統計数理（1996）
第44巻 第2号 251-262

［研究詳解］

SSARモデルを用いた非対称的な経済データの分析

統計数理研究所　佐　藤　整　尚

（1996年5月　受付）

1. はじめに

経済データの解析において，時系列モデルを適用されるようになってからかなりの期間が経つ．その間，Box-Jenkins流のARIMAモデルに始まり，Engle (1982) によるARCH (Auto-Regressive Conditional Heteroscedastic) モデルに代表される非線形モデルに至るまで，様々な時系列モデルが提案されてきた．その過程で経済時系列の持つ様々な特徴が明らかになってきている．その中でもNeftici (1984) やHamilton (1989) などによって経済時系列における非対称性についての研究が本格的にはじめられ注目されている．最近ではKunitomo and Sato (1994)，国友・佐藤 (1994) において，上昇局面と下降局面で非対称な動きをする時系列に対する研究が行われており，成果をあげつつある．ここで提案された同時転換回帰モデル(SSARモデル) はFair and Jaffee (1972) に始まる不均衡市場における計量モデルから導出されたもので非対称的なマーケット・メカニズムに対するモデリングである．これまで経済データに適用された時系列モデルはどちらかといえば，経済学的な議論に基づくものよりも他の分野のモデルをそのまま応用したものが多かったといえる．しかしながら，本論で紹介するSSARモデルは経済学的な考え方をバックグラウンドにしている点で大きく異なっている．また他の分野にも応用できる可能性を持っている．ここでは，SSARモデルの性質とその応用について紹介していく．

2. SSARモデルの導出

経済学の教科書の始めにはよく市場に関しての需要と供給のモデルが解説されている．たとえば次のような市場モデルがよく用いられる．

Demand:

$$D_t = \boldsymbol{c}_1'\boldsymbol{x} + \alpha p_t + e_t^d \tag{2.1}$$

Supply:

$$S_t = \boldsymbol{c}_2'\boldsymbol{y} + \beta p_t + e_t^s \tag{2.2}$$

$$\alpha < 0, \qquad 0 < \beta \tag{2.3}$$

ただし，p_tはt期の価格である．D_t, S_tはそれぞれt期における需要と供給で，通常は観察されない．また$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$は外部から需要や供給に影響を与える外生変数であり，e_t^d, e_t^sは撹乱項である．正常な財であれば，需要関数は右下がり，供給関数は右上がりになるのが自然である．それゆ

え(2.3)の様な符号条件がついている.

まずはじめに，外生変数が撹乱項に含まれるような需要関数，供給関数を持つ市場を考える.

Demand:

$$D_t = \alpha p_t + e_t^d \tag{2.4}$$

Supply:

$$S_t = \beta p_t + e_t^s \tag{2.5}$$

ただし，

$$e_t^d \sim \text{i.i.d.}, \qquad e_t^s \sim \text{i.i.d.} \tag{2.6}$$

で，$\{e_t^d\}$ と $\{e_t^s\}$ は互いに独立であるとする.

通常の均衡理論のもとでは需要と供給が一致したところで財の価格と取引数量が決定される．しかしながら現実的にはなんらかの要因で必ずしも需要と供給が一致するとは限らず，市場は不均衡であり，取引は所与の価格の下で需給の少ないほうで決定されると仮定しておいたほうがよりよいと考えられる．したがって，ここでは，

$$D_t \neq S_t$$

という状態も認め，

$$q_t = \min(D_t, S_t) \tag{2.7}$$

であるとしよう(q_t は取引数量を表す)．この時の価格の決定に関して，次のような，不均衡計量分析において用いられる非対称な調整モデルを考える (Laffont and Garcia (1977)).

$$\Delta p_t = p_t - p_{t-1} = \begin{cases} \gamma_1(D_t - S_t) & (D_t \geq S_t) \\ \gamma_2(D_t - S_t) & (D_t < S_t) \end{cases} \tag{2.8}$$

ただし，$\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ である.

