脳磁図解析のための
ノイズを含む多チャンネルデータからの
ノイズ共分散行列の直接推定法

ソムチャイ ヌアンプラサート（阪大）
山岸 弘幸（都立産技高専）

$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: 観測信号

$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: 源信号

$\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: ノイズ

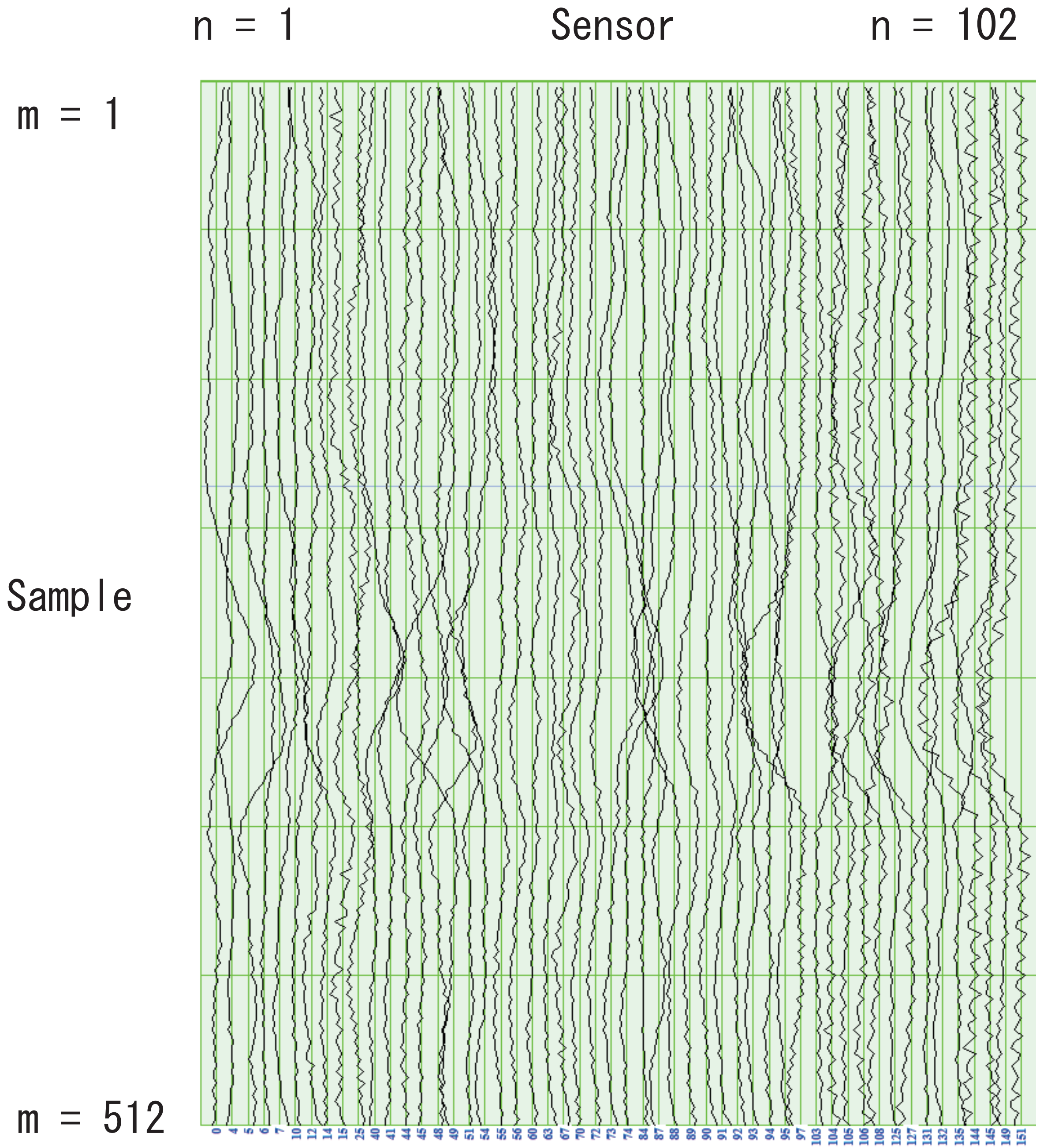
$\mathbf{X} = \mathbf{S} + \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $(m > n)$

m : 時間によるサンプル数

n : 位置によるセンサー数

$\mathbf{R}_N = \mathbf{N}^T\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n \times n}$: ノイズ共分散

観測信号X



仮定

(i) $\quad \mathbf{rank}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{p} < \boldsymbol{n}$

(ii) $\quad \mathbf{rank}(\mathbf{N}) = \boldsymbol{n}$

(iii) $\quad \mathbf{S}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{N} = \mathbf{N}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{S} = \mathbf{O}$

MEG/EEG研究における
多チャンネルデータからの磁場源推定

1.観測データXからノイズNを取り出して推定

$$\mathrm{X} = \mathrm{S} + \mathrm{N} \;\; \rightarrow \;\; \mathrm{N} \;\; \rightarrow \;\; \mathrm{R}_N = \mathrm{N}^T\mathrm{N}$$

2.観測信号Xから直接ノイズ共分散R_Nを推定

時間差法（TSD法）Green et. al. 1988

提案手法（FST法）

動機

Bart 1993 信号回復法

ホワイトノイズ $\mathrm{R}_N = \boldsymbol{\sigma}_N^2 \mathrm{I}$

特異値分解(SVD)

提案手法

カラーノイズ $\mathrm{R}_N \neq \boldsymbol{\sigma}_N^2 \mathrm{I}$

一般化特異値分解(GSVD)

２つの問題点とその解決

１. 仮定の下，ノイズ共分散が与えられていない

一意でない解をどのように選ぶか？

$\longrightarrow$ 最適化問題$\mathcal{OP}$を解くことで解決

２. 最適化問題$\mathcal{OP}$の効率的解法は？

$\longrightarrow$ ノイズ除去関数を段階に応じて適切に選択する

検証

生体データを用いた数値実験

ＴＳＤ法と提案手法の比較

提案手法の方がより限局的に推定

ＴＳＤ法によるノイズ共分散推定

X_t ： 時刻$t = 1, 2, \cdots, m-1$でのデータ

X_s ： 時刻$t = 2, 3, \cdots, m$でのデータ

$$\widehat{\mathrm{R}}_{N,TSD} \triangleq \frac{1}{2}(\mathrm{X}_t - \mathrm{X}_s)^T(\mathrm{X}_t - \mathrm{X}_s) \approx \mathrm{N}^T\mathrm{N}$$

提案手法によるノイズ共分散推定

設定：X，$\mathrm{rank}(\mathrm{S}) = p$

目標：$\widehat{\mathrm{R}}_{\mathcal{F}} = \widehat{\mathrm{N}}_{\mathcal{F},*}^{T} \widehat{\mathrm{N}}_{\mathcal{F},*}$

Colored Subspace Analysis (CSA)

Theis 2010

$$\widehat{\mathrm{S}}_{CSA} = \mathrm{X}\widehat{\mathbf{W}}_{CSA}\left(\widehat{\mathbf{W}}_{CSA}\right)^{\dagger}$$

$$\widehat{\mathrm{N}}_{CSA} = \mathrm{X} - \widehat{\mathrm{S}}_{CSA}$$

$$\mathrm{R}_{N,CSA} = \widehat{\mathrm{N}}_{CSA}^{T}\widehat{\mathrm{N}}_{CSA}$$

一般化固有値問題

$$\mathrm{GEVP}(\mathrm{R}_{\boldsymbol{X}}, \mathrm{R}_{\boldsymbol{N},\,\boldsymbol{CSA}})$$

