数学協働プログラム
量子系の数理と物質制御への応用:QWを架け橋に I, II
(I 2014/09/17,18; II 2016/10/20-22)

I. 2014
(東北大学GSIS)

ワークショップ
(量子ウォークに関連した話題の提供)

分野 (講演者)
- 量子ウォーク数理そのもの (2名)
- 理論物理(トポロジカル相など) (4名)
- レーザー放射性同位体分離工学 (2名)
- 数学(スペクトル・散乱, 確率論)(3名)
- 量子制御工学(1名)
- 数学(幾何, グラフ) (2名)

＋

学生によるポスターセッション

東北大学 4名　横浜国立大学 2名
筑波大学 1名

II. 2016
(横浜国立大学)

量子ウォークの国際会議
P. Blanchard (University of Bielefeld)
M. Stefanak (Czech Technical University)
Hyun Jae Yoo (Hankyong University)
の招へい

QWに関連する諸分野のチュートリアル講演:
レーザー放射性同位体分離
量子探索アルゴリズム
トポロジカル相
スペクトル・散乱
直交多項式

ディスカッション(QWを架け橋にして)

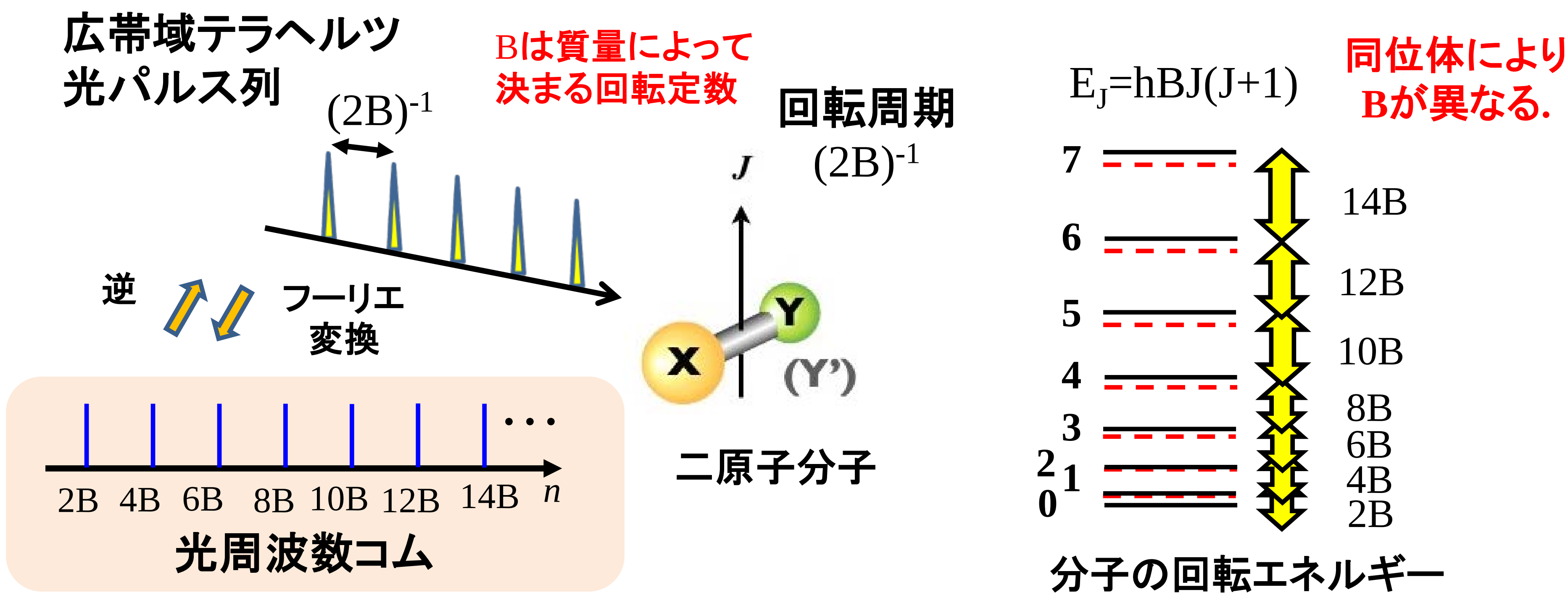
議論したこと

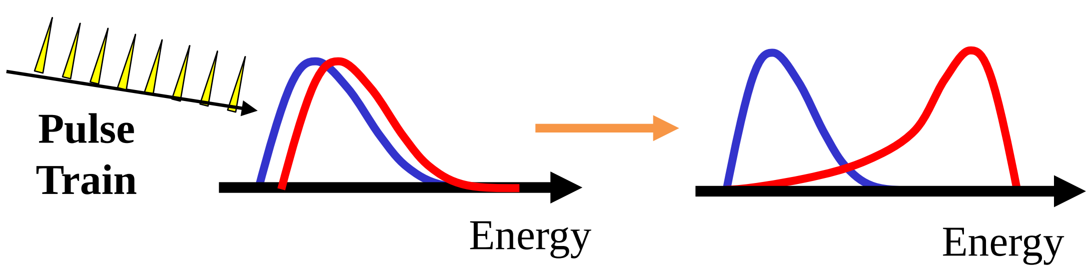
量子レーザー制御による
放射性同位体分離