価格の変化は超過需要に比例するのであるが，その比例定数が需要超過時と供給超過時とで必ずしも一致しないようなモデルである．このとき結果としては時系列に非対称性を備えた自己回帰型の時系列モデルが生じる可能性がある．上式に(2.4)，(2.5)式を代入すると，

$$p_t = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\gamma_1(\beta-\alpha)} p_{t-1} + \dfrac{\gamma_1}{1+\gamma_1(\beta-\alpha)}(e_t^d - e_t^s) & (\Delta p_t \geq 0) \\ \dfrac{1}{1+\gamma_2(\beta-\alpha)} p_{t-1} + \dfrac{\gamma_2}{1+\gamma_2(\beta-\alpha)}(e_t^d - e_t^s) & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \tag{2.9}$$

となる．これを次のように書き直す.

$$p_t = \begin{cases} a p_{t-1} + \sigma_a \varepsilon_t & (\Delta p_t \geq 0) \\ b p_{t-1} + \sigma_b \varepsilon_t & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \tag{2.10}$$

ただし，

$$a = \frac{1}{1+\gamma_1(\beta-\alpha)}, \qquad b = \frac{1}{1+\gamma_2(\beta-\alpha)}, \tag{2.11}$$

(2.12) $$\sigma_a=\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1(\beta-\alpha)}\sqrt{\mathrm{Var}(e_t^d-e_t^s)},\qquad \sigma_b=\frac{\gamma_2}{1+\gamma_2(\beta-\alpha)}\sqrt{\mathrm{Var}(e_t^d-e_t^s)},$$

(2.13) $$\varepsilon_t=\frac{e_t^d-e_t^s}{\sqrt{\mathrm{Var}(e_t^d-e_t^s)}}\sim\text{i.i.d.}$$

である．ここでは簡単化のため，ε_t と p_{t-1} とは互いに独立であると仮定する．ところで，式(2.10)で表される時系列モデルは Tong (1983) による Threshold AR モデルに形がよく似ているが，同時点の値にも依存してスイッチングが起こっている．通常の時系列モデルと比べるとこの点には不自然な感じが残る（例えばこのモデルに従うデータをシミュレートしようとする時など）．これに注意すると，すべての p_{t-1}, ε_t に対して一意に p_t が決定されなければならない事が分かる．(2.10)より，

$$\begin{aligned}\Delta p_t\geq 0 &\Longrightarrow ap_{t-1}+\sigma_a\varepsilon_t-p_{t-1}\geq 0\\ &\Longleftrightarrow \varepsilon_t\geq\frac{1-a}{\sigma_a}p_{t-1}\\ \Delta p_t<0 &\Longrightarrow bp_{t-1}+\sigma_b\varepsilon_t-p_{t-1}<0\\ &\Longleftrightarrow \varepsilon_t<\frac{1-b}{\sigma_b}p_{t-1}\end{aligned}$$

である．一意に p_t が決定されるにはすべての p_{t-1} に対して，

$$\frac{1-a}{\sigma_a}p_{t-1}=\frac{1-b}{\sigma_b}p_{t-1}$$

が成り立てば十分である．したがって，整合条件は

(2.14) $$\frac{1-a}{\sigma_a}=\frac{1-b}{\sigma_b}=r$$

となる．

なお，式(2.11)，式(2.12)は上式を満たしている．よって，(2.4)～(2.8)で表せる市場の価格モデルは

(2.15) $$p_t=\begin{cases}ap_{t-1}+\sigma_a\varepsilon_t & (\Delta p_t\geq 0)\\ bp_{t-1}+\sigma_b\varepsilon_t & (\Delta p_t<0)\end{cases}$$
$$\frac{1-a}{\sigma_a}=\frac{1-b}{\sigma_b}=r$$

となる．また係数条件は $\alpha<\beta$ を仮定すると

(2.16) $$0<a,\ b<1,\qquad 0<\sigma_a,\sigma_b$$

となる．次に，調整モデル(2.8)の代わりに次のようなモデルを仮定してみる．

(2.17) $$p_{t+1}-p_t=\begin{cases}\gamma_1(D_t-S_t) & (D_t\geq S_t)\\ \gamma_2(D_t-S_t) & (D_t<S_t)\end{cases}$$

