文部科学省委託事業　数学協働プログラム
in サイエンスアゴラ 2016 講演会

科学における発見、数学における発見 2016

2016. 11. 5 (Sat) 13:15～15:15
産業技術総合研究所 臨海副都心センター別館11階 会議室1

総合司会　砂田 利一（すなだ としかず）

明治大学総合数理学部長、理学博士。東京大学大学院修士課程修了。名古屋大学、東京大学、
東北大学教授を経て、2003年４月より明治大学理工学部教授。2013年4月より現職。
専門は離散幾何解析学および大域解析学。1998年日本数学会弥永賞、2013年日本数学会出版賞受賞。
『チャート式　数学』（数研出版）、『現代幾何学への道』（岩波書店）、『ダイヤモンドはなぜ美しい』
（シュプリンガー）、『バナッハ・タルスキーのパラドックス』（岩波書店）など著書多数。

13:15～13:20　開会挨拶

13:20～14:00

地球規模での河川流れのシミュレーション

－ 数学による地球システムの記述と予測 －

語り手：山崎 大（やまざき だい）

海洋研究開発機構 統合的気候変動予測研究分野 研究員。博士（工学）。
2012年３月 東京大学大学院工学系研究科 社会基盤学専攻 博士課程修了。
2012年～2014年 英国ブリストル大学 客員研究員、2014年４月より現職。
衛星観測と数値計算を駆使して複雑な大陸河川の流れを研究している。
全球地表水動態モデルの開発を通し、大規模洪水の予測精度向上を目指す。
平成23年度 第２回 日本学術振興会育志賞、平成26年度 水文・水資源学会 論文賞、など。

聞き手：三上 いすず（みかみ いすず）

漫画家、函館の五稜郭公園そば在住。学生時代は生物工学を学ぶ。
はやのん理系漫画制作室勤務、『はこだて国際科学祭』に『いすず漫画新聞』として出展（2015年）、
四谷３丁目のサイエンスバー「INCUBATOR」勤務（2016年）などを経験。
科学イベントを体験してそれを漫画にし、「わかった！」の喜びを描くことを生きがいとする。

14:00～14:40

数式で描く家族の行動とコンフリクト

語り手：古村 聖（こむら みづき）

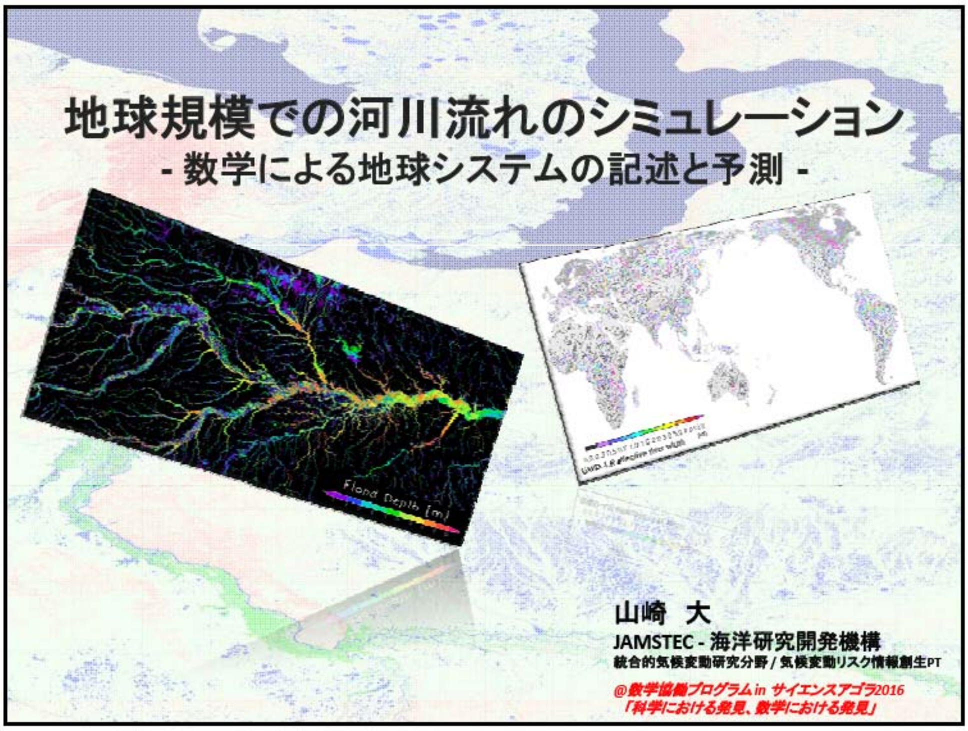
武蔵大学 経済学部経済学科准教授。博士（経済学）。2014年３月 名古屋大学大学院経済学研究科博士課程修了。
2014年４月から2016年３月まで名古屋大学高等研究院特任助教、
その間、科学技術人材育成のコンソーシアムの構築事業特任助教（2015年１月-2016年３月）、
イタリア・フィレンツェ大学客員研究員（2015年４月-2016年３月）を兼任。2016年４月より現職。
数式で人々の行動を描写する経済理論分析の研究を中心に従事し、
特に介護、子育てなど家族間の意思決定問題に関心を持つ。第４回 日本学術振興会育志賞他受賞。