量子ウォークによる
トポロジカル絶縁体の数理

放射性同位体
レーザー分離工学の
解析手法として

光パルス列による分子回転励起

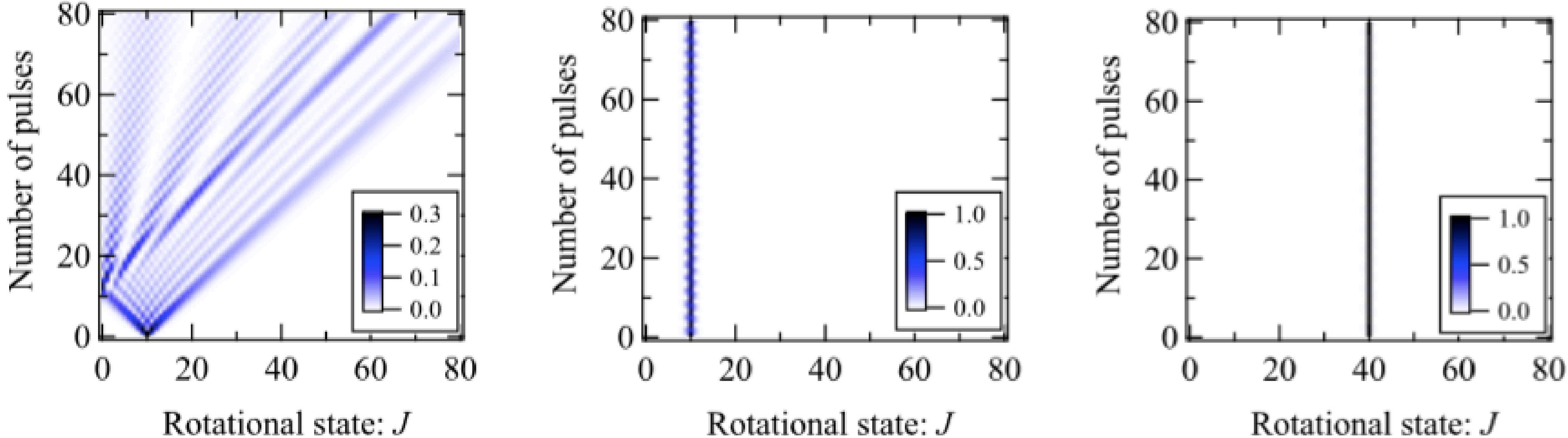




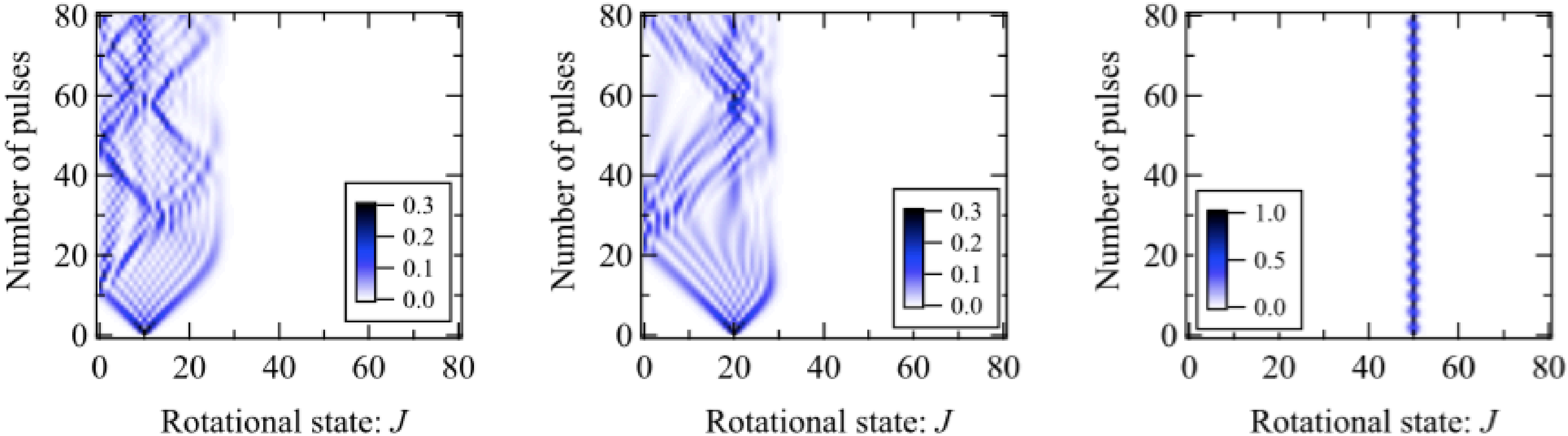
高温熱分布の中でも特定の
同位体のみを選択励起できる

(Selective heating)

局在化1と局在化2



量子共鳴　　パルス周期不整合　（$\Delta B/B_f$=0.03)



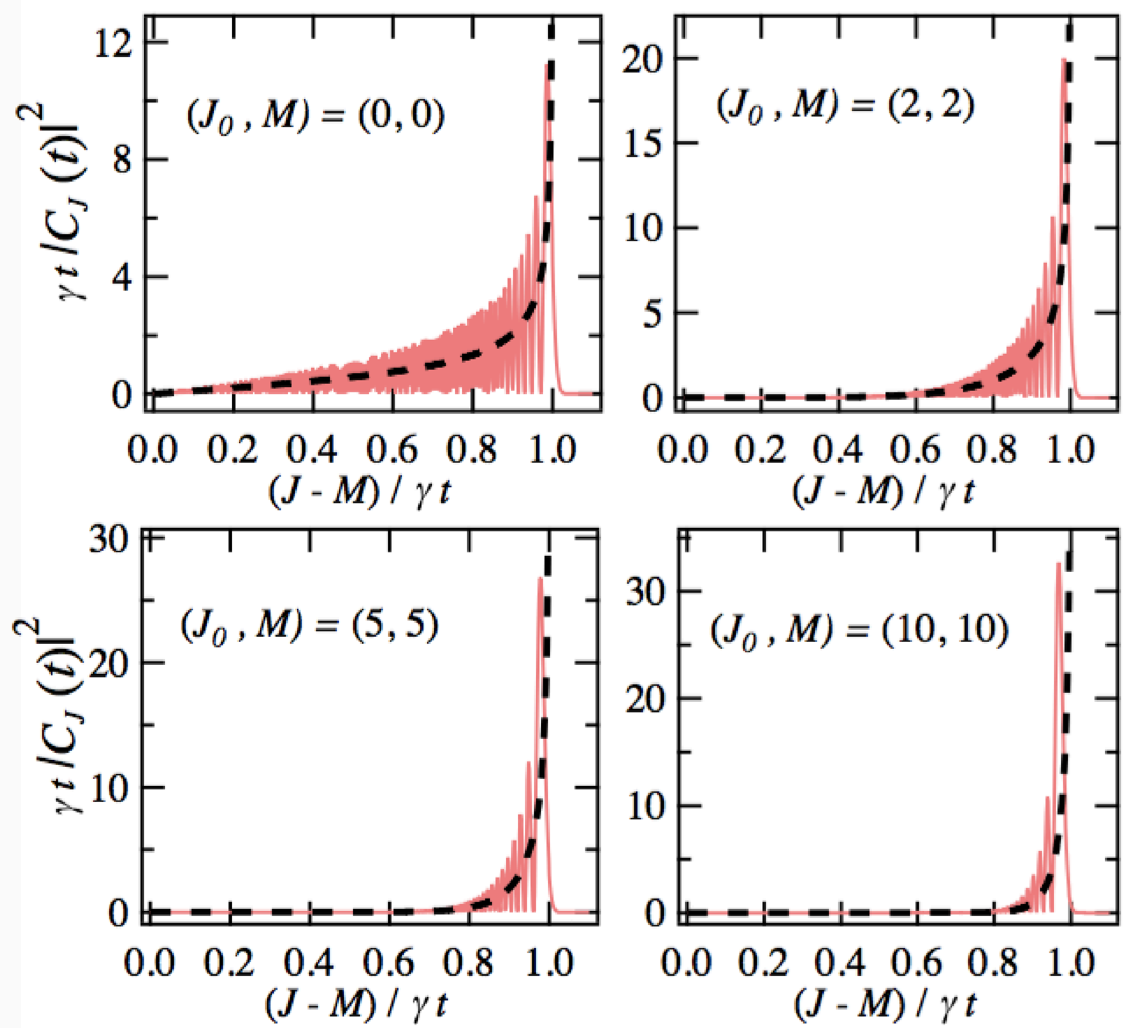
遠心力歪みによる局在化　（D/B_f=1.0 ×10^{-6})