(2.8)式では q_t, p_t のどちらが先に決まるか不明である（実は同時に決まっていると解釈しているのである）．これに対して(2.17)では明らかに $p_t\to q_t\to p_{t+1}$ という順序で決定されていることが分かる．先ほどと同じようにすると，

(2.18)
$$p_t=\begin{cases} ap_{t-1}+\sigma_a\varepsilon_t & (\Delta p_t\geq 0) \\ bp_{t-1}+\sigma_b\varepsilon_t & (\Delta p_t<0) \end{cases}$$

ただし，

(2.19)
$$a=1-\gamma_1(\beta-\alpha),\qquad b=1-\gamma_2(\beta-\alpha),$$

(2.20)
$$\sigma_a=\gamma_1\sqrt{\mathrm{Var}(e^d_{t-1}-e^s_{t-1})},\qquad \sigma_b=\gamma_2\sqrt{\mathrm{Var}(e^d_{t-1}-e^s_{t-1})},$$

(2.21)
$$\varepsilon_t=\frac{e^d_{t-1}-e^s_{t-1}}{\sqrt{\mathrm{Var}(e^d_{t-1}-e^s_{t-1})}}\sim\text{i.i.d.}$$

となる．

この時も，ε_t と p_{t-1} が独立ならば，一意性の条件

(2.22)
$$\frac{1-a}{\sigma_a}=\frac{1-b}{\sigma_b}=r$$

が成り立っている．従って，(2.15)と同じモデルになる．また，係数条件は $\alpha<\beta$ を仮定すると

(2.23)
$$a<1,\quad b<1,\quad 0<\sigma_a,\sigma_b$$

と表せる．ここで述べた2つのモデルは同じ式で表せるが，係数のとりうる範囲が違っている．どちらのタイプの調整モデルが妥当であるかデータから推定することはできない．マーケットの構造から決定する以外に方法はない．本論では係数の条件がより緩い(2.17)のモデルを前提に議論を進める．

3. SSAR model の性質

前節で導出したモデルに定数項を加えたモデル，

(3.1)
$$y_t=\begin{cases} \mu_a+ay_{t-1}+\sigma_a\varepsilon_t & (\Delta y_t\geq 0) \\ \mu_b+by_{t-1}+\sigma_b\varepsilon_t & (\Delta y_t<0) \end{cases}$$

を新しい時系列モデルとして捉えてみることとし，このモデルを SSAR モデル(Simultaneously Switching AutoRegressive model)と呼ぶことにする．SSAR モデルは非対称性に関して AR モデルを拡張したモデルと考えることができる．このモデルには(2.14)の様な整合条件が必要である．無条件では SSAR モデルは意味をなさない．ここでは前節と同じように y_{t-1} と ε_t とが独立であるとし以下のような整合条件を仮定する．

(3.2)
$$\frac{\mu_a}{\sigma_a}=\frac{\mu_b}{\sigma_b}=r_\mu,\qquad \frac{1-a}{\sigma_a}=\frac{1-b}{\sigma_b}=r$$

このとき(3.1)式の SSAR モデルは

(3.3)
$$y_t=\begin{cases} \mu_a+ay_{t-1}+\sigma_a\varepsilon_t & (\varepsilon_t\geq ry_{t-1}-r_\mu) \\ \mu_b+by_{t-1}+\sigma_b\varepsilon_t & (\varepsilon_t<ry_{t-1}-r_\mu) \end{cases}$$

と書き直すことができ，マルコフ型の時系列モデルになる．なお，y_{t-1} と ε_t との独立性を外すことによってこれ以外の整合条件を考えることもできるがあまり一般的でない．Fig. 1 は乱数を用いて求めた SSAR の sample path の例である．この図からも SSAR の系列が持つ非対称