聞き手：中川 真（なかがわ しん）

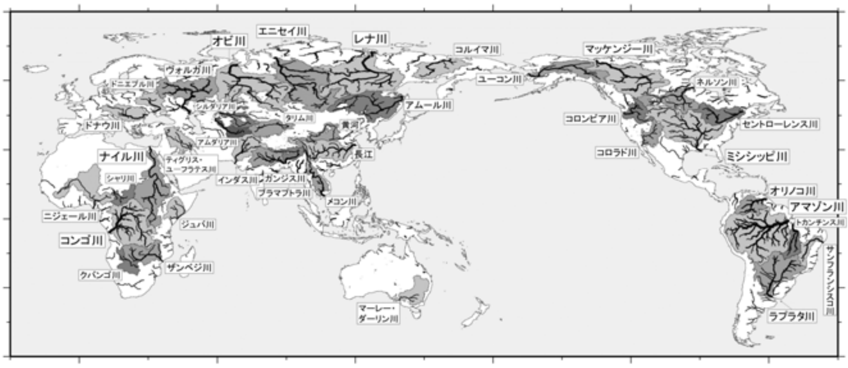
東京外国語大学外国語学部イタリア語学科卒。東京外国語大学大学院外国語学研究科ロマンス系言語専攻。
海外TV番組台本・映画字幕翻訳を経て、ライトノベル作家（別名義）、漫画原作者。
作品『江戸釣り百景　ぶらり百竿』『和算に恋した少女』（小学館ビッグコミックス）。
筋金入りの数学嫌いだったが、和算を題材に物語を書くうちに、実は「数がとても不思議だった」し、
「算数はとても楽しかった」ことを思い出す。以来、数学にほんのり片思い。

14:45～15:15

パネルディスカッション - 数理を中心に据えた科学の異文化交流 -



「大陸河川」＝大陸を流れるとても大きな河川



	河川	河川流量 [m3/s]		河川	河川流量 [m3/s]
1	アマゾン川	209,000	1	信濃川	504
2	コンゴ川	412,000	2	石狩川	469
3	ガンジス-ブマプトラ川	38,100	3	阿賀野川	403
4	オリノコ川	36,000	4	最上川	393
5	長江	30,100	5	北上川	323
6	ラプラタ川	22,000	6	木曽川	291
7	エニセイ川	19,600	7	淀川	267
8	レナ川	16,800	8	雄物川	259
8	セントローレンス川	16,800	9	天竜川	237
8	ミシシッピ川	16,800	10	利根川	183

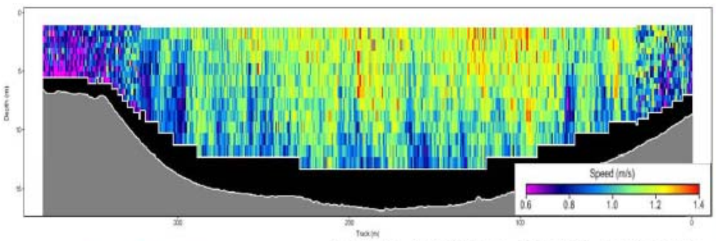
大陸河川による水輸送は、地球水循環システムの一部

気候・生態系・人間活動（水資源・災害）と大きく関連している
→ 大陸河川における水の流れを調べることは、地球システム研究にとって大事

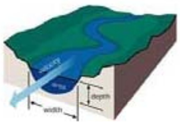
出典：USGS
(United States Geological Survey)