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{e}_i = \zeta_i \mathrm{R}_{\boldsymbol{N},\,\boldsymbol{CSA}}\boldsymbol{e}_i \qquad (\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \cdots, \boldsymbol{n})$$

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{X}} = \mathrm{X}^{\boldsymbol{T}}\mathrm{X}$$

$$\mathrm{R}_{\boldsymbol{N},\,\boldsymbol{CSA}} = \widehat{\mathrm{N}}^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{CSA}}\widehat{\mathrm{N}}_{\boldsymbol{CSA}}$$

$$\mathrm{Q}_{1,\,\boldsymbol{int}} = [\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_p] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\,\times\,\boldsymbol{p}}$$ ：長さ１の非直交行列

最適化問題$\mathcal{OP}$

$$\min_{\widehat{\mathrm{S}} = \mathcal{F}\left(\mathrm{XQ}_{1,\,int}\right)\mathrm{Q}_{1,\,int}^{\dagger}} \left[\frac{\left\| \widehat{\mathrm{S}} - \varphi\left(\widehat{\mathrm{S}}\right) \right\|_F}{\|\mathrm{X}\|_F} + \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{X,\,i}^2 - \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{N,\,i}^2}{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{X,\,i}^2}} \right]$$

$$\|\mathrm{X}\|_F \triangleq \mathrm{tr}\left(\mathrm{X}^T\mathrm{X}\right), \qquad \varphi\left(\widehat{\mathrm{S}}\right) \triangleq \left(\widehat{\mathrm{U}}_{X1}\widehat{\Sigma}_{X1} - \widehat{\mathrm{U}}_{N1}\widehat{\Sigma}_{N1}\right)\widehat{\mathrm{V}}_1^T$$

$\mathcal{F}(\cdot)$: Savitzky-Golayフィルター（SGフィルター）
Candan et.al. 2014

一般化特異値分解

$$\mathrm{GSVD}(\mathrm{X}, \mathrm{X} - \widehat{\mathrm{S}})$$

$$\begin{cases} \mathbf{X} = \widehat{\mathbf{U}}_{X} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{X} \widehat{\mathbf{V}}^{T} \\ \mathbf{X} - \widehat{\mathbf{S}} = \widehat{\mathbf{U}}_{N} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{N} \widehat{\mathbf{V}}^{T} \end{cases}, \qquad \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{X}^{2} + \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{N}^{2} = \mathbf{I}$$

$$\widehat{\mathbf{V}} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{V}}_{1} & \widehat{\mathbf{V}}_{2} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \;\; \widehat{\mathbf{V}}_{1} \in \mathbb{R}^{n \times p}, \;\; \widehat{\mathbf{V}}_{2} \in \mathbb{R}^{n \times (n-p)}$$

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{X}} = \left[\begin{array}{cc} \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{1}} & \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{2}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{1}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}}, \quad \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{2}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{X}} = \left[\begin{array}{cc} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{1}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{2}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{1}} = \mathbf{diag}\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\mathbf{1}}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{p}}\} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p}}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\boldsymbol{X}\mathbf{2}} = \mathbf{diag}\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{p}+\mathbf{1}}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{n}}\} \in \mathbb{R}^{(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})}$$

$$\mathbf{1} \geq \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\mathbf{1}} \geq \ldots \geq \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{X},\,\boldsymbol{n}} \geq \mathbf{0}$$

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{N}} = \left[\begin{array}{cc} \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{N1}} & \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{N2}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{N1}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{p}}, \quad \widehat{\mathbf{U}}_{\boldsymbol{N2}} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})}$$

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{N}} = \left[\begin{array}{cc} \widehat{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{N1}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \widehat{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{N2}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$$

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{N1}} = \mathbf{diag}\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\mathbf{1}}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{p}}\} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{p}}$$

$$\widehat{\mathbf{\Sigma}}_{\boldsymbol{N2}} = \mathbf{diag}\{\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{p}+\mathbf{1}}, \cdots, \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}}\} \in \mathbb{R}^{(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p}) \times (\boldsymbol{n} - \boldsymbol{p})}$$

$$\mathbf{1} \geq \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\boldsymbol{n}} \geq \ldots \geq \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_{\boldsymbol{N},\mathbf{1}} \geq \mathbf{0}$$

MATLAB関数fmincon

$$\text{fmincon}(\mathcal{OP},\ \mathrm{Q}_{1,int}) \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Q}_{1,*}$$

$$\widehat{\mathrm{S}}_* = \mathcal{F}\left(\mathrm{X}\mathrm{Q}_{1,*}\right)\mathrm{Q}_{1,*}^{\dagger} \quad : \quad \mathcal{OP}\text{のMinimizer}$$

$\mathcal{F}(\cdot)$: **SGフィルター** Candan et.al. 2014

$$\mathbf{GSVD}(\mathbf{X}, \mathbf{X} - \widehat{\mathbf{S}}_*) : \begin{cases} \mathbf{X} = \widehat{\mathbf{U}}_{X,*} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{X,*} \widehat{\mathbf{V}}_*^T \\ \mathbf{X} - \widehat{\mathbf{S}}_* = \widehat{\mathbf{U}}_{N,*} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{N,*} \widehat{\mathbf{V}}_*^T \end{cases}$$

$$\widehat{\mathbf{S}}_* = \left(\widehat{\mathbf{U}}_{X1,*} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{X1,*} - \widehat{\mathbf{U}}_{N1,*} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{N1,*} \right) \widehat{\mathbf{V}}_{1,*}^T \approx$$

$$\mathcal{F}\left(\widehat{\mathbf{U}}_{X1,*} \widehat{\boldsymbol{\Sigma}}_{X1,*} \right) \widehat{\mathbf{V}}_{1,*}^T \triangleq \widehat{\mathbf{S}}_{\mathcal{F},*}$$

$\mathcal{F}(\cdot)$: **EMDフィルター** Kopsinis et.al. 2009

提案手法による信号分析とノイズ共分散

$$\widehat{\mathrm{S}}_{\mathcal{F},*} = \mathcal{F}\left(\widehat{\mathrm{U}}_{X1,*}\widehat{\Sigma}_{X1,*}\right)\widehat{\mathrm{V}}_{1,*}^{T}$$

$$\widehat{\mathrm{N}}_{\mathcal{F},*} = \mathrm{X} - \widehat{\mathrm{S}}_{\mathcal{F},*}$$

$$\widehat{\mathrm{R}}_{\mathcal{F},*} = \widehat{\mathrm{N}}_{\mathcal{F},*}^{T}\widehat{\mathrm{N}}_{\mathcal{F},*}$$