量子ウォークを介して得られた結果

$$\gamma t|C_s^{(M)}(t)|^2 \equiv F^{(M)}(u) = \frac{u^{2M+1}}{2^{2M}\sqrt{1-u^2}B(M+1,M+1)}\left\{\mathfrak{p}_r^{(M+\frac{1}{2})}(\sqrt{1-u^2})\right\}^2,$$

$J_0 - M = 0$ のケース

$\gamma t = 500$
の数値計算結果との比較



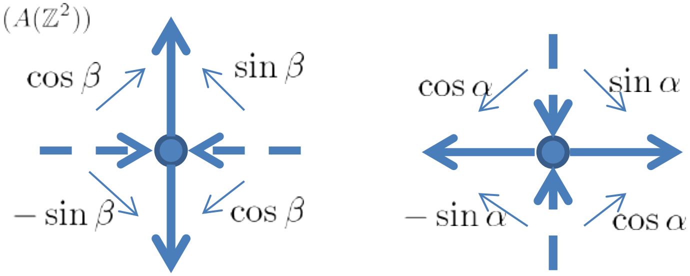
Mの向上によるソリトンライクな伝搬が完全に説明された

トポロジカル絶縁体
離散モデルとして

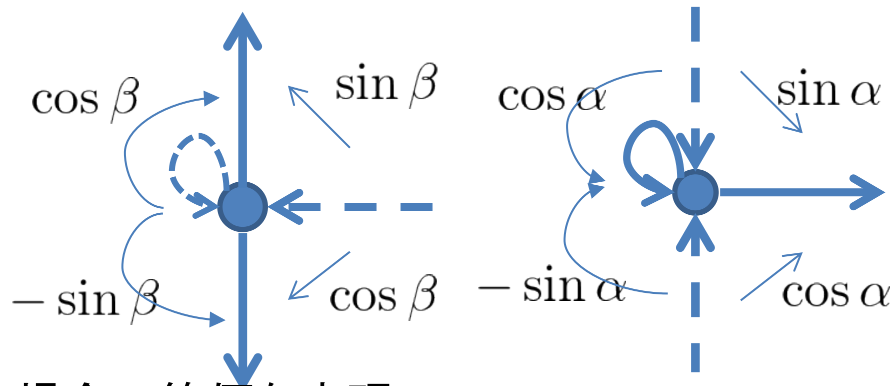
Asboth-Edge(2014)