海上での蒸発 → 大気での海から陸への水蒸気輸送
→ 陸上での降水 → 河川による陸から海への水輸送

河川流量（河川を流れる水の量）はどう測定する？



超音波式流速計による断面流速分布
（図：USGS）



河川流量 ＝ 河道断面積 × 平均流速

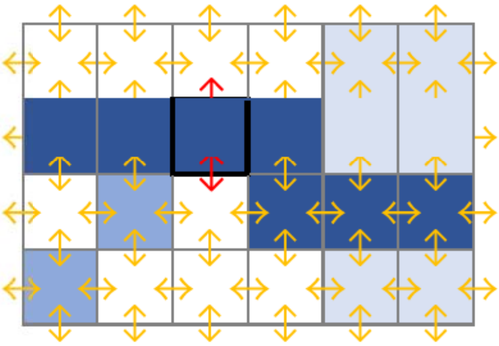
「断面積」も「流速」も、フィールドに出て計測しなければ分からない

地球規模での河川の流れを知るには、
全ての河川に行って、断面と流速を毎日計測する必要がある？

→さすがに無理なので、
数学とコンピュータを使って河川の流れを計算する方法を考えよう

コンピューターによる河川シミュレーション

河川モデルLISFLOOD-FP （画像提供：英国ブリストル大学）

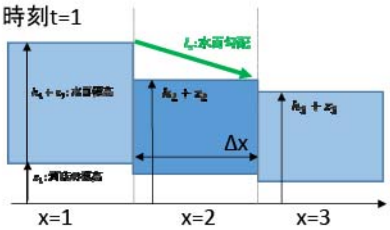


1. 河川流域を多数の格子（メッシュ）で区切る
2. 各格子に水深hを定義する
3. 格子間を移動する流量qを定義する

水深・流量を空間(x,y)と時間(t)の関数とする。
運動量保存則と質量保存速を用いて、水深・流量の変化を計算。

運動量保存則（拡散波方程式）

上流から下流に移動したときに減少した位置エネルギーは
摩擦により失われたエネルギーに等しい。



$$g\frac{\partial h}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{gn^2q^2}{h^{10/3}}$$

水圧勾配　地形勾配　摩擦抵抗

$$g\frac{\partial(h+z)}{\partial x} \rightarrow g\frac{\Delta(h+z)}{\Delta x} \rightarrow g\frac{(h_2+z_2)-(h_1+z_1)}{\Delta x} \rightarrow gi_s$$

h+z: 水面標高　差分化　i_s: 水面勾配

差分化

$$g\frac{(h_2+z_2)-(h_1+z_1)}{\Delta x} = \frac{gn^2q^2}{h^{10/3}}$$

Δxあたりの位置エネルギーの減少量　摩擦抵抗

変形・整理

$$q = n^{-1}h^{5/3}{i_s}^{1/2}$$

流量　摩擦係数　水深　水面勾配

時間・空間で変化する変数
q：流量
h: 水深

変化しない定数
z: 河床の標高
n: 粗度
g: 重力加速度

→運動量保存則を用いると、水深hから流量qを求められる

質量保存則（連続式）

河川を流れる水量の総和は、変化せず保存される。

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r$$

水位変化　流量勾配　流入量

q：流量 (m^3/s)
h: 水深 (m)
r: 流入量 ($m^3/s/m^2$)

差分化

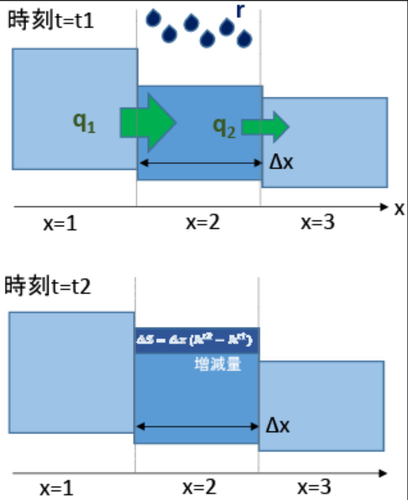
$$\frac{h^{t2}-h^{t1}}{\Delta t}+\frac{q_2-q_1}{\Delta x}=r$$

時間Δtでの平均水位変化　距離Δxの平均流量変化

変形・整理

$$\Delta x(h^{t2}-h^{t1}) = \Delta t\, q_1 - \Delta t\, q_2 + \Delta t \Delta x\, r = \Delta S$$

