

Connected- X -out-of- (m, n) : F システムの信頼度

帝京科学大学* 山 本 久 志

(1996年1月 受付)

1. はじめに

今日、情報通信網、原子力発電所やジャンボ旅客機等、システムは大規模化、複雑化している。そのため、システムとしての信頼性評価方法が、システム開発、設計、製造、試験、運用の各段階で以前にも増して重要となってきた。システムを構成する部品や機器をコンポーネントと呼ぶことにすると、各コンポーネントの信頼度とシステム全体の信頼度の関係の理論的な考察は、1960年代より盛んに行われている。その基本的な部分が Barlow and Proschan (1981) にまとめられている。

n 個のコンポーネントが直線状に配置されているシステムを考え、少なくとも k 個の連続するコンポーネントが故障している時かつ、その時のみシステムが故障となるようなシステムは linear consecutive- k -out-of- n : F システムと呼ばれる。また、linear consecutive- k -out-of- n : F システムのはじめのコンポーネントとおわりのコンポーネントをつなげたシステムを、circular consecutive- k -out-of- n : F システムと呼ぶ。この二つのシステムを併せて consecutive- k -out-of- n : F システムという。これらのシステムは、 k -out-of- n システムの特殊な場合と考える事ができる。このシステムの応用例として、通信システム、オイルパイプライン他がある。consecutive- k -out-of- n : F システムに関しては、*IEEE Transactions on Reliability* を中心に数多くの論文が発表され、最近では、本システムやその周辺のシステムに関する調査論文も発表されている。例えば、Papastavridis and Koutras (1993)、平野 (1994)、Chao et al. (1995) そして Malinowski and Preuss (1995) がある。

本論文では、consecutive- k -out-of- n : F システムを2次元に拡張したシステムを考える。2次元に拡張したシステムを最初に提案したのは、Salvia and Lasher (1990) である。 n 行、 n 列の格子点上に配置された合計 n^2 個のコンポーネントから成るシステムで、連続した k 行と k 列の共通部分の k^2 個のコンポーネントが全て故障する時、システムが故障する。Boehme et al. (1992) は、これを拡張したシステムを提案した。 m 行、 n 列の格子点上に配置された合計 mn 個のコンポーネントから成るシステムで、 r 行と s 列からなる長方形内のコンポーネントが全て故障する時、システムが故障する。このシステムは、linear connected- (r, s) -out-of- (m, n) : F システムと呼ばれる。Salvia and Lasher (1990) が提案したシステムは、linear connected- (k, k) -out-of- (n, n) : F システムということになる。これらのシステムは、電子部品のコネクタのモデル、病的異変の発見モデル (Salvia and Lasher (1990)) や大ホールの照明システム (Boehme et al. (1992)) に適用される。Boehme et al. (1992) はコンポーネントが各円に m 個、その円が n 個あるシステムについても同様に論じており、このシステムは circular connected- (r, s) -out-of- (m, n) : F システムと呼ばれる。さらに、Boehme et al. (1992) は、システムが故障する条件をさらに一般化したシステムを提案している。システムの構成は同じく、 m 行、 n 列の格子点上に配置された合計 mn 個のコンポーネントから成っているが、シス

