

金融への数理手法適用の
経緯と課題

【報告書】

数学協働プログラム・金融作業グループ

2017年3月

<目次>

1. 金融技術革新前史
 1. 1 銀行の初期の数理手法
 1. 2 不確実性の時代へ

2. 金融技術革新とリーマンショック、最近の新たな課題
 2. 1 金融技術革新
 2. 2 リーマンショックの衝撃
 2. 3 最近の経営環境と新たな課題

3. 投資とトレーディングの数理手法
 3. 1 経緯
 3. 1-1 テクニカル分析とファンダメンタル分析
 3. 1-2 平均・分散ポートフォリオ理論
 3. 1-3 CAPM (ベータ革命)
 3. 1-4 APTとクオンツ運用の構築
 3. 1-5 行動ファイナンス、スマートベータ
 3. 1-6 トレーディングの数理手法
 3. 2 課題と展望
 3. 3 状況と提言

4. 新商品開発と価格評価の数理手法
 4. 1 経緯
 4. 1-1 金融商品の設計
 4. 1-2 初期の金融商品評価手法
 - (1) 固定 Cash Flow の割引価値
 - (2) 変動 Cash Flow の評価：投資家の合理的行動
 4. 1-3 金融市場の裁定による価格理論
 - (1) 変動 Cash Flow の評価：金融市場の裁定（静的裁定）
 - (2) 動的裁定による価格決定（Black-Scholes 式）
 4. 1-4 数理ファイナンスの基本定理
 - (1) リスク中立プライシング
 - (2) 数理ファイナンスの基本定理（マルチンゲールプライシング）
 - (3) P（現実測度）と Q（リスク中立測度）の相互関係
 4. 1-5 価格計算の方法

- 4. 2 課題と展望
- 4. 3 状況と提言
 - 4. 3-1 金利系デリバティブ評価モデルにおけるマイナス金利対応
 - 4. 3-2 デリバティブ評価価格の変化～XVAプライシング

5. 銀行経営（金融リスク管理など）の数理手法

- 5. 1 経緯
 - 5. 1-1 ALM手法
 - 5. 1-2 自己資本比率規制
 - 5. 1-3 自主的な信用リスク管理
 - 5. 1-4 規制・リスク管理の高度化
- 5. 2 課題と展望
 - 5. 2-1 RAF（Risk Appetite Framework）の構築
 - 5. 2-2 経営環境予測と有機的な環境変動の発生
 - 5. 2-3 通常時の管理とストレス時の管理
 - 5. 2-4 金融市場レベルの管理の重要性
 - 5. 2-5 金融規制（バーゼルⅢなど）との共存
- 5. 3 状況と提言
 - 5. 3-1 金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（1）
 - 5. 3-2 金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（2）
 - 5. 3-3 金融規制の潮流と銀行ERM
 - 5. 3-4 システミック・リスクに纏わる数理モデルについて

6. 最近の経営環境の変化と新しいテーマ

- 6. 1 経緯、課題と展望
- 6. 2 状況と提言
 - 6. 2-1 クレジット・スコアリング・モデルと機械学習
 - 6. 2-2 金融実務における人工知能、機械学習、データ構造化

おわりに

【引用文献／参考文献】

総括

金融業務は取引内容を数値で正確に記述することが不可欠であり、元来、金融は数理的な手法に馴染む業務であるが、長い間、それに使用された数理は四則演算を中心とした簡単なものにとどまっていた。

しかし 1980 年代半ばぐらいから、米国発の金融技術革新と呼ばれる現象が日本にも波及してきて、そのような金融実務の世界にも急激に確率解析を中心とした高度な数理手法が導入されていった。

その後、金融の数理は金融資本主義の世界的な興隆を支える主要な要素の一つとして、さまざまな形で発展してきたが、2008 年の金融危機を契機に、世界の金融市場や金融機関に対する要請に変化が起こり、また高度 IT・ネット社会の進行など、金融産業を取り巻く環境が大きく変化して、金融を支えてきた数理にも軌道修正や新たな領域への取り組みが求められるようになった。

今回の数学協働プログラム・金融作業グループは、金融数理の現場（実務界・官界・学界）で活躍する有識者が集まって、これまでの金融を支えてきた数理を再整理し、足元の課題を踏まえながら、今後に向けて必要となる金融数理の軌道修正や取り組むべき新たな領域などについて議論し、論点を整理することを目的として組成した。

参加メンバーは次の通りである。

金融庁	内田 善彦
日本銀行	山中 卓
三菱UFJフィナンシャルグループ	吉藤 茂
三菱東京UFJ銀行	青沼 君明
りそな銀行	荒川 研一
みずほ第一フィナンシャルテクノロジー	伊藤 敬介
東京大学	楠岡 成雄
一橋大学	中川 秀敏
首都大学東京	磯貝 孝
慶應義塾大学	枇々木規雄
同	林 高樹

(幹事) 統計数理研究所	山下 智志
同	川崎 能典
同	荻原 哲平
一橋大学	池森 俊文
(補佐) 統計数理研究所	神谷 直樹
同	長幡 英明
総合研究大学院大学	田上 悠太

金融作業グループの全体会合は、次のとおり7回にわたって開催した。

第1回会合	2016年4月22日	一橋講堂
第2回会合	2016年7月8日	東京ステーションコンファレンス
第3回会合	2016年8月18日	同
第4回会合	2016年10月4日	同
第5回会合	2016年11月24日	同
第6回会合	2016年12月16日	同
第7回会合	2017年1月19日	同

以下で金融に数理手法が導入されていった経緯と現下の課題および金融作業グループにおける議論の要旨をまとめる。

なお、以下の内容の多くは総括執筆者の私見に基づくものであり、金融作業グループの参加者及びその所属する組織の総意を要約したものではないことにご注意願いたい。

(総括担当：一橋大学 池森俊文)

1. 金融技術革新前史

1. 1 銀行の初期の数理手法

金融技術革新の前の時代は、基本的には四則演算を中心とした計数処理が行われていたが、それでもいくつかの領域で四則演算を超える数理が使われていた。

(1) 割引 Cash Flow 法によるプロジェクト評価

初期投資額： I 、プロジェクトから得られる各年の Cash Flow： C_1, \dots, C_T に対して、金利 x によるそれらの割引現在価値を $f(x)$ とする。

$$f(x) = -I + \frac{C_1}{1+x} + \dots + \frac{C_T}{(1+x)^T}$$

・ NPV法 (=Net Present Value)

プロジェクト評価の基準収益率を r としたときに、

$$f(r) > 0 \text{ ならばプロジェクトを採択}$$

・ IRR法 (=Internal Rate of Return)

または、同じことであるが、

$$f(x) = 0 \text{ の正の実数解 } x^* \text{ が、 } x^* > r \text{ ならばプロジェクトを採択}$$

(2) 財務指標分布の多変量解析

企業の財務指標 (x_1, \dots, x_K) を、一定の分布に基づく確率変数ベクトルと考え（各企業の財務指標はそのサンプル・データと考える）、

・ 因子分析による各財務指標の特性分析や、

$$x_k = a_{k,1} \cdot f_1 + \dots + a_{k,m} \cdot f_m + \varepsilon_k \quad (k = 1, \dots, K, \quad m < K)$$

・ 主成分分析による企業財務の総合指標の構成、

$$y = b_1 \cdot x_1 + \dots + b_K \cdot x_K$$

・ 判別分析による優良企業と倒産（可能性）企業の判定基準の構成

$$g(x) = c_0 + c_1 \cdot x_1 + \dots + c_K \cdot x_K \geq d$$

などの初歩的な試みが行われた。

(3) マクロ経済分析や産業連関分析

・ マクロ経済変数の相互間の関係を表す マクロ経済モデル（連立方程式系）

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \\ \dots\dots \\ f_k(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = 0 \end{cases}$$

において、変数 (x_1, \dots, x_m) を企業アンケートや別途の推計式などで与えたときに、上記の関係式を満たすような内生変数 (y_1, \dots, y_n) を求めるもので、大手銀行などはこの手法によって経済成長率の予測などを行った。

- ・各産業の産出物 $X = {}^t(X_1, \dots, X_m)$ の、自産業や他産業への中間投入の状況 $A \cdot X$ ※と、最終需要 $F = {}^t(F_1, \dots, F_m)$ の関係 $(A \cdot X + F = X)$ を集計した産業連関表を用いて、ある産業部門の需要増加が各産業部門の生産を誘発する効果などを試算した。

※ A は投入係数行列と呼ばれる。

産業連関表は総務省を中心に5年毎にまとめられ発表される。

1. 2 不確実性の時代へ

そのような状況を変えたのが「不確実性の時代」の到来であった。米国を中心に構築された第二次世界大戦後の世界の経済体制は、1970年代に入ってその綻びが出始めた。

1971年のニクソンショック（米ドルの金交換停止と外国為替の変動相場性への移行）、1973年の第一次オイルショック（原油価格が一気に3倍に値上がり）と、それに伴う世界的なインフレ高進、先進諸国の景気対策としての財政出動とそのための国債の大量発行、発行された国債の流通市場の形成、自由金利市場による金利の乱高下などが起こり、世界中の金融経済の環境が目まぐるしく変化する「不確実性の時代」へと移行していった。

それに伴って銀行に対する従来の「規制・保護」の金融行政にも不都合が生じるようになり、1980年代に始まったいわゆる金融自由化によって、金融行政は「規制・保護」から「各金融機関による自己責任経営」へと転換が図られた。

そのような時代背景の下、確率解析手法を基礎として、不確実な金融市場における投資に関する理論（ポートフォリオ理論）、不確実性に起因する金融リスクを回避する、あるいはリスク見合いに収益性を高めるための新商品（デリバティブや証券化商品など）開発とその価格計算についての理論、金融機関のリスク管理のための理論などが興り、併行して進行していた電算・通信技術の発展にも支えられて、不確実性の時代に対処するための手法として、これらの理論が金融実務の世界に波及していった。金融業界ではこのような動きを総称して「金融技術革新」と呼んでいる。

2. 金融技術革新とリーマンショック、最近の新たな課題

2. 1 金融技術革新

金融技術革新は以下の様な分野で起こり、やがてその技術レベルの高低が銀行等の競争力の源泉の一つとなった。さらに経営管理のための手法は一般事業会社にも波及してERM (Enterprise Risk Management) と呼ばれた。

(1) 新商品・新金融サービスの開発

金融取引をCash Flowで表示することが、金融の数理分析の出発点であった。取引内容をCash Flow表示することで金融取引の構造が明らかになり、それを設計・分解・合成することによってさまざまな新商品が登場した。

$$\begin{aligned} \text{(例) Forward contracts, Swaps (=交換)} & S(T) - K \\ \text{Option (=選択権)} & -\text{Min}[S(T), K] = -S(T) + \text{Max}[S(T) - K, 0] \\ \text{Put-Call parity} & M a[S(T) - K, 0] = S(T) - K + M a[K - S(T), 0] \\ \text{証券化 (=合成・再分解)} & \sum_{i=1}^m a_i(t) = \sum_{j=1}^n b_j(t) \end{aligned}$$

先渡 (Forward contracts)、先物 (Futures)、オプション (Options)、スワップ (Swaps) などのデリバティブや各種の証券化商品などの開発では、その価格計算や取引管理のための数理技術が必要となった。

(2) 投資・トレーディング

現代ポートフォリオ理論をベースとした、いわゆるクオンツ手法と呼ばれる投資手法や、市場変動を確率過程で表現して収益獲得やポジション管理の方法を構成するトレーディング手法が導入された。