格子サイズ×水位変化　上流からの流入　下流への流出　外部からの流入　水量の増減



→質量保存則を用いると、時刻t1の水位・流量・流入量から、時刻t2の水位を予測できる

運動量保存則・質量保存則を順番に繰返し計算すると・・・

●運動量保存則（拡散波方程式）

$$g\frac{\partial h}{\partial x}+g\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{gn^2q^2}{h^{10/3}}$$

時刻t1の水位h（既知）から、流量q（未知）を計算

●質量保存則（連続式）

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=r$$

時刻t1の水位h・流量q・外力r（既知）から、
時刻t2の水位h（未知）を予測

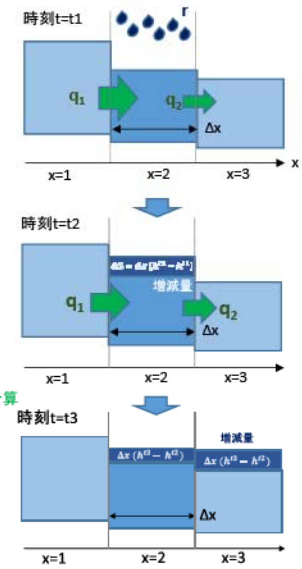
●運動量保存則

時刻t2の水位h（既知）から、流量q（未知）を計算

●質量保存則

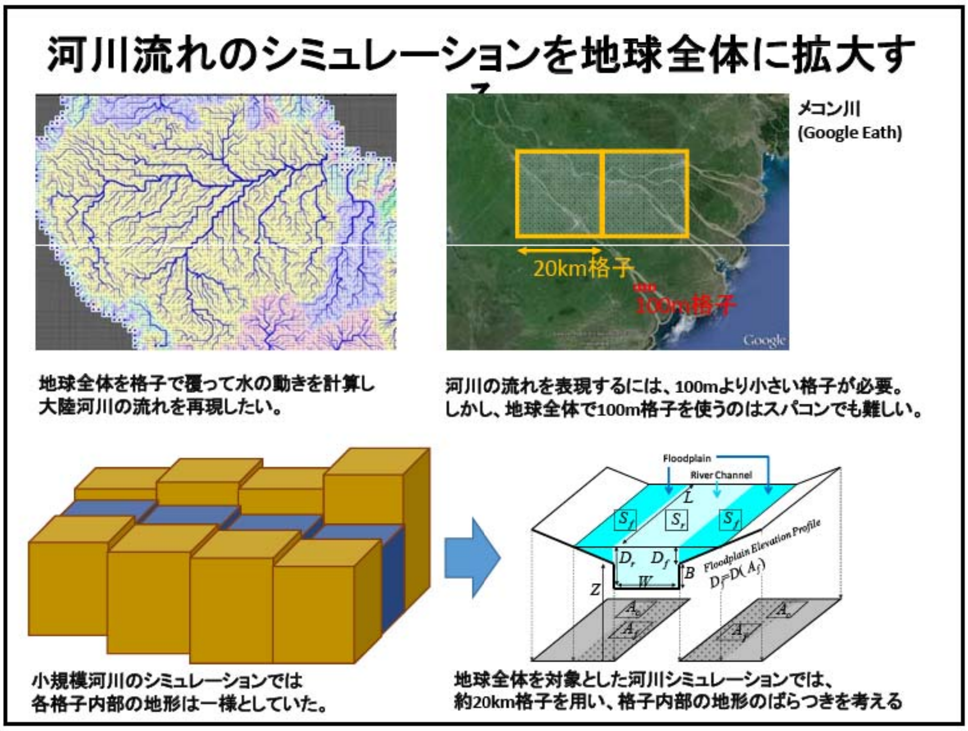
時刻t2の水位h・流量q・外力r（既知）から、
時刻t3の水位h（未知）を予測

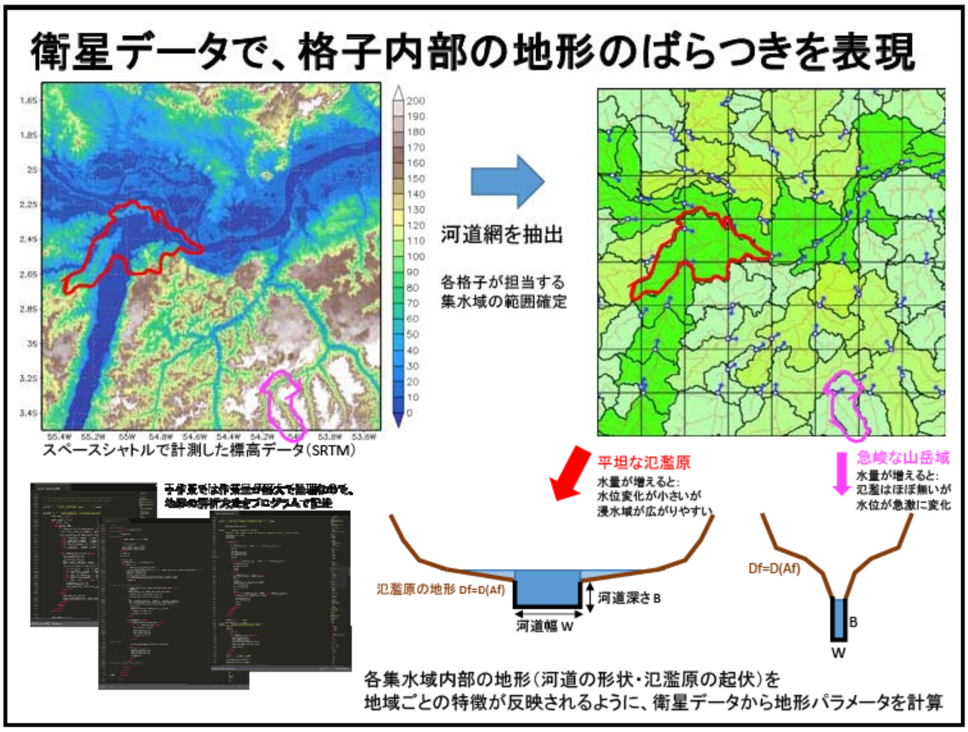
・・・繰返し



→河川の水位・流量の時間変化を計算できる！
⇒方程式を順番に繰返し解と、すべての時間・空間での河川流れを把握できる。

地球規模での河川流れのシミュレーション
山崎　大





地球規模での河川流れのシミュレーション
山崎　大

地球全体を対象とした河川シミュレーションの式

●格子内部の地形のばらつきの式

時刻t1の水量S^{t1}から、時刻t1の水位hを計算