量子ウォークのダイナミクス

$\ell^2(A(\mathbb{Z}^2))$



縁では



今回は原点にあるセルフループからstart. その場合の等価な表現

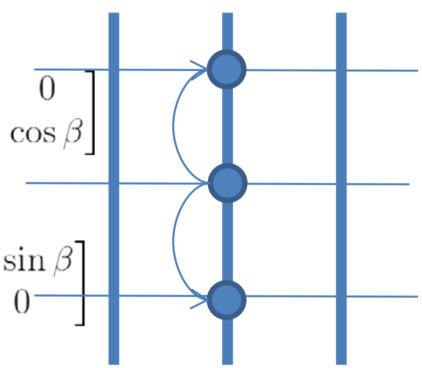
$$\Gamma : \ell^2(V;\mathbb{C}^2) \to \ell^2(V;\mathbb{C}^2)$$

$$\varphi_0(x) = \delta_0(x)\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$$\ell^2(V;\mathbb{C}^2)$$

$$Q_\beta = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$$

$$P_\beta = \begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

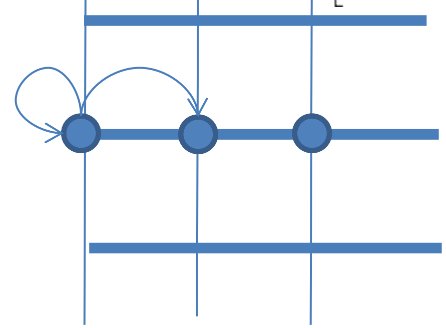


$$V = \mathbb{Z}_+ \otimes \mathbb{Z}$$

縁

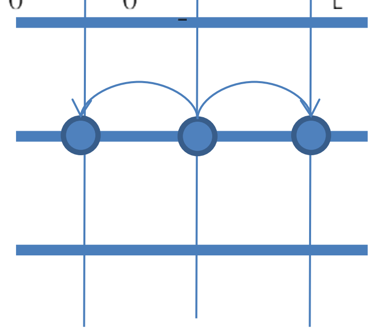
$$S_\alpha = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \cos\alpha & -\sin\alpha\end{bmatrix}$$