* 理工学部：〒409-01 山梨県北都留郡上野原町八ッ沢 2525。

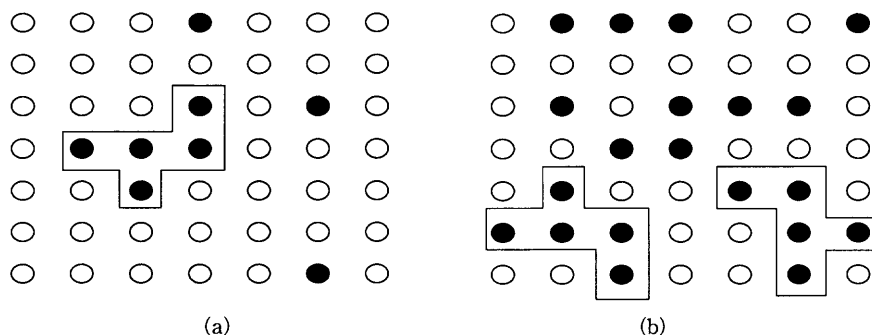


図1. linear connected- X_1 -out-of-(7,7):Fシステム。(a) システム故障, (b) システム正常。

テムが故障する条件を, 長方形ではなく任意の形状を許している。例えば, 図1(a)に示す形状を構成するようにコンポーネントが故障するとシステムが故障する。この場合形状が, 例えば90度回転した形状や反転した形状を示すようにコンポーネントが故障したとしても, システムは故障しないと定義している(図1(b))。図1(a)の形状を X_1 と名付けることにすると, このシステムは, linear connected- X_1 -out-of-(m, n):Fシステムと呼ばれる。Boehme et al. (1992)は, さらに, システム故障を示す形状を一つではなく複数を許している。故障条件が, “ r_1 行と s_1 列からなる長方形内のコンポーネントが全て故障するか, または, r_2 行と s_2 列からなる長方形内のコンポーネントが全て故障する”であるシステムは linear connected-(r_1, s_1)-or-(r_2, s_2)-out-of-(m, n):Fシステムと呼ばれる。

各コンポーネントの信頼度が独立であるが, その信頼度がかならずしも同一でない場合に, Yamamoto and Miyakawa (1995, 1996)が, (linear or circular)connected-(r, s)-out-of-(m, n):Fシステムの信頼度を, Yamamoto (1996)が (linear or circular)connected-(r_1, s_1)-or-(r_2, s_2)-...-or-(r_k, s_k)-out-of-(m, n):Fシステムの信頼度を, それぞれ求める漸化式を与えている。

Boehme et al. (1992)は, 以上のシステムを総称して, connected- X -out-of-(m, n):Fシステムと呼んでいる。本論文では, システム故障となる形状 X をシステムの故障パターンと呼ぶことにする。Salvia and Lasher (1990)が示した病的異変のモデルでは, 故障パターンが長方形であるシステムは近似であると述べており, linear connected- X -out-of-(m, n):Fシステムが実用に近いモデルであると思われる。

本論文では, (linear or circular)connected- X -out-of-(m, n):Fシステムのシステム信頼度の上下限值および極限定理を与える事が目的である。本論文で述べる極限定理とは, 次の事を意味する。例えば, 同一な故障確率 q を持つ n 個のコンポーネントからなる直列システムを考える。 q をコンポーネントの数 n の減少関数とし,

$$(1.1) \quad q_n = \frac{\lambda}{n}$$

ならば, n を大きくしていくとシステムの信頼度は $e^{-\lambda}$ に収束し, これより遅く q_n を0に近づけるとシステム信頼度は0に収束し, 速く0に近づけると1に収束する。すなわち, q_n が(1.1)式を満たす速さで0に近づく時以外は, システム信頼度は0または1の値に収束する。この事を利用し, 簡略な計算で大規模なシステムの信頼度の近似値を求める事ができる。

(linear or circular)connected-(r, s)-out-of-(m, n):Fシステムの上下限值については, Fu and Koutras (1994), Malinowski and Preuss (1995)やYamamoto and Miyakawa (1995, 1996)が提案している。また, (linear or circular)connected-(r, s)-out-of-(m, n):Fシステムに関する極限定理は, Fu and Koutras (1994)とYamamoto and Miyakawa (1995, 1996)が

与えている (Fu and Koutras (1994) の方がより弱い条件の下で成立することを示している)。しかし、より一般的な故障パターンを有する (linear or circular)connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムに関する上下限値や極限定理は、まだ与えられていない。

2章において、Fu and Koutras (1994) の考えを拡張して、(linear or circular)connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムの上下限値を提案する。そして、いくつかのシステムを取り上げ、その上下限値の数値例を与える。3章では、(linear or circular)connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムに関する極限定理を与える。最後に、4章において本論文のまとめを行う。