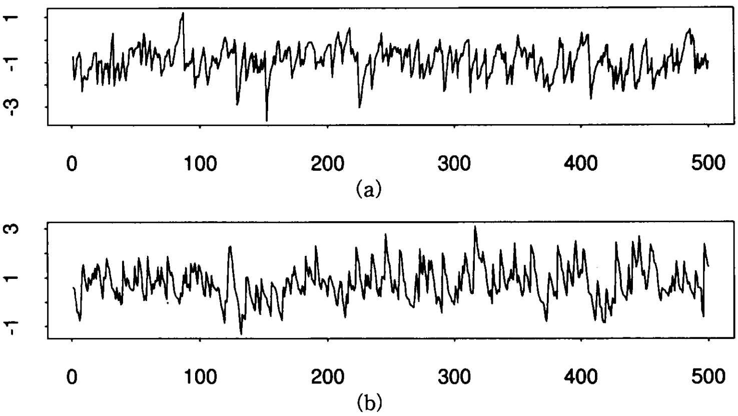

Fig. 1.　SSAR の sample path.（a）$a=0.8, b=0.2, \sigma_a=0.25, \sigma_b=1$.　(b）$a=0.2, b=0.8, \sigma_a=1, \sigma_b=0.25$.

性が分かる．また，Kunitomo and Sato (1994)，国友・佐藤（1994）ではより一般的な多次元SSAR モデルも提案されているが，ここでは扱わない．

次に SSAR モデルの理論的性質についてまとめておく（これらの導出に関しては Kunitomo and Sato（1994）を参照）．$\{y_t\}$ が(3.1)で表される SSAR モデルに従うとする．ただし，簡単化のため $\mu_a=\mu_b=0$ としてあるが，本質的には変わらない．

1）y_t の密度関数

時刻 t における y_t の密度関数を $f_t(x)$ と表すと，$f_t(x)$ $(t\geq 1)$ は逐次的に次の式を満たさなければならない．

(3.4)
$$f_t(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sigma_a}\phi\left(\frac{x-ay}{\sigma_a}\right)f_{t-1}(y)dy+\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sigma_b}\phi\left(\frac{x-by}{\sigma_b}\right)f_{t-1}(y)dy$$

2）y_t の条件付期待値

(3.5)
$$E(y_t\,|\,y_{t-1})=\{\pi_t a+(1-\pi_t)b\}y_{t-1}+(\sigma_a-\sigma_b)\phi(ry_{t-1})$$

(3.6)
$$\pi_t=P(\varDelta y_t\geq 0\,|\,y_{t-1})=1-\Phi(ry_{t-1})$$

と書ける．

ただし，$\phi(x), \Phi(x)$ は撹乱項 ε_t の密度関数，分布関数を表す．

Fig. 2 は(3.5)式を ε_t に標準正規分布を仮定して数値的に求めていったものである．この場合は $t\to+\infty$ の時に，ある密度関数に収束しているように見える．その分布はおそらく定常の分布に対する密度関数であり，正規分布とは異なり左右非対称になっている様である．

3）定常条件

SSAR モデルの定常条件は以下の定理にまとめられる．

定理 1. (3.1)式で表される SSAR モデルが以下の仮定を満たすとする．なお，$g(x)$ は $\{\varepsilon_t\}$ の密度関数を表す．

(a) 整合条件(2.14)を満たす

(b) $\forall x$ に対して $g(x)>0$

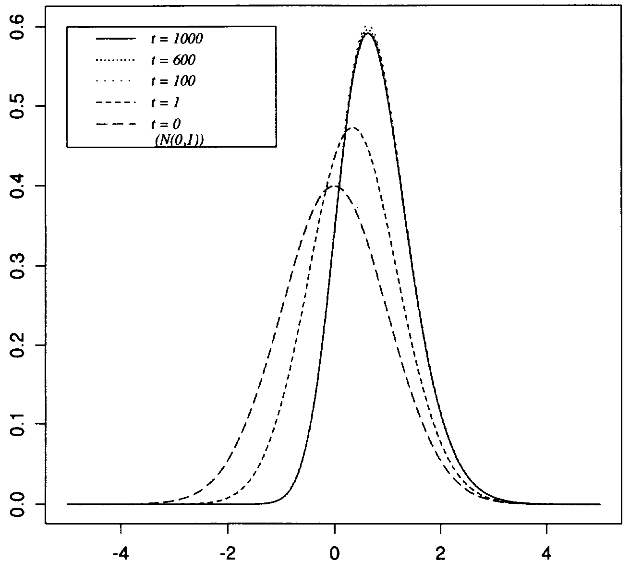

Fig. 2. $f_t(x)$ ($a=0.2, b=0.8, \sigma_a=1, \sigma_b=0.25$).

