

確率過程による通信路容量の一般化と その統計的応答特性

東北大学大学院* 原 啓明・小島 一之

統計数理研究所 田村 義保

(1995年4月 受付)

1. はじめに

工学と生物(ヒトも含めて)とのかかわりの重要性が認識されている。また、情報科学においても、ヒトがつくる社会を1つのシステムとみると、ヒトとヒトの間の情報伝達に関する諸問題はこれからの情報化社会の構造や機能を知る上で重要なテーマになってくる。この複雑な多要素問題において、ヒトを形式ニューロンとみると、社会の構造も1つの巨大なニューラルネットワークに対比されよう。最近、いろいろなニューラルネットワークの情報処理の研究が、脳機能をマシーンで再現する目的で進められている(原(1990), 小島(1993), Tsukada(1994), Tsukada et al. (1994))。塚田達は生体におけるニューラルネットワークの動的現象として知られている長期増強(Long term potentiation (LTP))あるいは長期減少(Long term depression (LTD))に対する興味ある数理モデルを定式化し、彼等の実験を解析している。

これ等の複雑な系やニューラルネットワークシステムにおける情報伝達の動的現象を解析するとき、これまでの情報理論はそのまま適用される形式ではない。つまり、従来の情報理論では通信路としての対象が金属やケーブル線などであるため、通信路の時間の変化を考慮する必要がなかった。しかし、ニューラルネットワークにおける動的現象の解析を情報理論の立場で行なうには、従来の情報理論の枠組を時間を陽に考慮した確率過程によって、一般化する必要がある。

本論文では、ニューラルネットワークなどの複雑な系の動的現象に適用可能な形式に情報理論におけるシステムの通信容量を一般化し、動的通信路容量として定式化する。また、この理論形式の一つの応用として形式ニューロン間のシナプス結合部の統計的応答特性を新しい情報理論的立場で論ずる。

動的通信路容量による解析は、指数型関数やスケーリング過程(Hara et al. (1993))で規定された時系列によって行なう。スケーリング過程で得られた時系列を生成する分布は一般化された分布である。これには指数分布、ガウス分布を包含する伸縮された指数型(Stretched exponential (STE))分布とべき分布も含まれる。この一般化された分布を援用して、シナプス結合間のいろいろな動的パターンを具体的に示す。つまり、スケール因子の大きさによって、動的パターンが分類されることを示す。とくに、STE関数におけるスケール因子の物理的意味を形式ニューロン間のシナプスにおける伝達物質の運動形態と関係づけて解析する。

* 情報科学研究科：〒980 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉。

2. 通信路容量の一般化とそのモデル

最近, 塚田達 (Tsukada et al. (1994)) は海馬のニューロン間でチャンネルゲートの開閉による伝達物質の濃度の時間変化が指数分布で記述される数理モデルを定式化し, 長期増強 (Long term potentiation (LTP)) の実験解析を行なっている. 本節では, 図1 (a)に示す形式ニューロン間のシナプス結合部を考え, 動的現象として形式ニューロン間に放出された伝達物質の放出及び運動パターンによって引き起こされる時系列を対象にする. つまり, 形式ニューロン間の時系列を2値のパルスとして記述し, この動的現象に適用可能な形式に通信路容量を一般化し, これを動的通信路容量として定式化する.

シナプス結合部の入力線維終末では伝達物質が放出される. 図1 (b)は(a)をモデル化した通信路を表す.

情報理論によると, 事後と事前確率の比の対数の期待値として平均相互情報量 $\bar{I}(X; Y)$ は,

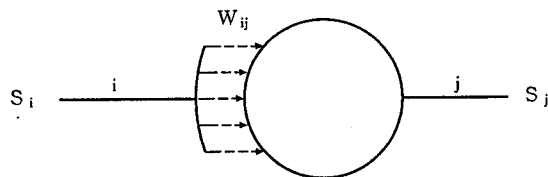
$$(2.1) \quad \bar{I}(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$$

で与えられる. ここで, $H(X)$ と $H(Y)$ は, それぞれ平均自己情報量 (情報エントロピー)

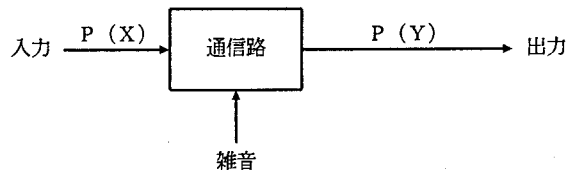
$$(2.2) \quad H(X) = - \sum_{i=1}^M P(a_i) \log P(a_i)$$

$$(2.3) \quad H(Y) = - \sum_{j=1}^M P(b_j) \log P(b_j)$$

で, a_i (あるいは b_j) は送信 (あるいは受信) 記号, $P(a_i)$ と $P(b_j)$ は送信記号と受信記号の生起確率である. また, $H(X|Y)$ は b_j を受信後における a_i の平均相互情報量



(a)



(b)

図1. (a)形式ニューロン S_i と S_j 間のシナプス結合部, (b)形式ニューロン間の通信路と雑音.

$$(2.4) \quad H(X|Y) = - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M P(a_i, b_j) \log P(a_i|b_j)$$

である。

通信路容量 C は通信路が与えられたとき、その通信路を通して伝送しうる最大の情報量として

$$(2.5) \quad \begin{aligned} C &= \max_{P(X)} \bar{I}(X; Y) \\ &= \max_{P(X)} \{H(X) - H(X|Y)\} \end{aligned}$$