本論文を通して、

- A. 各コンポーネントとシステムの状態は正常と故障の2状態
- B. 各コンポーネントは独立に故障

を仮定する。また、本論文を通して共通に用いられる記号を次に与える。

(i, j) ; 行 i , 列 j (円 i , 放射 j) に配置されたコンポーネントを表す。

X_{ij} ; コンポーネント (i, j) が正常である時1, 故障している時は0となる確率変数を表す。

但し, linear の場合には, “ $0 < i < m+1$ かつ $0 < j < n+1$ ” 以外の i と j に対して $X_{ij} = 1$, circular の場合は, “ $0 < i < m+1$ ” 以外の i に対して $X_{ij} = 1, j > n$ なる j に対して $X_{ij} = X_{i, j-n}$ とする。

q_{ij}, p_{ij} ; コンポーネント (i, j) の故障確率, 信頼度。すなわち, $\Pr\{X_{ij}=1\}=p_{ij}, \Pr\{X_{ij}=0\}=q_{ij}$ である。

Q ; $q_{ij}(i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n)$ を要素とする行列 (q_{ij}) を表す。

$R^{\phi}[X, (m, n); Q]$; connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムの信頼度を表す。 $\phi=L$ の時は linear の場合を, $\phi=C$ の時は circular の場合を表す。

$R^q[X, (m, n); q]$; 各コンポーネントの故障確率が同一の時 (q とする) の connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムの信頼度を表す。 $\phi=L$ の時は linear の場合を, $\phi=C$ の時は circular の場合を表す。

2. 上下限値

本章では、(linear or circular)connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムの上下限値を提案する。

2.1 定理

$\theta=1, 2, \dots, k$ に対して, X_{θ} を一つの連結された故障パターンとし, 故障パターン X を X_1 または X_2 または X_3 または $\dots$ または X_k とする。一般性を失うことなく, ある故障パターンが別の故障パターンを含むことはないを仮定する。表記上簡略化するために, 上記故障パターン X を $\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}$ と表す。

図2に示すように, $\theta=1, 2, \dots, k$ に対して, r_{θ} を故障パターン X_{θ} を囲む最小の長方形の行数, s_{θ} を故障パターン X_{θ} を囲む最小の長方形の列数とする。また, $r_{\max} = \max_{1 \leq \theta \leq k} (r_{\theta}), s_{\max} = \max_{1 \leq \theta \leq k} (s_{\theta}), r_{\min} = \min_{1 \leq \theta \leq k} (r_{\theta}), s_{\min} = \min_{1 \leq \theta \leq k} (s_{\theta})$ とする。そして, $i=1, 2, \dots, m-r_{\min}+1$ 及び $j=1, 2, \dots, n-s_{\min}+1$ に対して, $\tau=i+(j-1)(m-r_{\min}+1)$ とし, $\gamma_{\theta\tau}$ を, コンポーネント (i, j) を左上の頂点とする大きさ $r_{\theta} \times s_{\theta}$ の長方形内に入る故障パターン X_{θ} が生起する時0, 生起しない時1となる確率変数とする。ここで, τ は, (i, j) と1対1対応であり, 本来は $\tau(i, j)$ と表記すべきで

あるが、数式の表記が煩雑になるので、以降 τ と表記する。事象 B_τ をコンポーネント (i, j) を左上の頂点とする大きさ $r_{\max} \times s_{\max}$ の長方形の上辺及び左辺に隣接して位置するコンポーネントが全て生起する事象とする。すなわち、

$$(2.1) \quad B_\tau = \left\{ \left(\prod_{\mu=j}^{j+s_{\max}-1} X_{i-1, \mu} \right) \left(\prod_{\nu=i}^{i+r_{\max}-1} X_{\nu, j-1} \right) = 1 \right\}$$

とする。但し、 $i=1, 2, \dots, m-r_{\min}+1$ 及び $j=1, 2, \dots, n-s_{\min}+1$ に対して、 $\tau=i+(j-1)(m-r_{\min}+1)$ である。

定理 1.

