

定量的形態計測入門

野下浩司

✉ noshita@morphometrics.jp

🏠 <http://koji.noshita.net>

東京大学 農学生命科学研究科

Outline

- ・ かたちとは
- ・ 形態測定学の概要
 - ・ 幾何学的形態測定学
 - ・ 標識点ベース
 - ・ 輪郭ベース
 - ・ 理論形態学
 - ・ 形態空間
- ・ 形態測定学を利用した研究例
- ・ 共同研究に向けて

- ・ かたち

視覚・触覚により認識できる性質（色は除く）

- ・ 形態 form

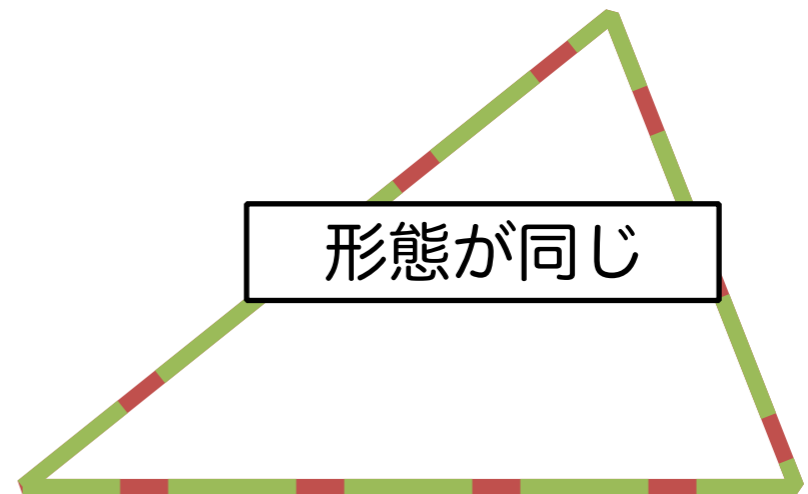
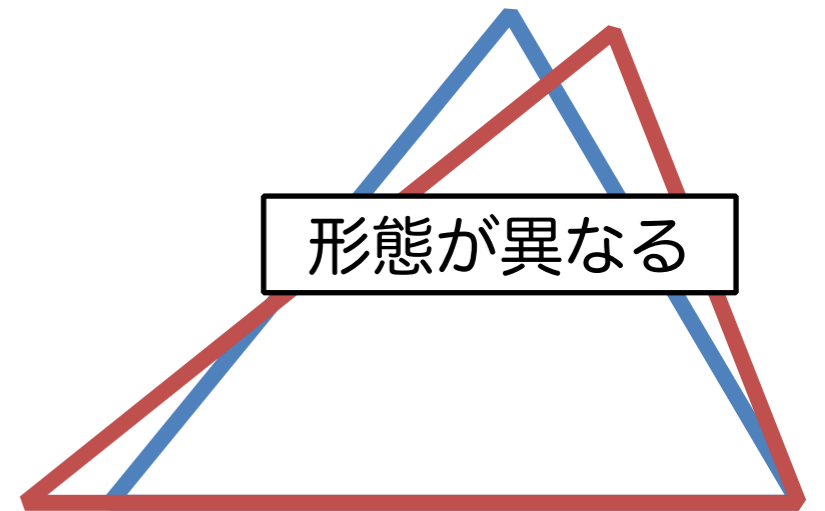
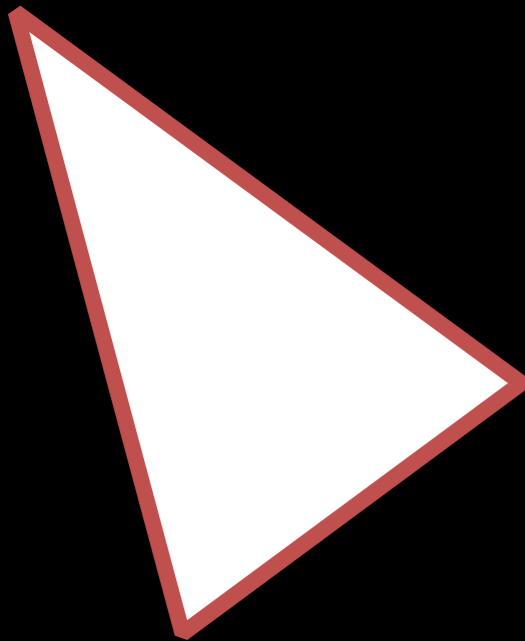
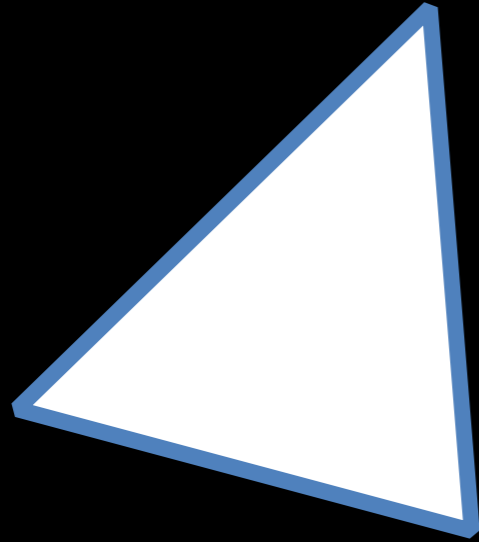
変位と回転に対して不変な幾何学的属性