FSTフィルター
（Flexible Spatio-Temporal filter）
２つのフィルターを段階に応じてしなやかに選択する

SGフィルター
$\mathcal{OP}$の段階でノイズ除去
素早い計算とガウシアンノイズに耐える

EMDフィルター
信号分析の段階でノイズ除去
処理時間が非常に長いが精度が良い

数値シミュレーションの条件

計算機：Intel Core i7-2600 3.4 GHz,
RAM 16 GB, Windows 7 64-bit

ソフトウェア：MATLAB R2010a

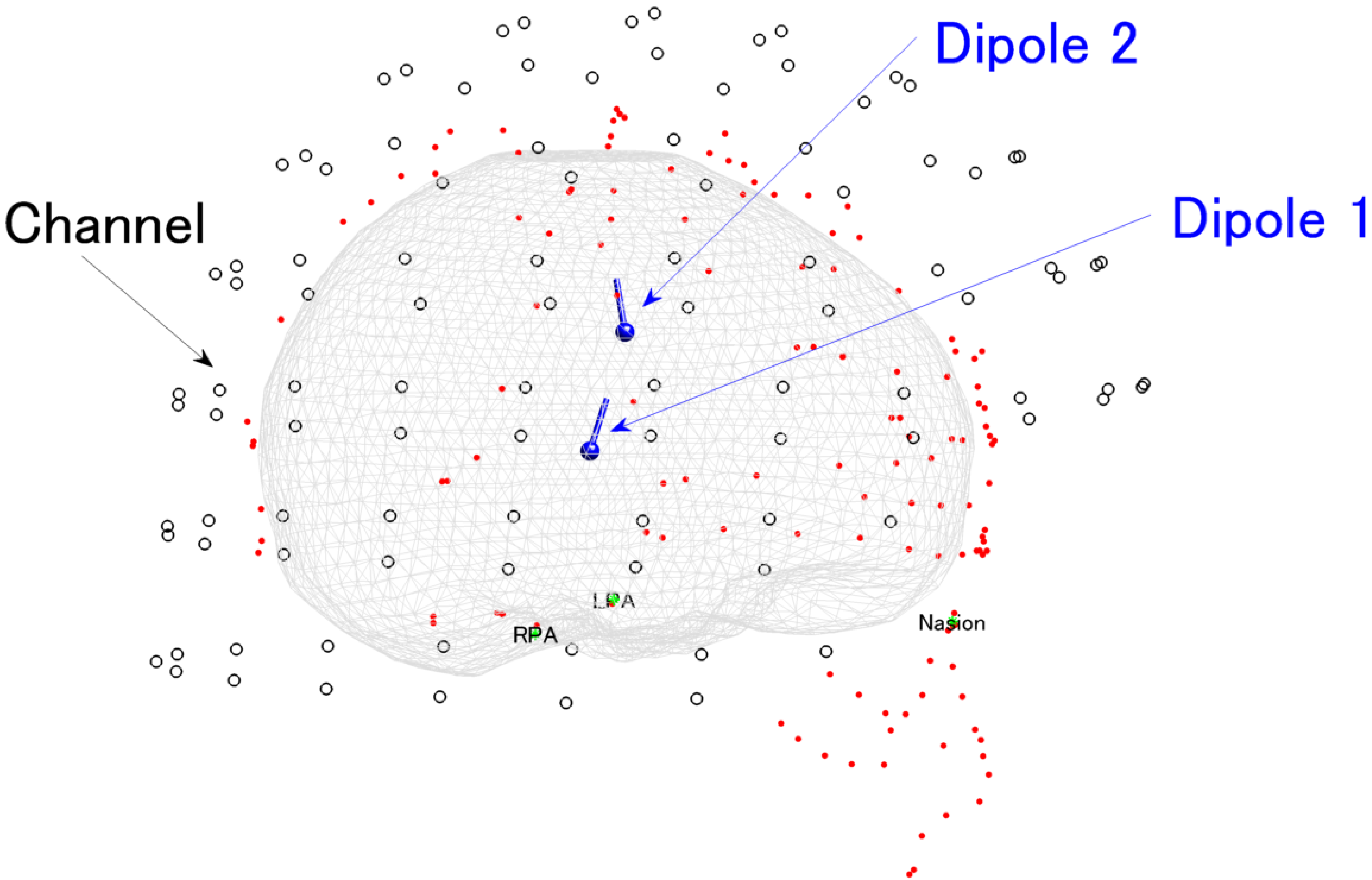
双極子の数：$p = 2$

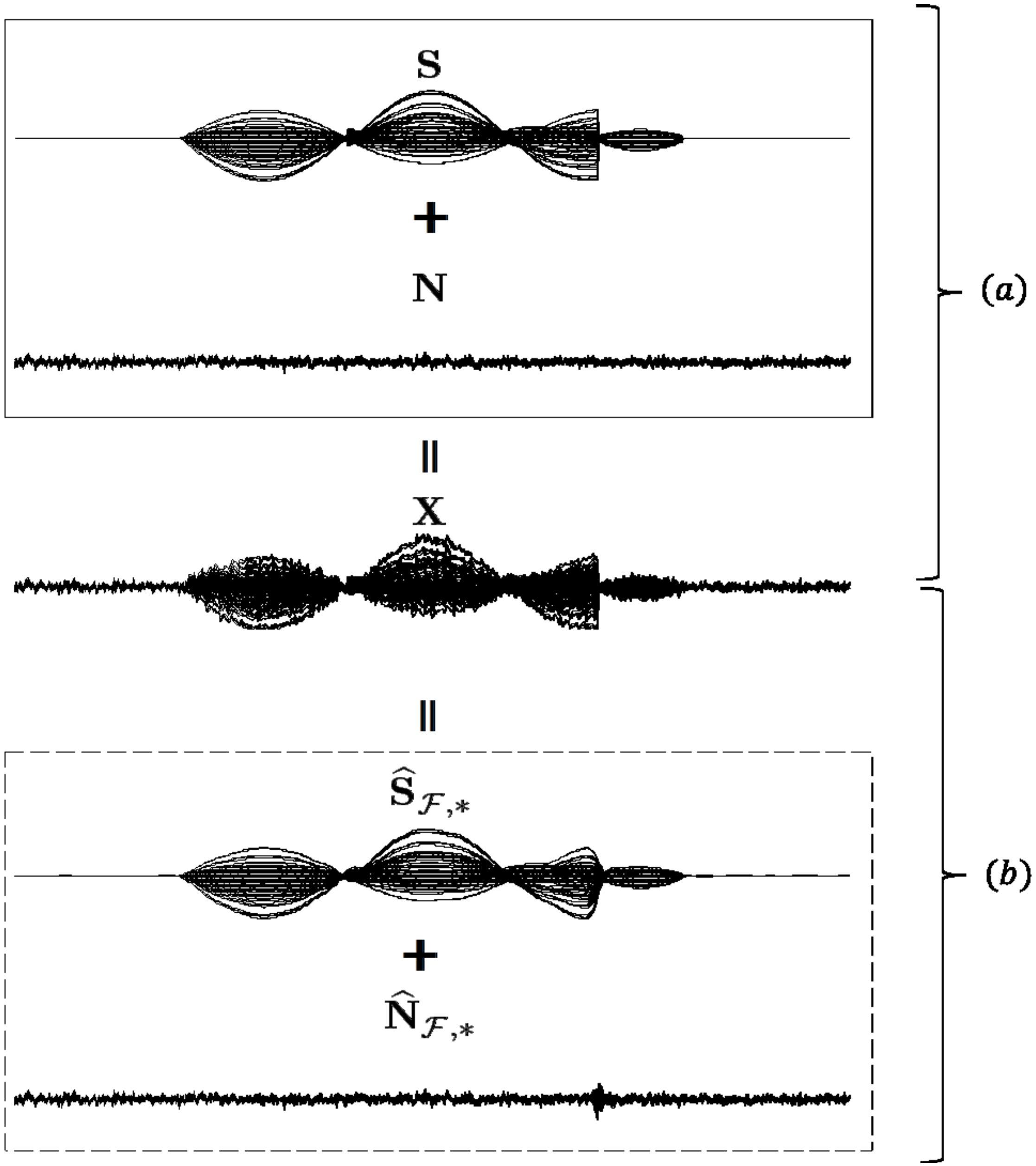