(c) $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 g(x)=0$

(d) $E[|\varepsilon_t|]<+\infty$

このとき SSAR モデルが強定常になる必要十分条件は

$$a<1, \quad b<1, \quad ab<1 \tag{3.7}$$

である.

この定常条件は以下のような TAR (Threshold AR) モデル (Tong (1983)) の定常条件と同じである.

$$y_t=\begin{cases} ay_{t-1}+\varepsilon_t & (y_{t-1}\geq 0) \\ by_{t-1}+\varepsilon_t & (y_{t-1}<0) \end{cases} \tag{3.8}$$

TAR モデルと SSAR モデルの間にはいろいろな共通点が見られる. TAR モデルは理論的な研究が進んでいるため, この成果を SSAR モデルにも応用できるケースが多いと考えられる.

定理1で示した定常条件は非常に興味深いケースが含まれている. たとえば, $0<a<1$ とすれば, $b<-1$ の場合でも定常系列となる. このような例は極端であるが, 線形モデルにはない性質と言える.

4. 統計的推測

観測値 $\{X_t\}$ が与えられた時のパラメータ推定と検定について述べる. ここで取り上げるのは尤度に基づく方法であるので, (3.1) の ε_t の分布に関する仮定が必要になる. 本論では, すべて標準正規分布であるとする.

ΔX_t の正負についての情報を次のように表す.

(4.1)
$$I_t=\{s_t,\ s_{t-1},\ s_{t-2},\dots\}$$

ただし，

$$s_i=\begin{cases} 1 & \Delta X_i\geq 0 \\ -1 & \Delta X_i<0 \end{cases}$$

この情報に基づいた，条件付尤度を考える．

(4.2)
$$A=\{i\,|\,s_i=1\},\quad B=\{i\,|\,s_i=-1\}$$

とする時，

(4.3)
$$L(X_N,\ X_{N-1},\dots|\,I_N)=\prod_{t\in A}\frac{1}{\sigma_a}\phi\left(\frac{X_t-\mu_a-aX_{t-1}}{\sigma_a}\right)\cdot\prod_{t\in B}\frac{1}{\sigma_b}\phi\left(\frac{X_t-\mu_b-bX_{t-1}}{\sigma_b}\right)$$

ただし，$\phi(x)$ は $N(0,1)$ の密度関数である．

したがって，

(4.4)
$$\frac{\mu_a}{\sigma_a}=\frac{\mu_b}{\sigma_b},\qquad \frac{1-a}{\sigma_a}=\frac{1-b}{\sigma_b}$$

という制約条件の下で尤度関数(4.3)を最大にするような $\mu_a, \mu_b, a, b, \sigma_a, \sigma_b$ を求めれば良い．しかしながら，これを解析的に解くのは困難が伴うので，数値的非線形最適化に頼らざるをえない．この最尤推定量の性質については Sato and Kunitomo (1994) が詳しく調べている．例えば，漸近正規性が成り立つ事も証明されている．

次に SSAR モデルのあてはまりの良さを検定する方法を提案する．SSAR モデルで $a=b(\Longleftrightarrow\ \sigma_a=\sigma_b)$ とすると AR(1) になる．そこで，AR(1) モデルとの比較をすることで非対称性が存在しているかを調べることができる．

1. AIC を用いる方法
   → AR(1) と SSAR に対する AIC を求め，比較する（パラメータ数の差は 1 である）．
2. 尤度比検定で行う方法
   →

(4.5)
$$-2\log\frac{\max L(a,b\,|\,a=b)}{\max L(a,b)}$$

が漸近的に $\chi^2(1)$ に従うことを用いる．

上記で示した方法はいずれも尤度に基づく方法であった．したがって，撹乱項 ε_t の分布形に依存してしまう．間違った分布の仮定をした場合，それが結果に影響を与えてしまう可能性が高いことが，シミュレーション等で分かっている．