で定義される。 C の単位は *bits/symbol*、あるいは、*bits/sec* である。

とくに 0 と 1 を使用する 2 元通信路 (図 2 参照) では、通信路行列 P は、

$$(2.6) \quad P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{pmatrix}$$

で与えられる。ただし p は、信号が誤って 0 から 1 として伝達される確率である。記号 0 の発生確率を $P(0)$ 、1 の発生確率を $P(1)$ とすると 0 を受信する確率 $P_Y(0)$ 、1 を受信する確率 $P_Y(1)$ は、

$$(2.7) \quad \begin{aligned} (1-p)P(0) + pP(1) &= P_Y(0), \\ pP(0) + (1-p)P(1) &= P_Y(1) \end{aligned}$$

$$(2.8) \quad P(0) + P(1) = 1$$

で与えられる。

2 元通信路の場合、式 (2.5) から通信路容量 C は、

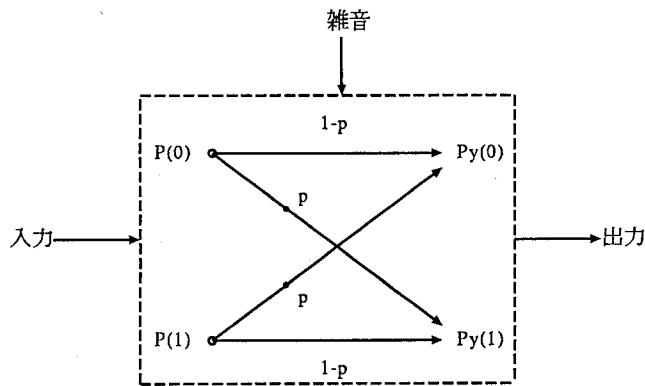


図 2. 2 元対称通信路における入出力関係。

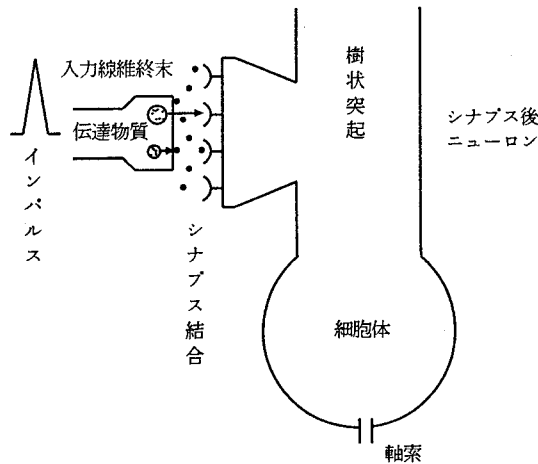


図 3. 形式ニューロン間のシナプス結合部の模式図. 前シナプスの信号 1 あるいは 0 で表現されたインパルスによってシナプス小胞内の伝達物質がシナプス結合部に放出されるものとする.

$$\begin{aligned}
 (2.9) \quad C &= 1 + p \log p + (1-p) \log(1-p) \\
 &= 1 - H_n(p)
 \end{aligned}$$

で与えられる.

ここで, $H_n(x)$ はエントロピー関数

$$(2.10) \quad H_n(x) = -x \log x - (1-x) \log(1-x)$$

である.

確率過程による通信路容量 C の一般化は, 図 3 に示す形式ニューロン間のシナプス結合部における伝達物質の放出伝播過程をモデル化したものである. この伝達物質の放出及び運動パターンが原因で, シナプス後ニューロンには図 4 (a) で示した受容器に膜電位の変動として時系列が発生する. また時系列 (図 4 (b) 参照) は, 図 4 (a) で示した 2 値化 $\{a, -a\}$ で記述されるものとする.

従って, 形式ニューロン間のシナプス結合部を通信路行列 P とみると (図 2 参照), 伝達物質の放出及び運動のパターンの変化は 2 値のパルスの変化として記述される.

2 値化 $\{a, -a\}$ した時系列のモデルとして, パルス間隔の平均値が $1/k$ である指数分布で記述される確率過程は,

$$(2.11) \quad P(t)dt = ke^{-kt}dt$$

で与えられる.

式 (2.11) で形式ニューロン間のシナプス結合部が十分薄い, とみて $t \rightarrow 0$ をとると, dt 時間内にパルスが $a \rightarrow -a$ あるいは $-a \rightarrow a$ に変わる確率は, kdt で与えられる. また, 遷移しない確率は $1-kdt$ で与えられる.

従って, 式 (2.6) に対応する dt で規定された動的通信路行列は,

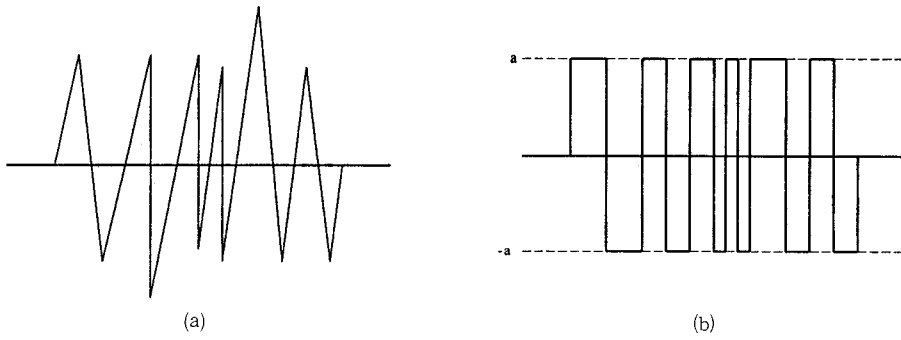


図4. (a)後シナプス結合部で受信される信号はシナプス結合部で受ける雑音のため送信された信号がひずむ. (b)図4(a)で受信された信号の2値化を示す.