サンプル数：$m = 512$

MRIデータ「Subject #1」 Aine et. al. 2012

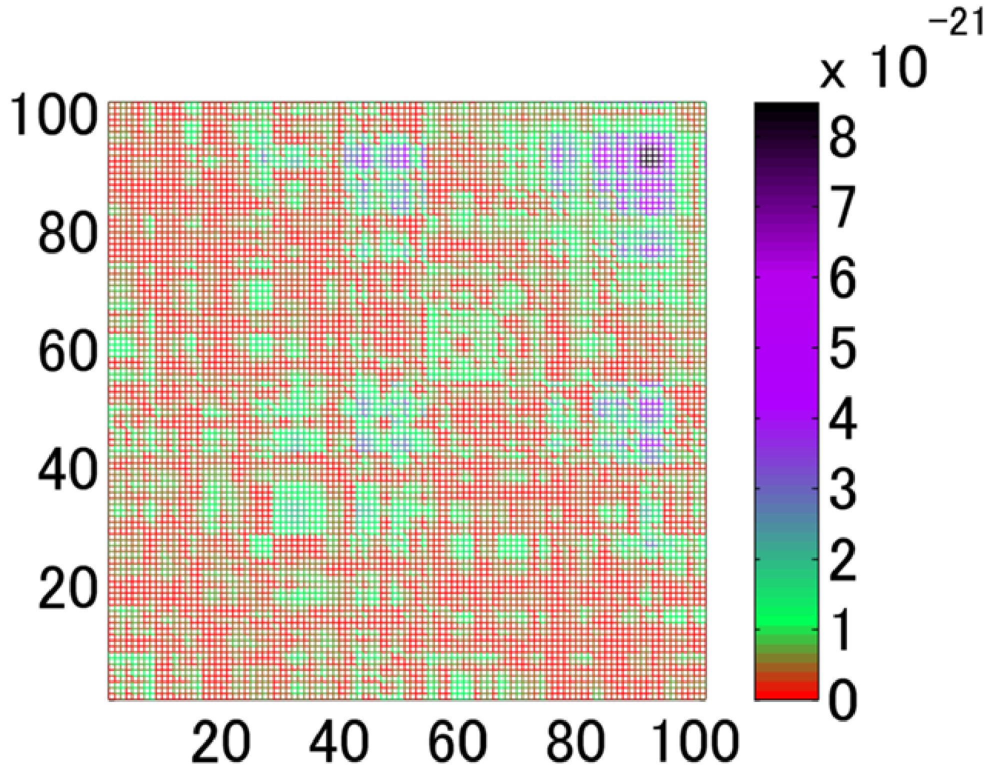
センサー数：$n = 102$

Elekta Neuromag製の脳磁計(MEG1)

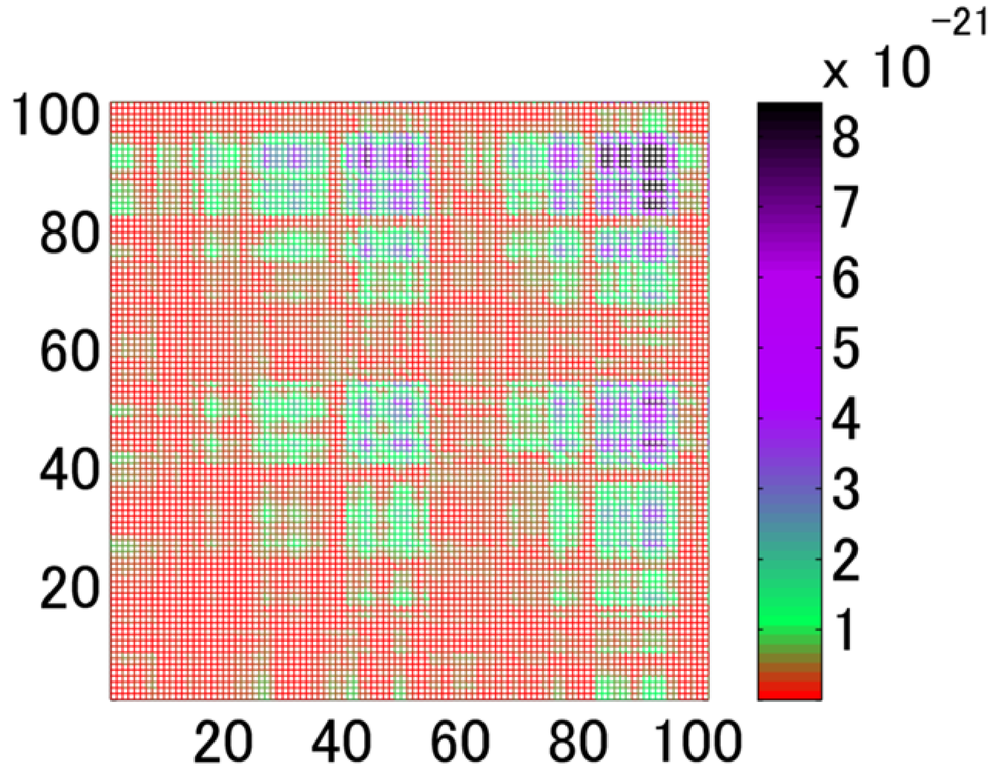

Dipole 2
Dipole 1
Channel
LPA
RPA
Nasion



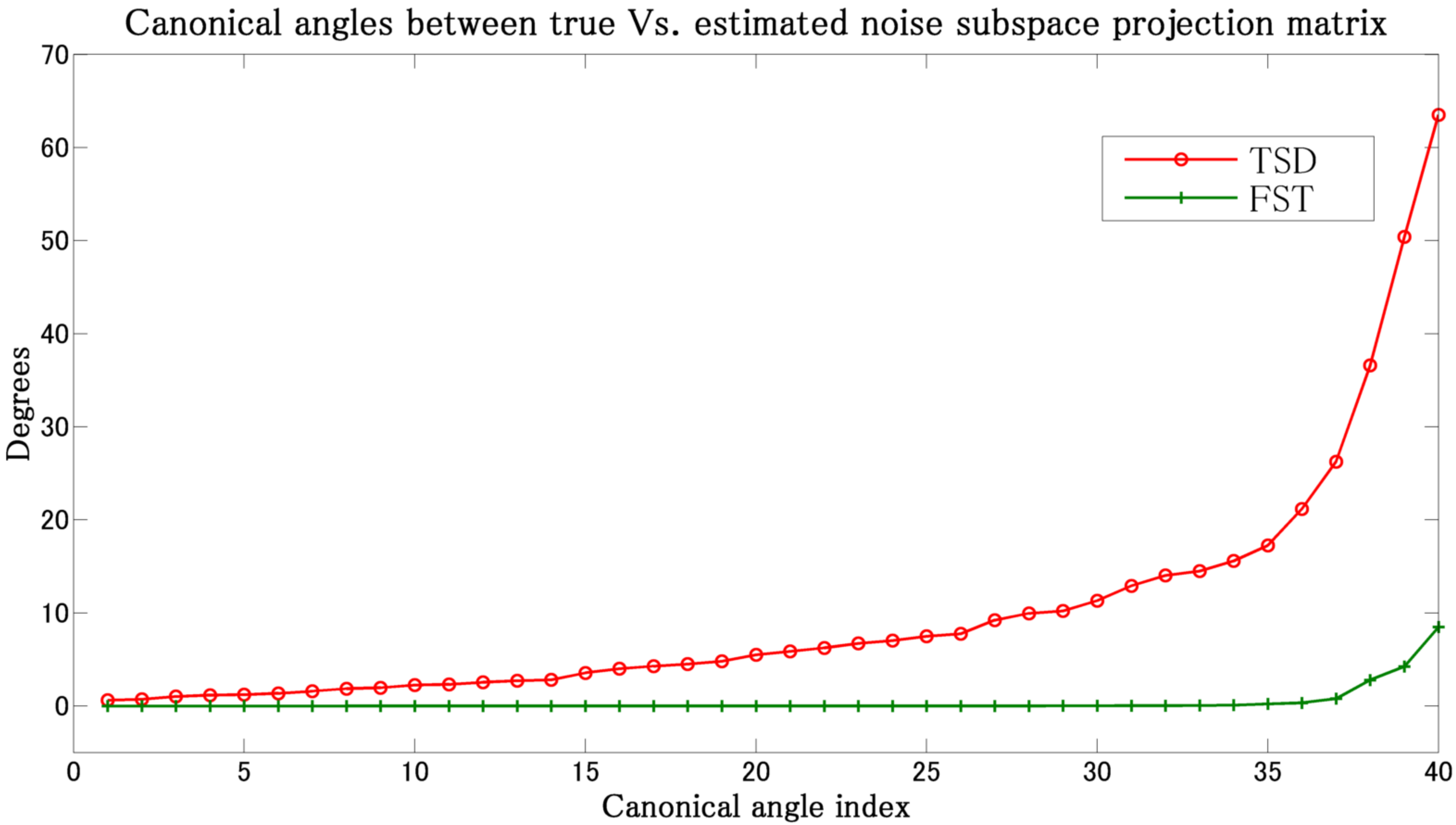
S
+
N
=
X
=
$\widehat{\mathbf{S}}_{\mathcal{F},*}$
+
$\widehat{\mathbf{N}}_{\mathcal{F},*}$
(a)
(b)