(3) 経営管理の合理化

資産負債の総合管理手法 (ALM)、信用リスク管理手法、投資・トレーディングの管理手法、オペレーショナル・リスクの管理手法、これらの各リスクを合算し資本と対比して管理する統合リスク管理手法が導入された。

この金融技術革新 (金融の数理化) によって、金融取引や金融機関経営・金融システム等についての議論と分析が、言葉による感覚的なものから数理による構造的・本質的なものへと変化していった。

2. 2 リーマンショックの衝撃

このような金融業務の多様化・複雑化・技術化は、日本でも国家の経済発展のための施策の一つとして取り上げられて「金融高度化」「金融立国」とまで言われるようになった。しかし 2007 年に顕現化した米国のサブプライム問題と引き続く 2008 年のリーマンショック、そして世界的な実体経済の急激な減速によって、このような展開に見直しを迫られることになった。

特に「金融の数理化」については、以下の様な指摘がなされた。

- ・取引当事者がその内容を理解できないまでに金融商品を複雑化させた。
 - 二重・三重の証券化（CDO²、CDO³）※や、エキゾティック・プロダクトと呼ばれる特殊なデリバティブとそれを組み込んだ仕組み商品など
 - ※CDO（Collateralized Debt Obligation）は証券化商品の一種であるが、証券化されたCDOを資産プールとして更に証券化したCDO²や、CDO²を更に証券化したCDO³が開発された。
- ・金融機能を分解（Unbundling）することによって、金融取引に関する当事者の責任を不明確にした。
 - ブローカーの住宅ローンの粗製・濫造と転売による責任移転、大手銀行のオリジネート・トゥ・ディストリビュート（Originate to Distribute）と言われるビジネスモデルと証券化、それに対する格付会社による格付、大手銀行による信用補完、流動性補完など
- ・数理モデルを単純化し過ぎて金融の実態を十分に表現していなかった。
 - 証券化商品における「1因子ガウス過程モデル」による信用リスクのモデル化と価格計算、リスク計算など
- ・統合リスク管理といいながら数理モデル化可能なリスクのみを高度に計量し、その他のモデル化の難しいリスクが適切に認識されなかった。
 - N. N. タレブの「ブラック・スワン」における未知事象の指摘や、金融市場レベルのリスク（例えばシステミック・リスク）など

これらの指摘によって、銀行の金融商品・投資商品の設計や価格計算・リスク管理のための数理モデルの構成、経営管理の方法などの変更を余儀なくされることになった。

リーマンショック以降、それまで大手金融機関同士の取引には考慮されなかった信用リスクが取引条件に反映されるようになり（「too big to fail」という考え方の修正）、店頭取引として行う金利スワップやCDS（Credit Default Swap）のような標準的なデリバティブについては、中央清算機関（CCP=Central Counterparty）を介して決済すること

が義務付けられ、また、金融危機時およびその後大きく低下した市場流動性や世界的な景気後退への対応策として実施された先進諸国の金融緩和策、それによって発生した金利低下やゼロ金利（マイナス金利）など、金融市場で起こった新たな状況への対応が必要となった。

更に金融危機の発生を契機に、金融規制の強化が図られて（バーゼルⅡ、5、バーゼルⅢなど）、銀行等はそれに対する技術的・組織的な体制の整備を求められている。

2. 3 最近の経営環境と新たな課題

一方で伝統的な銀行業は新しい経営環境への対応を迫られている。高度IT・ネット社会の到来による新しい情報手段（インターネット、電子メール、SNSなど）の普及と、それに伴う顧客行動の変化、それに順応した「新たな金融」を実施する周辺業態からの攻勢などである。コンビニエンス業界によるコンビニATM、コンビニ決済、リテール業界によるネット販売とその決済の多様化や電子マネー・消費ポイントによる消費と資金フローの囲い込み、ネット銀行・ネット証券による低コスト・好条件の金融商品の提供などが拡大しつつある。

インターネットやモバイル端末を通じた金融取引を実施するには、個人認証技術や取引プロテクション技術（暗号理論）、分散型帳簿（ブロック・チェーン）の構築技術などが新たに必要になる。

また、いわゆるビッグデータの時代に、広範囲のデータを使用したマーケティングや新金融サービスの開発、市場動向や顧客動向の把握、信用判定などのリスク分析、自らの業務内容の分析・評価などの手法開発・改善が必要となっている。

新たな金融を実施する周辺業態からの攻勢に対しては、銀行自体も新しい業務形態の模索が必要になっている。その際には「通貨」や「決済」の具備すべき機能、「与信・受信」の基本的要件、「預金」の果たすべき役割など、自らが実施している金融機能の本質とそれを実施するためのコスト・採算性について、あらためて検証をする必要がある。

（Crane, D. B. et al. (1995) など参照）

以下では、数理が適用されている金融の分野（投資、新商品開発・価格評価、金融リスク管理などの銀行経営管理、新たなテーマと分野）ごとに、高度な数理手法が導入されてきたこれまでの経緯と今後の展望を記述し、また今回の金融作業グループの会合で提示された内容について要約する。

3. 投資とトレーディングの数理手法

3. 1 経緯

3. 1-1 テクニカル分析とファンダメンタル分析

株式投資に関する分析として長く行われていたのがテクニカル分析（チャート分析）とファンダメンタル分析であった。

テクニカル分析は、毎日の4本値（始値、終値、高値、安値）と取引高をチャートとしてグラフ化し、抵抗線や支持線、特定の価格変動パターン、移動平均線の交わりなどを分析しながら売買のタイミングを見出す手法で、幾何学的な分析を伴うものである。

ファンダメンタル分析は、財務諸表分析や業界分析などを通じて企業が行う配当や将来に向けてのリスク・成長性などを予測することによって真の企業価値を算定し、市場株価がそれよりも低ければ購入（高ければ売却）するという手法で、構成としては理論的であるが幾つかの大胆な仮定や主観的な判断を伴う分析である。

これらの手法はいずれも個別銘柄の値上がり可能性（収益性）に注目し、「どの株を買うか」という銘柄選定のための手法である。

3. 1-2 平均・分散ポートフォリオ理論

それに対して H. Markowitz のポートフォリオ選択理論 (1952) では、収益性とともによりリスクに着目し、分散投資によるリスク低減効果を数理的に示すとともに、投資成果に対する投資家の効用を収益性（投資収益率の期待値）とリスク（同標準偏差）で表現して、さまざまな投資家にとっての最適ポートフォリオを提示した。

各株式 j の投資収益率 \tilde{R}_j ($j=1, \dots, n$) の分布を次のように仮定する。

$$\tilde{R}_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2), \quad \mu = {}^t(\mu_1, \dots, \mu_n), \quad \sigma_{j,k} = \text{Cov}[\tilde{R}_j, \tilde{R}_k], \quad \Omega = (\sigma_{j,k})$$

各株式への投資比率 w_j のポートフォリオを構成すると、その投資収益率 \tilde{R}_p の分布は、

$$\tilde{R}_p = \sum_j w_j \tilde{R}_j \sim N({}^t W \cdot \mu, {}^t W \cdot \Omega \cdot W), \quad W = {}^t(w_1, \dots, w_n), \quad \sum_j w_j = 1$$

このとき、期待投資収益率（収益性）が $\mu^* = {}^t W \cdot \mu$ となるような、リスク最小のポートフォリオを求める問題は、次の最適化問題として定式化できる。

$$\text{min } {}^t W \cdot \Omega \cdot W \quad \text{s. t. } \sum_j w_j \mu_j = \mu^*, \quad \sum_j w_j = 1$$

μ^* を最小分散ポートフォリオに対する期待収益率以上に設定し、様々な水準の μ^* に対して上記の最適化問題を解くと、有効フロンティアと呼ばれる最適解の集合が得られる。

3. 1-3 CAPM (ベータ革命)

しかし銘柄数 n が大きくなると、H. Markowitz の提示した最適解を得ることは、当時の電子計算機の処理能力では困難であった。

その問題を解決したのが、W. Sharpe (1964) や J. Lintner (1965) の CAPM (Capital Asset Pricing Model) である。 n 銘柄の株式※のほか安全資産を投資対象に加えることによって、投資家の投資収益率についての効用の違いに関わらず、どの投資家からも唯一のポートフォリオが選択されること、市場の需給が均衡すれば、それは市場ポートフォリオとなり、個別銘柄の投資収益率 \tilde{R}_j の期待値は、市場ポートフォリオの投資収益率 \tilde{R}_M の期待値によって次のように表されることを示した。この手法によって最適化計算のための計算量は格段に軽減された。 ※CAPMは株式に限らず一般危険資産に拡張される

$$E[\tilde{R}_j] = r_f + \beta_j (E[\tilde{R}_M] - r_f)$$

ただし、 r_f : 安全資産利子率 $\beta_j = \frac{Cov[\tilde{R}_j, \tilde{R}_M]}{V[\tilde{R}_M]}$: ベータ

電子計算機の能力による制約から解放されて、CAPMは投資における実用的な新手法として学界・実務界の両方に大きな影響を与えた。「ベータ革命」と呼ばれている。

ベータは、個別銘柄の投資収益率 \tilde{R}_j を市場ポートフォリオの投資収益率 \tilde{R}_M で回帰分析したときの係数 β_j としても求められる。したがって \tilde{R}_M は株式の投資収益率 \tilde{R}_j を決定する因子 (単一因子) と見ることができる。

$$\tilde{R}_j = \alpha_j + \beta_j \tilde{R}_M + \tilde{\varepsilon}_j \quad (\text{回帰式、} \tilde{\varepsilon}_j : \text{誤差項})$$

3. 1-4 APTとクオンツ運用の構築

ある意味でCAPMの拡張となったのが S. Ross のAPT (Arbitrage Pricing Theory) (1976) である。APTでは $n+1$ 種類の金融資産の投資収益率が、以下の様に表されると仮定する。

< n種類の危険資産 >

$$\tilde{R}_j = \alpha_j + \beta_{j,1}\tilde{f}_1 + \cdots + \beta_{j,K}\tilde{f}_K + \tilde{\varepsilon}_j \quad (j=1, \dots, n)$$

ただし、 $\alpha_j = E[\tilde{R}_j]$ 、 $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_K$: 投資収益率の共通因子 ($E[\tilde{f}_k] = 0$)

$\tilde{\varepsilon}_j$: 誤差項 ($E[\tilde{\varepsilon}_j] = 0$)、 $\{\tilde{f}_k\}, \{\tilde{\varepsilon}_j\}$ は相互に独立

< 1種類の安全資産 > $R_0 = r_f$

そのとき、これらの金融資産で構成される金融市場が「裁定取引が不可能」ならば、

$$E[\tilde{R}_j] = \alpha_j = r_f + \lambda_1 \cdot \beta_{j,1} + \cdots + \lambda_K \cdot \beta_{j,K}$$

となるような定数 (リスクプレミアム) $\{\lambda_k\}$ が存在する。

APTでは、CAPMのような投資収益率の平均・分散に基づく合理的行動、市場均衡などを仮定せず、投資家が共有する投資収益率の因子構造と市場裁定のみを仮定して結果を導いた。

このような現代ポートフォリオ理論をベースとした投資手法 (クオンツ運用) 開発の実務では、次の各段階で数理手法が必要となる。

< 投資ポートフォリオ \tilde{R}_p ($\tilde{R}_p = w_1\tilde{R}_1 + \cdots + w_n\tilde{R}_n$) を設計する段階 >