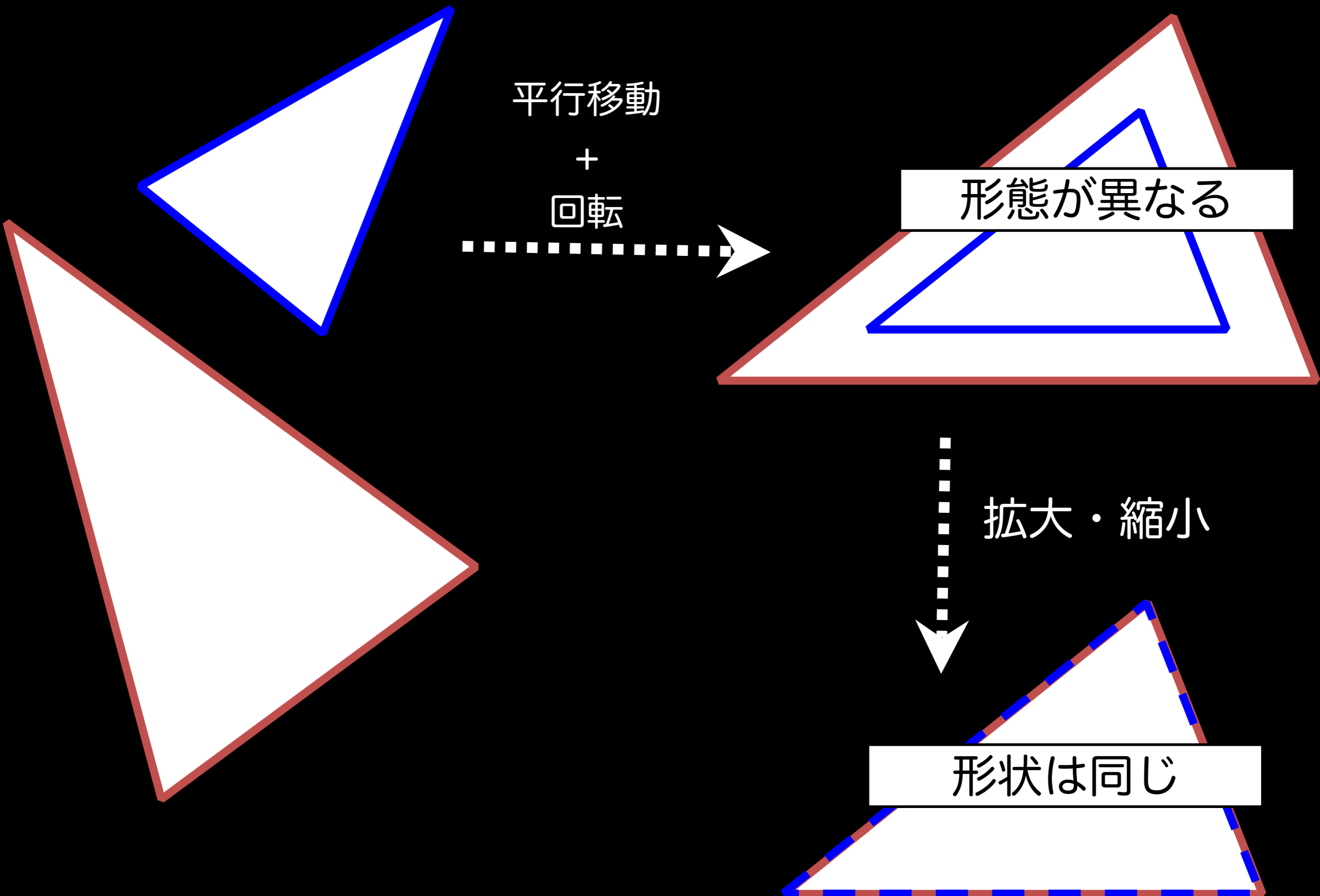
- ・ サイズ size

拡大・縮小に対しては共変

- ・ 形状 shape

拡大・縮小に対しても不変





平行移動
+
回転

形態が異なる

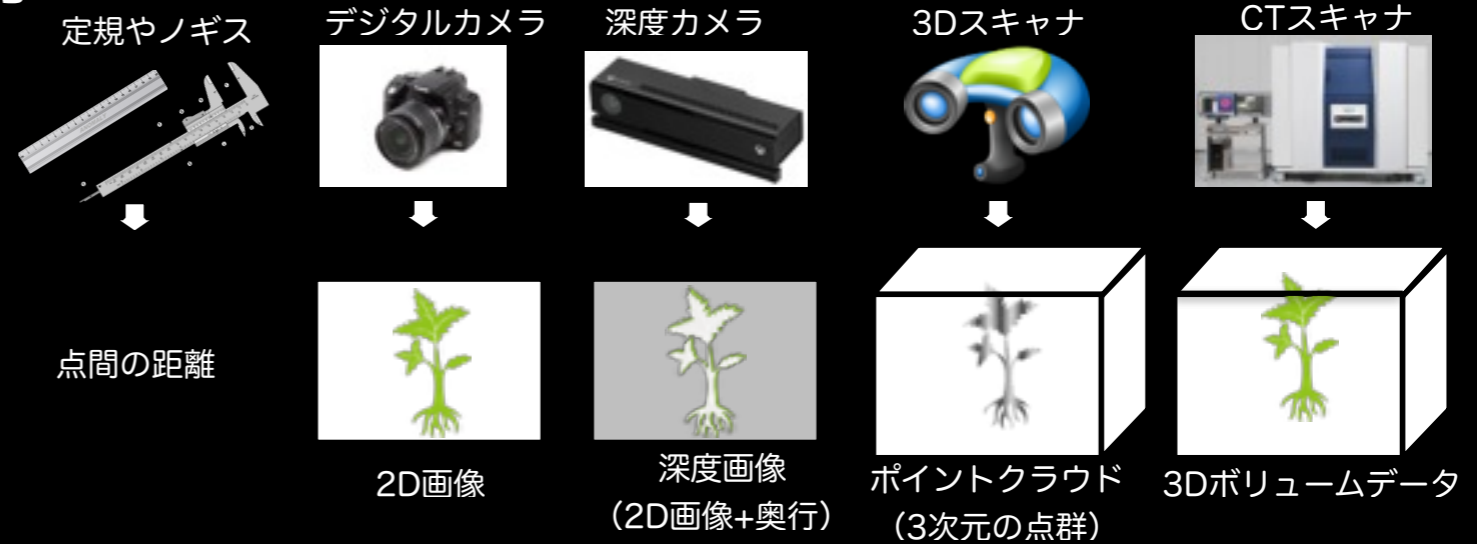
拡大・縮小

形状は同じ

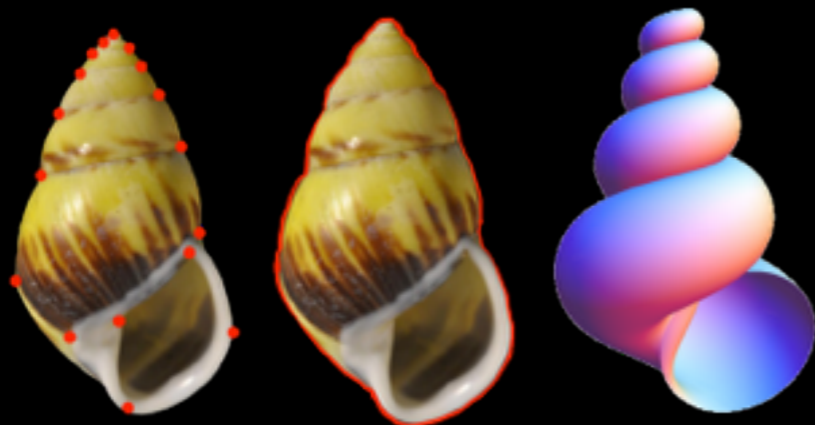
かたちを対象とする研究のワークフロー

かたちのデータの取得

- ・ 対象
- ・ 計測機器
- ・ データの種類



かたちの定量化



- ・ 対象・データの種類に応じた解析手法の選択
 - ・ 幾何学的形態測定学
 - ・ 標識点ベース
 - ・ 輪郭ベース
 - ・ 理論形態学
- ・ 計測データから形態データへの変換

生物学的意味の発見

e.g.

- ・ 多様性の評価
- ・ 遺伝率の推定
- ・ 適応度の推定
- ・ 祖先形質の復元
- ・ 進化速度・モードの推定
- ・ GWAS, QTLの発見
- ・ アロメトリー解析
- ・ 組織変形の解析
- ・ 病変部の識別

かたちを測るためのモデル

標識点ベース



- かたちを点の集合とみなす
- データはKendall形状空間上に分布

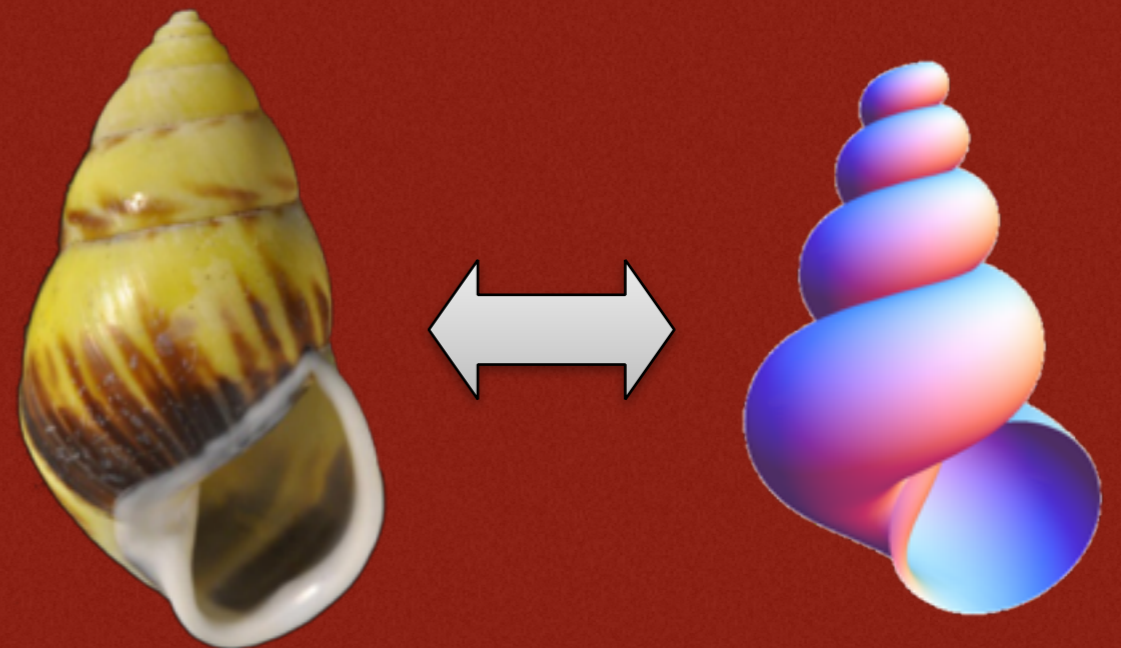
輪郭ベース



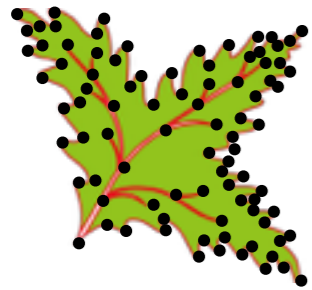
- かたちを閉曲線（面）とみなす
- データは関数空間上に分布

理論形態モデル

- 生物や器官，組織に合わせたモデルを利用し形態を定量化
- 形態はモデルのパラメータで特徴づけられる
- データは理論形態空間上に分布



標識点ベース形態測定学：Shape Theory



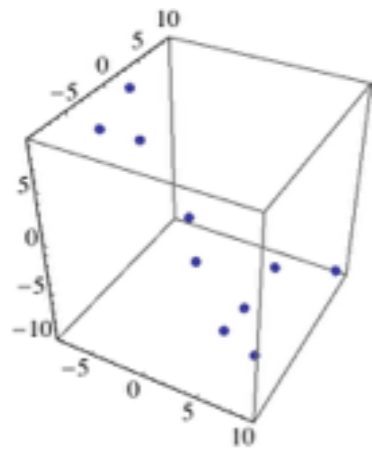
k : 標識点の数
 m : 標識点の次元

$\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}, \dots, \{x_n, y_n\},$



$\{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots, x_n, y_n\}$

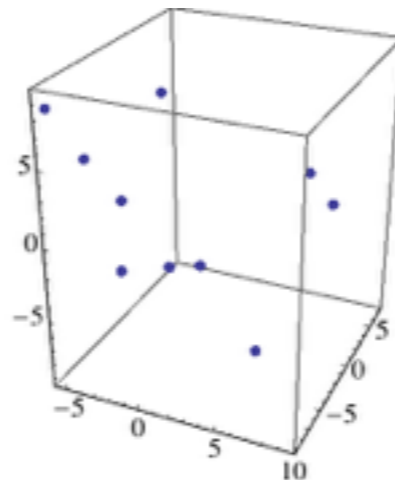
図形空間



自由度: km

平行移動

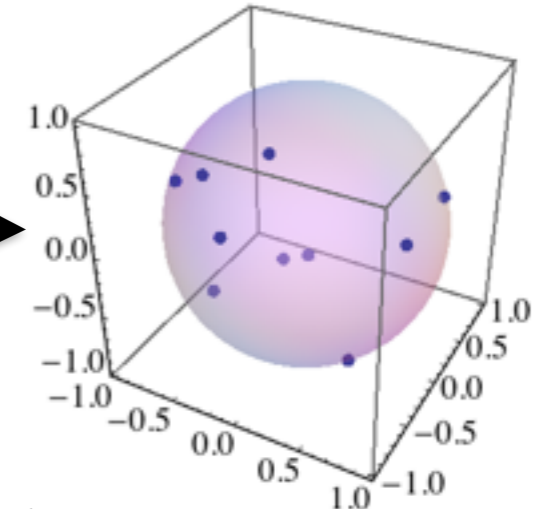
前形態空間



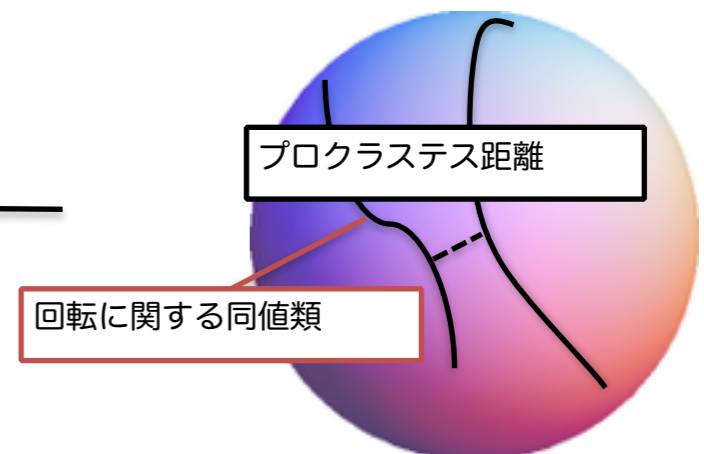
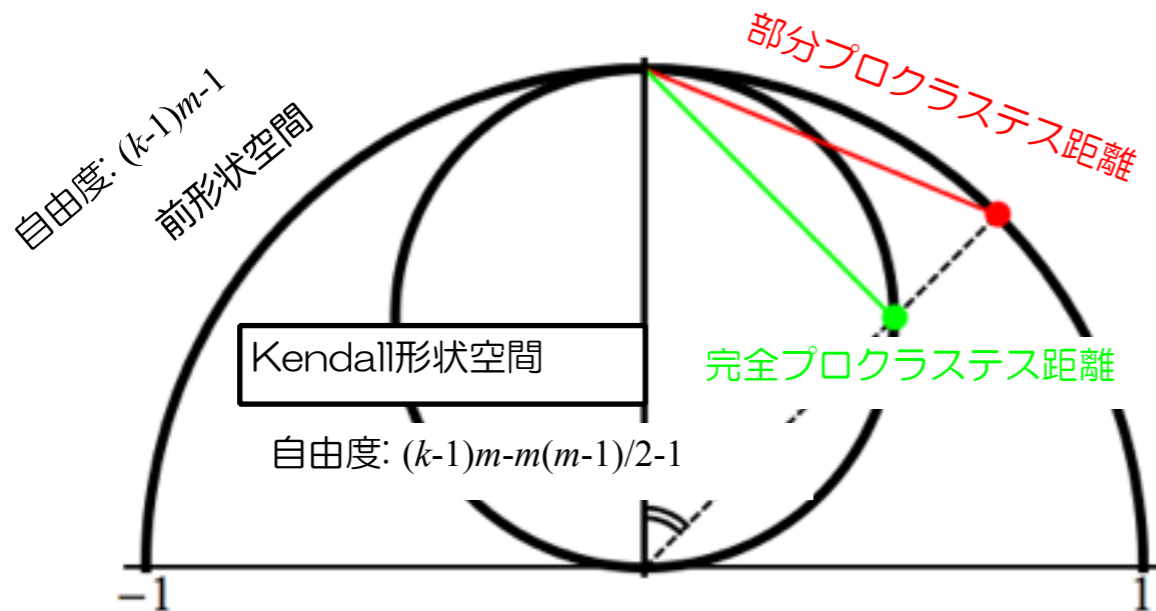
自由度: $(k-1)m$