$\mathbf{R}_N - \widehat{\mathbf{R}}_{N,TSD}$



$\mathbf{R}_N - \widehat{\mathbf{R}}_{N,\mathcal{F}}$


Canonical angles between true Vs. estimated noise subspace projection matrix
70
60
50
40
30
20
10
0
Degrees
0
5
10
15
20
25
30
35
40
Canonical angle index
TSD
FST

ノイズ共分散を組み込んだMUSICアルゴリズム

Sekihara et. al. 1997

$$J(x) = \frac{1}{\boldsymbol{\lambda}_{\mathsf{min}}\left(\mathrm{L}(x)^T\widehat{\mathrm{E}}_N\widehat{\mathrm{E}}_N^T\mathrm{L}(x),\quad \mathrm{L}(x)^T\widehat{\mathrm{R}}_N^{-1}\mathrm{L}(x)\right)}$$

$x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ ： 頭部の位置ベクトル

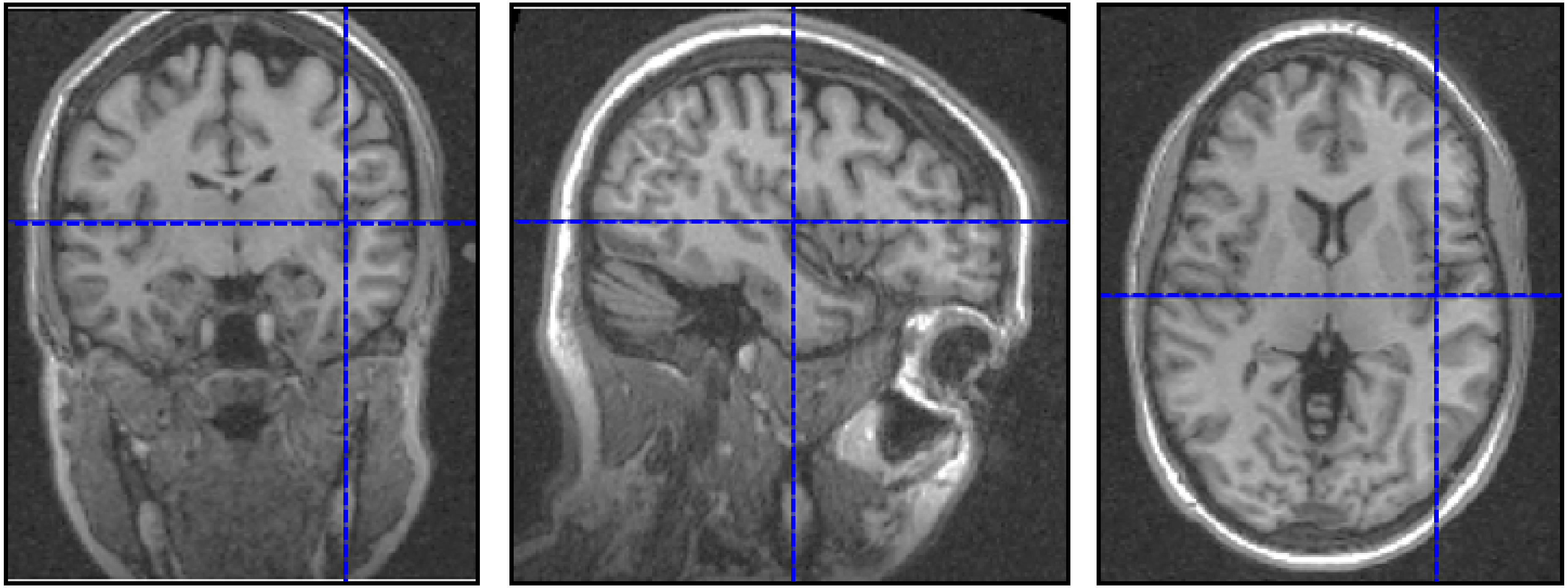
$\widehat{\mathrm{R}}_N$ ： ノイズ共分散行列

$\widehat{\mathrm{E}}_N$ ： $\mathrm{GEVP}(\mathrm{R}_X, \widehat{\mathrm{R}}_N)$ の固有ベクトルの組

$\mathrm{L}(x)$ ： リードフィールド行列

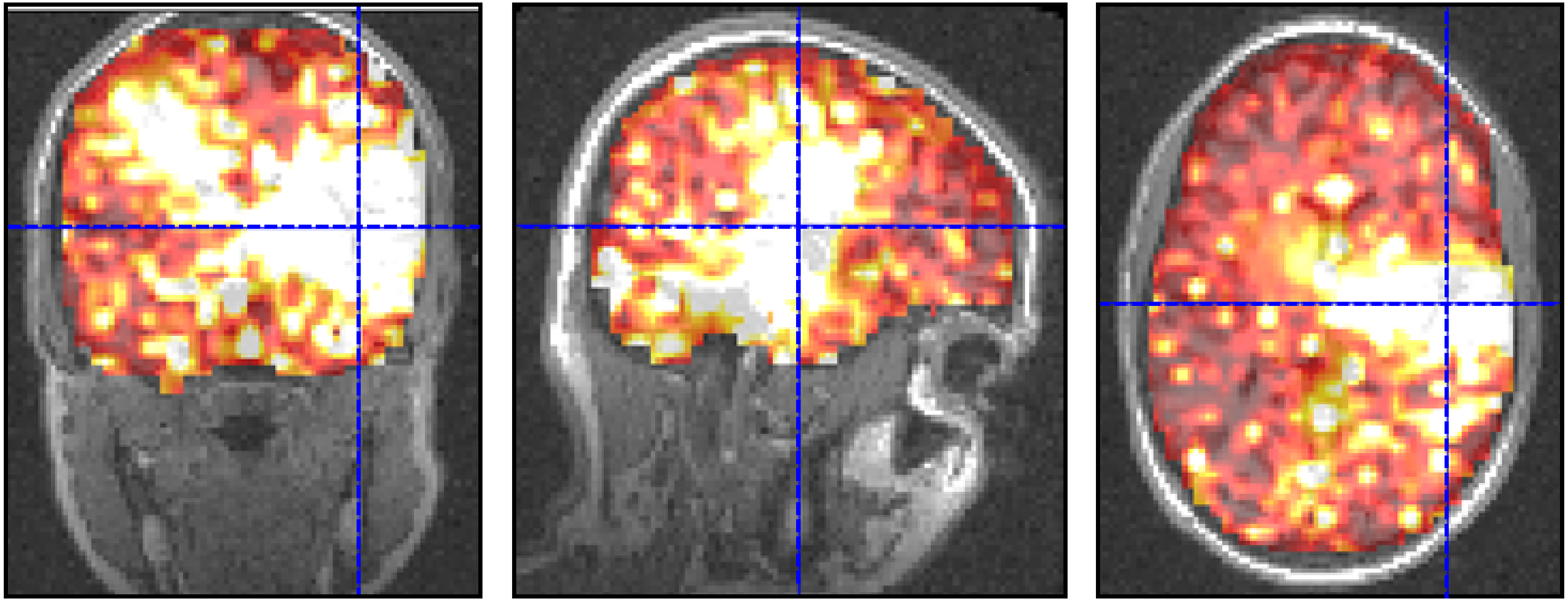
$\boldsymbol{\lambda}_{\mathsf{min}}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ ： $\mathrm{GEVP}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$の最小固有値