1. $\{\tilde{R}_j\}$ の候補の選定、 \tilde{R}_j のモデル化および分布の推計
2. 投資家の \tilde{R}_p に対する制約条件の特定
 - ー リスク許容度、目標収益率、会計上・課税上の制約、流動性等の制限など
3. 最適ポートフォリオの構築
 - ー 二次計画法などの数理計画法

< 投資ポートフォリオを運用した後の検証段階 >

4. 実現した R_p のパフォーマンス評価
 - ー インデックスに対する超過リターン評価、要因分析など

電子計算機の性能が高まる中、H. Markowitz の平均・分散アプローチも実務で広く活用

されるようになった。特にアセット・アロケーションの構成（株式や債券などの資産分類（アセット・クラス）への投資額配分の決定）では不可欠の手法となった。

その場合に、実務では各アセット・クラスの期待リターンの設定が課題となった。実際に期待リターンの予測値を設定すること自体が難しい上に、平均・分散アプローチによる最適化計算で決定される資産配分が、その設定水準に敏感に感応するという問題である。

それに対して、F. Black と R. Litterman はベイズ統計学のテクニックを用いてこの問題を解決し、Black-Litterman モデル (1992) を提唱して実務で広く使用されている。

これらの理論と手法が導入されるとともに、投資の対象（ユニバース）は国内証券から先進国証券へ（国際分散投資と呼ばれる）、さらに不動産やコモディティ（原油・穀物・貴金属など）・新興国株式へ（オールタナティブ投資と呼ばれる）と拡大していった。

3. 1-5 行動ファイナンス、スマートベータ

一方でCAPMにおいて仮定した「投資家が情報を共有し、合理的に行動する」という前提を否定する投資理論と投資手法が登場した。D. Kahneman と A. Tversky (1979) の研究がきっかけになった行動ファイナンス学派と呼ばれる考え方と投資手法である。

行動ファイナンスは、投資家の習性として「ランダム事象でも何らかのパターンを認識しようとする」「新しい情報を得ても従前の認識に縛られる」「損失の実現を回避したい」「その他の投資家の判断・行動に引きずられる」などの傾向があり、これらの習性に基づいて形成されると考えられる市場価格に対して投資戦略を構成するもので、代表的な投資戦略としてはバリュー戦略や業績予想修正戦略などがある。

また最近、スマート・ベータと呼ばれる投資手法（商品）が話題になっている。従来の「市場ポートフォリオ（全銘柄の時価総額加重値）をインデックスとしてパッシブ運用を行う手法（インデックス・ファンド）」に対して、それとは異なる基準のインデックス（非時価総額加重）や特定リスクプレミアムへの注目、一定の銘柄選択ルールによって投資ポートフォリオを構成しようとするものの総称で、長期間に亘って株式市場平均のパフォーマンスが低水準であった中で、部分的には高いパフォーマンスの銘柄群が存在したことが背景にある。

時価総額の代わりに会計利益額や株主資本額などで株価を加重したファンダメンタル・インデックスに基づく投資や、最小分散ポートフォリオに基づく投資、高ROE銘柄を選択して組んだポートフォリオや高配当銘柄を選択して組んだポートフォリオに基づく運用などがある。（Kato, Y. (2015)）

3. 1-6 トレーディングの数理手法

銀行が行うトレーディングには、ポジション（リスク）をとらずに対顧客鞘で利益を上げるものと、ポジション（リスク）をとって短期間の売買損益で利益を上げるものがある。高度な数理手法を必要とするのは一般的には後者である。

銀行の時点 t のトレーディング勘定の市場価格を $V(t, x_1, \dots, x_K)$ とし、 x_1, \dots, x_K が市場価格を変動させる要因とする。

$$\text{簡単のため } d\tilde{x}_k(t) = \mu_k(t)dt + \sigma_k d\tilde{z}_k(t) \quad (k=1, \dots, K),$$

$$d\tilde{z}_k(t) \sim N(0, dt), \quad \text{Cov}[d\tilde{x}_j(t), d\tilde{x}_k(t)] = \rho_{j,k} dt \quad \text{とする。}$$

そのときトレーディングの損益プロセスは次のように記述される。

$$d\tilde{W}_{Trade}(t) = [(\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t)) + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \mu_k(t) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^K \Gamma_{j,k}(t) \rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k] \cdot dt \\ + \sum_{k=1}^K \Delta_k(t) \cdot \sigma_k \cdot d\tilde{z}_k(t) \quad , \quad W_{Trade}(0) = \text{期初配賦資本額}$$

$$\text{ただし、 } \theta(t) = \frac{\partial V}{\partial t}, \quad \Delta_k(t) = \frac{\partial V}{\partial x_k}, \quad \Gamma_{j,k}(t) = \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_k} \quad : \text{感応度}$$

$$V_0(t) : \text{ポジション取得に要した資金額、 } r(t) : \text{適用金利}$$

トレーディング利益獲得の戦略には、例えば次の様なものがある。

(1) Directional Trading

$\mu_k(t) > 0$ または $\mu_k(t) < 0$ と予測される場合、 $\mu_k(t) \cdot \Delta_k(t) > 0$ となるようにポジション（ $\Delta_k(t)$ ）を構成して期待値として利益を得る。

(2) Carry Trading

市場変動が穏やかで $\mu_k(t) \approx 0$ と予測される場合、 $\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t) > 0$ ならば、ポジション（ $\Delta_k(t)$ ）を構成して期待値として利益を得る。

(3) Arbitrage Trading

市場の状況によっては $\Delta_k(t) = 0$, $\Gamma_{j,k}(t) = 0$ としても、 $\theta(t) - V_0(t) \cdot r(t) > 0$

(アービトラージ可能) となることがあり、確実に利益が得られる。

利益獲得の戦略 (1) (2) は、 $\Delta_k(t) \cdot \sigma_k \cdot d\tilde{x}_k(t)$ の不確実性が残るため、トレーダーの予測が外れた場合には損失が発生する可能性がある。その場合の大きな損失の発生を防ぐ目的で、トレーダーが構成できるポジションを予め与えた損失処理能力 (W_{Trade} : 配布資本) の範囲内に制限する「ポジション枠」が設定される。

ポジション枠 ($\Delta_k(t)$ の制限) は次のように算定される。(Ikemori, T. (2013))

$$\Delta(t) \cdot \Omega \cdot \Delta(t) \leq \frac{W_{Trade}^2}{\phi_\alpha^2}$$

ただし、 $\Delta(t) = (\Delta_1(t), \dots, \Delta_K(t))$, $\Omega = (\rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k) : \{d\tilde{x}_k\}$ の分散共分散行列

ϕ_α : 正規分布の α % 点の対標準偏差倍率

3. 2 課題と展望

投資の分野では、2008 年の金融危機後の金利低下によって近年では投資パフォーマンスの低下がみられ、より大きなリスク (信用・期間・流動性など) をとってパフォーマンスを上げる「利回り追求 (イールドハンティング)」の動きが起こっている。このようなリスクを増加させた投資ポートフォリオの運営においては、ますます体系的なリスク管理が重要となっている。また、低金利環境が反転した場合には大きな評価損の発生が見込まれるため、金利上昇の予兆を察知するような手法の開発も重要なテーマになっている。

高度情報化時代において、投資分析のための情報の種類・量・質・速度が拡大している。市場取引情報の高頻度化 (HFT データ) や開示書類の電子化 (EDINET、TDnet) のほか、各企業のホームページや企業情報を提供するサイトからは、投資分析のための大量の数値データやテキストデータを得ることができるようになった。このような大量のデータ (ビッグ・データ) を収集・整理・分析し有用な情報を抽出して、それに基づいて直ちに投資やトレーディングを実行するためのシステム環境の整備やそのための人材確保が進み、HFT 手法 (プログラム・トレーディング) や AI (Artificial Intelligence) 投資手法も導入されつつある。

最近時では ESG (Environment, Social, Governance) 情報の重要性が認識され、投資のための情報として、ESG に関わる各種データのほかに ESG 格付や ESG 指標などが公表されている。(Hayashi, T. (2016))

また 取引データの高頻度化 では、従来の終値 (あるいは 4 本値) による等間隔データからの各種パラメータ推定をランダム到着データから行うなど、新たな数理統計手法の採用が必要になっている。(Hayashi, T. and Sato, A. (2016))

3. 3 状況と提言

投資の数理手法に関して、みずほ第一フィナンシャルテクノロジーの伊藤敬介氏から「金融への数理手法適用の経緯と課題（3）：投資・トレーディング手法」というテーマで、状況説明と提言があった。

伊藤敬介氏は、H. Markowitz による「リスクの認識、分散投資」から最近の「HFT (High Frequency Trading)、ビッグデータ」に至る資産運用分野でのテーマの流れを説明した後、資産運用における意思決定プロセスと、その中で活用される数学的要素について、

- ・投資収益率分布の推定（期待値や分散共分散・高次モーメントなど）
- ・投資家の効用の特定（投資行動分析、行動ファイナンス）、
- ・最適ポートフォリオの構築（数理計画法、OR (Operations Research) など）、
- ・パフォーマンスの評価（時間加重、金額加重、要因分解など）、

として整理し、その具体例として、投資収益率分布の推定における「共和分分析 (Co-Integration)」や、最適化における「ウエイト制約」、「Black-Litterman 型最適化」、「リサンプリング法」などの工夫の例を解説した。

次に資産運用分野での課題として、機関投資家について市場環境の変化（マイナス金利、運用対象多様化、超高速取引市場やダークプール台頭）、分析対象データの多様化（非構造化データ、ビッグデータ）、トレード執行・モニタリング体制高度化の必要性（アルゴリズムミック・トレード、HFT、リスク管理高度化）、分析技術高度化の必要性（可視化、データクレンジング、高速検索・高速推論、機械学習、自然言語処理）を挙げ、また個人投資家（リテール）について、投資資金の預金への偏在、行動バイアスの存在（上昇時に早めの利食い、下落時の塩漬け）を挙げた。

最後にフィンテック (FinTech) に言及し、資産運用分野でのフィンテックとして、機関投資家向けサービスでは、データ収集、分析・投資戦略策定・実行、モニタリング・コンプライアンスなどがあり、個人投資家向けサービスでは、ロボアドバイザー、ソーシャルトレーディング、アルゴリズムミックトレーディングなどがあることを紹介した。

4. 新商品開発と価格評価の数理手法

4. 1 経緯

4. 1-1 金融商品の設計

金融技術革新の時代に登場した代表的な新商品はデリバティブスと証券化商品であった。新商品開発は金融商品から発生する Cash Flow を設計することから始まるが、デリバティブスと証券化商品のそれぞれの Cash Flow には次のような新規性があった。

<デリバティブス>

貸出や預金などの伝統的な金融商品が「現在と将来時点の間の（異時点間の）通貨の交換」であるのに対して、デリバティブスは「将来時点の（同時の）価値の交換（forwards, futures, swaps）、または交換権（options）」として特徴づけられる。

そのためにデリバティブスは、現時点での資金の受渡し無し（等価交換）、または少額の受渡し（オプション料）で取引を開始することができ（レバレッジ効果）、これが効率的なリスクヘッジ手段、あるいは投資（投機）手段として利用された。

<証券化商品>

証券化は 1980 年代に米国で広がった手法で、貸出や不動産賃貸契約など流動性の無い取引の譲渡を受けて集合体（プール）としてまとめ、そこから発生する Cash Flow を元利払いの原資として、満期や優先度などの基準によって再構成された何種類かの証券として新たに発行するという金融手法である。（Ogaki, H. (1997)）