拡大縮小

前形状空間



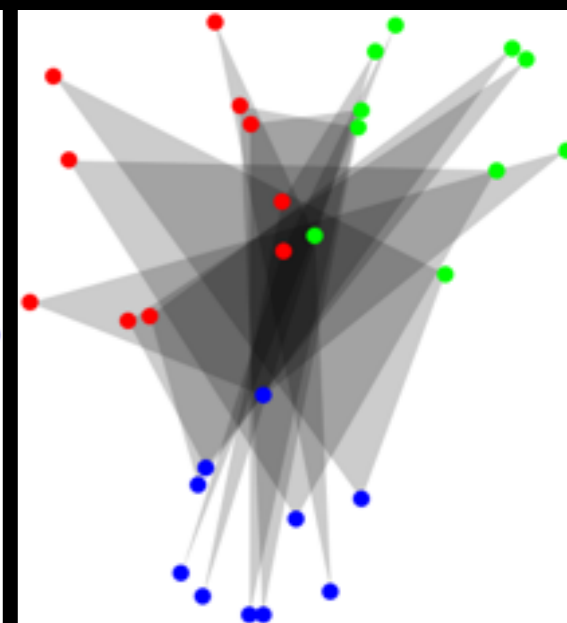
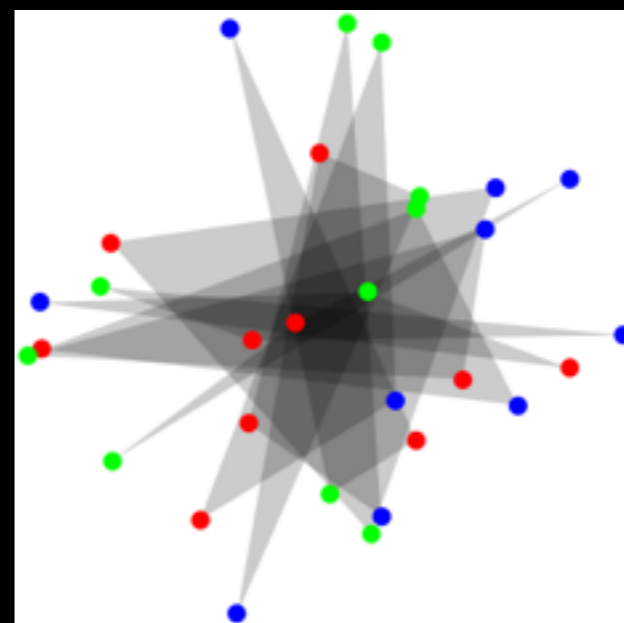
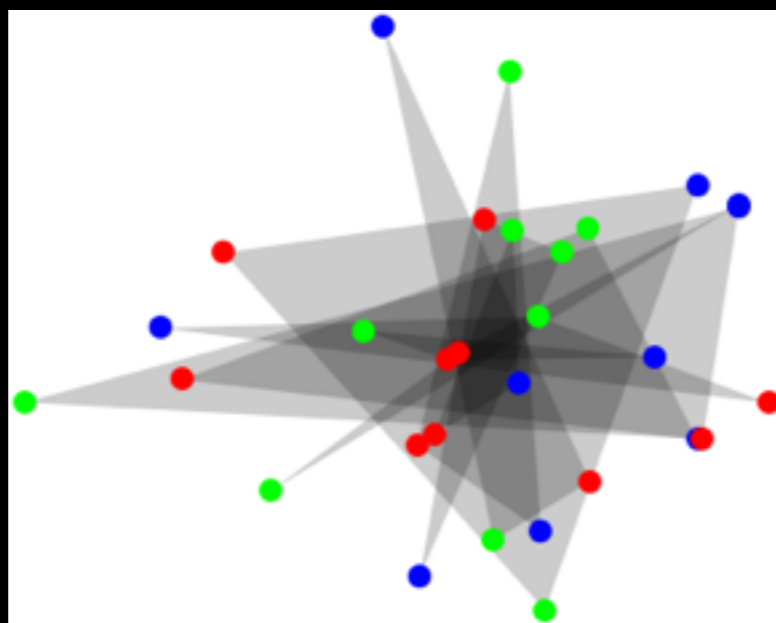
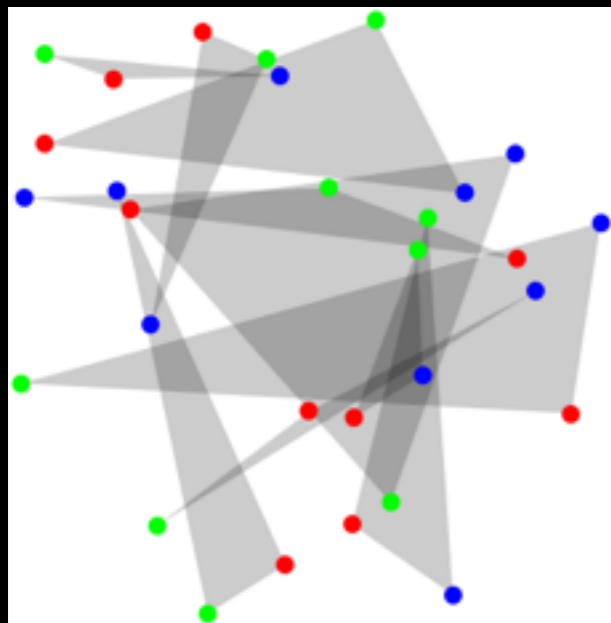
自由度: $(k-1)m-1$



e.g. 三角形

生データ

n=10

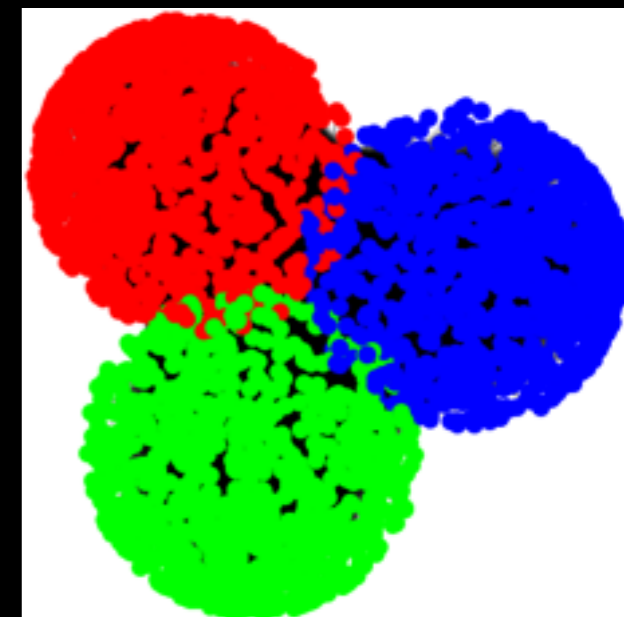
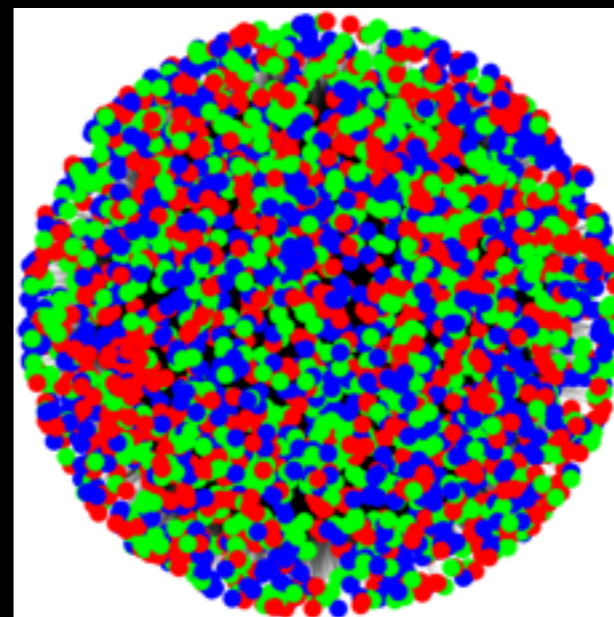
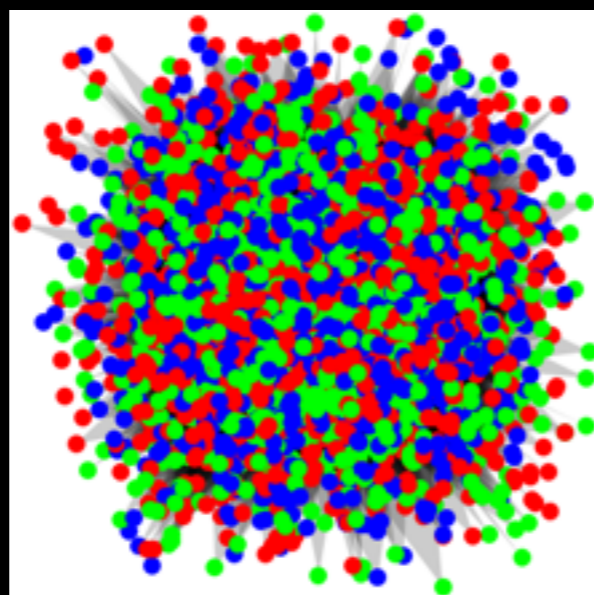
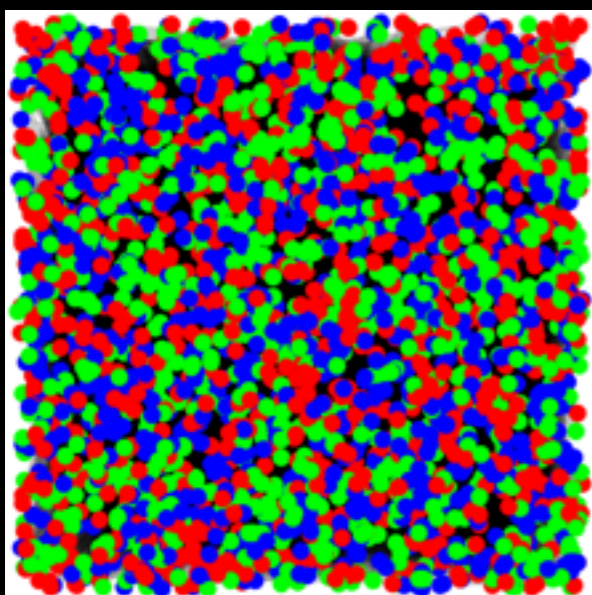


