
2.2	0.976803	0.669683	*0.986097*	0.995662	1.18368
2.3	0.982616	0.608579	*0.989276*	0.996131	1.25051
2.4	0.987062	0.538298	*0.991802*	0.996681	1.33246

表 2 (b). 図 5 (b) の各グラフの中央部の数値.

x	b.1(下界)	b.2(下界)	$\Phi(x)$	b.1(上界)	b.2(上界)
1.0	0.841344	0.635124	*0.841345*	1.02842	0.841345
1.1	0.864332	0.721455	*0.864334*	0.995374	0.864334
1.2	0.884924	0.786718	*0.88493*	0.975833	0.884931
1.3	0.903181	0.836239	*0.9032*	0.965656	0.903201
1.4	0.919196	0.873964	*0.919243*	0.961755	0.919249
1.5	0.933079	0.902822	*0.933193*	0.961867	0.933209
1.6	0.944942	0.924993	*0.945201*	0.964373	0.945242
1.7	0.954877	0.942093	*0.955435*	0.968145	0.955536
1.8	0.962918	0.955329	*0.96407*	0.972428	0.964305
1.9	0.969003	0.9656	*0.971283*	0.976736	0.971804
2.0	0.972897	0.973581	*0.97725*	0.98078	0.978353
2.1	0.974098	0.979784	*0.982136*	0.984404	0.984386
2.2	0.971696	0.9846	*0.986097*	0.987543	0.99053
2.3	0.964172	0.98833	*0.989276*	0.990192	0.99774
2.4	0.949129	0.991209	*0.991802*	0.992378	1.0075

外なことに殆ど見かけない．その意味で本稿の諸結果は不完全ガンマ関数比を利用する関連諸分野の，特に理論的評価をしようとする場面で有用となり，利用されれば幸いである．これに関し，本稿の主要結果である定理 2.1 に記したグループ [a] の諸結果は離散型分布に関連する近似問題から派生したものであり，その方面の理論展開に役立つものと期待している．ただ，第 5 章の関連する図に見るように幾つかの不等式は分布の裾以外の所でなお改善の余地もあり，その点は今後の課題である．これに比べて，定理 2.1 のグループ [b] の諸結果は理論はもとより，不完全ガンマ関数比に関する数値計算にも精度的に十分役立つものと言える．

なお，第 3 章で本稿の主要結果の証明に必要な幾つかの補題を揚げたが，それぞれ独立して興味があるものであり，今後非漸近的な小標本の統計理論の展開を必要とする場合などにそれ

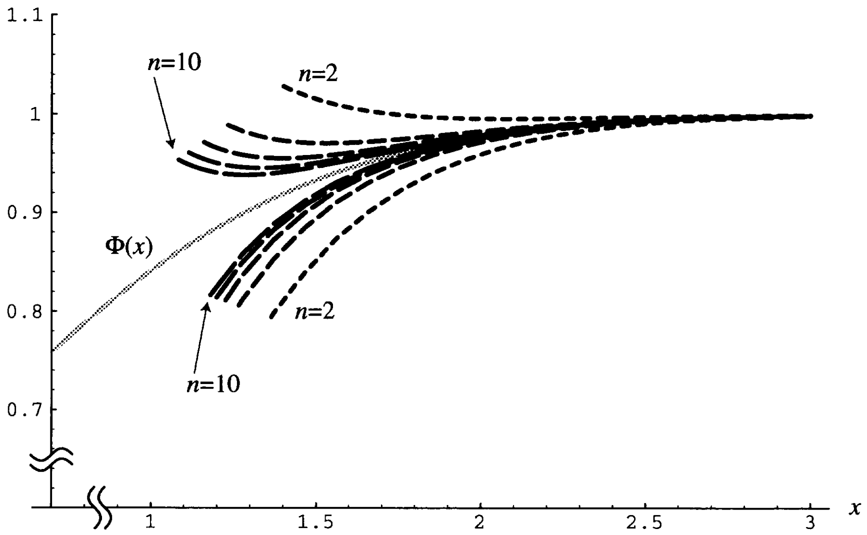


図6(a)．式(2.18)，(2.19)による標準正規分布関数の評価．外側から内側に向かって，$n=2,4,6,8,10$.