$$h = f(S)$$

水深　水量の関数

$h = f(S)$ の詳細

- 河道の水量 $S_r = S - S_f$
- 河道の水深 $D_r = \frac{S_r}{WL}$
- 氾濫原の水量 $S_f = \int_0^{A_f} (D_f - D(A))dA$
- 氾濫原の水深 $D_f = D_r - B$
- 氾濫面積 $A_f = D^{-1}(D_f)$.

●運動量保存則

時刻t1の水位hから、河川流量qを計算

$$g\frac{\partial h}{\partial x} + g\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{gn^2q^2}{h^{10/3}} \Rightarrow q = n^{-1}h^{5/3}{i_s}^{1/2}$$

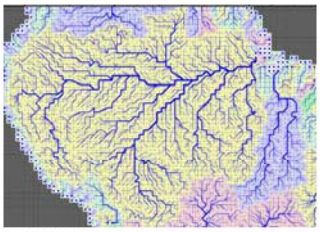
流量　粗度　水深　水面勾配

●質量保存則

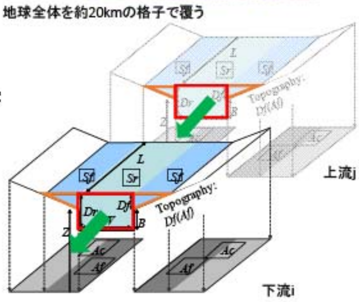
時刻t1の水位h・流量q・外力rから、
時刻t2の水量S^{t2}を予測

$$S^{t2} = S^{t1} + \Delta t \sum_j q_j - \Delta t\, q_i + A_c \Delta t\, r$$

次時間の水量　前時間の水量　上流からの流入　下流への流出　外部からの入力



地球全体を約20kmの格子で覆う



各格子内部の地形のばらつきを考慮しつつ、水位・流量を計算する

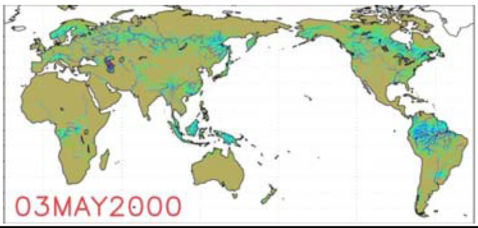
小規模河川の基礎方程式に「地形のばらつきの式」を追加することで、
地球全体を対象にしても河川シミュレーションを実現できる