平行移動

拡縮

回転

n=1000



輪郭ベース形態測定学：調和関数解析



輪郭の関数によるモデル化

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\theta)$$

e.g. 楕円フーリエ解析

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

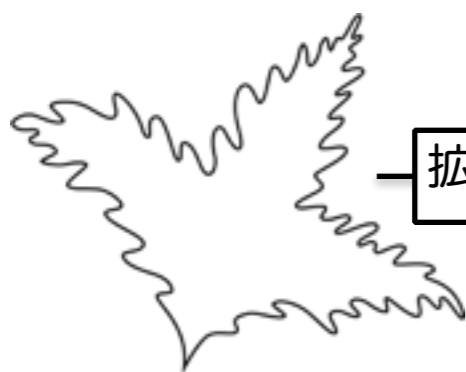
$$y(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + d_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right)$$

$$a_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \left(\cos \frac{2n\pi t_p}{T} - \cos \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right)$$

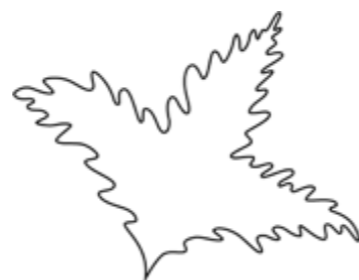
$$c_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta y_p}{\Delta t_p} \left(\cos \frac{2n\pi t_p}{T} - \cos \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right)$$

$$b_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta x_p}{\Delta t_p} \left(\sin \frac{2n\pi t_p}{T} - \sin \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right)$$

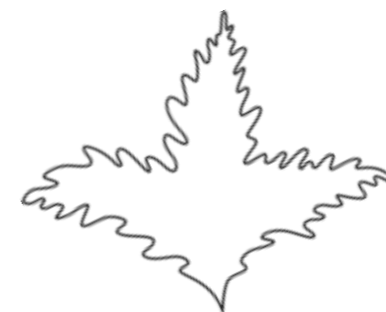
$$d_n = \frac{T}{2n^2\pi^2} \sum_{p=1}^K \frac{\Delta y_p}{\Delta t_p} \left(\sin \frac{2n\pi t_p}{T} - \sin \frac{2n\pi t_{p-1}}{T} \right)$$