(1) linear の場合

$$(2.2) \quad \prod_{i=1}^{m-r_{\min}+1} \prod_{j=1}^{n-s_{\min}+1} \prod_{\theta=1}^k [1 - \Pr\{\gamma_{\theta\tau}=0\}] \leq R^L \left[\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}, (m, n); Q \right] \\ \leq \prod_{i=1}^{m-r_{\min}+1} \prod_{j=1}^{n-s_{\min}+1} \left[1 - \Pr\{B_\tau\} \Pr\left\{ \bigcup_{\theta=1}^k \{\gamma_{\theta\tau}=0\} \right\} \right]$$

(2) circular の場合

$$(2.3) \quad \prod_{i=1}^{m-r_{\min}+1} \prod_{j=1}^n \prod_{\theta=1}^k [1 - \Pr\{\gamma_{\theta\tau}=0\}] \leq R^c \left[\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}, (m, n); Q \right] \\ \leq \prod_{i=1}^{m-r_{\min}+1} \prod_{j=1}^{n-s_{\min}+1} \left[1 - \Pr\{B_\tau\} \Pr\left\{ \bigcup_{\theta=1}^k \{\gamma_{\theta\tau}=0\} \right\} \right]$$

証明. 下限値については、確率変数 $\gamma_{\theta\tau}$ が associated な関係であるのは明らかであるので、Barlow and Proschan ((1981), p. 32) の定理 3.1 により成立する。 $k=2$ の時の linear の場合の上限値の証明を以下に示す。

事象 A_τ を、 $A_\tau = \{\gamma_{1\tau}=0\} \cup \{\gamma_{2\tau}=0\}$ とする。ここで、 $r_1 > r_2$ 及び $s_2 > s_1$ と仮定し、 $i=1, 2, \dots$,

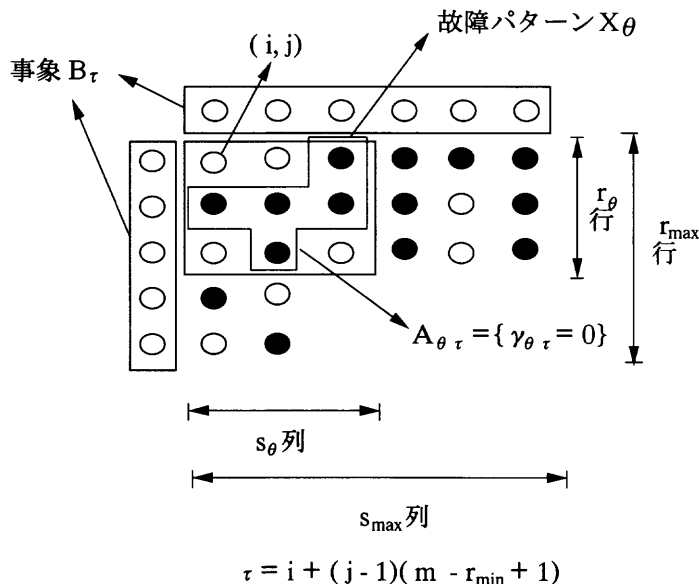


図 2. $\text{connected-}\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}\text{-out-of-}(m, n)$: F システムの上下限値の導出時における確率変数 $\gamma_{\theta\tau}$ 及び事象 $A_{\theta\tau}$ と B_τ について。

$m-r_2+1$ 及び $j=1, 2, \dots, n-s_1+1$ に対して, $\tau=i+(j-1)(m-r_2+1)$ である.