証券化は、もともとは流動性の無い金融取引に流動性を与えることによって、新たに投資商品を創出する効果や資金供給に新たなルートを作り出す効果、譲渡元の金融機関におけるリスク移転効果などがあり、大規模な市場となった。

4. 1-2 初期の金融商品評価手法

(1) 固定 Cash Flow 商品の割引価値

最初の金融商品価格の評価手法は割引現在価値による方法であった。

$$\text{(債券)} \quad V = \frac{c}{1+r} + \dots + \frac{c}{(1+r)^T} + \frac{F}{(1+r)^T}$$

$$\text{(株式)} \quad V = \frac{D}{r-g} \quad : \text{定成長 (g) 配当 } D \text{ の無限列の割引現在価値}$$

(2) 変動 Cash Flow 商品の評価：投資家の合理的行動

しかし、株式配当は企業業績によって変化するため、本来は変動するものである。この変動する不確実な Cash Flow の評価手法として、投資家が Cash Flow 変動に対する情報を共有し、合理的に行動することをベースにした方法が登場した。

ポートフォリオ理論 (CAPM) に基づく価格評価では、投資家がリスク・リターンの最適化を行動基準とし、市場の需給が均衡することを前提としたもので、次のように計算される。(ただし、 \tilde{V}_j : 期末価格、 \tilde{D}_j : 配当額、 $E^P[\bullet]$, $V^P[\bullet]$, $Cov^P[\bullet, \bullet]$: 現実測度 P による期待値、分散、共分散)

$$V_j = \frac{E^P[\tilde{X}_j]}{1+r+\beta_j \cdot \lambda} \quad (\tilde{X}_j = \tilde{V}_j^1 + \tilde{D}_j, \quad \beta_j = \frac{Cov^P[\tilde{R}_j, \tilde{R}_m]}{V[\tilde{R}_m]}, \quad \lambda = E^P[\tilde{R}_m] - r)$$

消費ベースの価格評価では、投資家が金融商品による通貨の時点移動によって、現在と将来の2時点における消費効用を最適化することを行動基準とし、市場の需給が均衡することを前提としたもので、次のように計算される。(Cochrane, J. H. [2001])

$$V_j = E^P[\tilde{m} \cdot \tilde{X}_j] \quad (\tilde{m} = \delta \cdot \frac{U'(\tilde{c}_1)}{U'(c_0)}, \quad U(c) : \text{効用関数}, \quad \delta : \text{割引因子})$$

安全資産にこの式を適用すると $\frac{1}{1+r} = E^P[\tilde{m}]$, したがって、

$$V_j = E^P[\tilde{m}] \cdot E^P[\tilde{X}_j] + Cov^P[\tilde{m}, \tilde{X}_j] = \frac{E^P[\tilde{X}_j]}{1+r} + Cov^P[\tilde{m}, \tilde{X}_j]$$

この \tilde{m} のことを pricing kernel、または stochastic discount factor と呼ぶ。

4. 1-3 金融市場の裁定による価格理論

(1) 変動 Cash Flow 商品の評価：金融市場の裁定 (静的裁定)

CAPMでは、市場ポートフォリオの投資収益率 R_m が各株式共通のリスク因子 (1 因子) と考えられるが、S.Ross のAPT (1976) ではこれを一般化して、

- ・各株式の投資収益率が共通因子 f_1, \dots, f_K (K 因子) に依存して次のように表され、

$$\tilde{R}_j = \alpha_j + \beta_{1,j} \cdot \tilde{f}_1 + \cdots + \beta_{K,j} \cdot \tilde{f}_K + \tilde{\varepsilon}_j \quad (\text{回帰モデル})$$

・かつ、市場が「裁定取引不可能」ならば、

$$E^P[\tilde{R}_j] = r + \beta_{1,j} \cdot \lambda_1 + \cdots + \beta_{K,j} \cdot \lambda_K \quad \text{ただし、} \lambda_k = E^P[\tilde{f}_k] - r$$

書き換えると評価額は以下のようになることを示した。

$$V_j = \frac{E^P[\tilde{X}_j]}{1 + r + \beta_1 \cdot \lambda_1 + \cdots + \beta_K \cdot \lambda_K}$$

市場が裁定することを前提として価格が決定するという考え方は、債券市場や先渡市場の価格決定にも適用された。

<債券価格>

債券から発生する Cash Flow を $c, \dots, c + F$ 、発生時点を $t_1, \dots, t_n = T$ とすると、債券の市場価格 V は、

$$V = c \cdot D(t_1) + \cdots + (c + F) \cdot D(t_n)$$

ただし、 $D(t) = e^{-z(t)t}$: 割引因子、割引債の価格

$z(t)$: ゼロイールド

(注) このように、債券の利回りを最終利回り (yield to maturity) ではなくゼロ・イールド (zero yield) で議論するようになった変化を「スポットレート革命」と呼んでいる。

<先渡価格>

先渡 (Forward contracts) 取引の原資産となる商品の時点 t の価格を $S(t)$ とすると、満期 T の先渡価格 K は以下の様に決定する。

$$K = S(0)/D(T), \quad D(t) = e^{-z(t)t}$$

(注) 債券価格や先渡価格はいずれも「取引から生じる Cash Flow を複製する静的ヘッジポートフォリオ※の構成コスト」として算定される。

※満期途中で組み替える必要のないポートフォリオ

(2) 動的裁定による価格決定 (Black-Scholes 式)

固定利付債券や先渡取引のように、Cash Flow が定数や (市場で取引される) 変動要因の 1 次式で表示される金融商品ならば、静的なヘッジポートフォリオを構成することが可能であるが、オプションのように Cash Flow が原資産の 1 次式ではない場合には、原資産変動のモデル化と動的なヘッジポートフォリオ※の構成が必要になる。その代表例がオブ

ション価格を評価する Black-Scholes モデルである。

※満期途中で組み替える必要のあるポートフォリオ

Black-Scholes モデル (1973) は、以下の前提で構成される。

1. 原資産価格の変動 $d\tilde{S}(t) = \mu \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)d\tilde{W}(t)$
2. 安全資産価格の変動 $dB(t) = r \cdot B(t)dt$
3. 完全市場※の仮定 ※税金や取引コスト・取引単位などの取引制約がない市場
4. 裁定取引不可能な市場の仮定

これらの前提の下で、原資産 $S(t)$ 、行使価格 K 、満期 T のコールオプションの価格 $C(t)$ が、原資産価格 $S(t)$ と満期までの時間 $T-t$ で決まる ($C(t) = f(S, T-t)$) とすると、動的に構成したヘッジポートフォリオ価値とコールオプション価格の差額の変動が、各瞬間で安全資産の変動との間に裁定が働くことを利用して次の偏微分方程式を得た。

$$-\frac{\partial f}{\partial(T-t)} + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot S^2 \cdot \sigma^2 - f \cdot r = 0 \quad (\text{基本方程式})$$

この偏微分方程式を満期価値 $C(T) = f(S(T), 0) = \text{Max}[S(T) - K, 0]$ を境界条件として解くと、次のような解 (Black-Scholes 式) が得られる。

$$C(t) = S(t) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot D(T-t) \cdot \Phi(d_2)$$

$$\text{ただし、} \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

$$d_1 = \left(\log(S(t)/K) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} \right) / \sigma\sqrt{T-t}$$

$$d_2 = \left(\log(S(t)/K) - \frac{\sigma^2(T-t)}{2} \right) / \sigma\sqrt{T-t}$$

4. 1-4 数理ファイナンスの基本定理

(1) リスク中立プライシング

このオプションの価格評価式は、上記の偏微分方程式に Feynman-Kac の公式を適用することによって、原資産価格の変動プロセスを形式的に下記に置き換え (μ と r を交換)、

$$d\tilde{S}(t) = r \cdot S(t)dt + \sigma \cdot S(t)d\tilde{W}(t)$$

それによる期待値 $E^Q[*]$ を用いて、次の様に計算されたものとも考えることもできる。

$$C(t) = D(T-t) \cdot E^Q[\text{Max}(\tilde{S}(T) - K, 0)], \quad D(s) = e^{-r \cdot s}$$

この方法（考え方）は、一般のデリバティブ商品についても適用することができて「リスク中立プライシング（Risk-Neutral Pricing）」と呼んでいる。

（2）数理ファイナンスの基本定理（マルチンゲールプライシング）

リスク中立プライシングは、その後、マルチンゲールの概念を用いて「数理ファイナンスの基本定理（Fundamental Theorem of Mathematical Finance）」として、次のように整理された。（M. Harrison and D. Kreps（1979）, M. Harrison and S. Pliska（1981））

【数理ファイナンスの基本定理】

フィルター付き確率空間 $\{\Omega, F, P, \{F_t\}\}$ で定義された金融商品の価格プロセス

$\{V(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ に対して、基準商品 $M(t) = M_0 e^{rt}$ ※によって $V^*(t) = V(t)/M(t)$ として

規格化した価格プロセスを $\{V^*(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ とする。※money market account と呼ばれる。

そのとき、

1. 金融市場が裁定取引不可能ならば、現実測度 P と同値な測度 Q（マルチンゲール測度と呼ばれる）が存在して、この Q の下では、規格化した価格プロセス $\{V^*(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ が情報プロセス $\{F(t)\}_{0 \leq t \leq T}$ に適合するマルチンゲールとなる。
2. 逆に、そのような測度 Q が存在すれば、金融市場は裁定取引不可能である。
3. 一般的にはこのような測度 Q は複数が存在し得るが、特に金融市場が完備（complete）※※ならば、Q は唯一つ存在する。

※※完備市場＝すべてのリスク要因に値段がついて市場で売買されている状態

数理ファイナンスの基本定理は、金融商品の価格計算では次のように使用される。

$V^*(t) = V(t)/M(t)$ が Q の下でマルチンゲールであるから、

$$\frac{V(t)}{M(t)} = E_t^Q \left[\frac{\tilde{V}(T)}{M(T)} \middle| F_t \right] \quad (E_t^Q[\bullet | F_t] : F_t \text{ に基づく } Q \text{ による期待値})$$

したがって、

$$V(t) = \frac{M(t)}{M(T)} E_t^Q [\tilde{V}(T) | F_t] = D(T-t) \cdot E_t^Q [\tilde{V}(T) | F_t]$$

市場裁定とマルチンゲール測度 Q の存在を前提にした数理ファイナンスの基本定理は、

商品開発の実務や学界における理論研究で広く使用されている。

この議論は確定的な金利変動 $r(t)$ ($0 \leq t \leq T$, $M(t) = M_0 e^{\int_0^t r(u) du}$) の場合にも拡張でき、さらにキャップ（フローア）やスワップションなどの金利商品の価格計算では、原資産が金利であることから基準商品の価格 ($M(t) = M_0 e^{\int_0^t \tilde{r}(u) du}$) 自体が確率的に変化するが、そのような状況下ではフォワード測度 Q^T を構成して、次のように価格計算を行う方法が確立された。

$$V(t) = D(T-t) \cdot E^{Q^T} [\tilde{V}(T) F_t] \quad (\text{一連の金利デリバティブ理論})$$

金融理論は Black-Scholes モデルを始めとして、「完全市場」「完備市場」を仮定して組立てられることが多いが、実際の金融市場は「不完全市場」かつ「非完備市場」である。