拡大縮小



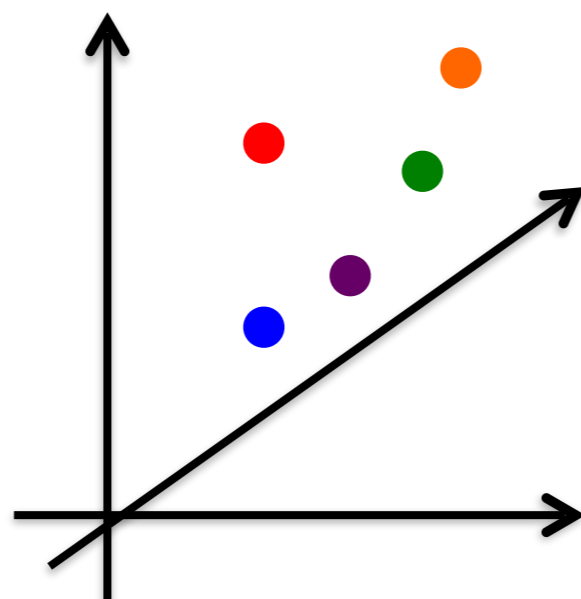
位置合わせ



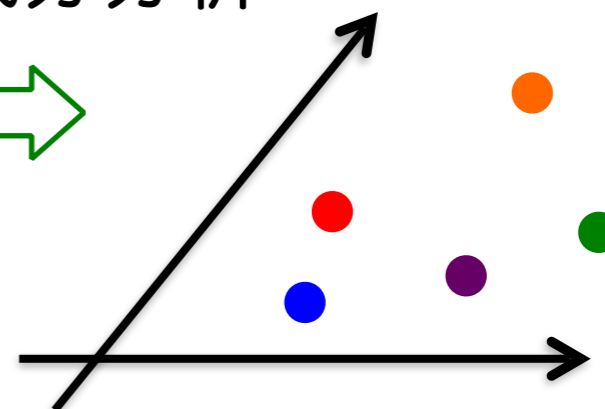
関数空間



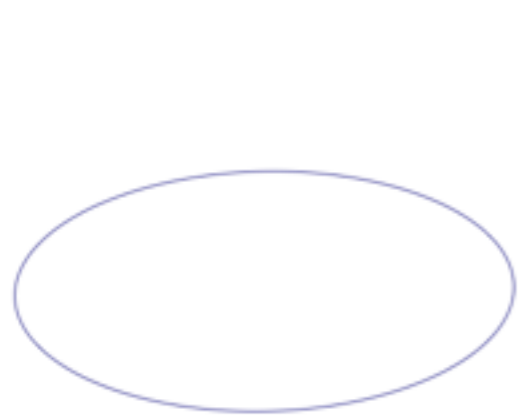
スペクトル



主成分分析



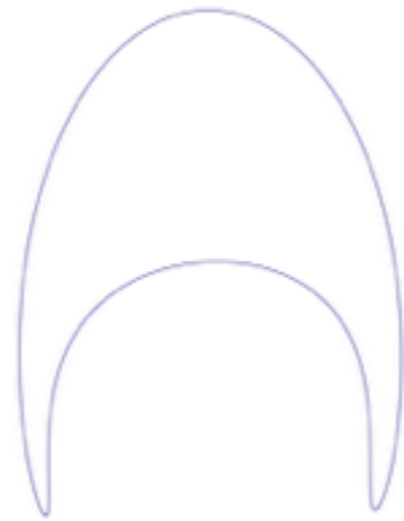
e.g. 三葉虫の輪郭への楕円フーリエ解析



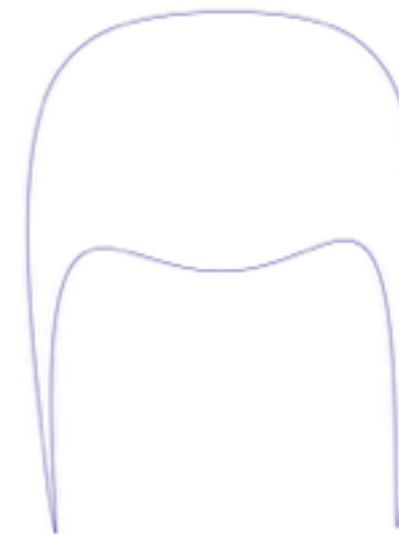
$n=1$



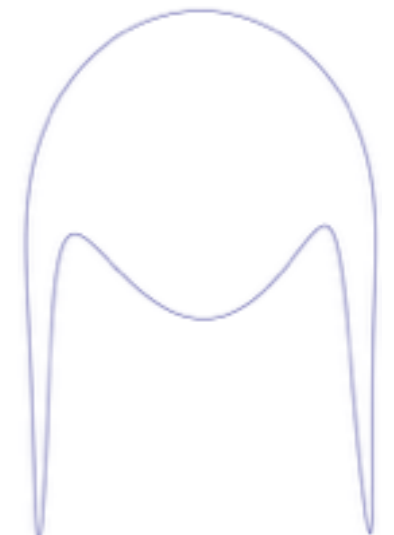
$n=2$



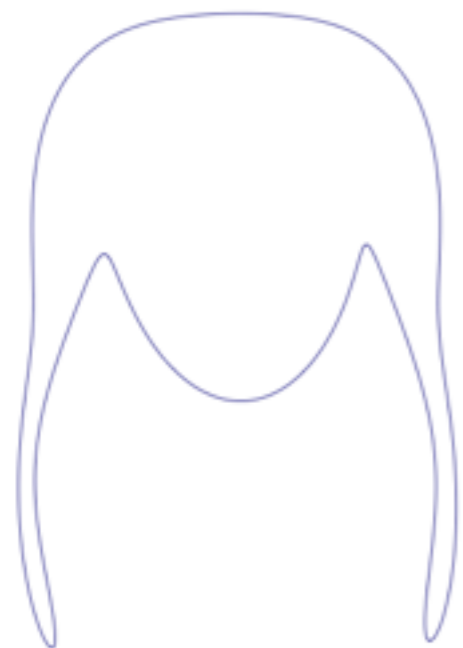
$n=3$



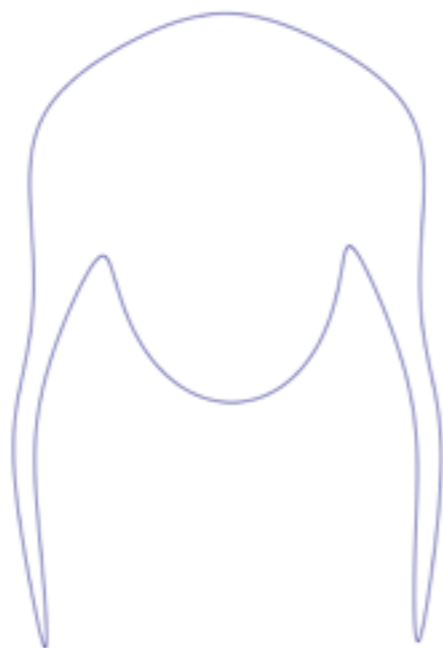
$n=4$



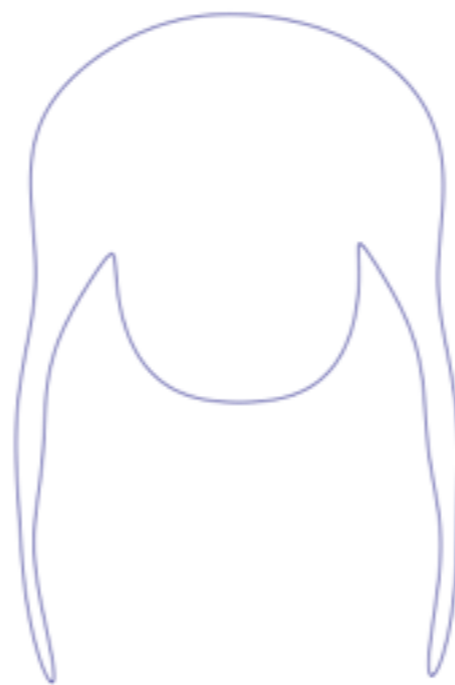
$n=5$



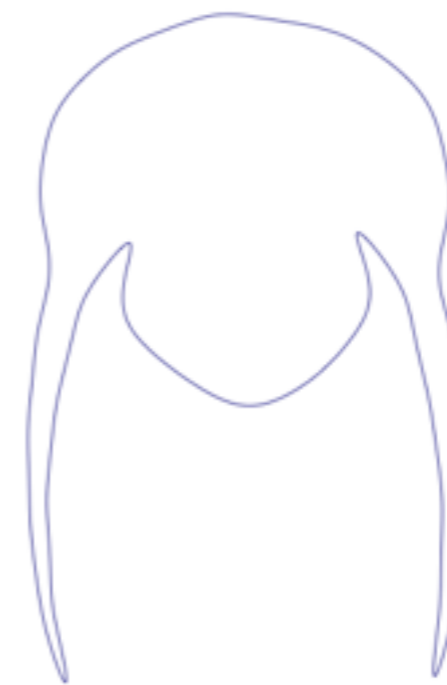
$n=8$



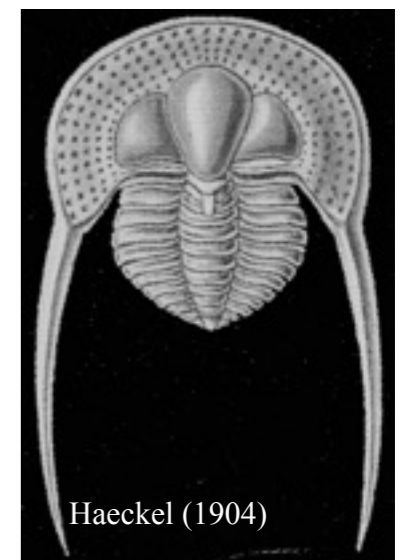
$n=10$



$n=15$



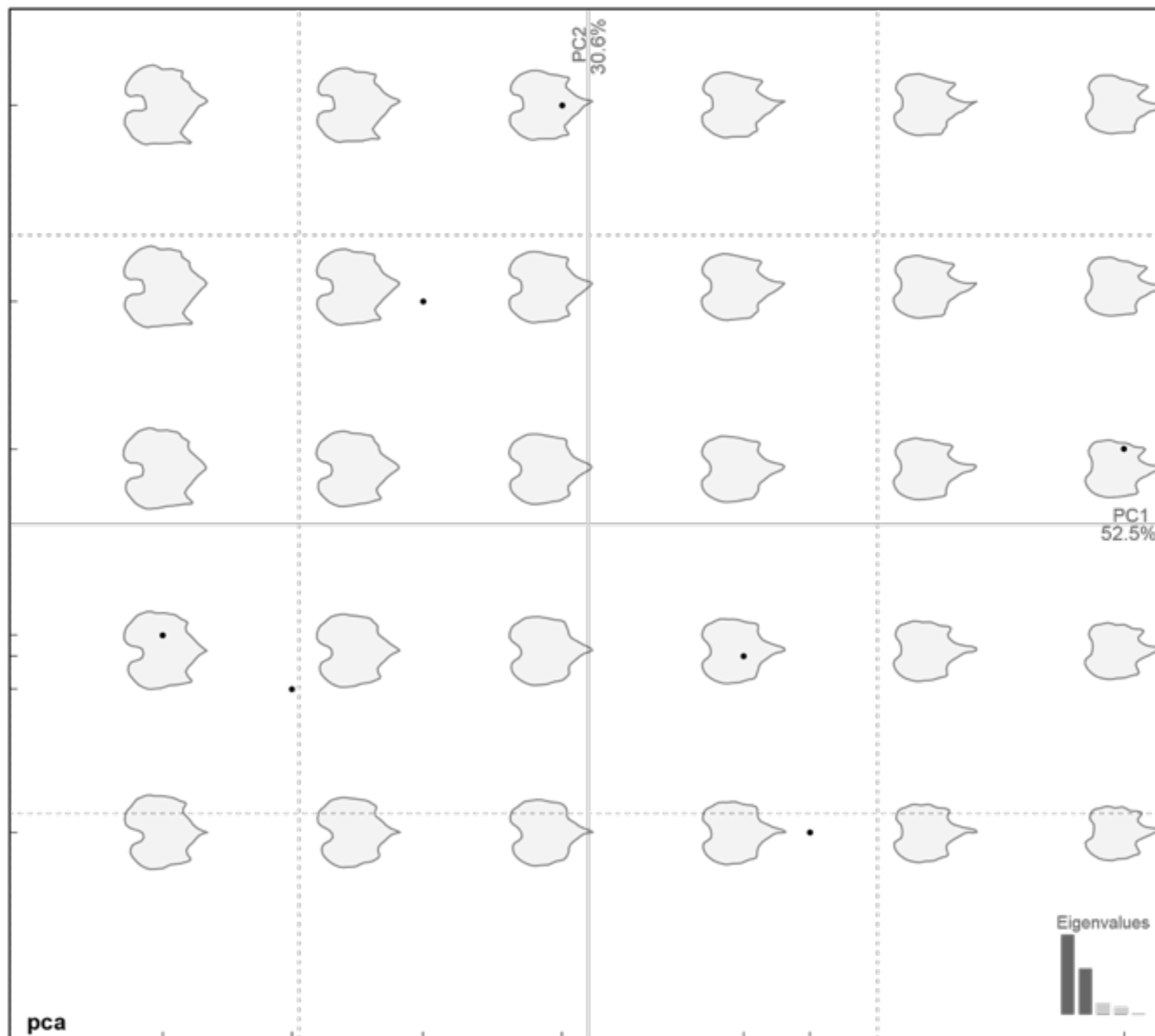
$n=30$



Haeckel (1904)

original

e.g. 葉の楕円フーリエ解析による定量化とPCA

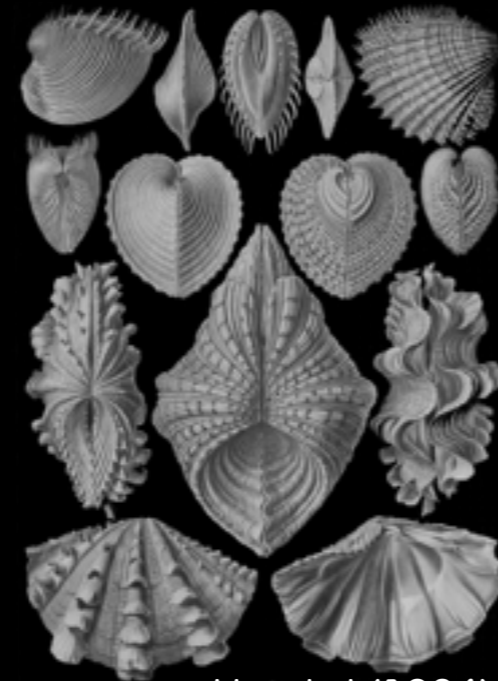


“巻き”の理論形態モデル

軟体動物



唐沢 学芸員（三笠市立博物館）提供



Haeckel (1904)



原生動物



Haeckel (1904)

植物のつる

ツノ

食道

血管

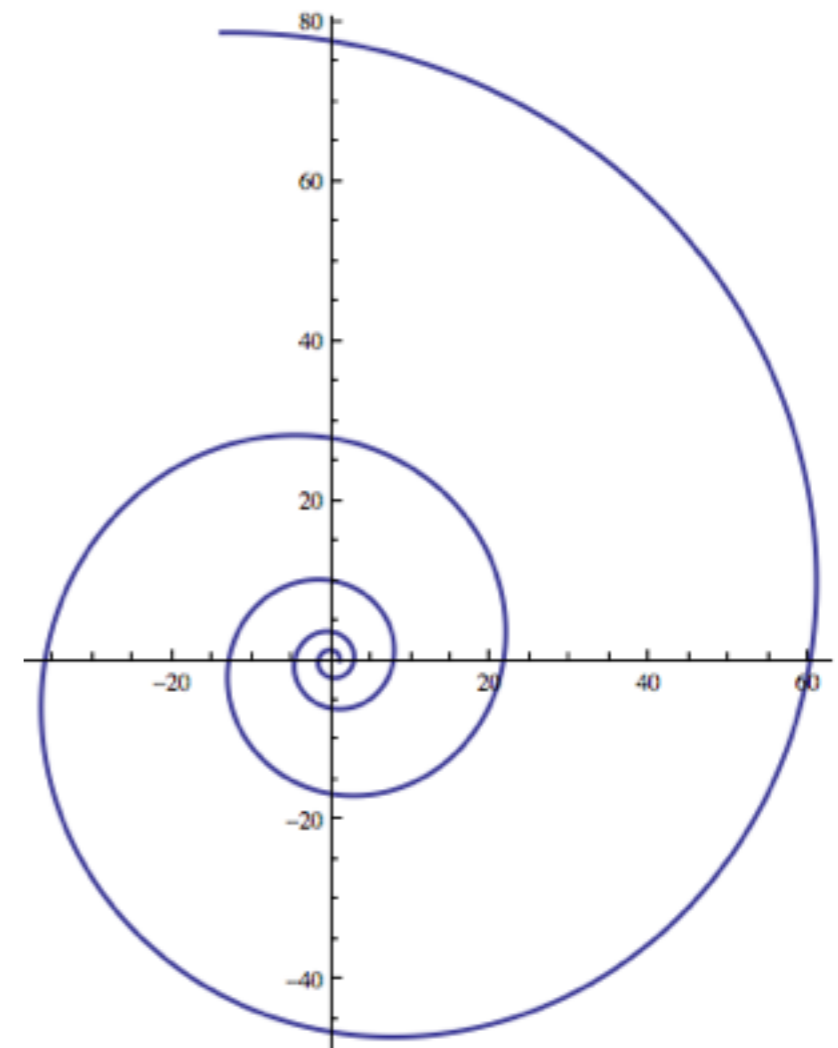
対数らせん

$$\frac{dr(\theta)}{d\theta} = ar(\theta) \quad r_0 = r(0)$$

(a は定数)