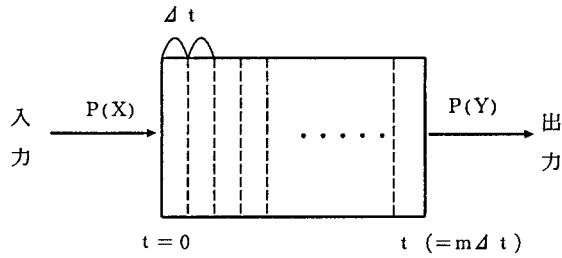


図5. 形式ニューロン間のシナプス結合部の統計的応答特性を表す m 段通信路.

$$(2.12) \quad [P(t)]_{t=\Delta t} = \begin{pmatrix} 1-k\Delta t & k\Delta t \\ k\Delta t & 1-k\Delta t \end{pmatrix}$$

によって与えられる.

次に, 図5で示す様にシナプス結合部の空間を Δt の刻み幅で m 分割し, 上式で導入した m 段の動的通信路として応答特性を解析する. シナプス間で伝達に要する時間 t を微小時間 Δt で m 個に分割した有効な動的通信路行列は, 式 (2.12) から,

$$(2.13) \quad ([P(t)]_{t=\Delta t})^m = \begin{pmatrix} 1-k\Delta t & k\Delta t \\ k\Delta t & 1-k\Delta t \end{pmatrix}^m \\ = A_m [P(t)]_{t=\Delta t} + B_m I$$

と計算できる. ここで, I は 2×2 の単位行列, A_m と B_m は,

$$(2.14) \quad A_m = \frac{1}{2k\Delta t} \{1 - (1 - 2k\Delta t)^m\}$$

$$(2.15) \quad B_m = \left\{ 1 - \frac{1}{2k\Delta t} + \frac{1}{2k\Delta t} (1 - 2k\Delta t)^m \right\}$$

である.

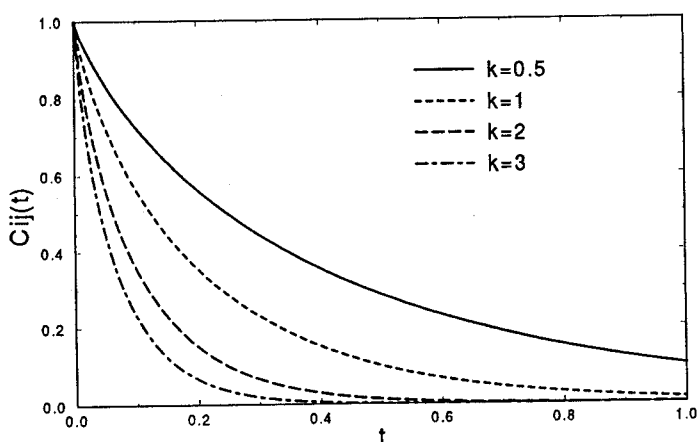


図6. 動的通信路容量 $C_{ij}(t)$ の時間変化. 数値 k の逆数はパルス間隔の平均値を表す.

関係式 $\lim_{m \rightarrow \infty} (1 - 2kdt)^m = e^{-2kt}$ を使うと, 式 (2.13) は,

$$(2.16) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} [P(dt)^m] = \begin{pmatrix} 1 - T(t) & T(t) \\ T(t) & 1 - T(t) \end{pmatrix}$$

と変形できる. ここで,

$$(2.17) \quad T(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2kt}).$$

結局, 形式ニューロン間のシナプス結合部に対する動的通信路容量は, 二元対称通信路の場合の式 (2.16) と (2.9) から,

$$(2.18) \quad C_{ij}(t) = 1 - H_n(T(t))$$

で与えられる. この動的通信路容量 $C_{ij}(t)$ は図3で示す形式ニューロン (i と j) 間のシナプス結合部を通信路として表現したときの統計的応答特性を表す量である. この意味で $C_{ij}(t)$ は Hebb の可塑性を表現した形式ニューロン間の広義のシナプス荷重を表すとみることができる. つまり, $C_{ij}(t)$ は形式ニューロン間の結合の強さを時間 t とパルスの持続時間の平均値 $1/k$ をパラメータとして表す.

図6は式 (2.18) で得られた $C_{ij}(t)$ を描いたものである. また, 図7は $C_{ij}(t)$ とシナプス荷重 W を比較のためにラットの海馬において長期増強 (LTP) として観測された結果とシナプス荷重 W (Tsukada (1994), Tsukada et al. (1994)) のふるまいを示す. 実線は, 塚田達 (Tsukada et al. (1994)) がチャンネルゲートの化学反応を取り入れた指数分布によって定式化した数理モデルによる結果である.

このように $C_{ij}(t)$ とシナプス荷重 W の間には興味深い類似性が見出される. しかし, これ以上の比較を行なうには $C_{ij}(t)$ に対する入力パターンの時系列を陽に取り込むなど今後に残された問題点を解決する必要がある.