不完全市場に対しては、離散時間でのヘッジポートフォリオの組み換えを前提に、取引コストの存在や市場環境の変化（確率的なボラティリティなど）によって評価価格に修正が必用になることの研究や、非完備市場においては、金融商品価格 p が一定の幅をもってしか決まらないことなどの研究が行われており、実務上では重要な役割を果たしている。

$$h_{low} \leq p \leq h_{up} \quad (\text{Karatzas, I. (1991) など})$$

(3) P（現実測度）と Q（リスク中立測度）の相互関係

金融実務においては、金融商品評価では数理ファイナンスの基本定理の「Q（マルチンゲール測度／リスク中立測度）」を使用し、金融リスク管理では「P（現実測度）」を使用することになるが、会計期間中の実現損益のリスク（Pによる）と期末の評価損益のリスク（Qによる）を同時に議論する場合には、それらの同時使用と相互関係が問題になる。

現実測度（P）からマルチンゲール測度（Q）を構成する方法は「ギルサノフー丸山の定理」によって次のように示される。（Epps, T. M. (2009) など）

【ギルサノフー丸山の定理 (Girsanov-Maruyama Theorem)】

$W(t)$ ($0 \leq t \leq T$) を確率分布 dP による Wiener 過程とする。

原資産プロセス $dS(t) = u(t)dt + \sigma(t)dW(t)$ に対して、 $x(t) = \frac{u(t) - r \cdot S(t)}{\sigma(t)}$ とし、

$$\xi(t) = e^{\int_0^t x(s) dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t x(s)^2 ds} \quad (t \in [0, T])$$

とすると、 $\xi(t)$ は Novikov 条件の下でマルチンゲールとなる。

$\xi(t)$ を Radon-Nikodym 微分として測度 P から測度 Q に変換すれば、

$$dQ(t)/dP(t) = \xi(t)$$

$\tilde{W}(t) = W(t) - \int_0^t x(s) ds$ は、確率分布 d Q による Wiener 過程となり、

この $\tilde{W}(t)$ によって、規格化した原資産価格プロセス $e^{-rt} S(t)$ 、および規格化した

デリバティブ価格プロセス $e^{-rt} F(S(t), t)$ はマルチンゲールとなる。

$$d(e^{-rt} S(t)) = e^{-rt} \sigma(t) d\tilde{W}(t)$$

$$d(e^{-rt} F(S(t), t)) = e^{-rt} \sigma(t) F_s d\tilde{W}(t)$$

このような数学的な測度変換の議論に対して、現実測度 P とリスク中立測度 Q についての金融論的な意味付けを行ったのが、S. Ross の「リカバリー定理 (Recovery Theorem)」(2011) である。

【リカバリー定理 (Recovery Theorem)】

金融市場の不確実性は有限の状態空間 $\Pi = \{i = 1, \dots, M\}$ で表示されるとし、現在が状態 i にあるという条件の下で将来時点の状態 j に対応する Arrow-Debreu 証券の価格を $p_{i,j}$ として行列 $P = (p_{i,j})$ で表す。

(注) $p_{i,j}$ からリスク中立確率行列 Q を定めることができる。

現在の状態 i から将来時点の状態 j への遷移確率を $f_{i,j}$ として $F = (f_{i,j})$ とする。

(注) これが現実確率に相当する

このとき、固有値問題

$$P \cdot x = \lambda \cdot x$$

の Perron-Frobenius 根 λ と Perron vector x によって、

$$F = \frac{1}{\lambda} D \cdot P \cdot D^{-1} \quad : P \text{ (したがって } Q) \text{ と } F \text{ の関係式}$$

と表すことができる。ただし、 $x = {}^t(1/h(1), \dots, 1/h(M))$ に対して、

$$D = \text{diag}(h(1), \dots, h(M))$$

また、Carr and Yu (2012) は連続モデルの設定において、S. Ross と同様の「リカバリー一定理」を導いた。その導出に当たっては常微分方程式についての「Sturm-Liouville の定理」が使用された。

これらのリカバリー一定理は、実務においてリスク中立測度Qと現実測度Pを同時に扱う場合の有用なツールとなり得ると考えられる。今後に向けてその意味するところの実務的な解釈と実装化のための具体的な検討が必要となる。

4. 1-5 価格計算の方法

一般にデリバティブ商品は、満期時のペイオフ $f(T, S_T)$ (経路依存型の商品では満期までの途中のペイオフ $f(t, S_t)$ ($0 \leq t \leq T$)) として設計され提供される。

その評価価格は、デリバティブ価格の満たす偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S} \cdot S \cdot r + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \cdot S^2 \cdot \sigma^2 - f \cdot r = 0$$

の境界値問題の解、または、リスク中立価格

$$f(0, S_0) = E^Q[D(T) \cdot f(T, S_T)]$$

として計算される。

これらの解が具体的な関数形として得られればよいが (Black-Scholes 式はその典型例)、エキゾティック・プロダクトと呼ばれる複雑なペイオフの商品や、原資産の価格変動に複雑なモデルを採用した場合には、具体的な関数形で解けないことが多い。

そのような場合のデリバティブ価格計算のために、次のような工夫が行われている。

- (1) 偏微分方程式解法の離散的方法
- (2) 二項モデルによる近似
- (3) モンテカルロシミュレーション
- (4) 分布関数の漸近展開による近似 (Kunitomo, N. and Takahashi, A. (2003) など)

これらの計算手法には相対的に長い計算時間を要することが多く、個別商品の価格計算ならばよいが、銀行では会計上の要請でトレーディングとして取引したポジション全体を毎日評価替え (その日の市場条件で価格の再計算を行う) する必要があり、その場合には計算時間の長さが大きな課題となった。そのためにさまざまな計算時間短縮のための工夫が行われた。(Kusuoka, S. (2016) など)

上記の計算プロセスそのものの工夫やデータ移動 (Input-Output) 方法などのプログラム上の工夫、高性能・高速計算機の導入 (究極はスーパーコンピュータ)、多数のパソコン

をつないで複数のCPUを併行的に使用する並列処理、通常は画像処理などに使われるGPU (Graphics Processing Unit) を金融計算に活用する方法などが開発された。

4. 2 課題と展望

このようにして理論的・体系的に構成された金融商品の価格理論は、2008年の金融危機を経て大きな見直しが必要となっている。

銀行間の資金取引やデリバティブ取引の市場に、それまでには無かった「銀行の信用リスク」が考慮されるようになり、担保差し入れの慣行が行われるようになって、従来の単一イールドカーブによる金利理論や信用リスク無しのデリバティブ評価式を変更せざるを得ない状況となった。

具体的には、マルチカーブ環境を取り入れた金利モデル体系の構成と、その実装のための数値計算方法の工夫、市場価格へのカリブレーション方法、さらにそのようなデリバティブのマーケット・メイクをする場合には、ヘッジ手法やそのコストを織り込んだ価格設定 (特に価格の単一性についての問題) 等の検討が必要となっている。

また、取引相手 (および自ら) の信用リスクや担保効果等を価格計算に考慮することが必要になった。CVA (Credit Valuation Adjustment)、DVA (Debit Valuation Adjustment)、FVA (Funding Valuation Adjustment) などと呼ばれるこれらの価格調整問題は、XVA問題と総称されてデリバティブ業務を展開する銀行の対応すべき喫緊の課題となっている。

【XVA問題の定式化の例】 (Glau, K. et al (Ed.) (2016))

$\tau = (\tau_I \wedge \tau_C)$ (τ_I : 自らのデフォルト時点、 τ_C : 相手のデフォルト時点) とすると、デリバティブの契約上の割引 Cash Flow $\pi(t, T)$ に対して、従来のデリバティブ評価額が、

$$V_t = E_t[\pi(t, T)]$$
であったのに対して、現在の市場では各種の価格調整が入って、

$$\bar{V}_t(C, F) = E_t[\pi(t, T \wedge \tau) + \gamma(t, T \wedge \tau; C) + \phi(t, T \wedge Y; F) + 1_{\{t < \tau < T\}} D(t, \tau) \cdot \theta_\tau(C, \varepsilon)]$$

として提示される。

ただし、

$\gamma(t, T; C)$: 担保マージンコストの現在価値

$\phi(t, T; F)$: 取引のための資金調達コストの現在価値

$\theta_\tau(C, \varepsilon)$: デフォルト時 Cash Flow、 ε : デフォルト時市場価値

しかもこの計算は、ネットィング契約によって取引相手毎にネットアウトしたポートフォリオとして計算することや、当該ポートフォリオに対する担保価値と対比して管理することも必要となり、XVA問題は高速計算法についての検討が重要になっている。

また、実務の問題としては、このようにして計算された各種調整額をどのように会計し、どのような組織体制で管理・制御していくかが重要な課題である。

更に最近時には先進諸国の金融緩和策によって「超低金利」や「マイナス金利」が発生して、金利モデルの基本的な制約であった「金利は正值である」という大前提を変更し、マイナス金利を許容するモデルへと修正する必要が生じている。いわゆる「ゼロ（マイナス）金利問題」である。(Ueda, K. (2016) など)

この問題は技術的な観点とともに、このような環境の下で銀行業務をどのように展開するかという経営上の根本問題としても考えなければならない課題である。

新商品開発の分野では、低金利（低収益）下において「劣後ローン」による（相対的）高金利の貸出や、金融リスク規制対応のための「C o C o 債（コンティンジェント・キャピタル）」の発行などが行われており、そのような金融商品の条件設定問題やリスク管理問題が起こっている。

4. 3 状況と提言

新商品開発と価格評価の数理手法に関して、三菱東京UFJ銀行の中山季之氏から「金利系デリバティブ評価モデルにおけるマイナス金利対応」について、同じく三菱東京UFJ銀行の檜垣進氏から「デリバティブ評価価格の変化～XVAプライシング」について状況説明と提言があった。

4. 3-1 金利系デリバティブ評価モデルにおけるマイナス金利対応

中山季之氏は、市場金利についての外部環境の変化として、ユーロ市場や円市場でマイナス金利が発生し、またスワップションボラティリティが急騰したことについて概説した。

次に、Blackモデルを例に、原資産（金利）をシフトさせたモデルを用いた場合に、金利低下やボラティリティ上昇に対して密度関数に変化する様子を示して課題の所在を明らかにした後に、ボラティリティのスマイル構造に対応をしたマイナス金利モデルとして、各種SABRモデル(Shifted SABR、Free Boundary SABR、Normal SABR、Mixing SABR)を紹介した。

その後、デルタ等の感応度の計算の際に、どのボラティリティを固定するかによって、デルタ等の値が変わることを指摘し、Shifted Black モデルを例に、マイナスシフト水準によってデルタとガンマが変化の様子をグラフによって示した。

最後にまとめとして、既存モデルの実装を活かして低コストであることから実務としては Shifted model が広く使用されていること、モデルやシフト水準の選択によってデルタやベガの水準が変わってきてヘッジやVaR計算における連続性が課題となること、特定の商品については採用するモデルによって感応度の安定性やモンテカルロ解の収束性・スマイルの表現力・金利の期間構造の表現などの問題が生じて、現在のところ市場で標準的な実用モデルは確立されていないこと、などを指摘した。

4. 3-2 デリバティブ評価価格の変化～XVAプライシング

檜垣進氏は、金融危機以降の各種スプレッド／ベースの拡大、金融規制の強化等により、デリバティブ評価が様々な条件に依存するようになったとして、価格評価、取引コスト、CVA、FVAなどが取引形態（無担保取引、有担保取引、CCP取引）によって異なってくる状況を説明したのちに、これらXVAの定式化についての体系的な整理を行った。