Fu and Koutras (1994) と同様に, して,

$$R^L[X_1 \text{ or } X_2, (m, n); Q] = (1 - \Pr\{A_1\})^{(m-r_2+1)(n-s_1+1)} \prod_{\tau=2}^{\tau-1} \left(1 - \Pr\left\{A_\tau \left| \bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c \right.\right\}\right)$$

が成立する. 但し, 事象 A_τ^c は事象 A_τ が生起しない事象を表す. また, 事象 A_τ と事象 $B_\tau \cap \left(\bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right)$ は独立, そして $\Pr\left\{B_\tau \left| \bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right.\right\} \geq \Pr\{B_\tau\}$ であることから,

$$\begin{aligned} \Pr\left\{A_\tau \left| \bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right.\right\} &\geq \Pr\left\{A_\tau \cap B_\tau \left| \bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right.\right\} \\ &= \Pr\left\{A_\tau \left| B_\tau \cap \left(\bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right)\right.\right\} \Pr\left\{B_\tau \left| \bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right.\right\} \\ &\geq \Pr\{A_\tau\} \Pr\{B_\tau\} \end{aligned}$$

が成立する. よって, 以上のことより $R^L[X, (m, n); Q] \leq \prod_{\tau=1}^{(m-r+1)(n-s+1)} (1 - \Pr\{A_\tau\} \Pr\{B_\tau\})$ が成立する. $k > 2$ の場合も同様に示すことができる. circular の場合の上限値は, $R^c[X, (m, n); Q] \leq R^L[X, (m, n); Q]$ より成立する. $\square$

任意の故障パターン X を持つ connected- X -out-of- (m, n) : Fシステムの信頼度の上限値を得るために, 事象 B_τ を(2.1)式で定義したが, 故障パターンが決定していれば, 事象 A_τ と事象 $B_\tau \cap \left(\bigcap_{\theta=1}^{\tau-1} A_\theta^c\right)$ が独立で, かつ B_τ を構成するコンポーネント数が最小になるように事象 B_τ を選べば, より望ましい上限値が求められる. 例えば, connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of- (m, n) : Fシステムの信頼度の上限値を考える場合は, B_τ を図3に示すように, すなわち,

$$B_\tau = \{X_{i-1,j} X_{i,j+2} X_{i+1,j-1} X_{i+2,j-1} = 1\}$$

と定義した方が(2.1)式で定義するより望ましい上限値が得られる.

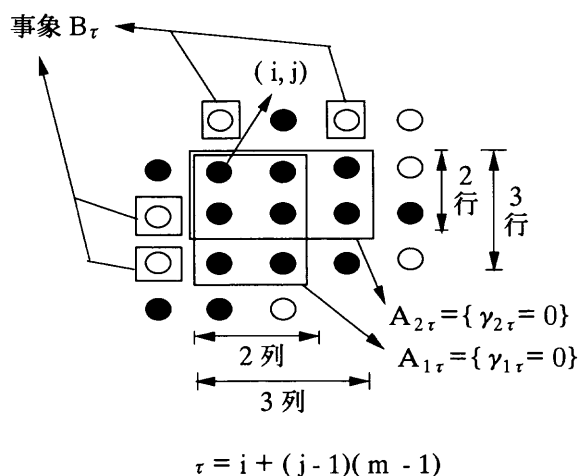


図3. connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of- (m, n) : Fシステムの上限値の導出時における B_τ について.

2.2 数値例

各コンポーネントの信頼度が同一で独立な場合の linear connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of-(m, n):F システムの上限値 UB と下限値 LB は, 定理 1 より次式で与えられる.

$$LB = (1 - q^6)^{(m-2)(n-1) + (m-1)(n-2)}$$

$$UB = (1 - 2q^6 + q^8)[1 - p^4(2q^6 - q^8)]^{(m-3)(n-3)} \\ \cdot [1 - p^2(2q^6 - q^8)]^{m+n-6}(1 - p^2q^6)^2(1 - p^3q^6)^{m+n-4}$$

表 1. linear connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of-(m, n):F システムの上下限値.