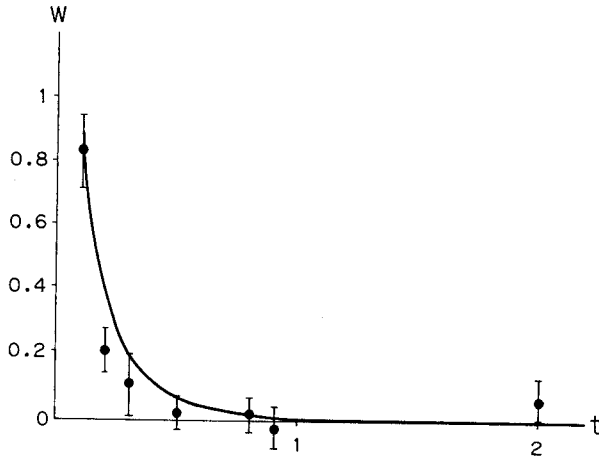


図7. Tsukada et al. (1994) が観測した周期的な入力に対する $W(t)$. 実線はチャンネルゲートの化学反応を考慮したモデル計算を表す.

3. スケーリング過程

前節で与えた動的通信路容量に適用した確率過程を更に拡張する. つまり, 本節では, 前節の枠組における定数 k が時間依存性を含む一般的なスケーリング過程に対しても拡張できることを示す. また, このスケーリング過程は“スケール因子でパラメーター化した伸縮された指数型”(Stretched exponential: STE) 関数を含むことを具体的に示す.

まず, 前節で行なった議論を整理する. パルスの状態が 0 から t まで変化しない確率を $\tilde{P}(t)$ で定義すると ($\tilde{P}(t) = P(t)/k$. ただし, $1/k$ はパルスの平均間隔, $P(t)$ は式 (2.11) で与えられる.), 次の dt 間にパルスが状態を変えない確率は漸化式の形 $\tilde{P}(t+dt) = [1-kdt]\tilde{P}(t)$ で表される. 従って,

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad \tilde{P}(t) &= [1-kdt]\tilde{P}(t-dt) \\
 &= [1-kdt][1-kdt]\cdots[1-kdt]\tilde{P}(0) \\
 &= e^{n \log(1-kdt)}\tilde{P}(0) \\
 &= e^{\frac{t}{dt}[-kdt + \frac{1}{2}(kdt)^2 - \cdots]}\tilde{P}(0) \\
 &= e^{-kt}\tilde{P}(0)
 \end{aligned}$$

によって, $\tilde{P}(t)$ が定義されることに注意しよう. 定数 k の逆数はパルス間隔 t の平均値を与える.

次に, 式 (3.1) を新しい変数 s の指数関数として拡張するため, s で記述された確率過程を考える. つまり,

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad \tilde{P}(t) &= e^{-kt}\tilde{P}(0) \rightarrow e^{-k_s s}\tilde{P}(0) \\
 &= \tilde{P}(s)
 \end{aligned}$$

を考える. ただし, k_s は定数, 新しい変数 s は t の関数,

$$(3.3) \quad s = \int^t \Phi(\epsilon t') dt'$$

で与えられるものとする. パラメーター ϵ は非常に小さな数値である. これによって, 関数 $\Phi(\epsilon t)$ はゆっくり変化する. 関数 $\tilde{P}(s)$ が式 (3.3) で導入した新しい変数 s で表現されたと見れば, 式 (3.2) は指数分布である. この性質を援用して, 通信路を m 分割し, m 段の合成通信路とみると, 各分割においてパルスが遷移する割合は一定である. つまり, “長さ s ” を $m \left(= \frac{s}{ds} \right)$ 分割した確率過程 $\{a \rightarrow \pm a\}$ として, パルスの状態が $s (= t) = 0$ から s まで変化しない確率 $\tilde{P}^{(s)}(s)$ は,

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \tilde{P}^{(s)}(s+ds) &= e^{-k_s s} \tilde{P}^{(s)}(0) \\ &= \left(e^{-k_s \int^t \Phi(\epsilon t') dt'} \right) \tilde{P}(0) \equiv \tilde{P}[t] \end{aligned}$$

で与えられる. この表式は式 (3.3) で導入された s と t との関係で見直すと, 式 (3.1) の一般化である.

関数 $\Phi(t)$ が, 関数方程式

$$(3.5) \quad \Phi(t) = a \Phi\left(\frac{t}{b}\right)$$

を満足するスケーリング過程で規定される場合を考える. 定数 a, b はスケール因子である. 式 (3.5) で規定されたスケーリング過程では $\Phi(t)$ が具体的に求められ,

$$(3.6) \quad \Phi(t) \sim t^\alpha \quad \left(\alpha = \frac{\log a}{\log b} \right)$$

で得られる.

式 (3.6) を (3.4) に代入すれば, 条件 $\alpha + 1 \neq 0$ に対して $\tilde{P}[t]$ はいわゆる “伸縮された指数型 (STE)” 関数

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \tilde{P}[t] &= e^{-k_s \frac{1}{\alpha+1} t^{\alpha+1}} \\ &= e^{-k_{eff} t^{\alpha+1}} \quad (\alpha \neq -1) \end{aligned}$$

$$(3.8) \quad k_{eff} = \frac{k_s}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1)$$

を得る. 条件 $\alpha = -1$ では, $\tilde{P}[t]$ はべき関数で与えられる.

結局, 変数 s を援用して形式ニューロン間のシナプス結合部に対する動的通信路容量を計算し, 式 (3.3) で再び t にもどすと $C_{ij}(t)$ は,

$$(3.9) \quad \begin{aligned} C_{ij}(s) &= 1 - H_n(T(s)) \\ &= 1 - H_n\left(T\left(\int_0^t \Phi(\epsilon t') dt'\right)\right) \end{aligned}$$

で与えられる. 関数 $H_n(x)$ は式 (2.12) で与えられたエントロピー関数である.