原資産と取引者双方のファンディング資金のダイナミクスを定め、当該デリバティブの満期時の決済価格とデフォルト時の清算金額を定め、当該デリバティブ価格のダイナミクスとヘッジポートフォリオ価値のダイナミクスに複製条件とファンディング戦略を与えることによってCVA、DVA等を算定するための偏微分方程式を導き、Feynman-Kacの公式を適用してCVA、DVA、FCAなどの一般解を示した。

その後特にFVAとMVAについて取り上げ、FVAについては欧米の大手金融機関が会計での計上を開始したこと、しかしその算定基準が不明確であること、MVAについては計算上の課題が幾つかあることなどを指摘した。

5. 銀行経営（金融リスク管理など）の数理手法

5. 1 経緯

銀行の収益性管理やリスク管理などのいわゆる経営管理は、数理手法が適用される重要な分野の一つである。以下では、この銀行の経営管理に関して数理手法が使われてきた経緯と課題について概観する。

銀行の経営管理として従来から行われていたのが決算予想や部店別損益計算、主要取引先別利鞘計算などの管理会計であった。

その状況が変化したのが金融技術革新の頃（1980年代）からで、以下の様な経緯を経て、高度な数理手法が段階的に日本の銀行の経営管理に導入されていった。

- (1) A L M (Asset Liability Management) 手法 (1980年代半ば)
- (2) B I S (Bank for International Settlement) 規制 (1990年代初め)
- (3) 自主的な信用リスク管理 (1990年代半ば)
- (4) 規制・リスク管理の高度化 (1990年代後半)

5. 1-1 A L M手法

A L M手法は、第二次石油ショック（1978年）時の米国の金融引き締め策によって発生した金利急上昇と、それに伴って発生したS & L (Savings and Loans) 危機に際して米国で導入された銀行の経営管理手法で、金利変動に対してともに感応する資産側の受取利息と負債側の支払利息を併せて管理する金利リスク管理と、資産・負債の資金収支を併せて管理する資金流動性管理から構成される。邦銀への導入は1980年代半ばごろであった。

適用された数理手法としては、感応度分析 (Sensitivity Analysis)、シミュレーション分析 (Simulation Analysis) などである。

(例1) GAP分析

$$\Delta N I \neq G A \cdot \Delta r$$

ただし、 $N I I = (\text{Net Interest Income}) = \text{利鞘} (= \text{受取利息} - \text{支払利息})$

$G A P = \text{金利更改となる資産額} - \text{金利更改となる負債額}$

$\Delta r = \text{金利変動幅}$

(例2) デュレーション分析

$$\Delta NV = (D_A \cdot V_A - D_L \cdot V_L) \cdot \Delta r$$

ただし、 $NV = (\text{Net Value}) = V_A - V_B$ (=銀行の純資産価値)

$$V_A = V_A(r) = \text{資産評価額}, \quad V_L = V_L(r) = \text{負債評価額}$$

$$D_A = \frac{dV_A}{dr} \cdot \frac{1}{V_A}, \quad D_L = \frac{dV_L}{dr} \cdot \frac{1}{V_L}$$

(例3) シミュレーション分析

想定される経済環境 (A, L, r) に対して、利鞘 (NII)、純資産価値 (NV) が次のように f, g で表されたとする。

$$NII = f(A, L, r) \quad NV = g(A, L, r)$$

経営環境のシフト $(A, L, r) \rightarrow (A + \Delta A, L + \Delta L, r + \Delta r)$ があつたとき、利鞘と純資産価値は次のように変動する。

$$\Delta NII = f(A + \Delta A, L + \Delta L, r + \Delta r) - f(A, L, r)$$

$$\Delta NV = g(A + \Delta A, L + \Delta L, r + \Delta r) - g(A, L, r)$$

$\Delta A, \Delta L, \Delta r$ をシナリオとして与える方法 (what-if 分析) と、乱数を発生させて確率分布として与える方法 (Monte Carlo simulation) がある。

当初に導入されたALM手法は、円貨資産・負債のみ(従って円金利)に対する、1期間の、金利変動が1因子の(資産負債の種類による違いや期間構造無し)、約定どおりにCash Flowが発生すると仮定した手法であつた。やがて多通貨ALM、多期間ALM、多因子ALM、コア預金・期限前返済等考慮のALMが導入された。

5. 1-2 自己資本比率規制

金融自由化によって、各銀行は自らの責任の下で経営を行うことになったが※、一方で活動がグローバル化した世界の主要銀行に対して、世界の金融システムを保全する目的で「バーゼル合意」が成立(1988年)し、各国の法制の下で「バーゼル合意に基づく自己資本比率規制(いわゆるBIS規制)」が実施されることになった※※。日本での実施は1993年3月末基準からであつた。

※de-regulation ※※re-regulation

最初に導入された「バーゼルI」は信用リスクに限定した規制で、銀行が保有する各資産残高 X_i に対して、そのリスク度に応じて資産区分ごとに設定されたリスク・ウェイトと呼ばれる係数 $W_{C(i)}$ ※を掛けて足し合わせ(リスク・アセット額と呼ばれる)、銀行の自己資

本額 E をこのリスク・アセット額で割った比率（自己資本比率）が 8% 以上であることを要請したものであった。 ※ $C(i)$ は資産 X_i の属するカテゴリー

$$\frac{E}{\sum_i W_{C(i)} \cdot X_i} \geq 0.08$$

1996 年にはこの自己資本比率規制にトレーディング勘定の市場リスク（ MR ）量が加わった。その中で「V a R（Value at Risk）」というリスク計量手法が採用されて、世界中の金融機関に広く普及することになった。

$$\frac{E}{MR \cdot 0.08 + \sum_i W_{C(i)} \cdot X_i} \geq 0.08$$

$$MR = VaR(10days, 99\%) = \Phi_{L_{10days}}^{-1}(0.99)$$

$\Phi_{L_{10days}}(x)$: 10 日間に発生し得る損失の分布関数

5. 1-3 自主的な信用リスク管理

1990 年の不動産バブルの崩壊によって資産内容が悪化した邦銀の中には、簡便なバーゼル I とは別に、独自の手法による信用リスク管理を導入するところが出てきた。

取引先 i ($i = 1, \dots, n$) の期末の債務返済の状態を離散確率変数 H_i ($H_i = 0$: 返済可能、 $H_i = 1$: 返済不能) で表し、返済不能となる確率 $p_i = \text{prob}\{H_i = 1\}$ が取引先の格付 $R(i)$

によって決まる ($p_i = p_{R(i)}$) とすると、期初の貸出ポートフォリオ $X^0 = \sum_{i=1}^n X_i$ に対して、

貸倒損失額 \tilde{L} は次式のようになるとして、

$$\tilde{L} = \sum_{i=1}^n X_i \cdot (1 - \theta_i) \cdot \tilde{H}_i \quad \text{ただし、} \theta_i : \text{回収率}$$

確率変数 \tilde{L} の期待値 $E[\tilde{L}]$ を EL (Expected Loss)、一定の信頼度 α によるパーセンタイル点 $\Phi_L^{-1}(\alpha)$ が EL を上回る金額を UL (Unexpected Loss) として管理した。

$$EL = E[\tilde{L}] = \sum_{i=1}^n (1 - \theta_i) \cdot X_i \cdot p_{R(i)}, \quad UL = \Phi_L^{-1}(\alpha) - EL$$

貸出ポートフォリオの信用リスクをこのような枠組みによって管理する方法や、取引先

の財務指標などからその取引先に格付を付与する方法などが、信用リスク管理の数理手法として金融実務に取り入れられた。

5. 1-4. 規制・リスク管理の高度化

1988年に合意され先進各国で導入された自己資本比率規制（バーゼルⅠ）は、その枠組が簡単過ぎたために、より高度なリスク管理手法の普及を促すことを目指して導入早々から見直し（高度化）に向けての検討が始まった。

それに呼応して邦銀でも1990年代後半ごろから、独自に導入した信用リスク管理手法を改良する動きや、新たにオペレーショナルリスク管理を導入する動きが始まった。

新しい「バーゼルⅡ」は、次の3つの柱から構成された。

第1の柱 最低自己資本比率による規制規律

第2の柱 自己規律に対する監督上の検証

第3の柱 情報開示に対する市場規律

第1の柱である自己資本比率規制では、信用リスク管理の手法が高度化され、オペレーショナルリスクが加えられた。また銀行が実施する自主的なリスク管理のモデルが、一定の要件の下でバーゼルⅡのリスク計量にも使用できるようになった。（内部モデル法）

独自の信用リスク管理の改良では、企業価値モデルによって取引先デフォルトの発生に構造を与えて、信用リスク計量に業種間や企業間のデフォルト連動などを考慮したり、貸出金利や与信上限の設定を信用リスク計量モデルから合理的に構成したり、アルゴリズムの工夫によって信用リスク量の計算時間を大幅に短縮する手法の開発が行われた。

(Takano, Y. and Hashiba, J. (2008))

企業価値モデルによる信用リスク管理は、取引先企業*i*の企業価値 \tilde{A}_i が、共通因子 \tilde{f} と個別因子 $\tilde{\varepsilon}_i$ で変化するとし、

$$\tilde{A}_i = A_i^0 + \beta_{S(i)} \cdot \tilde{f} + \sigma_i \cdot \tilde{\varepsilon}_i \quad A_i^0 : \text{初期企業価値}$$

この企業価値が「一定値 K_i を下回ればデフォルト」とするモデルで、それによって企業間のデフォルト連動の構造などを信用リスク管理に組み込んだ。

$$\tilde{H}_i = I\{\tilde{A}_i < K_i\} = \begin{cases} 1 & \tilde{A}_i < K_i \\ 0 & \tilde{A}_i \geq K_i \end{cases}$$

それまでの信用リスクや市場リスクが金融取引そのものから発生する損失可能性であるのに対して、オペレーショナルリスクは取引や銀行経営などの業務プロセスから発生する損失可能性を対象とするもので従来にない発想であった。モデルとしてはリスク発生頻度と発生時の損失額を確率的に表現したものが使用された。銀行のオペレーショナルリスク管理体制の構築に当たっては、まずはデータ収集から始める必要があった。

5. 2 課題と展望

長時間を掛けて検討・改良された「バーゼルⅡ」は、日本では 2007 年から実施された。併行して実装された銀行独自の内部リスク管理と合わせて「金融リスク管理の高度化」と言われた。

ところが時期を同じくして顕現化した米国のサブプライム問題（2007 年）と、引き続き金融危機（2008 年）を契機に状況が一変した。巨額の損失発生を防げなかった金融機関のリスク管理や、金融取引を過度に複雑化させた一因と考えられた金融工学が批判の対象となった。（金融の高度の数理化に対する批判の内容は、2. 2 で記述したとおりである。）

2008 年の金融危機における経験をもとに、銀行の経営管理・リスク管理について、さまざまな問題提起がなされた。金融数理の観点からは以下の様な事項が挙げられる。

5. 2-1 R A F（Risk Appetite Framework）の構築

それまでの金融リスク管理が、過去データと現在の資産・負債構成に基づく、数値化できるものに限定的な、形式的なものであったという反省から「フォワードルッキングな、網羅的な、経営戦略に直結の管理」を目指すことが要請された。そのような内容を総括して R A F（Risk Appetite Framework）と呼んでいる。