$$Q_\alpha = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

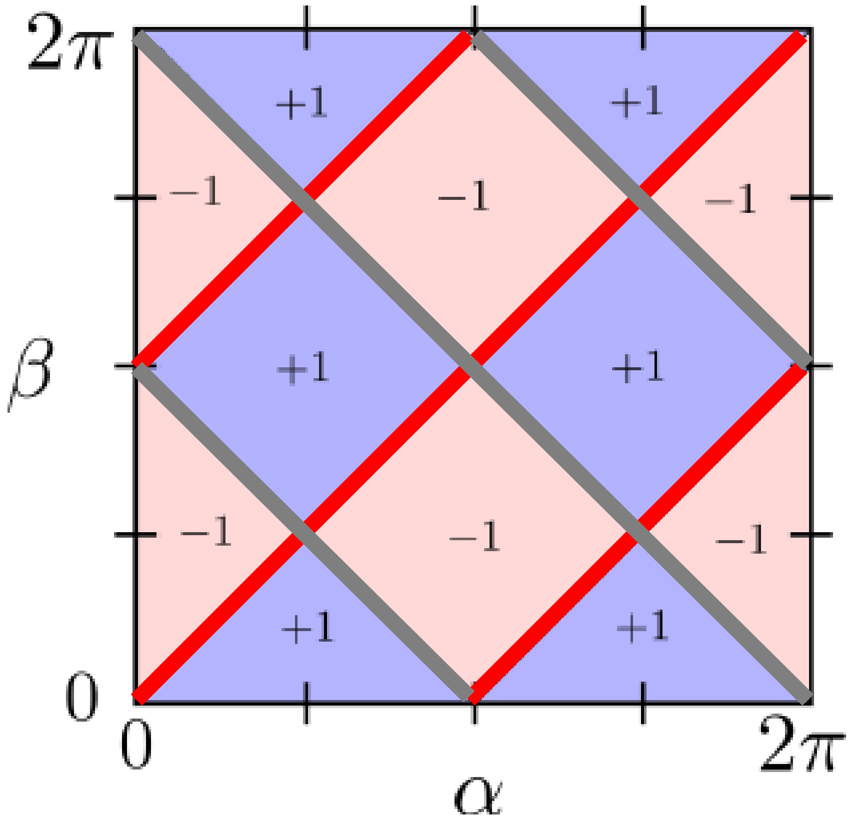


縁以外

$$P_\alpha = \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & 0\end{bmatrix} \quad Q_\alpha = \begin{bmatrix}0 & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$



The phase diagram of the topological number (Asboth-Edge 2014)



What is the stochastic behavior of QW at each region ?

Theorem 1 (分散関係)

$$\sigma_p(\mathcal{C}_k) = \begin{cases} \{\theta_0(k)\} & : \ \sin(\alpha+\beta)\sin k \neq 0 \\ \emptyset & : \ \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\theta_0(k) = \begin{cases} \arcsin(-\sin k \sin(\alpha-\beta)) & : \ \cos k \sin(\alpha+\beta) < 0, \\ \pi - \arcsin(-\sin k \sin(\alpha-\beta)) & : \ \cos k \sin(\alpha+\beta) > 0. \end{cases}$$

$$\sigma_c(\mathcal{C}_k) = [\theta_c(k), \pi - \theta_c(k)] \cup [\pi + \theta_c(k), 2\pi - \theta_c(k)]$$

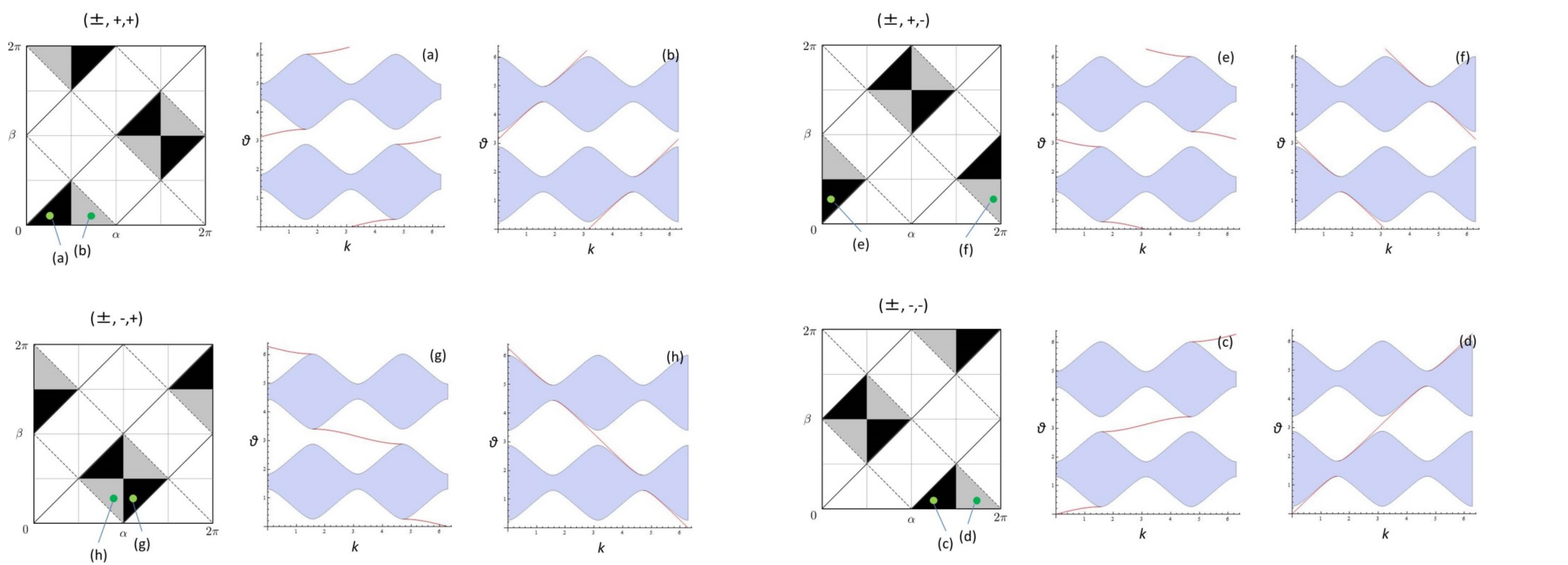
$$\theta_c(k) = \arccos\left(\sqrt{\cos^2(\alpha-\beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \cos^2 k}\right)$$