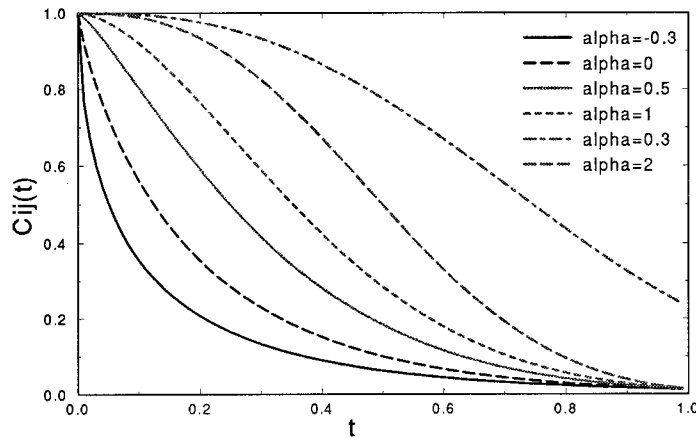


図8. スケーリング過程におけるSTE関数 ($\alpha \neq -1$) で規定された動的通信路容量 ($k = 1$) .

図8は $\alpha+1 \neq 0$ に対するスケーリング過程に対して得られた $C_{ij}(s)(=C_{ij}(s(t))=C_{ij}(t^{\alpha+1}))$ に対する動的通信路容量の t 依存性を α の値を変えて図示したものである。

条件 $\alpha+1 \neq 0$ に対する α の運動論的意味づけについては次節で述べる。

4. スケール因子の運動論的解析

STE 関数は乱れた複雑な体系の動的現象で広く観測される重要な関数である (Funke (1991)). たとえば, 電子輸送現象において, 電気伝導 σ の温度 (T) 依存性は

$$(4.1) \quad \log \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right) \propto \left(\frac{1}{T} \right)^{\frac{1}{d+1}}$$

によって体系の次元数 d で規定された STE 関数で表される (Mott (1968)).

しかし, 最近この表式と実験結果の不一致が報告され, STE 関数の理論的導出法の改良がいろいろ試みられている. (Adkins et al. (1994), Matsutani and Suzuki (1995). たとえば, ランダム行列を援用する方法 (Porter (1965), Mehta (1967), Berry (1981)) などがある.)

本節では, 一般化されたランダムウォーク (Hara (1978, 1985), Hara et al. (1988)) の遷移確率を援用したホッピング確率によって STE 関数を再導出し, 動的通信路容量 $C_{ij}(t)$ に含まれるスケール因子 $\alpha (\alpha \neq -1)$ の運動論的意味を考察する。

まず, 形式ニューロン間のシナプス結合部に放出された伝達物質の放出及び運動のパターンを一般化されたランダムウォークの遷移確率 $P^{\pm}$ や P^0 によって, “ホッピング” 確率で記述する時系列として, 以下の手順で導出する。

とび移る割合を定数 k とすると, dt 間にとび移らない遷移確率 P^0 は $(1-kdt)$ である (式 (3.1) 参照). 従って, 間隔 dt で分割された m ステップまでとび移らない確率 $[P^0]^m$ は,

$$(4.2) \quad [P^0]^m = e^{m \log(1-kdt)} \simeq e^{-kt} \quad (m \rightarrow \infty, \text{ ie } dt \rightarrow 0)$$

で与えられる. また, $\Delta\epsilon$ の活性化エネルギーで表されたポテンシャル障壁を考慮して, dt 間にと

び移る確率 $P^\pm$ は,

$$(4.3) \quad P^\pm = \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} dt \quad (0 < \lambda < 2)$$

で与えられるものとする (小島 (1995)). 因子 $(\lambda/2)$ は $\pm$ 方向のとび移りを表す割合を示す. 活性化エネルギー $\Delta\epsilon$ は, ランダムウォークの理論によると, ウォーカーが確率 $[P^0]^m$ で表される $t=0$ から t までとび移らない状態にあるときのエネルギー差である. すなわち, ポテンシャル・エネルギーの最低値エネルギー準位 E_0 から測った, ポテンシャル・エネルギーの山の高さ E_M との差 $\Delta\epsilon = E_M - E_0$ である (たとえば Egelstaff (1967), Gilifalco (1980) 参照). 指数部の定数 σ^2 は速度変化に対する環境によるゆらぎの強さを示す. つまり, 次式の線形ランジュバン方程式,

$$(4.4) \quad \dot{v} + \gamma v = \Gamma(t) \quad (\gamma: \text{定数})$$

$$\langle \Gamma(t) \rangle = 0$$

$$(4.5) \quad \langle \Gamma(t_1) \Gamma(t_2) \rangle = \sigma^2 \delta(t_1 - t_2)$$

におけるガウス白色型のランダムな力 $\Gamma(t)$ の分散値である. 非線形ランジュバン方程式については文献 (中村・原 (1995)) を参照されたい.

ウォーカーが m ステップまでとび移らないで, 次の dt 間で初めてとび移る確率として “ホッピング” 確率を

$$(4.6) \quad P_{hop} \sim ([P^0]^m)_{m \rightarrow \infty} \cdot P^\pm$$

に比例する量として導入する. (ジャンピング確率 $P^0, P^\pm$ はランダムウォークの遷移確率であるため, 次の規格化条件,

$$P^0 + P^+ + P^- = \left(1 - kdt + \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} dt + \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} dt \right) = 1$$

を満足する必要がある. 逆に, この規格化条件は重み関数 $e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}}$ が関係式 $e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} = k/\lambda$ ($0 < \lambda < 2, k < \lambda$) を満足する程度の大きさの量であることを規定する.)