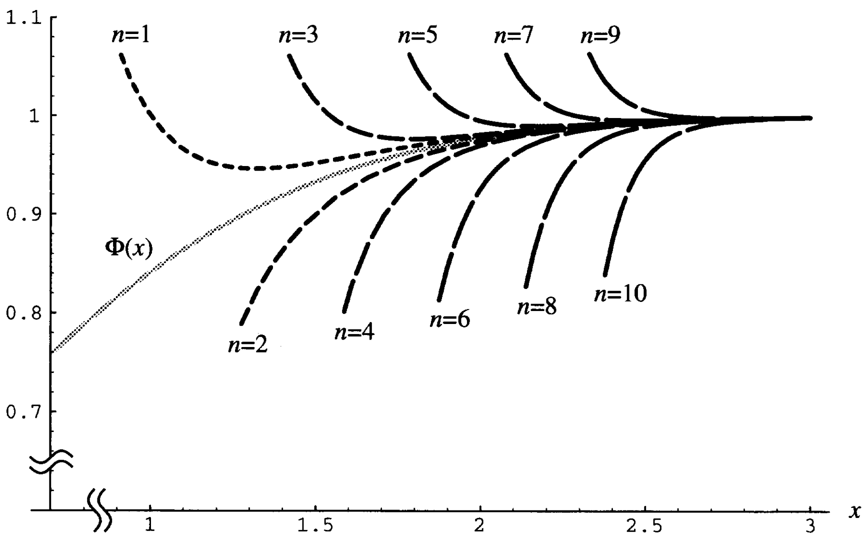


図6(b)．式(2.20)，(2.21)による標準正規分布関数の評価．

らの活用が期待される．また，本稿では議論を一変量に限ったが，多変量の確率分布に対しての拡張も理論および応用の両面で重要な意味がある．このことについては機会を改めて論じたい．

謝　辞

査読者諸氏の本稿に対する注意深い検討と有益なコメントに深く感謝します．

参 考 文 献

Berndt, B. C. and Rankin, R. A. (1995). *Ramanujan — Letters and Commentary —*, American Mathematical Society and London Mathematical Society.

Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1, 3rd ed., A Wiley International Edition, Wiley, New York.

藤原松三郎 (1937).『微分積分学』, 第 1 巻, 内田老鶴圃, 東京.

熊本武夫, 酒巻恒一 (1990).『数値計算ハンドブック』(大野豊, 磯田和男 編), 899-957, オーム社, 東京.

Matsunawa, T. (1977). Approximations to the probabilities of binomial and multinomial random variables and chisquare type statistics, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **29**, 333-358.

Watson, G. N. (1929). Theorems stated by Ramanujan (V). Approximations connected with e^x, *Proc. London Math. Soc., Ser.* 2, **29**, 293-308.

Estimating Inequalities for Incomplete Gamma Function Ratios

Tadashi Matsunawa
(The Institute of Statistical Mathematics)
Tomohiro Takei
(Graduate School of Science and Engineering, Chuo University)

Several approximations to estimate the incomplete gamma function ratio $\gamma(p, x)$ having parameter $p > 0$ and variable $x > 0$ are presented in some situations. The approximations are realized by giving double-sided inequalities as $\underline{\gamma}(p, x) \leq \gamma(p, x) \leq \bar{\gamma}(p,x)$. The resultant bounds are expected to be useful to approximation problems in statistics and in related mathematical sciences. Our approaches to obtain the bounds, (a) when p is a positive integer and (b) when p is a positive general real number, are fairly different. Numerical and graphical results on the approximations are also presented.

Key words: Incomplete gamma function ratio, approximation, double-sided estimating inequality, Maclaurin's formula, inverse factorial series, absolute convergent series, Ramanujan's conjecture.