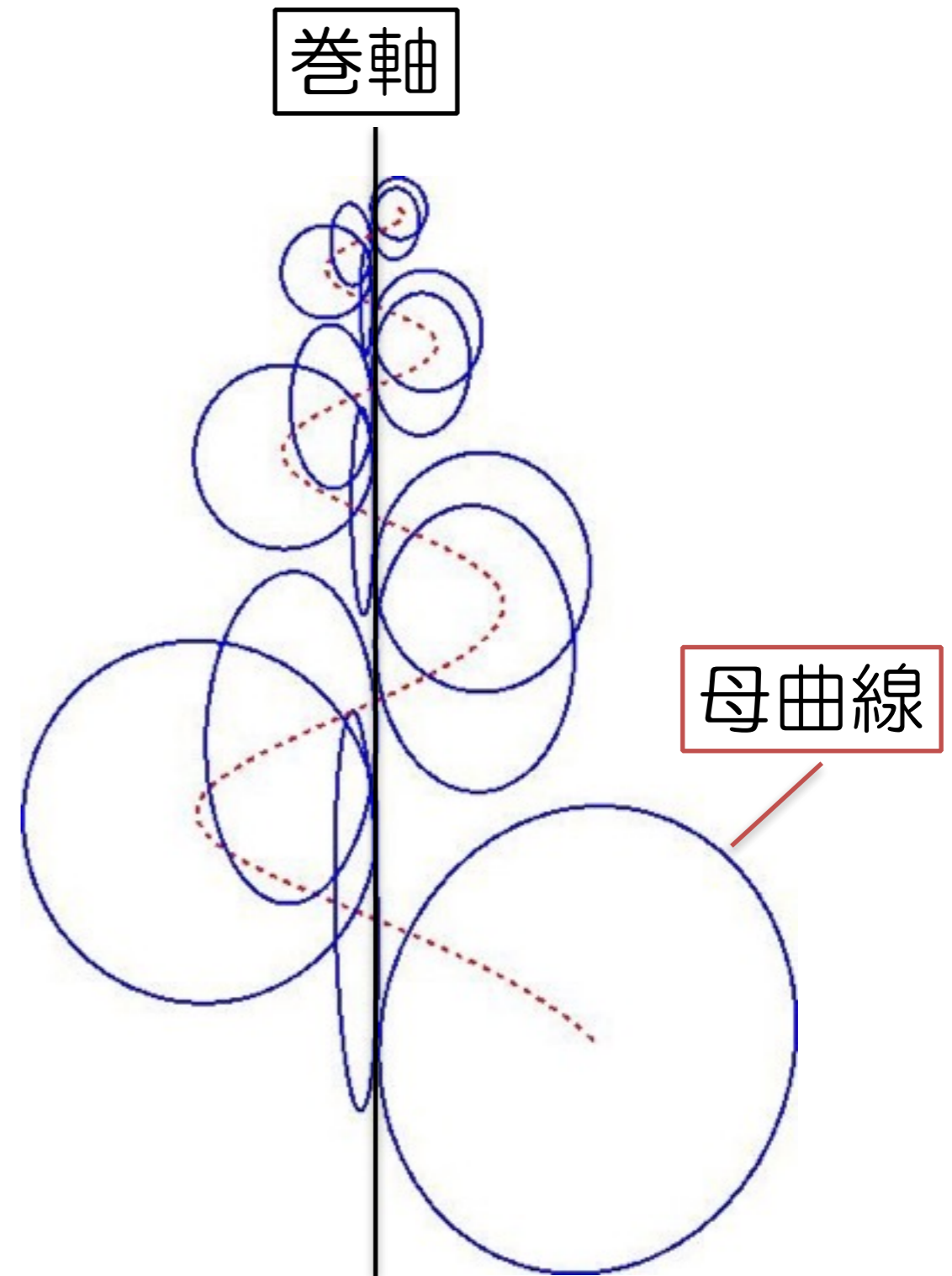
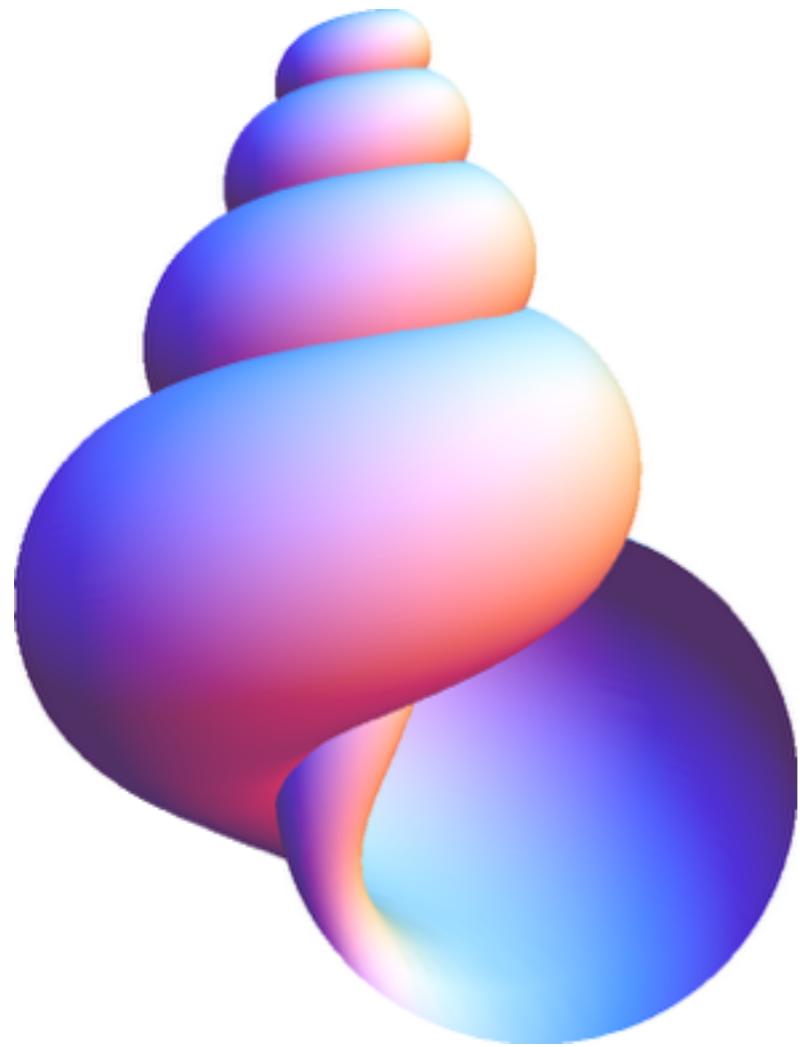
オウムガイ

$$r(\theta) = r_0 \exp(a\theta)$$



Raupモデル

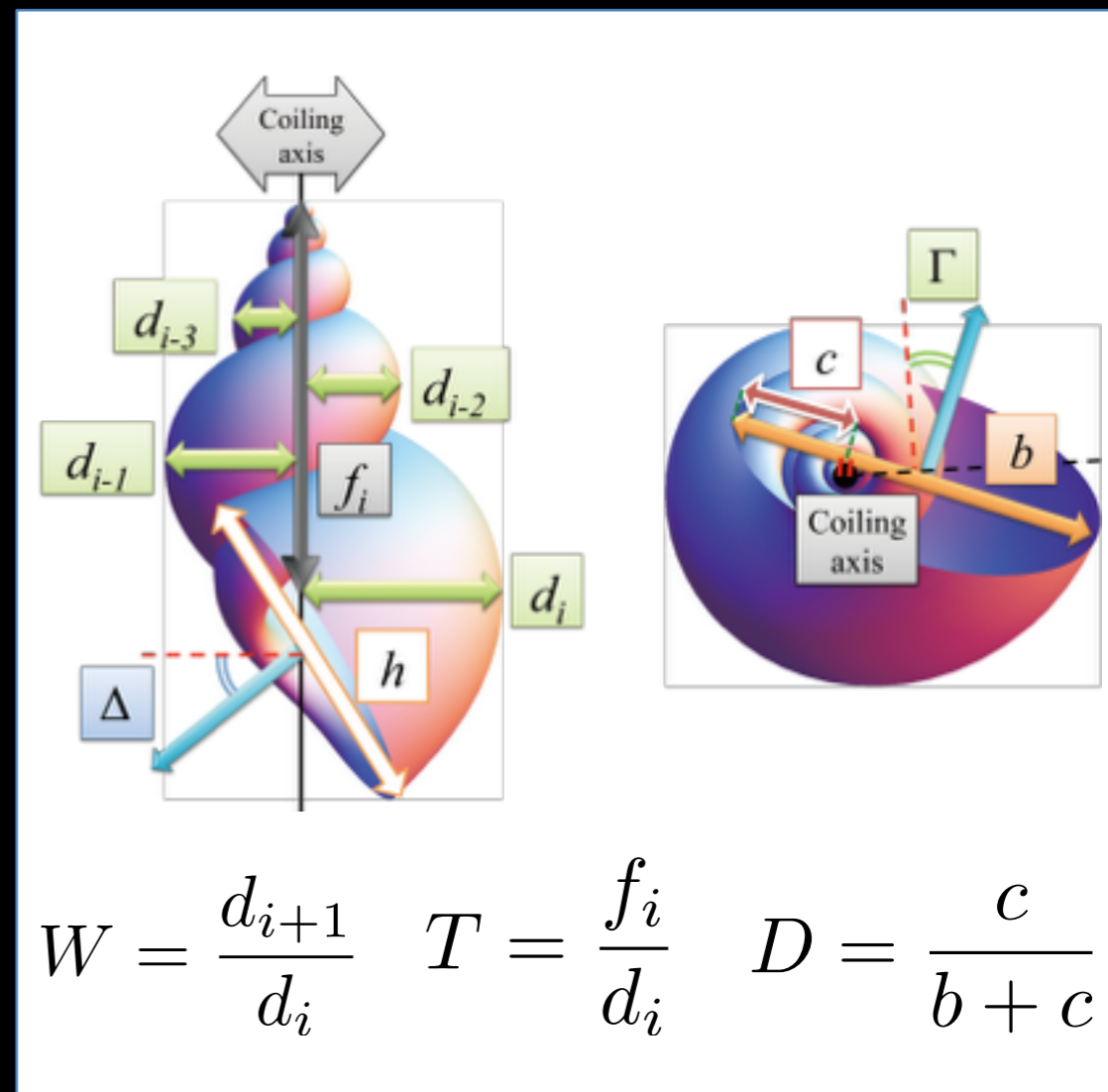
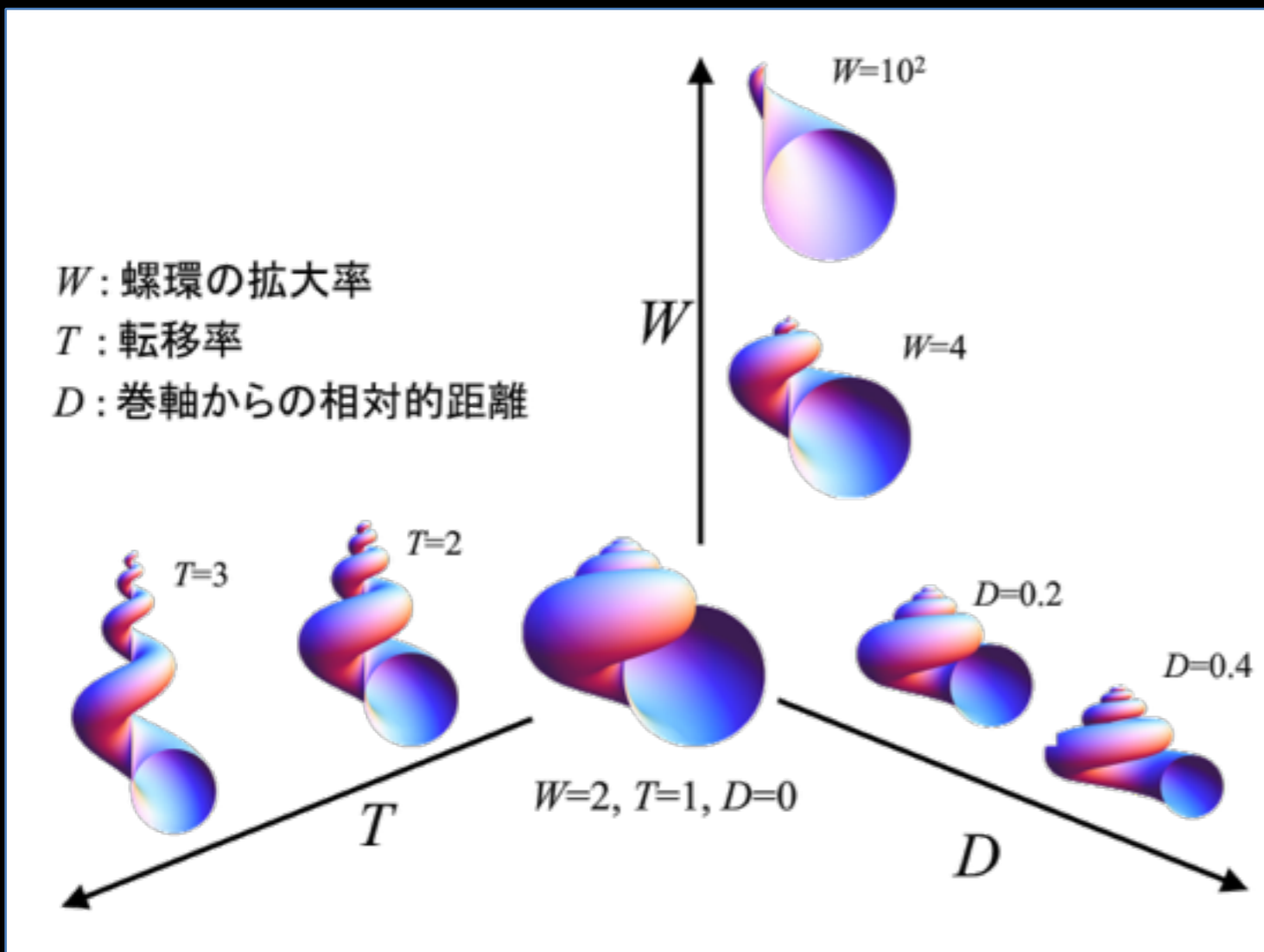
Raup (1962, 1966), Raup&Michelson (1965)