地球規模で河川の流れを調べるには？

→実際にフィールドに出て、河川流量を測定してみる
×フィールド観測だけでは、地球規模の河川の流れは分からない

→数学の力を借りて、コンピュータで河川の流れを計算する
○河川流域を多数の格子で区切って、水位と流量の変化を計算する
○物理法則の式（運動量保存則・質量保存則）を適切に組合わせると
時刻t1の水位から時刻t2の水位を予測できる！河川流れのシミュレーション
×ただし100m程度の格子サイズが必要で、地球全体の計算は難しい

→約20kmの格子で河川を表現するため、地形のばらつきを考慮
○格子内の多様な地形（河川・氾濫原・高台）を関数で表現
○山岳域や扇状地など、異なる地域の地形の特性を衛星データから抽出
○「地形のばらつきの式」を追加し、地球規模の河川シミュレーションが実現



現地観測だけでは分からない
時間的・空間的に連続した河川流れの計算を達成

全地球河川水動態モデル
CaMa-Floodによる河川流量シミュレーション
（Yamazaki et al., 2011, 2013, 2014）

地球規模での河川流れのシミュレーション
山崎　大

経済学の分析する対象

私の分析する家計

- 家計には夫と妻が存在する。
- 必ずしも夫婦が同じ目的を持っているとは限らない。
- 二人は、話し合ってものごとを決める。

2

経済学において夫婦の力関係を決めるものは？
→たとえば、経済力。

話し合い（交渉）で意思決定する夫婦の力関係の決まり方は、協力的な結婚生活が成立しない時（極端には離婚）に困るのは誰かという問題になる。

たとえば、仮に結婚相手との話し合いがうまくいかなくても、十分なお金があれば消費することで幸せに暮らせるのでそんなに困ることはない。

話し合いで強く出るためには、自由に使えるお金がどれだけあるかが重要。

現在の研究の概要

明らかにしたいこと：
「戦後における出生率の変化はなぜ起こったのか。」
研究の特徴
1. 夫婦は子どもの数に対して**異なる目的**を持つ。
2. 世帯としての意思決定は、**話し合い（交渉力）**によって決まる。

Q.交渉力は何で決まる？
A.男女比。

4

経済理論モデル（家計）

- 個人iの効用関数：家族それぞれの幸せ

$$u_i(x_i, n) = \underbrace{\log\ x_i}_{x_i\text{の量食べられて嬉しい}} + \underbrace{\varphi_i \log n}_{n\text{人の子どもがいて嬉しい}}$$

※観察されるエビデンスから$\varphi_f < \varphi_m$を仮定する。

- 夫婦の厚生関数：世帯としての目的

$$\Omega = \underbrace{\theta u_f + (1-\theta) u_m}_{\text{妻の交渉力}\theta\text{が高い（低い）と奥さんの言い分が通る（通らない）}} \quad （ただし、0 \le \theta \le 1）$$

- 予算制約：家族で使えるお金の上限

$$\underbrace{x_f + x_m}_{\text{子ども以外の支出}} \le \underbrace{w^f (1 - tn) + w^m}_{n\text{人の子どもを育てて得られる労働所得}}$$

5

経済理論モデル（女性の交渉力）

女性（妻）の交渉力

$$\theta = \theta(\sigma)$$

ただし　$\theta'(\sigma) > 0.$

男性の比率が上がる（下がる）と妻の交渉力が上がる（下がる）。

- $\sigma \equiv \frac{N_m}{N_f}$：男女比

（結婚適齢期男性人数/結婚適齢期女性人数）

6

家計の最適化問題

$$\max_{x_f, x_m, n} \ \Omega = \theta u_f + (1-\theta) u_m$$

$$\text{s.t.} \quad u_i(x_i, n) = \log x_i + \varphi_i \log n$$

$$x_f + x_m \leq w^f(1-tn) + w^m$$

$$\theta = \theta(\sigma)$$

家計当たりの子どもの数

$$n = \frac{\theta(\sigma)\varphi_f + [1-\theta(\sigma)]\varphi_m}{1+\theta(\sigma)\varphi_f + [1-\theta(\sigma)]\varphi_m} \frac{(w^f + w^m)}{w_f t}$$