式 (4.4) を条件 $\gamma t \gg 1$ のもとで解くと, ウォーカーの速度の2乗平均値は,

$$(4.7) \quad \langle v(t)^2 \rangle = \frac{\sigma^2}{2\gamma}$$

で与えられる.

式 (4.2) において, k はとび移るまでの平均時間 t_0 の逆数 ($1/t_0$) を表す. 従って, 速度 $\tilde{v} = \sqrt{\langle v^2(t) \rangle} = \left(\frac{r}{t} \right)$ で t_0 間に自由に動ける距離 r_0 を $\left(\frac{r}{t} \right) \cdot t_0$ で評価できる. この評価から, 関係式

$$(4.8) \quad \frac{t}{t_0} = \frac{r}{r_0} \equiv ar$$

が得られる. また, 式 (4.7) から $\sigma^2 = 2\gamma \left(\frac{r}{t} \right)^2$ が得られる.

次に, エネルギー準位 ϵ_1 と ϵ_2 間にあるウォーカーが取り得る状態数 N を与えるエネルギー状

態密度関数 $g(\epsilon)$ を

$$(4.9) \quad \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} g(\epsilon) d\epsilon = N$$

で導入する. ただし, $\epsilon_1 = E_0$, $\epsilon_2 = E_M$ とみて, $\Delta\epsilon (= E_M - E_0)$ が小さいとする. このとき, $g(\bar{\epsilon}) \Delta\epsilon = N$, $\left[\left(\bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right) \right]$ となる.

さらに, 式 (4.8) で示す半径 r_0 と r で規定された“籠 (cage)”を“ウォーカーの運動可能な空間”とみなし, その形態をクラスターとみると, ウォーカーの単位体積当たりのエネルギー密度関数 $\bar{g}$ は,

$$(4.10) \quad \bar{g} \cdot r^E (= g(\bar{\epsilon})) = \rho \left(\frac{r}{r_0} \right)^D$$

によって導入される. ρ は単位エネルギー当りの数値, E は 1, 2, 3 次元を表すユークリッド次元, D は籠の形態を規定するクラスターのフラクタル次元である. (ここで述べた動的な議論で定義された次元に対して, Feder (1992) が議論しているクラスター次元は, 運動しないクラスター分布を問題にした静的次元とみることができる.)

等式 (4.10) はウォーカーの運動可能な空間が D 次元に制限されていることを表す. つまり, ウォーカーの運動空間が籠の形態で規定される. このとき, 式 (4.8) と (4.10) から $\bar{g}$ は,

$$(4.11) \quad \bar{g} = \rho \cdot a^D \cdot r^{D-E}$$

を満足することが分かる.

同様に, 関係式 $g(\bar{\epsilon}) \Delta\epsilon = \bar{N} \cdot r^E$ ($\bar{N}$: 単位体積中のエネルギー状態数) から,

$$(4.12) \quad \Delta\epsilon = \frac{\bar{N}}{\rho \cdot a^D \cdot r^{D-E}}$$

が得られる.

式 (4.2), (4.3) を (4.6) に代入し, 関係式 (4.10)-(4.12) に注意すると, P_{hop} の表式は r と t の関数 $f(r, t)$ により,

$$(4.13) \quad P_{hop} \sim \left[e^{-kt} \frac{\lambda}{2} e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} \right] = \frac{\lambda}{2} e^{-f(r, t)}$$

で表される. ただし, 関数 $f(r, t)$ は,

$$(4.14) \quad f(r, t) = ar + \frac{\bar{N}t^2}{2\rho a^D r^{D-E+2}}$$

である.

表式 (4.12) と (4.13) から“ホッピング”確率 $P_{hop}(t)$ を改めて次式,

$$(4.15) \quad P_{hop}(t) = \max_r ([P^0]^m)_{m \rightarrow \infty} \cdot P^\pm$$

によって定義する. 一方, 式 (3.7) と (3.8) で与えられた STE 関数 $\tilde{P}[t]$ は $(0, t)$ 間で変化しない (ウォーカーがとび移らない) 確率である (式 (3.4) 参照). 次の dt 間でとび移る確率は $\tilde{P}[t] k dt$ で表される. これは, $P_{hop}(t)$ に比例する量である. すなわち,

$$\begin{aligned}
 (4.16) \quad \tilde{P}[t]kdt &\propto P_{hop}^{\pm}(t) \\
 &= \max_r(([P^0]^m)_{m \rightarrow \infty} \cdot P^{\pm})
 \end{aligned}$$

と等置できる. さらに関係式 $e^{-\Delta\epsilon/\sigma^2} = k/\lambda$ ($0 < \lambda < 2, k < \lambda$) に注意すると, この式は,

$$\begin{aligned}
 (4.17) \quad P[t]e^{-\frac{\Delta\epsilon}{\sigma^2}} &= \max_r \left[e^{-kt} e^{-\Delta\epsilon/\sigma^2} \right]_{\sqrt{\langle v^2(t) \rangle} = r/t} \\
 &= \max_r \left[e^{-f(r,t)} \right]_{\sqrt{\langle v^2(t) \rangle} = r/t}
 \end{aligned}$$

と変形される.