(a) $m=4, n=5$ の場合

p	LB	EXACT	UB
0.60	0.93260	0.94989	0.97526
0.65	0.96920	0.97562	0.98694
0.70	0.98768	0.98965	0.99394
0.75	0.99586	0.99633	0.99764
0.80	0.99891	0.99900	0.99929
0.85	0.99981	0.99981	0.99985
0.90	0.99998	0.99998	0.99999
0.95	1.00000	1.00000	1.00000

(b) $m=4, n=10$ の場合

p	LB	EXACT	UB
0.60	0.84165	0.88480	0.95319
0.65	0.92563	0.94248	0.97429
0.70	0.96984	0.97516	0.98767
0.75	0.98980	0.99110	0.99506
0.80	0.99732	0.99754	0.99846
0.85	0.99952	0.99954	0.99968
0.90	0.99996	0.99996	0.99997
0.95	1.00000	1.00000	1.00000

(c) $m=4, n=20$ の場合

p	LB	EXACT	UB
0.60	0.68550	0.76770	0.91052
0.65	0.84428	0.87955	0.94947
0.70	0.93511	0.94682	0.97523
0.75	0.97779	0.98072	0.98991
0.80	0.99413	0.99464	0.99682
0.85	0.99895	0.99901	0.99933
0.90	0.99991	0.99991	0.99993
0.95	1.00000	1.00000	1.00000

(d) $m=50, n=50$ の場合

p	LB	EXACT	UB
0.60	0.00000	—	0.08130
0.65	0.00017	—	0.21182
0.70	0.03237	—	0.43653
0.75	0.31709	—	0.69330
0.80	0.74003	—	0.88303
0.85	0.94783	—	0.97218
0.90	0.99531	—	0.99690
0.95	0.99993	—	0.99994

但し、各コンポーネントの信頼度を p 、故障確率を q とする。上限値算出時の B_r は、図 3 に示す事象を使用した。各コンポーネントの信頼度を変化させた時の上下限値を表 1 に示す。表中の EXACT は Yamamoto (1996) より求めたシステム信頼度を表す。表 1 より、システム信頼度が大きいほど上下限値の精度が良いことがわかる。また、上限値に比して下限値がシステム信頼度に近い値となる。

3. 極限定理

3.1 定理

各コンポーネントの故障確率が全て同一の場合を考える。極限定理を与える時に、 n と m を同時に大きくしていくことを考えるが、数学的記述のために、 m と n には単調増加の関係があるとする。すなわち、 $f(\cdot)$ は任意の単調増加関数とすると、 n と m の間には、 $m=f(n)$ の関係があるとする。逆に、 m を与えて n が決定すると考えても、以下同様な結果が得られる。また、コンポーネントの故障確率を n の関数とみなし q_n (信頼度は $p_n=1-q_n$) と表す。

connected- $\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}$ -out-of- (m, n) : F システムに関する極限定理は定理 2 で与えられる。

定理 2. $m=f(n)$ とする。ここで、 $f(\cdot)$ は任意の単調増加関数である。 λ は正の定数、 $M=\min_{1 \leq \theta \leq k} (\#X_{\theta})$ 、また $N = \#\{\theta | \#X_{\theta} = M\}$ 、即ち、構成するコンポーネントの個数が M である故障パターン θ の個数とする。この時、 $\lim_{n \rightarrow \infty} nmq_n^M = \lambda$ ならば、

$$(2.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R^L \left[\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}, (m, n); q_n \right] = \exp[-N\lambda]$$

$$(2.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R^C \left[\bigcup_{\theta=1}^k X_{\theta}, (m, n); q_n \right] = \exp[-N\lambda]$$

となる。

証明. $k=2$ の時の linear の場合の証明を以下に示す。

各コンポーネントの故障確率が同一で独立な場合には、定理 1 より、十分大きな m と n に対して、

$$(1 - q_n^{\#X_1})^{(m-r_1+1)(n-s_1+1)} (1 - q_n^{\#X_2})^{(m-r_2+1)(n-s_2+1)} \leq R^L[X_1 \text{ or } X_2, (m, n); q_n] \leq UB_n$$