母曲線を巻軸周りに回転させながら成長させることで
“巻き”のパターンを記述

Raupモデル

Raup (1962), Raup and Michelson (1965)



螺管の拡大

$$r(\theta) = r_0 W \frac{\theta}{2\pi}$$

θ : 回転角
 r_0 : 初期螺管半径

螺管の軌道

$$\mathbf{p}(\theta) = W^{\frac{\theta}{2\pi}} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2D}{1-D} + 1 \\ 0 \\ 2T \left(\frac{D}{1-D} + 1 \right) \end{pmatrix}$$

Raupモデルのパラメータは測定が容易

Raupモデルの限界：“異常巻き”

Raupモデルの仮定：母曲線が巻軸周りに回転

Ainoceras kamuy

Nipponites mirabilis

Polyptychoceras sp.

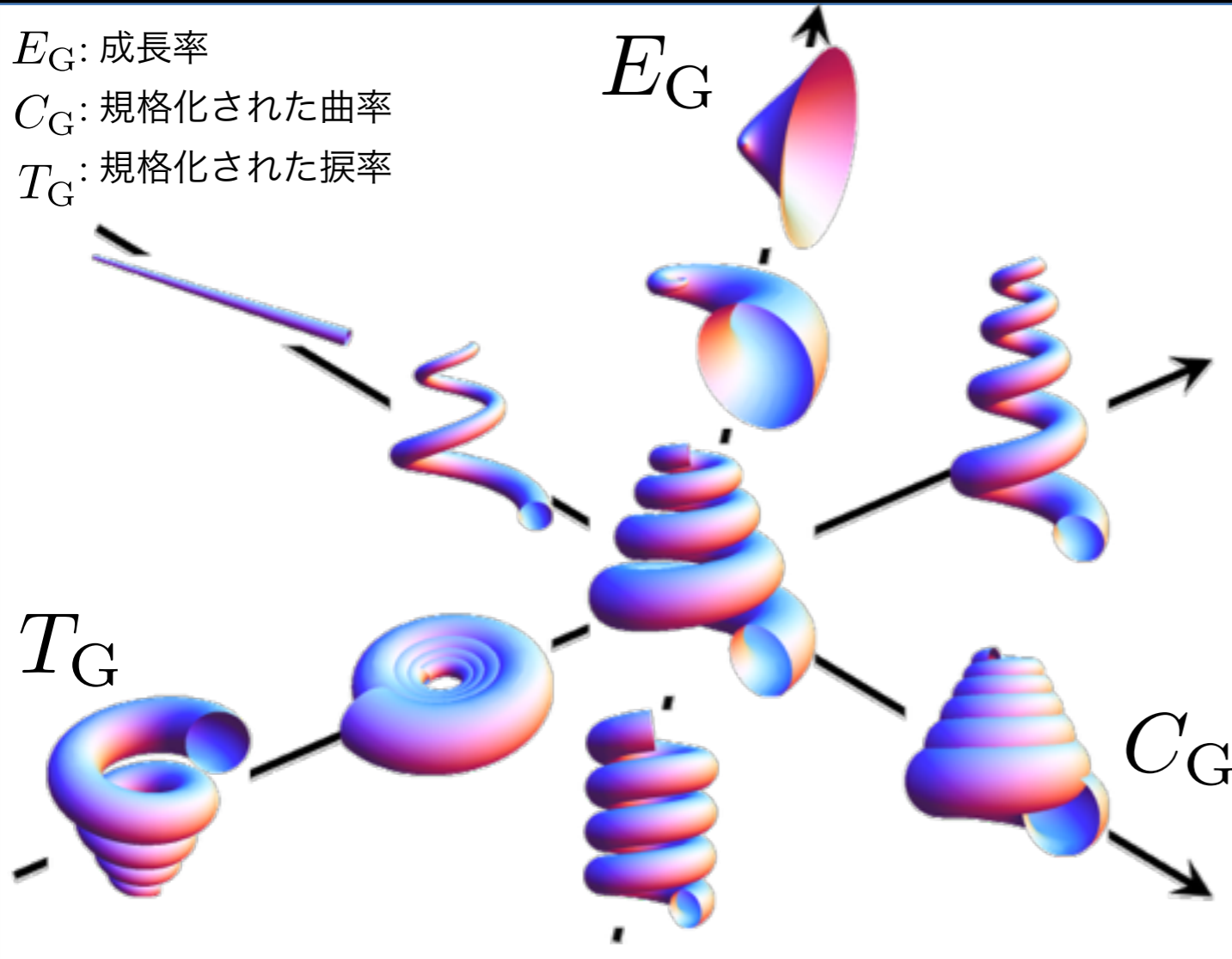
巻軸があると考えることは、
世界に絶対的な方向が存在していることを仮定している

巻軸は殻形成の絶対的な軸なのだろうか？

成長管モデル

Okamoto (1988)

E_G : 成長率
 C_G : 規格化された曲率
 T_G : 規格化された捩率



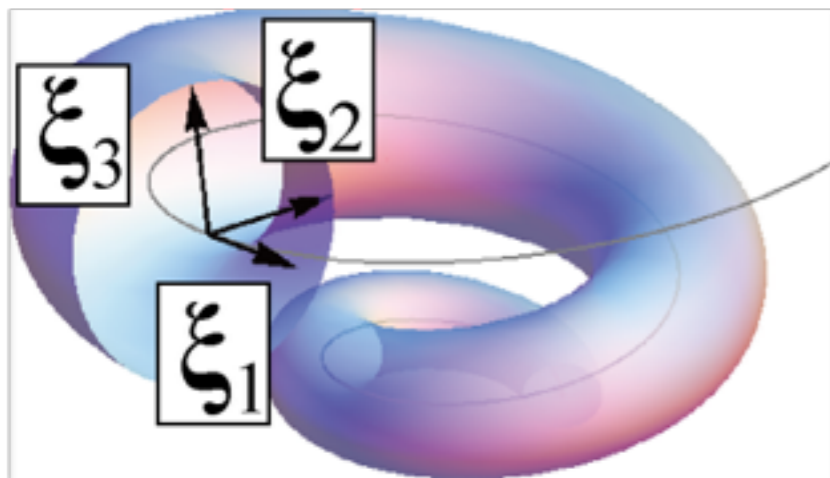
弧長パラメータと成長段階の関係

$$\frac{dl}{ds} = r$$

l : 弧長パラメータ
 r : 螺管の太さ
 s : 成長段階

螺管の成長

$$\frac{dr}{ds} = E_G(s)r(s)$$



$\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$: Frenet 標構

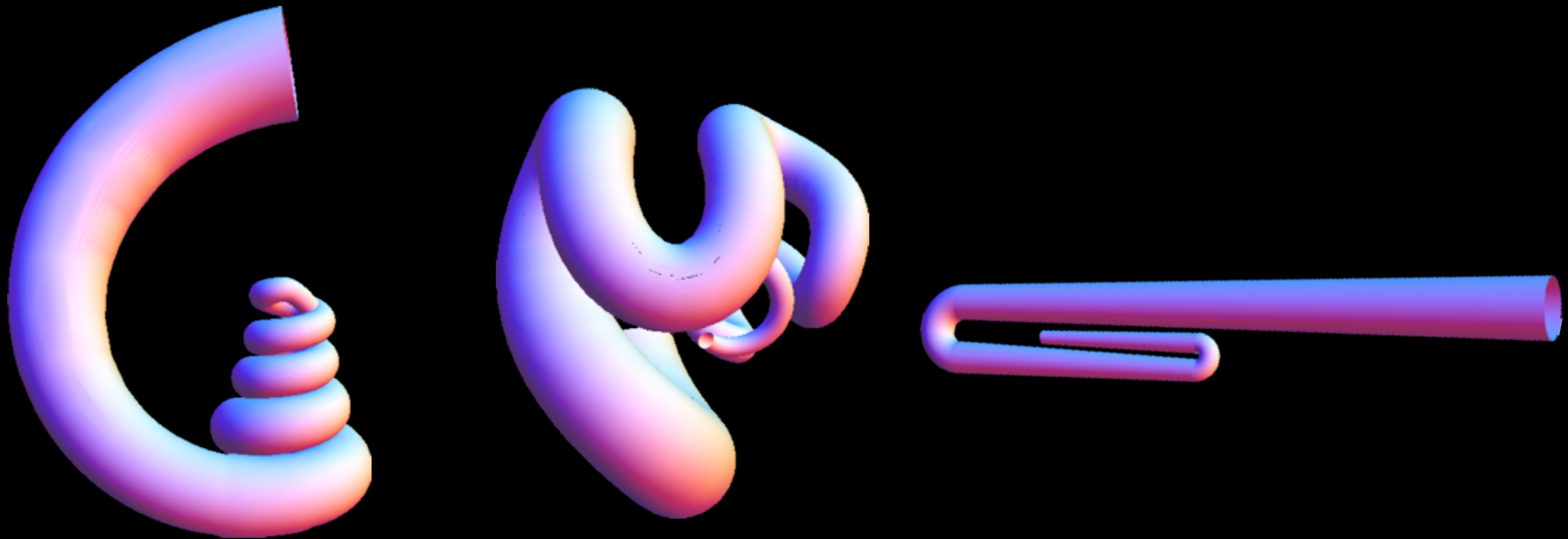
成長管モデルにおけるFrenet-Serretの公式

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & C_G(s) & 0 \\ -C_G(s) & 0 & T_G(s) \\ 0 & -T_G(s) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