5. 非定常 SSAR モデル

前節までは，(2.1)，(2.2)式の外生変数が互いに独立と仮定してきた．その結果として定常な SSAR モデルを導出できたのであった．しかしながら現実の経済時系列が非定常性を強く示していることも少なくない．こうした場合ではこの仮定はそぐわないと言えよう．そこで，本節

では非定常時系列に対するSSARモデルを考えてみる．まず，よく行われている方法として階差をとった系列を考え，これに定常モデルを適用するという方法が考えられる．しかしながら，元の系列の上昇，下降というフェイズの分け方と階差系列の上昇，下降ではまるで意味が異なる．このような方法が想定される場合としてはGDPなど，成長率の方が重要である場合だと思われる．

もうひとつの考え方として，原系列の上昇，下降というフェイズの分け方を採用しつつ，和分過程を含むようなモデルが考えられる．このモデルは不均衡市場モデルにおける(2.1)，(2.2)式の外生変数がランダムウオークにしたがっているモデルに相当している．確かに，この場合 p_t は非定常な動きをしていることになる．

Demand:

$$D_t = w_{t-1}^d + \alpha p_t + e_t^d \qquad (5.1)$$
$$\Delta w_t^d = e_t^d$$

Supply:

$$S_t = w_{t-1}^s + \beta p_t + e_t^s \qquad (5.2)$$
$$\Delta w_t^s = e_t^s$$

$$e_t^d \sim \text{i.i.d.}, \qquad e_t^s \sim \text{i.i.d.} \qquad (5.3)$$

また，$\{e_t^d\}$ と $\{e_t^s\}$ とは独立で，e_t^d, e_t^s と $p_{t-i}(i \geq 1)$ とも独立であるとする．

この場合も同じようにして，

$$p_t = \begin{cases} a p_{t-1} + \sigma_a \eta_t & (\Delta p_t \geq 0) \\ b p_{t-1} + \sigma_b \eta_t & (\Delta p_t < 0) \end{cases} \qquad (5.4)$$

$$\Delta \eta_t = \varepsilon_t \qquad (\varepsilon_t \sim \text{i.i.d.}) \qquad (5.5)$$

と書き直せる．(5.4)式の整合条件は，ε_t と η_{t-1}, p_{t-1} とが独立であることより，

$$\frac{1-a}{\sigma_a} = \frac{1-b}{\sigma_b} = r_1 \qquad (5.6)$$

となる．

このモデルはKunitomo and Sato (1995) において提案され，SSIARモデルと呼んでいる．現実の価格系列が非定常的な動きをしている時に適用されるモデルである．上記のモデルは1階のランダムウオークを採用しているが，高階のランダムウオークやドリフト付きランダムウオークに拡張することもできる．前に述べたようにSSIARモデルは単なる階差モデルとは異なり，非定常性を生み出すメカニズムにも非線形性が入っているモデルである．したがって，SSIARモデルに従う系列に階差を施しても定常SSARモデルにはならない．SSIARモデルの階差系列は

$$\Delta p_t = \begin{cases} a \Delta p_{t-1} + \sigma_a \Delta u_t & (\text{if } \Delta p_{t-1} \geq 0, \Delta p_t \geq 0) \\ \left(\dfrac{\sigma_a}{\sigma_b}\right) b \Delta p_{t-1} + \sigma_a \Delta u_t & (\text{if } \Delta p_{t-1} < 0, \Delta p_t \geq 0) \\ \left(\dfrac{\sigma_b}{\sigma_a}\right) a \Delta p_{t-1} + \sigma_b \Delta u_t & (\text{if } \Delta p_{t-1} \geq 0, \Delta p_t < 0) \\ b \Delta p_{t-1} + \sigma_b \Delta u_t & (\text{if } \Delta p_{t-1} < 0, \Delta p_t < 0) \end{cases} \qquad (5.7)$$