が成立する。ここで $r_1 \geq r_2$ 及び $s_2 \geq s_1$ と仮定すると、

$$\begin{aligned} UB_n = & [1 - (q_n^{\#X_1} + q_n^{\#X_2} - q_n^{\#(X_1 \cap X_2)})] [1 - p_n^{r_1+s_2} (q_n^{\#X_1} + q_n^{\#X_2} - q_n^{\#(X_1 \cap X_2)})]^{(m-r_1)(n-s_2)} \\ & \cdot [1 - p_n^{r_1} (q_n^{\#X_1} + q_n^{\#X_2} - q_n^{\#(X_1 \cap X_2)})]^{(n-s_2)} [1 - p_n^{s_2} (q_n^{\#X_1} + q_n^{\#X_2} - q_n^{\#(X_1 \cap X_2)})]^{(m-r_1)} \\ & \cdot [1 - p_n^{s_2} q_n^{\#X_2}]^{(r_1-r_2)} \prod_{i=r_2}^{r_1-1} [1 - p_n^{s_2} q_n^{\#X_2} p_n^i]^{(n-s_2)} \\ & \cdot [1 - p_n^{r_1} q_n^{\#X_1}]^{(s_2-s_1)} \prod_{j=s_1}^{s_2-1} [1 - p_n^{r_1} q_n^{\#X_1} p_n^j]^{(m-r_1)} \end{aligned}$$

である。また $\#(X_1 \cap X_2)$ は、同じ左上の頂点を持つ長方形内に入る故障パターン X_1 と X_2 を同時に構成するコンポーネントの個数を表す。今、 $M=\#X_1 < \#X_2$ ($N=1$ の時) と仮定すると、与えられた条件の下で、下限値の第一項は $\exp[-\lambda]$ 、第二項は 1 に収束し、上限値に関しては

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - p_n^{r_1+s_2} (q_n^{\#X_1} + q_n^{\#X_2} - q_n^{\#(X_1 \cap X_2)})]^{(m-r_1)(n-s_2)} = \exp[-\lambda]$$

であり、その他の項は全て 1 に収束する。また、 $\#X_1 = \#X_2$ ($N=2$ の時) と仮定すると、与えられた条件の下で、下限値の各項は $\exp[-\lambda]$ に収束し、上限値に関しては

表2. linear connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of-(m, n): F システムの信頼度の収束値と下限値.(a) $m=4, n=5$ の場合

p	LB	exp
0.60	0.93260	0.84888
0.65	0.96920	0.92911
0.70	0.98768	0.97126
0.75	0.99586	0.99028
0.80	0.99891	0.99744
0.85	0.99981	0.99954
0.90	0.99998	0.99996
0.95	1.00000	1.00000

(b) $m=50, n=50$ の場合

p	LB	exp
0.60	0.00000	0.00000
0.65	0.00017	0.00010
0.70	0.03237	0.02612
0.75	0.31709	0.29502
0.80	0.74003	0.72615
0.85	0.94783	0.94464
0.90	0.99531	0.99501
0.95	0.99993	0.99992

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [1 - p_n^{r_1+s_2} (q_n^{*X_1} + q_n^{*X_2} - q_n^{*(X_1 \cap X_2)})]^{(m-r_1)(n-s_2)} = \exp[-2\lambda]$$

となり, その他の項は全て1に収束する. 以上より, $k=2$ の時の linear の場合が証明された. $k>2$ の場合や circular の場合も同様にして証明される. $\square$

3.2 数値例

各コンポーネントの信頼度が同一で独立な場合の linear connected-(2, 3)-or-(3, 2)-out-of-(m, n): F システムの近似値は定理2より, e^{-2mnq^6} で与えられる. 表2にコンポーネントの信頼度 p を変化させたときの e^{-2mnq^6} の値と, システム信頼度の下限値を示す. 表2に示したシステム以外についても言えることであるが, 下限値より収束値の方が低い, すなわち, システムの信頼度の近似値としては下限値の方が望ましいことがわかる.

4. おわりに

本論文では, 一般的な故障パターン X を持つ connected- X -out-of-(m, n): F システムのシステム信頼度の上下限値と, そのシステムに関する極限定理を与えた.