関係式 (4.17) の左辺は, 固定されたポテンシャル障壁 $\exp(-\Delta\epsilon/\sigma^2)$ 内の STE 関数の確率過程を表し, 右辺ではこれが指数分布の確率過程として, 速度 $\sqrt{\langle v^2(t) \rangle} = r/t$ のウォーカーが運動可能な半径 r で決まる籠の形態 (式 (4.10)) を変化させることによって等置できることを示す. この立場で, 式 (4.17) から STE 関数を規定する α の運動論的解析を行なう.

式 (4.15) で定義された $P_{hop}(t)$ の t 依存性は, 式 (4.17) によれば, $\partial f(r,t)/\partial r = 0$ で決まる $r = r_c$ を使って, $f(r,t)$ から評価できる (Mott (1968), Isihara (1992)). この結果, $P_{hop}(t)$ は,

$$(4.18) \quad P_{hop}(t) = \lambda e^{-\left(\frac{t}{t_c}\right)^{2/(D-E+3)}}$$

で与えられる. ただし, 定数 t_c は E, D, a, γ, ρ と $\bar{N}$ によって決まる定数である. この表式を援用すると, 前節の式 (3.7) に表されたスケール因子 α は,

$$(4.19) \quad \alpha = \frac{2}{D-E+3} - 1$$

で与えられる.

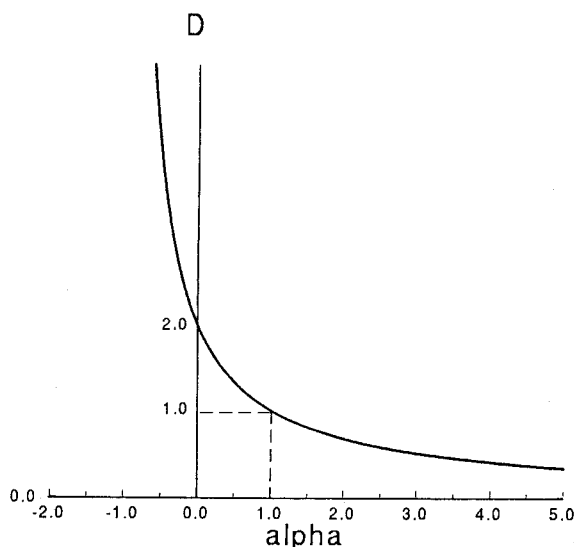


図9. 式(4.19)で $E = 3$ とおいたスケール因子 α に対するクラスターのフラクタル次元 D .

式 (4.19) から STE 関数 ($\alpha \neq -1$) のスケール因子 α の物理的意味が式 (4.17) によって運動論的に決定される。つまり, STE 関数に含まれる α の大きさは粒子 (ウォーカーあるいは伝達物質の 1 粒子) の運動可能な空間を規定する籠 (cage) の形態 (次元 D) とエネルギー密度関数 (次元 $E (= 1, 2, 3)$) で決まることが分かる。

図 9 は, エネルギー密度関数の空間次元が $E = 3$ であるとき, α の値に応じて D の値が式 (4.19) によって決定されることを示す。つまり, 指数型 ($t^1; \alpha = 0$) では $D = 2$, ガウス型 ($t^2; \alpha = 1$) では $D = 1$ である。分数型 ($t^{\frac{2}{3}}; \alpha = -1/3$) では $D = E = 3$ となることが分かる。

以上の結果からウォーカーに代表される粒子として伝達物質の 1 粒子に着目すると, 動的通信路容量 $C_{ij}(t)$ の t -依存性の違いを α の違いによって運動論的に解析できる。

5. まとめ

本論文は, 情報理論における通信路容量をニューラルネットワークの動的現象に適用可能な形式に拡張し, これを動的通信路容量として定式化する方法を具体的に示した。

まず, 2 節で従来の情報理論における通信路容量の定義に必要ないくつかの表式について述べ, これ等の諸量が時間依存性を取り入れた確率過程でどの様に一般化されるかを示した。とくに指数型の時間依存性によって表現された時系列に対して動的通信路容量の表式を具体的に与えた。さらに, この動的通信路容量は形式ニューロン間のシナプス結合部における統計的応答特性を示す量として導入できることを述べた。

3 節では, 指数形の時間依存性によって表現された確率過程がさらに, スケーリング過程としてべき関数や, 伸縮された指数型関数 (STE) として一般化できること, そして, この立場では 2 節で導入した動的通信路容量の表式が再び援用できることを具体的に示した。

4 節では, STE 関数のスケール因子 α ($\alpha \neq -1$) の物理的意味を一般化されたランダムウォークによるホッピング確率 $P_{hop}(t)$ を導入することによって運動論的に解析した。この P_{hop} は単位体積当たりのエネルギー密度関数 $\bar{g}$ に対するエネルギー空間の次元 $E (= 1, 2, 3)$ とウォーカーの運動可能な空間を規定する “籠 (cage) の形態” で決まるクラスターフラクタル次元 D で特徴づけられている。

STE 関数で表される確率過程は, 複雑な系の動的現象において重要な役割をすることが最近注目されている。本論文で確率過程として定式化した STE 関数は導出法において従来のものと異なる。また, STE 関数は上述の様に空間次元 E とクラスターのフラクタル次元 D で規定されている。この確率過程にもとづいた STE 関数を援用することで, 今後, いろいろな複雑な系の動的現象を運動論的に解析する可能性が期待される。