R A F の実現のためには、経営管理についての枠組みの確定（資本コスト率とリスク計量の信頼度）、収益性確保とリスク制御のための論理的な制約条件の設定、経営環境予測とそれに基づく明確な経営戦略の立案、環境変動の可能性のモデル化などが必要になる。

5. 2-2 経営環境予測と有機的な環境変動の発生

経営環境予測のツールとしてマクロ経済モデルの活用が考えられるが、金融セクターについての記述が不十分である等の指摘もあり、むしろ金融に関連する変数だけを抽出した

時系列モデルによって部分的に予測するような方法が提案されている。

(Darolles, S. and Gurieroex, C. (2015))

$$(例) \tilde{Y}_t = B \cdot \tilde{F}_t + C \cdot Y_{t-1} + \tilde{u}_t \quad \tilde{F}_t = A \cdot F_{t-1} + \tilde{v}_t$$

ただし、 Y_t : 金融変数ベクトル

F_t : 潜在因子

u_t, v_t : 誤差項

$$E[u_t] = 0, \quad E[v_t] = 0$$

$$V[u_t] = \text{Diag}(\sigma_i^2) \quad V[v_t] = \Omega \quad \text{Cov}[u_t, v_t] = 0$$

金融時系列予測 $E[Y_t] = C \cdot Y_{t-1} + B \cdot A \cdot F_{t-1}$

予測誤差の発生 $Y_t = E[Y_t] + u_t + B \cdot v_t \quad V[Y_t] = \text{Diag}(\sigma_i^2) + B \cdot \Omega \cdot B$

5. 2-3 通常時の管理とストレス時の管理

これまでのリスク管理は「損失処理能力の確保」を中心にしたものであったが、通常時の管理においては、むしろ「リスク対比の収益性確保」が重要である。

特に金融緩和政策による超低金利（マイナス金利）が継続し、資金需要が低迷し、高度ネット・IT社会を背景とする顧客行動の変化や周辺業界からの攻勢が進展する中、銀行の収益性低下が懸念されており、収益性管理の高度化や新規業務開発のための技術獲得が課題となっている。

実際、高度成長時代の店舗網拡大・人員配置による資金量確保策の遺産と、専用回線とホストコンピュータによる堅牢な銀行オンラインシステムの遺産が、銀行の業務コストを押し上げており、IT・ネットワーク技術の向上や顧客行動の変化を受けて抜本的な業務改革を図っていくことが課題となっている。そのためには新技術の獲得とともに改革成果の進捗を確認するための収益管理高度化が必要になる。

また、業務改革によって達成したコスト水準に対して、当該業務を継続するために必要な「適正取引条件」を如何に設定するのか、あらためて検討が必要であろう。

一方でストレス時の巨額損失発生に際しては、金融システムの機能維持についての配慮をしつつ、「銀行の経営を継続するかそれとも清算するか」といった重要な判断が必要になり、そのような状況（ストレスシナリオ）を合理的に想定し、発生する事態をシミュレーションして（ストレステスト）、事前に対処策（アクションプラン）を練るための手法開発と体制整備が進められている。新手法としてはPGM（Probabilistic Graphical Models）

を用いた統合的なストレスシナリオの設計や、UV a R (Uncertain Value at Risk) によるストレス時のリスク計量などが提唱されている。(Deneu, A. (2015) など)

5. 2-4 金融市場レベルのリスク管理の重要性

これまでのリスク管理哲学は「各銀行がそれぞれにリスク管理を実施することによって金融システムが保全される」というものであったが、システムック・リスクの発生や金融市場の機能不全、SNS等を通じた顧客の集団行動の発生など、個別銀行ではカバーできないような金融市場レベルのリスクが認識されるようになり、それを分析・管理するための数理手法が議論されている。

金融への数理手法の適用対象が、Cash Flow の集合としての金融取引から金融取引の集合としての金融機関経営へ、そして金融機関の集合としての金融市場（金融システム）へと階層拡大している状況である。そのような市場レベルの分析では、経済物理学や社会物理学等からのアプローチも行われている。(Takayasu, H. (Ed.) (2015))

5. 2-5 金融規制（バーゼルⅢなど）との共存

2008年金融危機以来、金融リスク規制の強化が行われており (Miyachi, A. (2015))、銀行の自主的な経営管理では、そのような金融リスク規制を「制約条件」として自らの仕組みの中に取り込む必要があるが、強化された金融リスク規制の下で、①株主が望む収益性の確保が可能かどうか、②銀行が規制対応に終始する余り自主的な経営管理の構築への努力をやめてしまうのではないか、といった懸念がある。

5. 3 状況と提言

銀行経営（金融リスク管理など）の数理手法に関して、一橋大学の池森俊文氏から「金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（1）」および「金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（2）」、三菱東京UFJ銀行の吉藤茂氏から「金融規制の潮流と銀行ERM」、日本銀行の山中卓氏から「システムック・リスクに纏わる数理モデルについて」というテーマで状況説明と提言があった。

5. 3-1 金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（1）

池森俊文氏は、銀行業務に確率解析を中心とした高度な数理が導入された経緯を振り返

り、それが①新商品開発とその価格計算、②投資手法開発、③金融リスク管理などの経営管理手法開発などの分野で起こったとして、特に邦銀の経営管理手法の分野について、それが①ALM (Asset Liability Management) の導入、②BIS規制の導入、③自主的な信用リスク管理手法の導入、④金融リスク規制と自主的なリスク管理の高度化を経て実施されたことを、具体例を挙げて示した。

しかし2008年の金融危機を契機に状況が一変したこと、その後の展開として、RAF (Risk Appetite Framework) と呼ばれる「経営戦略に直結の、フォワード・ルッキングな、網羅的なリスク管理」の実施が要請され、そのために有機的な環境変動の予測、通常時の管理とストレス時の管理の峻別、金融市場レベルのリスク管理などが重要であること、自主的なリスク管理と規制強化との共存が課題であることを説明した。

5. 3-2 金融への数理手法適用の経緯と課題：経営管理（2）

池森俊文氏は、前回（経営管理（1））の内容を簡単に振り返ったのちに、経営環境予測の方法としてマクロ経済モデル活用の可能性とその限界、現実的な方法として潜在因子を含む線形（非線形）時系列モデルによる金融系列予測の事例を説明した。

次に、ストレス時の市場環境のシフトを表現するためのレジーム転換モデル、ストレス・シナリオの設計やストレス時の損失額の算定におけるPGM (Probabilistic Graphical Models) やUVaR (Uncertain Value at Risk) の利用例などを示した。

また、金融市場レベルのリスク認識の事例として、非線形ダイナミクス（決定論的）による流行・世論・集団行動発生モデルの例を示した。

最後に、強化される金融規制と自主管理の共存の重要性について触れ、懸念される二つの事項として、①環境変化によるユニバースの縮小と規制強化による選択可能領域の縮小で、リスク・リターン要請を満たすような経営ソリューションが存在するのか、②規制強化によって銀行自身による「合理性のある自主的なリスク管理」への動機づけが減退するのではないか、と指摘した。

5. 3-3 金融規制の潮流と銀行ERM

吉藤茂氏は、冒頭で金融庁森長官の発言を引用して2008年金融危機前後での銀行とリスク管理とイノベーションに対する監督当局のスタンスの変化について触れたのちに、アジア通貨危機（1997年）、リーマンショック（2008年）、欧州債務危機（2011年）、Libor問題（2014年）を振り返って、これらのストレス事象の要点を指摘し、それに対して講じられた規制強化の流れを整理した。

その中で、再度「規制は静的な規制から動的な監督へと変化している」という森長官の発言を引用して、動的な監督の視点として①銀行の「リスクテイク」と「収益」と「資本」の関係（→RAFの確立）、②銀行と資本市場や実態経済との間の関係（→ストレステストの高度化）、③銀行と顧客との関係（→リスクカルチャーの浸透）の3点の監視が挙げられていることを指摘した。

そして、これらの円滑な実施が銀行ERMの骨子であるとして、まずRAFについて、財務計画とリスク・アペタイトの有機的関連付け、PDCAプロセスの重要性、リスク・アペタイトの検証の必要性を指摘した。

次にストレステストについて、シナリオ作成プロセスや検証作業、ストレステストの活用例などを示し、またリスク・カルチャーについてそれを銀行内に浸透させることの重要性について触れた。

最後に銀行の経営管理の将来に向けて、RAFを真のツールに、ストレステストはRAFの中で活かす、リスク・カルチャーの浸透が礎、規制と監督と市場規律のバランスを取り戻せ、と主張した。

5. 3-4 システミック・リスクに纏わる数理モデルについて

山中卓氏は、システミック・リスクを「金融システム全体が機能不全に陥り、深刻な場合には崩壊する危険性」と定義し、それには金融機関のデフォルトをトリガーとした「伝統的システミック・リスク」と、金融市場における金融資産の価格低下や市場流動性の低下をトリガーとした「市場型システミック・リスク」があること、それらのシステミック・リスクに対しては、それぞれの金融機関が個別に自行のリスク管理を高度化するだけでは対応が不十分であることを指摘した。

また、システミック・リスク顕在化のプロセスとして、①トリガー事象の発生、②金融システム全体への伝播の2段階があることを示し、それに応じてシステミック・リスク研究の目的には、①トリガー事象発生の予兆モニタリング、②金融システムの脆弱性の計量、③マクロ・ストレス・テストのためのモデル化、があることを示した。

次に、伝統的システミック・リスク・モデルとして、ネットワークモデル、結合拡散過程モデル、強度モデル、統計的アプローチの内容を概説した。

また、市場型システミック・リスクについては、国債市場の取引ネットワーク分析の例を示したのち、市場流動性分析、ボラティリティー・スピルオーバー、フラッシュ・クラッシュにおけるマーケット・インパクト、HFT（High Frequency Trading）の影響、人工市場の制度設計などについて言及した。

6. 最近の経営環境の変化と新しいテーマ

6. 1 経緯、課題と展望

高度IT・ネット社会の到来によるインターネット、電子メール、SNSなどの新しい情報手段の普及は、情報量の拡大とともに、顧客の消費・金融行動の変化や伝統的な金融業務に対する周辺業態からの攻勢を引き起こしている。

コンビニエンス業界によるコンビニATM、コンビニ決済は、店舗数の多さと稼働時間の長さという利便性によって銀行を圧倒している。リテール業界による決済手段の多様化、電子マネーの普及・消費ポイントの付与は、新しい通貨の創出と消費者の資金フローの囲い込みを果たそうとしている。またネット銀行・ネット証券などによる低コスト・好条件の金融商品の提供は、より直接的に伝統的な銀行業務への攻勢となっている。

インターネットやモバイル端末を通じた金融取引の構築には、個人認証技術や取引プロテクション技術（暗号理論）、分散型帳簿（ブロック・チェーン）の構築技術などが必要になる。暗号として使用されるのが整数論を利用した技術である。

（例1）RSA（Rivest-Shamir-Adleman）暗号

整数論のオイラーの定理

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \quad \text{特に } n = p \cdot q \quad (p, q : \text{素数})$$

を利用したもの

（例2）楕円曲線暗号（Takashima, K. (2015)）

有限体 (F_p) 上の楕円曲線 $y^2 = x^3 + a \cdot x + b$ の

特定解の加法（スカラー倍）が構成する巡回群の性質を利用したもの

またいわゆるビッグデータの時代に、広範囲のデータを使用したマーケティングや新金融サービスの開発、市場動向や顧客動向の把握、信用判定などのリスク分析、自らの業務内容の分析・評価などの手法開発・改善が必要となっている。