Dipole 1



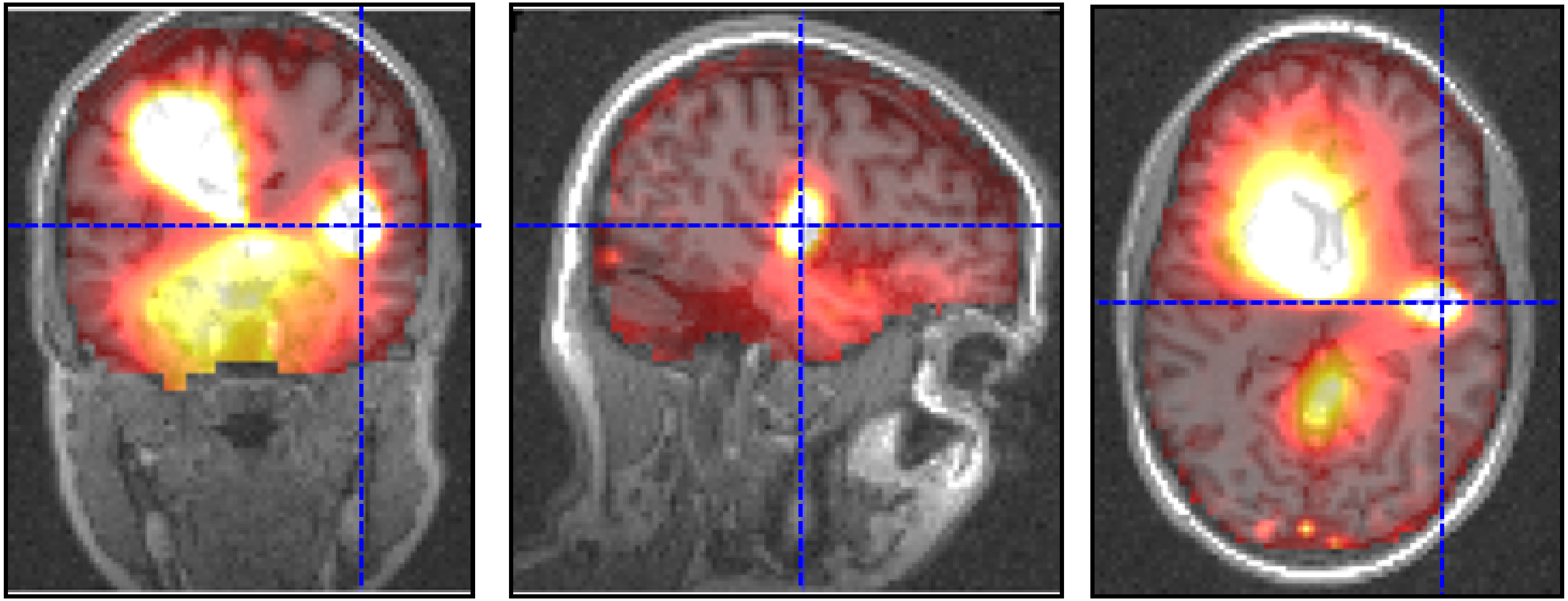
True locations of Dipole 1

Dipole 1



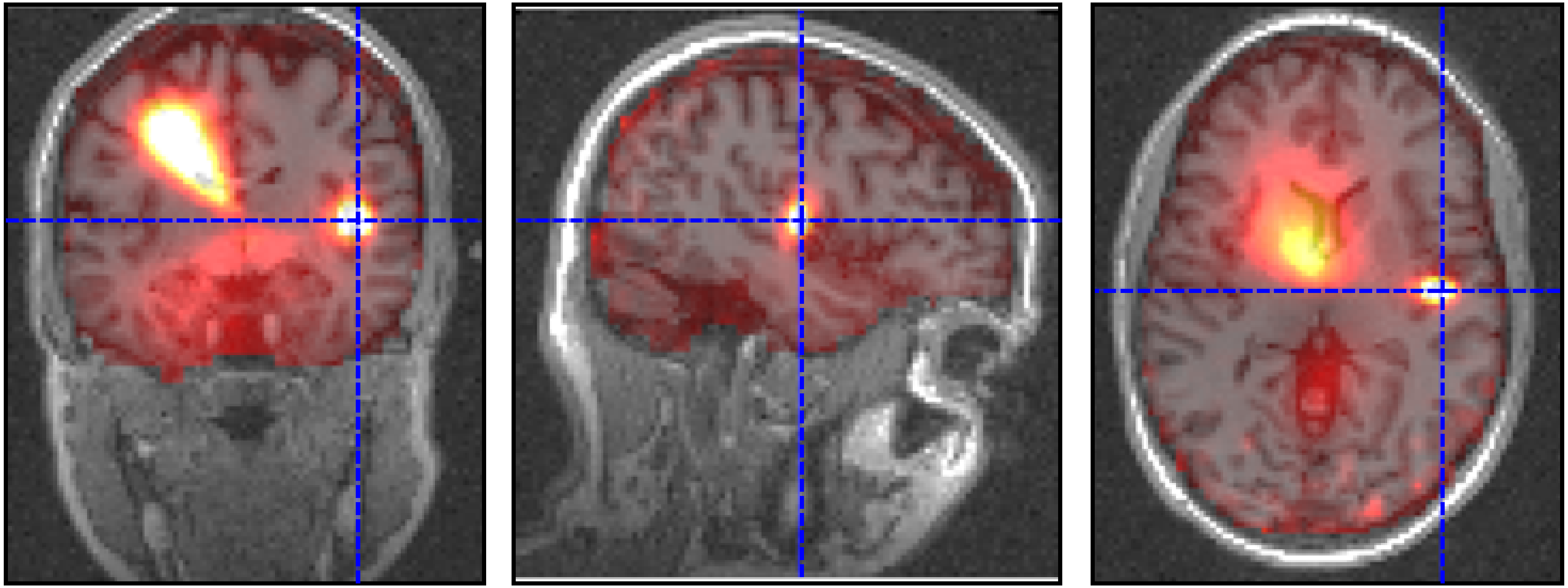
$$\widehat{\mathrm{R}}_N = \mathbf{I}$$

Dipole 1