本論文で議論した動的な通信路容量の特性は形式ニューロン間のシナプス結合部の統計的応答特性を与える。また, この量は形式ニューロン間の広義のシナプス荷重を表すと考えられることから, この点を調べるため, 塚田達 (Tsukada et al. (1994)) が最近行なったラットの海馬におけるニューロン間の長期増強の実験と比較した。しかし, 塚田等の実験では, 入力インパルスの時系列パターンの違いが後シナプスニューロンに与える長期増強を調べている。一方, 本論文では, 動的通信路容量には陽な形で入力インパルスの時系列パターンを直接取り入れていない。このため, 現段階では塚田達の興味ある実験をまだ解析する定式化にはなっていない。この問題は今後に残された重要な興味ある問題である。

謝 辞

海馬ニューロンの記憶モデルについて講演をしていただき, 有益なコメントを頂いた玉川大学

の塚田稔先生に心からの謝意を表したい。また、情報論のゼミナールでアドバイスを頂いた東北大学の阿部光衛先生、論文の修正やコメントをいただいた伴信之君にも感謝したい。

参 考 文 献

- Adkins, C. J., Long, J. A. and McInnes, J. A. (1994). *Hopping and Related Phenomena*, World Scientific, Singapore.
- Berry, M. V. (1981). Quantizing a classically ergodic system: Sinai's billiard and the KKR method, *Ann. Physics*, **131**, 163-216.
- Egelstaff, P. A. (1967). *An Introduction to the Liquid State*, Chapter 10, Academic Press, London (広池和夫, 守田 徹 訳 (1971). 『液体論入門』, 吉岡書店, 京都).
- Feder, J. (1992). *Fractals*, Plenum Press, New York and London.
- Funke, K. (1991). Is there a "universal" explanation for the "universal" dynamic response?, *Ber. Bunsenges. Phys. Chem.*, **95**, 955-964.
- Gilifalco, L. A. (1980). *Atomic Migration in Crystal* (北田生弘 訳 (1980). 『入門 結晶中の原子の拡散』, 共立全書, No. 558, 共立出版, 東京).
- Hara, H. (1978). Generalization of the random walk process, *Phys. Rev. B*, **20**, 4062-4068.
- Hara, H. (1985). Anomalous diffusion coefficient described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **31**, 4612-4616.
- 原 啓明 (1990). 神経回路網の物理・記憶のモデル, 『新しい物性』 (石原 明, 和達 三樹 編), 共立出版, 東京.
- Hara, H., Obata, T. and Lee, S. J. (1988). Fluctuation and bifurcation of the path described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **37**, 476-486.
- Hara, H., Chung, O. H. and Koyama, J. (1993). Dynamical activation processes described by generalized random walks, *Phys. Rev. B*, **46**, 838-845.
- Hara, H., Obata, T. and Koyama, J. (1994). Information processing of a complex system: response behaviors specified by the Weierstrass function, *Phys. Rev. E*, **49**, 5823-5828.
- Isihara, A. (1991). *Condensed Matter Physics*, Chapter 6, Oxford University Press, New York (和達 三樹, 原 啓明 他訳 (1994). 『凝縮系物理』, 共立出版, 東京).
- 小島一之 (1993). 視覚神経系の相互抑制回路網, 東北大学工学部卒業論文.
- 小島一之 (1995). ニューラルネットワークシステムの動的な通信路容量とその統計的応答特性, 東北大学情報科学研究科修士論文.
- Matsutani, S. and Suzuki, A. (1995). Hopping conductivity related to quantum chaos (preprint).
- Mehta, M. L. (1967). *Random Matrices and Statistical Theory of Energy Levels*, Academic Press, New York.
- Mott, N. F. (1968). Conduction in glasses containing transition metal ions, *Journal of Non-crystalline Solids*, **1**, 1-17.
- 中村成章, 原 啓明 (1995). 動物行動のモデルと一般化されたランダムウォーク (投稿準備).
- Porter, C. E. (1965). *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, Academic Press, New York.
- 瀧 保夫 (1980). 『情報論』, 岩波全書, 岩波書店, 東京.
- Tsukada, M. (1994). Theoretical model of the hippocampal-cortical memory system motivated by physiological functions in the hippocampus, *Cybernetics and Systems*, **25**, 189-206.
- Tsukada, M., Aihara, T., Mizuno, M., Kato, H. and Ito, K. (1994). Temporal pattern sensitivity of long-term potentiation in hippocampal CA1 neurons, *Biological Cybernetics*, **70**, 495-503.

Generalization of Channel Capacity Based on Stochastic Processes and Its Statistical Response Properties

Hiroaki Hara and Kazuyuki Kojima

(Graduate School of Information Sciences, Tohoku University)

Yoshiyasu Tamura

(The Institute of Statistical Mathematics)

Based on stochastic processes, the channel capacity C in the information theory is generalized in such a way that it is applicable to dynamical phenomena in a neural network system, and it is formulated as a dynamical channel capacity $C(t)$. With the aid of the dynamical channel capacity, statistical response properties between formal neurons are analyzed from a new point of view above mentioned. As time series between the formal neurons, scaling processes are proposed, and it is shown that exponential, Gauss, and power law distributions are obtained as specialized cases of the scaling processes. The scaling processes contain a so-called stretched exponential (STE) function ($\alpha \neq -1$) parametrized by a scaling factor α . A physical meaning of the scale factor in the STE function is given by characterizing dynamical models of transmitted substances in a synapse between the formal neurons: each process is specified by exponential ($\alpha = 0$), Gauss ($\alpha = 1$) and fractional form ($\alpha = -1/3$).

Key words: Dynamical channel capacity, information theory, neural network, scaling processes, fractals, stretched exponential.