bulkの位相

edgeの位相+存在

edgeの傾き

$$(\mathrm{sgn}[\sin 2\alpha \sin 2\beta], \mathrm{sgn}[\sin(\alpha+\beta)], \mathrm{sgn}[\sin(\alpha-\beta)])$$



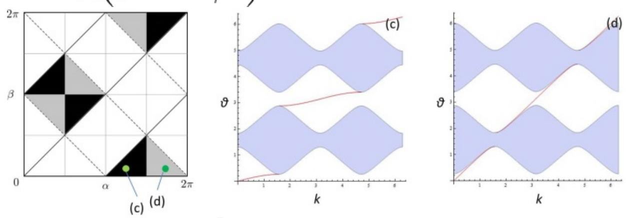
Theorem 2 (縁での量子ウォークの挙動)

$$\nu_n(j) := \nu_n(0,j)$$

時刻nで, (0,j) のself loop にいる確率

$$s=\sin(\alpha+\beta),\ r=\sin(\alpha-\beta)$$

(i) $0<|r|<1$



$$f_K(x;a)\equiv\frac{\sqrt{1-|a|^2}}{\pi(1-x^2)\sqrt{|a|^2-x^2}}$$

線形的拡がり

|a|<1

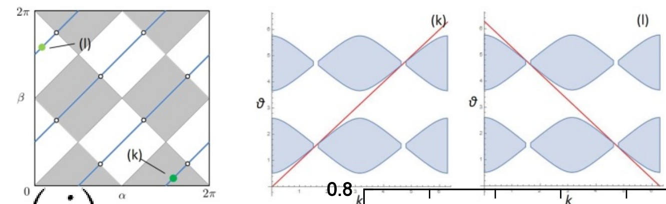
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{an<j<bn}\nu_n(j)=\int_a^b dy\left|\frac{s}{r}\right|^2 y^2 f_K(y;r)\times\begin{cases}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(y) & : sr>0,\\ \mathbf{1}_{(-\infty,0]}(y) & : sr<0.\end{cases}$$

今野関数!!

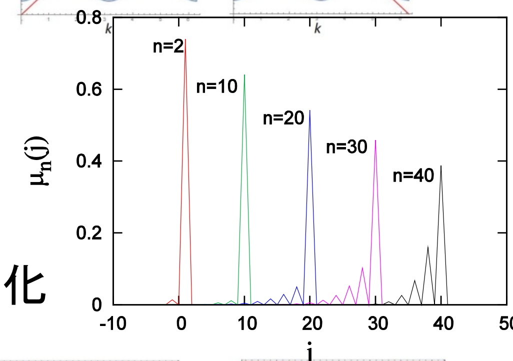
= g(0,y)

(ii) $|r|=1$

弾道的拡がり



$$\lim_{n\to\infty}\nu_n\left(\mathrm{sgn}(rs)(n-j)\right)=\mathrm{sgn}(rs)|s|^2\,\delta_0(j)$$



(iii) $|r|=0$

局在化

$$\lim_{n\to\infty}\nu_{2n}(j)=\begin{cases}\frac{s^2}{\pi^2}\frac{4}{(j^2-1)^2} & : j\text{ is even},\\ \frac{s^2}{4} & : j\in\{\pm1\},\\ 0 & : \text{otherwise},\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\nu_{2n+1}(j)=0.$$