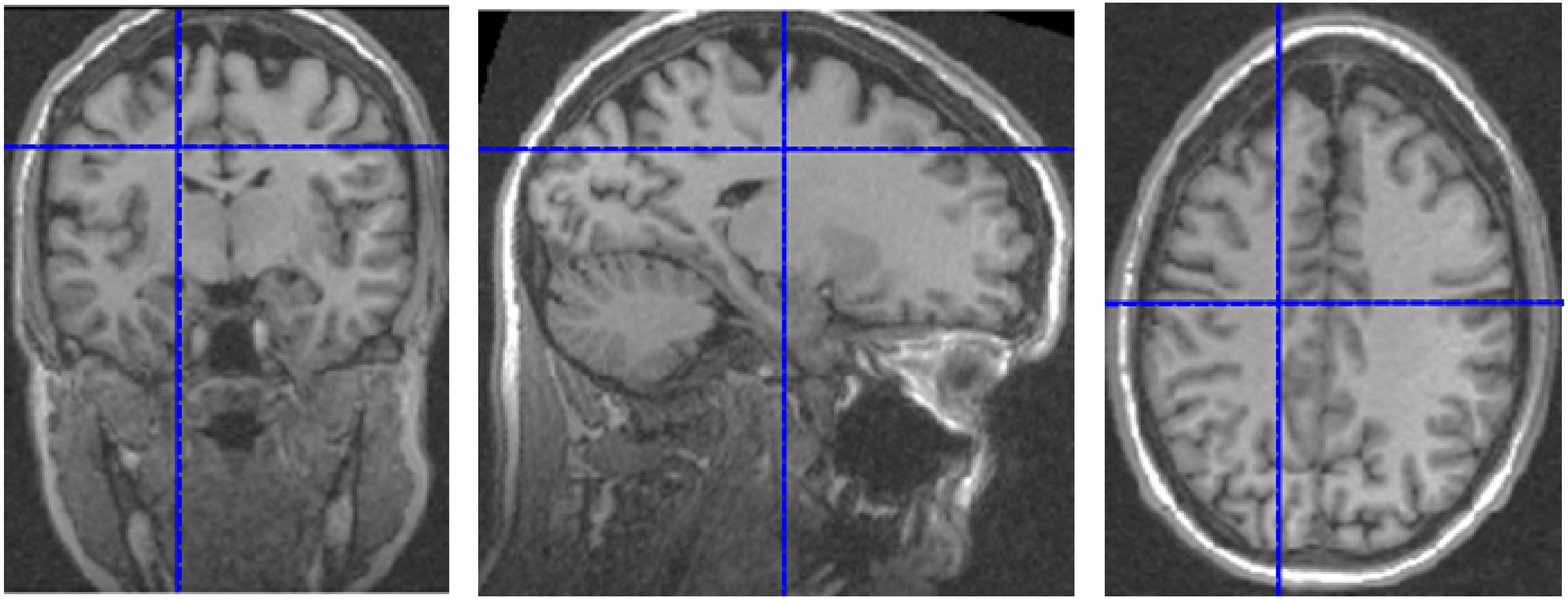
$$\widehat{\mathrm{R}}_{N} = \widehat{\mathrm{R}}_{N,TSD}$$

Dipole 1



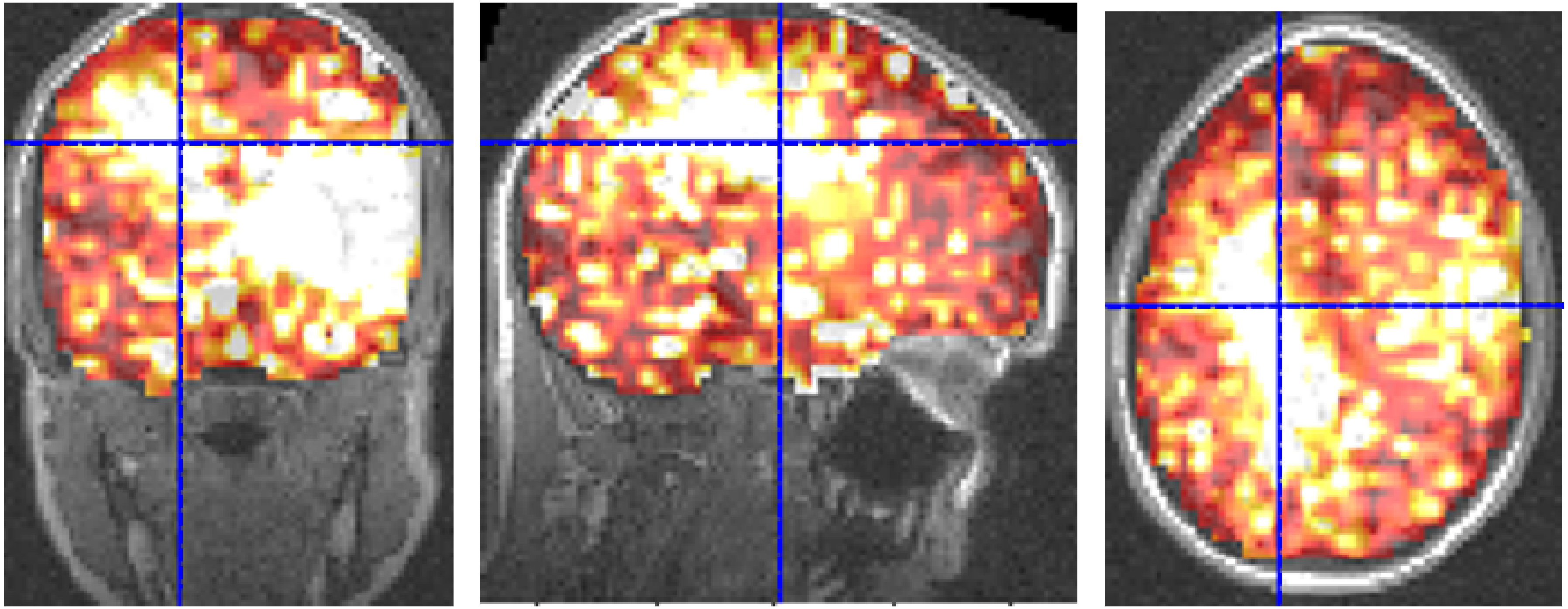
$$\widehat{\mathrm{R}}_N = \widehat{\mathrm{R}}_{N,\mathcal{F}}$$