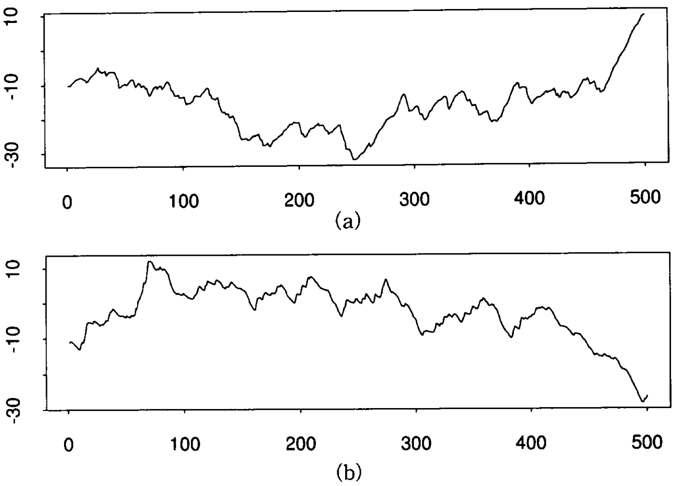

Fig. 3. SSIAR の sample path. (a) $a=0.8, b=0.2, \sigma_a=0.25, \sigma_b=1$. (b) $a=0.2, b=0.8, \sigma_a=1, \sigma_b=0.25$.

と表せる．なお，$\{\varDelta p_t\}$ の定常条件に関しては定理 1 と同様な必要十分条件が Kunitomo and Sato (1995) で証明されている．

Fig. 3 は SSIAR の sample path の例を描いたものである．非定常的な動きと非対称的な挙動をしている事が分かる．

このモデルはいろいろな経済データに適用可能だが，たとえば，ある時期の日本の GNP データの様に右肩上がりのデータに対してあてはめても意味がないので注意が必要である（$\varDelta p_t \geq 0$ の局面しか推定できない）．

6. 実 証 例

これまで述べてきた SSAR モデルを現実の価格データに適用してみる．ここで用いたデータは日本の貸出約定平均金利である．サンプル期間は 1965 年 1 月から 1984 年 12 月であり，サンプル数は 240 である．このデータをプロットしたのが Fig. 4 である．この期間の貸出市場については均衡的であるか不均衡的であるかを検証したいくつかの研究があり（伊藤(1985)，浅子・内野 (1988) など)，不均衡的であるという指摘がなされた．ここでは不均衡であると仮定し，SSAR モデルを適用して，価格の非対称性を調べてみる．まず，定常 SSAR モデルを原系列に適用してみたが，a, b ともに 1 にきわめて近くなり，非定常性が認められた．そこで，対数をとった系列に SSIAR をあてはめてみた結果が Table 1 である．χ^2 の値を見ると線形モデルより SSIAR モデルの方があてはまりが良い事が分かる．この結果，日本の貸出市場には非対称な調

Fig. 4. 日本の貸出約定平均金利（1965 年 1 月～1984 年 12 月）．

Table 1. 推定結果.

	a	b	σ_a	σ_b	AIC	χ^2
IAR	0.8824	0.8824	0.0060	0.0060	−1758.97	—
$SSIAR$	0.8440	0.9106	0.0080	0.0045	−1793.92	36.95

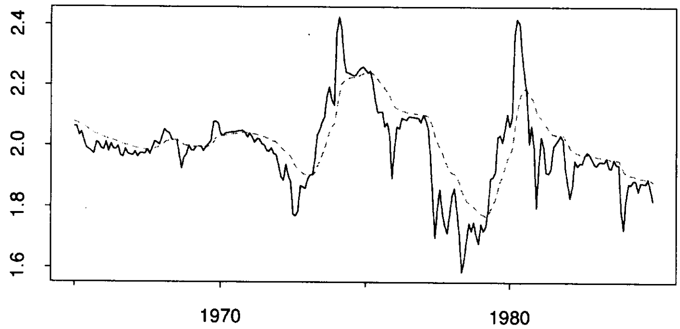

Fig. 5. 推定された均衡値（実線）と実際の系列（破線）.