本論文で与えた極限定理や Fu (1985) の結果より, 直列システム, consecutive- k -out-of- n : F システムや connected- X -out-of-(m, n): F システムのように, 故障コンポーネントが一定箇所に集中した時にシステム故障となるシステムにおいては, N をシステムを構成するコンポーネント数, $\#X$ を故障パターンを構成する最小のコンポーネント数, q をコンポーネントの故障確率とすると, $Nq^{\#X}$ が正の値に収束する時にのみ, システム信頼度が“0 または 1”以外の値に収束することがわかる. しかし, システム信頼度の近似値を得ることを考えた場合, 極限定理で得られた収束値を利用するよりは下限値の方が望ましいことが数値例からわかった.

また, 任意の故障パターンを有する 3 次元の consecutive- k -out-of- n : F システムの信頼度の上下限値や極限定理も本論文の方法により求めることができる。

謝 辞

本論文に対し貴重なコメントを頂きました東京大学の宮川雅巳氏に感謝の意を表します。また, 本論文の前版を詳読し有意義なコメントを頂きました査読者の先生方に感謝いたします。

参 考 文 献

- Barlow, R. E. and Proschan, F. (1981). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*, 2nd ed., Holt Rinehart and Winstons, New York.
- Boehme, T. K., Kossow, A. and Preuss, W. (1992). A generalization of consecutive- k -out-of- n : F systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **41**, 451-457.
- Chao, M. T., Fu, J. C. and Koutras, M. V. (1995). Survey of reliability studies of consecutive- k -out-of- n : F & related systems, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 120-127.
- Fu, J. C. (1985). Reliability of a large consecutive- k -out-of- n : F system, *IEEE Transactions on Reliability*, **R-34**, 127-130.
- Fu, J. C. and Koutras, M. V. (1994). Poisson approximations for 2-dimensional patterns, *Ann. Inst. Statist. Math.*, **46**, 179-192.
- 平野勝臣 (1994). Consecutive- k -out-of- n : F システム, 統計数理, **42**, 45-61.
- Malinowski, J. and Preuss, W. (1995). On the reliability of generalized consecutive systems—a survey, *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, **2**, 187-201.
- Papastavridis, S. G. and Koutras, M. V. (1993). Consecutive- k -out-of- n systems, *New Trends in System Reliability Evaluation* (ed. K. B. Misra), 228-248, Elsevier, Amsterdam.
- Salvia, A. A. and Lasher, W. C. (1990). 2-dimensional consecutive- k -out-of- n : F models, *IEEE Transactions on Reliability*, **39**, 382-385.
- Yamamoto, H. (1996). Reliability of connected- (r_1, s_1) -or- (r_2, s_2) -or- $\cdots$ -or- (r_k, s_k) -out-of- (m, n) : F lattice system, *Microelectronics and Reliability*, **36**, 151-168.
- Yamamoto, H. and Miyakawa, M. (1995). Reliability of a linear connected- (r, s) -out-of- (m, n) : F lattice system, *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 333-336.
- Yamamoto, H. and Miyakawa, M. (1996). Reliability of a circular connected- (r, s) -out-of- (m, n) : F lattice system, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **39**, 389-406.

Reliability of Connected- X -out-of- (m, n) : F Lattice Systems

Hisashi Yamamoto

(Teikyo University of Science and Technology)

In this paper, a (linear or circular) connected- X -out-of- (m, n) : F lattice system is considered. This system is the (linear or circular) (m, n) -lattice system if the system fails whenever all components in a connected- X fail. Firstly, this paper presents the upper and lower bounds for the system reliabilities. In order to evaluate how these bounds approximate the exact system reliability, some numerical results are investigated. Next, a limit theorem is obtained for the considered system with identical independent component reliabilities. Let q be the component failure probability and $\#X$ the minimum number of components in a system-failure-pattern. When m and n become larger, if $mnq^{\#X}$ converges to a positive constant, it is proved that the system reliability converges to a value except one and zero.

Key words: Consecutive- k -out-of- n : F system, 2-dimensional consecutive- k -out-of- n : F system, connected- X -out-of- (m, n) : F lattice system, upper bounds, lower bounds, limit theorem.