Dipole 2



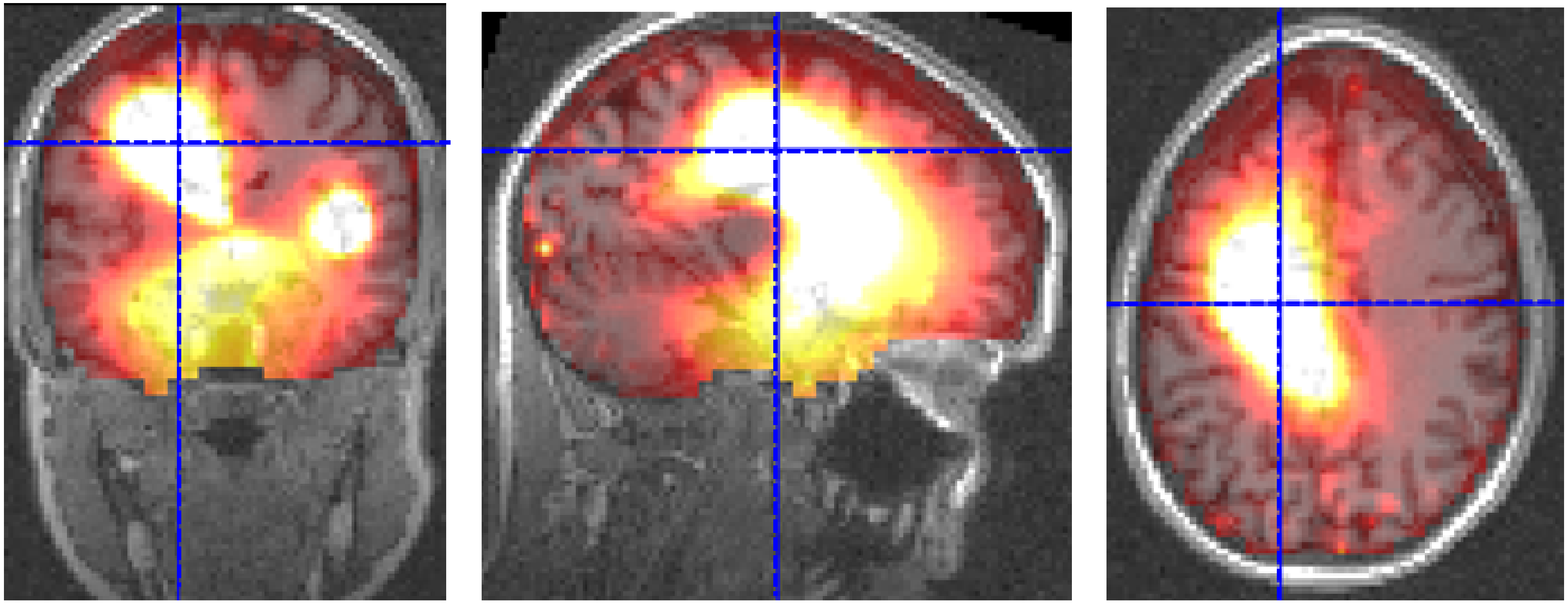
True locations of Dipole 2

Dipole 2



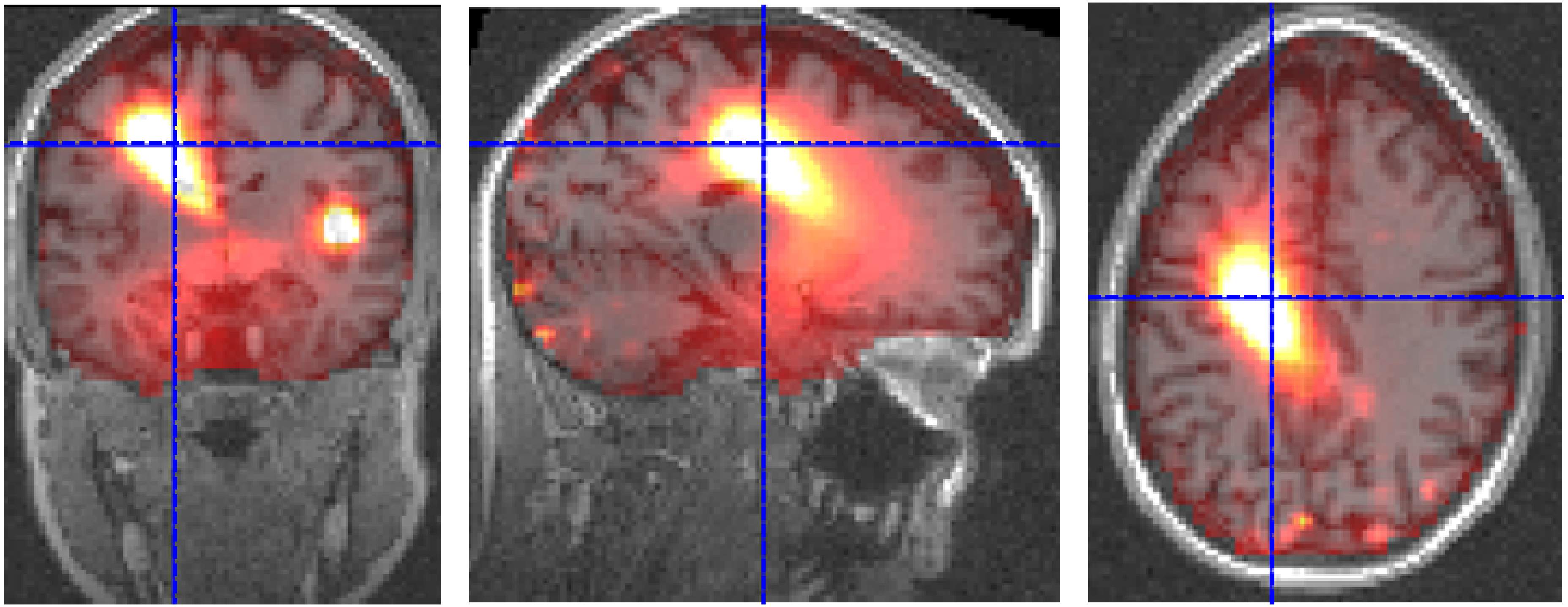
$$\widehat{\mathrm{R}}_N = \mathbf{I}$$

Dipole 2



$$\widehat{\mathrm{R}}_{N} = \widehat{\mathrm{R}}_{N,TSD}$$

Dipole 2



$$\widehat{\mathrm{R}}_N = \widehat{\mathrm{R}}_{N,\mathcal{F}}$$

仮定

(i) $\quad \mathrm{rank}(\mathbf{S}) = \boldsymbol{p} < \boldsymbol{n}$

(ii) $\quad \mathrm{rank}(\mathbf{N}) = \boldsymbol{n}$

(iii) $\quad \mathbf{S}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{N} = \mathbf{N}^{\boldsymbol{T}}\mathbf{S} = \mathbf{O}$

定理 Bart 1993

仮定 かつ ホワイトノイズ $\mathrm{R}_N = \sigma_N^2 \mathrm{I}$

$$\mathrm{S} = \mathrm{U}_{S1} \Sigma_{S1} \mathrm{V}_{S1}^T$$

U_{S1}：制約がつく

Σ_{S1}：回復 $\Longrightarrow$ σ_Nがわかる

V_{S1}：回復

Sの推定不可能

R_Nの推定可能

定理 提案手法

仮定

$$\mathrm{S} = \left(\mathrm{U}_{\boldsymbol{X}1}\Sigma_{\boldsymbol{X}1} - \mathrm{U}_{\boldsymbol{N}1}\Sigma_{\boldsymbol{N}1}\right)\mathrm{V}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{T}}$$

$\mathrm{U}_{N1}\Sigma_{N1}$：ノイズバイアス

定理 ノイズ除去関数

$$\mathbf{S} = (\mathbf{U}_{X1}\mathbf{\Sigma}_{X1} - \mathbf{U}_{N1}\mathbf{\Sigma}_{N1})\,\mathbf{V}_1^T \qquad \approx$$

$$\mathcal{F}\,(\mathbf{U}_{X1}\mathbf{\Sigma}_{X1})\,\mathbf{V}_1^T \qquad \approx$$

$$\mathcal{F}\,(\mathbf{X}\mathbf{E}_S)\,\mathbf{E}_S^\dagger$$

$$\mathbf{GEVP}(\mathbf{R}_X, \mathbf{R}_N) \quad : \quad \mathbf{R}_X\mathbf{E} = \mathbf{R}_N\mathbf{E}\mathbf{\Lambda}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{diag}\{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}, \qquad \mathbf{E} = [\mathbf{E}_S|\mathbf{E}_N]$$

最適化問題$\mathcal{OP}$

全体最小化アルゴリズム(GMIN)

初期値：ランダム

処理時間：5時間

局所最小化アルゴリズム(LMIN)

初期値：CSAで導かれた行列$\mathrm{Q}_{1,\mathrm{int}}$

処理時間：$\mathcal{F}(\cdot)$によって異なる

SGフィルター 0.2秒/実行 $\Longrightarrow$ 速い

EMDフィルター 3秒/実行 $\Longrightarrow$ 遅い，精度が良い

FSTフィルター

最適化問題$\mathcal{OP}$を解く段階

SGフィルター

$\mathcal{OP}$を解く為に数千の実行が要求されるため，

実行時間の少ない方を選ぶ

信号分析の段階

EMDフィルター

精度の高い方を選ぶ