ビッグデータ活用のための数理手法として、データ・クレンジング（data cleansing）と呼ばれるデータの重複・誤記・欠落の補正や正規化、異種データの関連付けなどの手法と、伝統的な統計手法（回帰分析、判別分析、ロジットモデルなど）や機械学習的な手法（決定木モデル、ニューラルネットワーク、サポートベクターマシンなど）を用いたデータ分析手法が必要となり、データ収集自体とともにこれらの技術の習熟が課題となっている。

6. 2 状況と提言

最近の経営環境の変化と新しいテーマに関して、りそな銀行の荒川研一氏から「クレジット・スコアリング・モデルと機械学習」について、統計数理研究所の山下智志氏から「金融実務における人工知能、機械学習、データ構造化」について状況説明と提言があった。

6. 2-1 クレジット・スコアリング・モデルと機械学習

荒川研一氏は、統計モデル・機械学習・深層学習の相互関係を位置付けたのち、クレジット・スコアリング・モデルを「企業や個人の属性・財務情報等により信用リスク（デフォルトしやすさ）を点数化（スコア化）する仕組み」と定義してその具体的なイメージを示し、貸出ポートフォリオの信用リスク計量モデルとの関係や、クレジット・スコアリング・モデルの歴史を概説した。

その中で、クレジット・スコア・モデルは、過去のデータから企業群を「デフォルト」「非デフォルト」の2群に最も効率よく分類するモデルを作成し、新たな分析対象企業のデータにそれを適用して、その位置づけから当該企業のデフォルト確率を予測するものであるとして、分類のためのアルゴリズムに統計手法を用いたものと、機械学習の手法を用いたものがあることを説明した。

そして統計手法を用いたアプローチとして、判別分析、ロジットモデルについて解説し、モデルの構築方法、モデルのメリット・デメリットなどを説明した。また、機械学習の手法を用いたアプローチとして、決定木モデル、ニューラルネットワーク、サポート・ベクター・マシンについて解説し、手法の概要や特徴、それぞれの手法を使用した場合のメリット・デメリットを説明した。

6. 2-2 金融実務における人工知能、機械学習、データ構造化

山下智志氏は、冒頭で「銀行における人工知能利用の動き」についての最近の事例を紹介した後に、人工知能、機械学習、統計学の関係に言及して、何らかの入出力システム（応答関数）によって人間的なことをさせるのが人工知能であり、その入力データに対してチューニングを行う技術が機械学習的な手法であり、また（伝統的）統計学的手法であるとして、それらを混同しないことが重要であるとした。

次に「銀行業界における人工知能のこれまで」で、第一次ブーム（1990年代前半）、第二次ブーム（2000年前後）の顛末について要約し、現在はビッグデータブームを背景とし、メディアに扇動された第三次ブームであると位置付けた。

また「ビッグデータと非構造化データ」で、ビッグデータとは巨大な規模のデータの集まりで、通常は構造化データと非構造化データが混在すること、その処理の高度化と高速化を目指して格納と活用方法がテーマになることを述べた。

最後に銀行におけるビッグデータ活用の可能性に言及し、そのための前処理として「欠損値補間」「異常値補正」「リレーション付与」が重要であるとして、代表的な欠損値補間方法やリレーション技術について解説した。

おわりに

以上、金融における数理手法の適用の経緯と今後に向けての課題について総括した。

1980年代の金融技術革新によって導入された金融数理は、2008年金融危機の経験と最近時の高度IT・ネット社会の到来によって新たな展開が始まっている。今回の数学協働プログラム・金融作業グループの議論が、これからの金融を企画・管理する人や金融技術開発に関わる人達の参考になれば幸いである。

【引用文献／参考文献】

- Bjork, T. [1998] “Arbitrage Theory in Continuous Time”, Oxford University Press
- Black, F. and Scholes, M. [1973] “The pricing options and corporate liabilities”, *Journal of Political Economics*, 637-654
- Black, F. and Litterman, R. [1992] “Global Portfolio Optimization”, *Financial Analyst Journal* 48(5), 28-43
- Bolance, C., Guillen, M., Gustafsson, J. and Nielsen, J. P. [2012] “Quantitative Operational Risk Models”, CRC Press, Taylor & Francis Group
- Carr, P. and Yu, J. [2012] “Risk, return, and ross recovery”, *The Journal of Derivatives*, 20, 38-59
- Chen, J. M. [2016] “Postmodern Portfolio Theory”, Palgrave Macmillan
- Cochrane, J. H. [2001] “Asset Pricing”, Princeton University Press
- Crane, D. B., Merton, R. C., Froot, K. A., Bodie, A., Mason, S. P., Sirri, E. R., Perold, A. F. and Tufano, P. [1995] “The Global Financial System”, Harvard Business School Press University Press (“金融の本質” 野村総合研究所訳, 野村総合研究所)
- Darolles, S. and Gourieroux, C. [2015] “Contagion Phenomena with Applications in Finance”, ISTE Press Ltd
- Denev, A. [2015] “Probabilistic Graphical Models”, Risk Books
- Diebold, F. X. and Yilmaz, K. [2015] “Financial and Macroeconomic Connectedness”, Oxford University Press
- Duffie, D. [1988] “Securities Markets, Stochastic Models”, Academic Press
- Duffie, D. [1992] “Dynamic Asset Pricing Theory”, Princeton University Press
- Epps, T. M. [2009] “Quantitative Finance”, John Wiley & Sons, Inc.
- Firoozye, N. and Ariff, F. [2016] “Managing Uncertainty, Mitigating Risk”, Palgrave Macmillan
- Franco, P. [2015] “Understanding Bitcoin”, John Wiley & Sons Ltd.
- Glau, K., Grbac, Z., Schere M. and Zagst. R. Z. (Ed.) [2016] “Innovations in Derivatives Markets”, Springer
- Grbac, Z. and Runggaldier W. J. [2015] “Interest Rate Modeling: Post-Crisis Challenges and Approaches”, Springer
- Harrison, J. M. [1985] “Brownian Motion and Stochastic Flow System”, John Wiley & Sons, Inc.
- Harrison, J. M. and Kreps, D. M. [1979] “Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets”, *Journal of Economic Theory* 20(3), 381-408
- Harrison, J. M. and Pliska, S. R. [1981] “Martingales and Stochastic Integrals in the

- Theory of Continuous Trading”, *Stochastic Processes and their Applications* 11, 215-260
- Hayashi, T. [2016] “高まる E S G 情報の重要性”, *証券アナリストジャーナル* 第 54 巻 第 1 号, 38-48
- Hayashi, T. and Sato, A. [2016] “金融市場の高頻度データ分析”, 朝倉書店
- Hollow, M., Akinbami, F. and Michie, R. (Ed.) [2016] “Complexity and Crisis in the Financial System”, Edward Elgar Publishing Limited
- Igarashi, F. [2016] “欧米における FinTech への対応と日本への示唆”, *証券アナリストジャーナル* 第 54 巻第 6 号, 29-38
- Ikemori, T. [2013] “金融リスク制御”, 一橋大学大学院講義資料
- Ikemori, T. [2015] “金融イノベーションの歴史と理論”, 一橋大学学部講義資料
- Kahneman, D. and Tversky, A. [1979] “Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk”, *Econometrica*, XLVII, 263-291
- Karatzas, I. [1991] “Lectures on the Mathematics of Finance”, American Mathematical Society
- Kato, T. and Yamanaka, S. [2014] “システミックリスクに纏わる数理モデルについて”, *日本応用数学会論文誌*, Vol. 24, No.4, 397-443
- Kato, Y. [2015] “株式投資の新潮流とスマートベータ”, *証券アナリストジャーナル* 第 53 巻第 5 号, 53-64
- King, B. [2014] “Breaking Banks”, John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd.
- Kotani, S. and Matano, H. [1998], “微分方程式と固有関数展開”, 岩波講座現代数学の基礎 14, 岩波書店
- Kunitomo, N. and Takahashi, A. [2003] “数理ファイナンスの基礎—マリアバン解析と漸近展開の応用”, 東洋経済新報社
- Kusuoka, S. [2016] “数理ファイナンスに現れる数値計算の確率的手法”, 信州大学確率論サマースクール
- Lang, S. [1970] “Elliptic Functions”, Addison Wesley
- Lintner, J. [1965], “The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets”, *Review of Economics and Statistics* 47, 13-37
- Lo, A. W. and MacKinlay, A. C. [1999] “A Non-Random Walk Down Wall Street”, Princeton University Press
- Malkiel, B. G. [2015] “A Random Walk Down Wall Street”, W. W. Norton & Company (“ウォール街のランダム・ウォーカー” 井出正介訳, 日本経済新聞出版社)
- Mantegna, R. N. and Stanley, H. E. [2000] “An Introduction to Econophysics”, Cambridge University Press

- Markowitz, H. M. [1952] “Portfolio Selection”, *Journal of Finance* 7, 77-91
- McNeil, A. J., Frey, R. and Embrechts, P. [2005] “Quantitative Risk Management”,
Princeton University Press
- Miyauchi, A. [2015] “金融危機とバーゼル規制の経済学”, 勁草書房
- Ogaki, H. [1997] “ストラクチャード・ファイナンス入門”, 日本経済新聞社
- Olsson, O. [2012] “Essentials of Advanced Macroeconomic Theory”, Routledge
- Ozdemir, B. and Miu, P. [2012] “Adapting to Basel III and the Financial Crisis”,
Risk Books
- Purica, I. [2015] “Nonlinear Dynamics of Financial Crises”, Academic Press
- Rebonato, R. and Denev, A. [2013] “Portfolio Management under Stress”, Cambridge
University Press
- Rebonato, R., McKay, K. and White, R. [2009] “The SABR/Libor Market Model”,
John Wiley & Sons Ltd.
- Ross, S. [1976] “The arbitrage pricing theory of capital asset pricing”, *Journal of
Economic Theory*, 341-360
- Ross, S. [2011] “The recovery theorem”, working paper
- Sharpe, W. F. [1964], “A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk”,
The Journal of Finance, Vol. 19, 425-42
- Skiadas, C. [2009] “Asset Pricing Theory”, Princeton University Press
- Takagi, T. [1975] “初等整数論講義”, 共立出版
- Takano, Y. and Hashiba, J. [2008] “A Novel Methodology for Credit Portfolio Analysis:
Numerical Approximation Approach”, Mizuho-DL Financial Technology
- Takashima, K. [2015] “楯田関数暗号の進展”, *日本応用数学会論文誌*, Vol. 25, No.2,
117-133
- Takayasu, H. (Ed.) [2002] “Empirical Science of Financial Fluctuations”, Springer
- Taleb, N. N. [2010] “The Black Swan”, Penguin Books (“ブラック・スワン” 上下,
望月衛訳, ダイヤモンド社)
- Tsui, H. M. [2013] “Ross Recovery Theorem and its extension”, University of Oxford
- Ueda, K. [2016] “マイナス金利政策の採用とその功罪”, *証券アナリストジャーナル*
第 54 巻第 10 号, 5-16
- Wattenhofer, R. [2016] “The Science of the Blockchain”, Inverted Forest Publishing
- Wong, W. K. [2014] “Technical Analysis and Financial Asset Forecasting”,
World Scientific
- Yoshifuji, S. [2005] “金融工学とリスクマネジメント”, 金融財政事情研究会