代表点の軌道

$$\mathbf{p}_G(s) = \mathbf{p}_0 + \int_0^s r(s')\xi_1(s')ds'$$

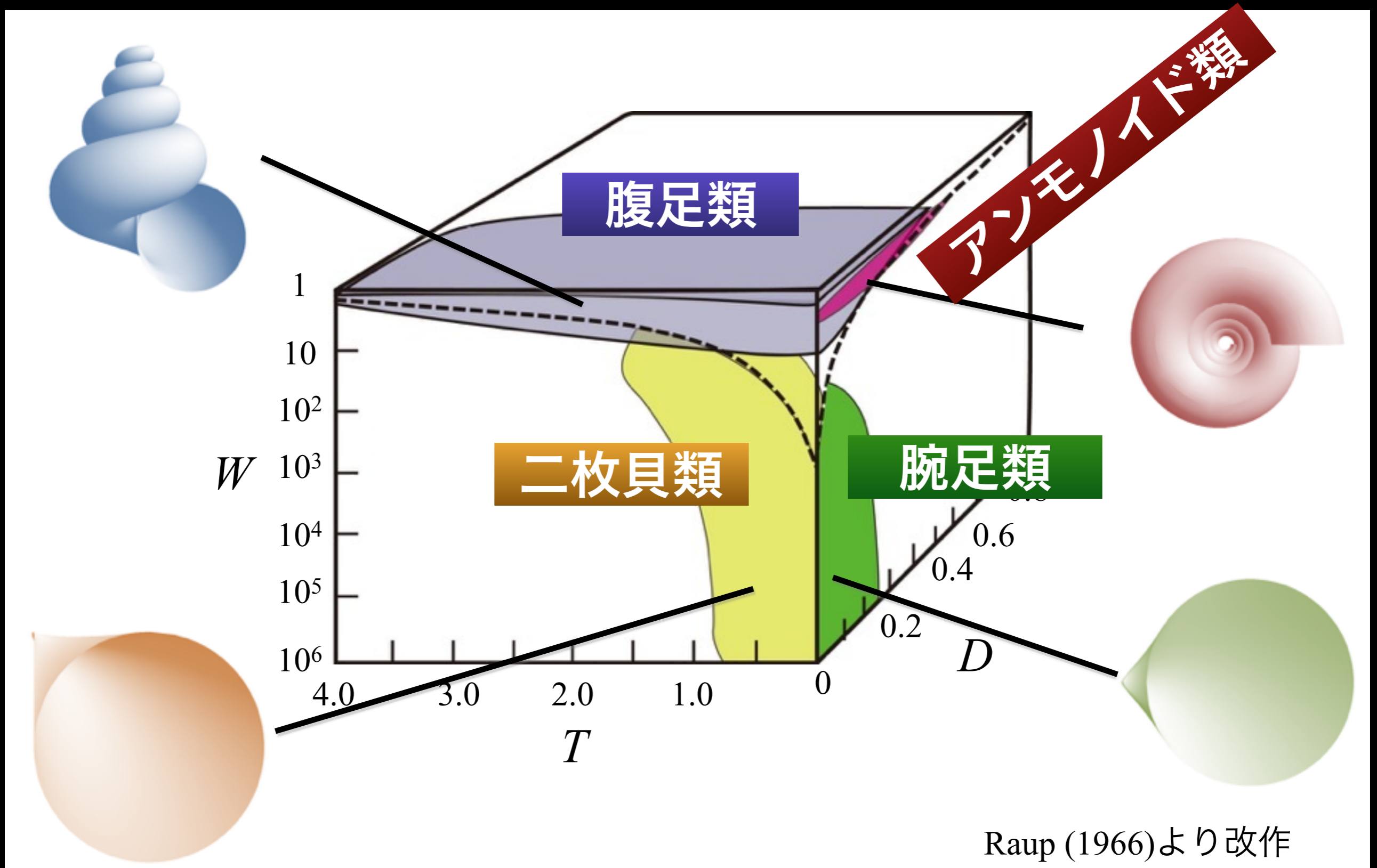
成長管モデルによる“異常巻き”の記述



どんな巻きパターンも記述可能

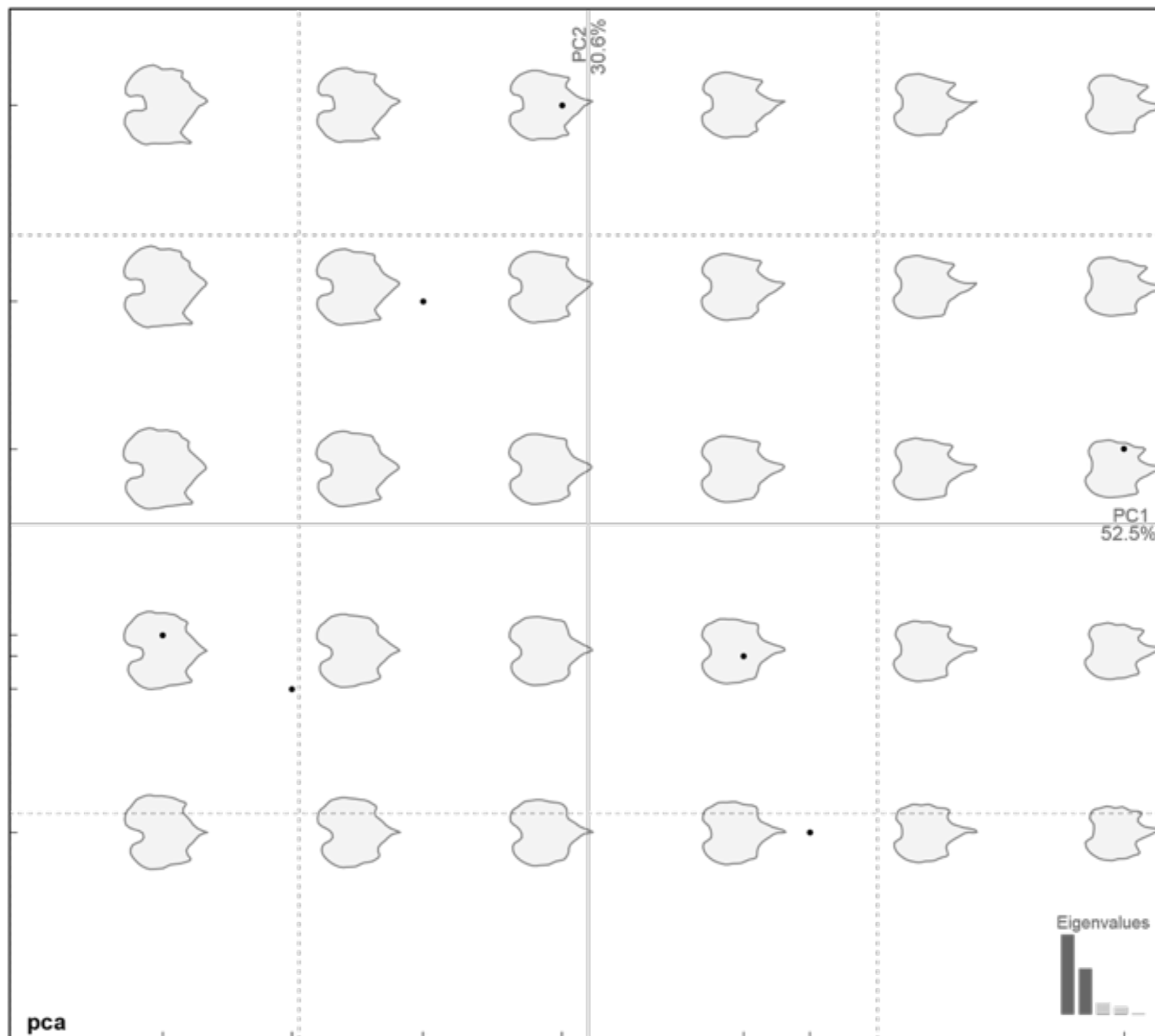
形態空間 morphospace

かたちの集まり



Raup (1966)より改作

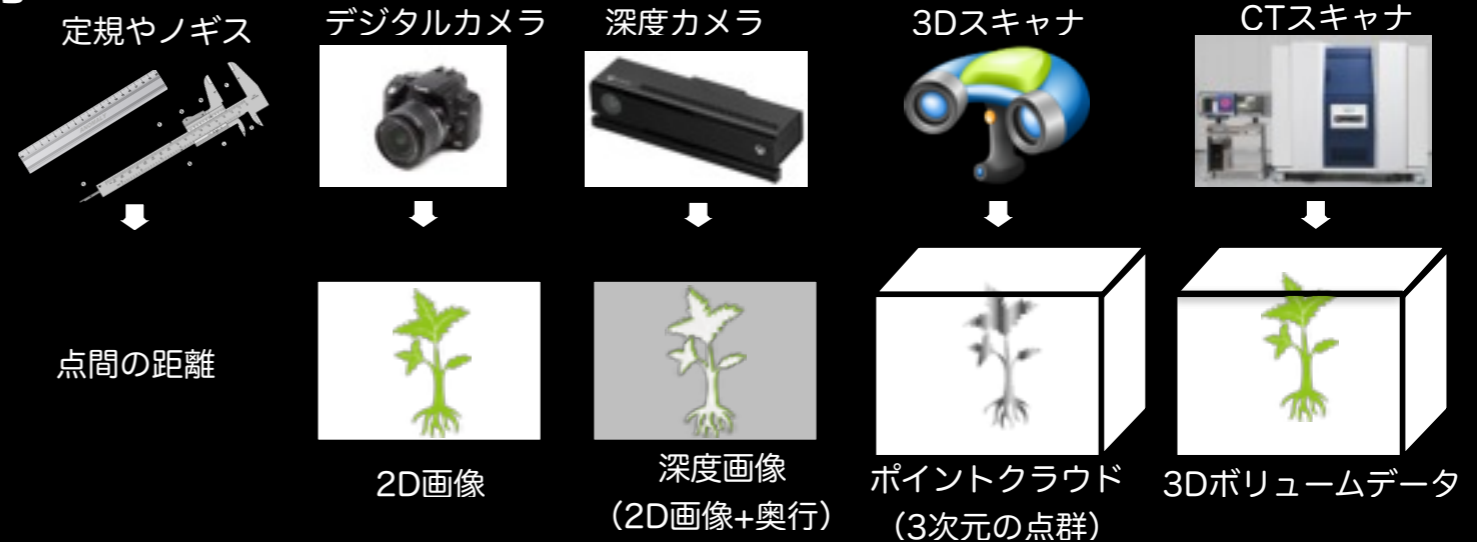
e.g. 葉の楕円フーリエ解析による定量化とPCA



かたちを対象とする研究のワークフロー

かたちのデータの取得

- ・ 対象
- ・ 計測機器
- ・ データの種類



かたちの定量化



- ・ 対象・データの種類に応じた解析手法の選択
 - ・ 幾何学的形態測定学
 - ・ 標識点ベース
 - ・ 輪郭ベース
 - ・ 理論形態学
- ・ 計測データから形態データへの変換

生物学的意味の発見

e.g.

- ・ 多様性の評価
- ・ 遺伝率の推定
- ・ 適応度の推定
- ・ 祖先形質の復元
- ・ 進化速度・モードの推定
- ・ GWAS, QTLの発見
- ・ アロメトリー解析
- ・ 組織変形の解析
- ・ 病変部の識別