7

男女比が出生率に与える効果

家計当たりの子どもの数

$$n = \frac{\theta(\sigma)\varphi_f + [1-\theta(\sigma)]\varphi_m}{1+\theta(\sigma)\varphi_f + [1-\theta(\sigma)]\varphi_m} \frac{(w^f + w^m)}{w_f t}$$

出生率を男女比の変化で微分する

$$\frac{dn}{d\sigma} = \frac{\partial n}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}$$

$$\frac{dn}{d\sigma} = \underbrace{\frac{\varphi_f - \varphi_m}{1+\theta(\sigma)\varphi_f + [1-\theta(\sigma)]\varphi_m} \frac{(w^f + w^m)}{w_f t}}_{(-)} \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial \sigma}}_{(+)} < 0$$

8

分析結果

数式があらわす仮説

男性の比率↓ → 男性見つけやすさ↓ → 夫(妻)の交渉力↑（↓）
→夫の子どもの希望数（＞妻の希望数）を反映しやすくなる

都道府県データでの結果

男性/女性の比率が大きく**下がった**地域は、戦後の出生率低下の度合いが**小さく**なることが現実のデータにおいても観察された。

夫婦のコンフリクトがあって初めて出る結果！

9

数学で家族を分析することの意義

- 家族の問題はそれぞれに経験があり、想いがある、デリケートでセンシティブな問題だからこそ、<u>感情や個人的な想いはできるだけ排除して、**数式**にアイデアを乗せる。</u>
- 必ずしも、経済学がすべての問題を解決してくれるわけではないが、数式で得た仮説を統計的な処理で検証することで、一定の<u>**客観的な答え**を出す</u>ことができる。

10

例１　これは，米国のある社会学者による例である．彼によれば，一般に次の等式が成り立つという．

$$\frac{\text{社会的流動性}}{\text{経済的発展}} = \text{社会的フラストレーション}$$

$$\frac{\text{社会的フラストレーション}}{\text{流動の機会}} = \text{政治参加}$$

$$\frac{\text{政治参加}}{\text{政治の制度化}} = \text{政治的安定性}$$

このような等式から，この社会学者は，1960年代初めの南アフリカが「満足できる社会」という結論を下した．上の等式が，数学的にも，またメタファとしても無意味なことは，もし上の等式が正しければ，

$$\begin{aligned} &\text{社会的流動性} \\ = \ &\text{経済的発展} \cdot \text{流動の機会} \cdot \text{政治の制度化} \cdot \text{政治的安定性} \end{aligned}$$

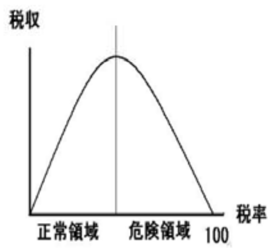
という意味不明の「結論」が導かれることから明らかである．そして，当時のアパルトヘイト時代は，暴動，ストライキ，警察による大衆に対する銃撃などが続き，南アフリカが「満足できる」社会でなかったことも確かである．

1

例２　米国のレーガン政権時代（80年代）は,「サプライサイド」の経済学が幅を利かせ，それが経済政策に取り入れられた（いわゆるレーガノミックス）．サプライサイド経済学の中核を成すのは,「高い税率は生産活動の意欲を殺ぎ、経済成長を抑制する。一方、税収によって賄われる政府活動は、民間に比し非効率に資源を使用。その結果、経済全体としての生産性が低下。これを避けるためには、税率の引き下げと政府活動の縮小が必要」との主張である．

その「モデル」として使われたのがであるが，図1.16に示したラッファー[3]曲線[4]というもので，これを基に「政府が限界税率を引き上げていくと、最初のうちは税収が増加する（ いわゆる「正常領域」） ものの、ある一定の税率を超えると、人々の労働意欲が減少し、その結果、税収も減少する（ いわゆる「危険領域」)」と主張した．素人でも，学問的にはまったく粗雑であることが分かるだろう．

実際，減税の労働、貯蓄への影響は確認できなかったし，財政収支赤字は家計貯蓄率の低下と相まって、経常収支赤字の拡大を招いた．比較的ニュートラルなアカデミズムの実証研究では、効果は限定的との評価が大勢である．



2

パネルディスカッション