整過程が存在していると思われる．この場合，$a<b, \sigma_a>\sigma_b$ であるから，上昇局面に比べ下降局面の時の方が緩やかに変化しているといえる．また，(5.1)，(5.2) で表される市場の均衡値 p_t^* は次のようにして求められる．

$$p_t^* = \frac{1}{\beta-\alpha}(w_t^d - w_t^s) \\ = \frac{1}{r}\varepsilon_t \tag{6.1}$$

この値をプロットしたものが Fig. 5 である（ただし，対数をとった値で表されている）．これを見ると，推定された均衡値は観測値とかなり乖離しておりその不均衡的な様子がよく分かる．ここで得られた結果は，ほぼ伊藤（1985），浅子・内野（1988）らの結果と同じである．特に後者の結果では，複数の外生変数を取り入れたモデルを用いて，均衡値を推定しているが，本論で得られた図にかなり近いものとなっている．

7. ま と め

ここでは，同時転換回帰モデル（SSAR モデル）に関して簡単な解説を行った．ここで紹介したのは一番簡単なケースのみであったが，いろいろな拡張が可能である．しかしながら，非線形モデルゆえの困難さがあり，その性質を調べるのは容易ではない（例えば，多次元 SSAR モデルの定常条件はまだよく分かっていない）．今後の研究に期待される．

また SSAR モデルの導出にあたりここでは不均衡計量モデルを出発点としたが，他の考え方からも導出可能である（例えば Kunitomo and Sato (1995)）．今後は経済分野のみならず，他の分野での応用も予想される．

謝 辞

レフェリーの方から有益かつ適切なコメントをいただきました．この場を借りて感謝いたします．

参 考 文 献

浅子和美，内野裕子 (1988)．日本の銀行貸出市場——不均衡分析の新しい視点，金融研究，**6**(1)，61-98.

Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of UK inflation, *Econometrica*, **50**, 355-376.

Fair, R. C. and Jaffee, D. M. (1972). Methods of estimation for markets in disequilibrium, *Econometrica*, **40**, 497-514.

Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle, *Econometrica*, **57**, 357-384.

伊藤隆敏 (1985)．『不均衡の経済分析——理論と実証』，東洋経済新報社，東京.

国友直人，佐藤整尚 (1994)．経済時系列における非線形性と不均衡計量経済モデル，数理統計学の理論と応用 (竹内 啓・竹村彰通 編)，東大出版会，東京.

Kunitomo, N. and Sato, S. (1994). Asymmetry in economic time series and simultaneous switching autoregressive model, Discussion Paper, No. 94-F-9, Faculty of Economics, University of Tokyo ((1996). *Structural Change and Economic Dynamics*, **7**, 1-34).

Kunitomo, N. and Sato, S. (1995). A stationary and non-stationary simultaneous switching autoregressive model with an application to financial time series, Discussion Paper, No. 95-F-13, Faculty of Economics, University of Tokyo.

Laffont, J. J. and Garcia, R. (1977). Disequilibrium econometrics for business loans, *Econometrica*, **45**, 1187-1204.

Neftici, S. (1984). Are economic time series asymmetric over the business cycle?, *Journal of Political Economy*, **92**, 307-328.

Sato, S. and Kunitomo, N. (1994). Some properties of the maximum likelihood estimator in simultaneous switching autoregressive model, Discussion Paper, No. 94-F-22, Faculty of Economics, University of Tokyo ((1996). *J. Time Ser. Anal.*, **17**, 287-307).

Tong, H. (1983). Threshold models in non-linear time series analysis, *Lecture Notes in Statist.*, **21**, Springer, Heidelberg.

Analizing Asymmetry in Economic Time Series by Using SSAR Model

Seisho Sato

(The Institute of Statistical Mathematics)

Asymmetric movement between the down-ward phase and the up-ward phase is a frequently observed features of economic time series. Since this feature cannot be described by the standard ARMA time series model, we discuss a new class of the Simultaneous Switching AutoRegressive (SSAR) model, which was introduced by Kunitomo and Sato (1994). We also discuss the problem of stationary distributions and estimation methods. Finally we give a simple empirical example of Japanese loan market in the context of a disequilibrium econometric model.

Key words: Asymmetry, non-linear time series, simultaneous switching autoregressive model, disequilibrium econometric model, non-stationary time series.