未来を担う若手研究者の集い (2019)

不変性の普遍性と不変性

首都大学東京　　室田 一雄

最適化の分野には，美しい定理とアルゴリズムがたくさんある．個々の定理やアルゴリズムを勉強することは，もちろん大切であるが，それらの意義を別の立場から整理して理解することも重要である．「不変性」とは「本質的なものは，変数の選び方や並べ方などの恣意的なものに影響されない (されてはいけない)」ことを意味し，物理学などでは周知の考え方である．最適化においても，モデル化，アルゴリズム設計，理論構築など，いろいろな側面で「不変性」に着目すると面白い．不変性を尊重することの意義，不変性を敢えて破ることの効用などを考える．

invar190629 (version June 11, 2019)

不変性　（モデル や 計算過程 の 客観性）

物事の本質は記述の仕方に依らない

‖

許容変換の下で不変なものが本質的

普遍性　　　何処でも通用する

不変性　　　時間とともに変化しない

内容目次

客観性　と　不変性

現 象 と 数 理

物（もの）

現象・現実

最適形状

新幹線

モデル化

理（こと）

数理・論理

共通の論理

計算

数学モデル

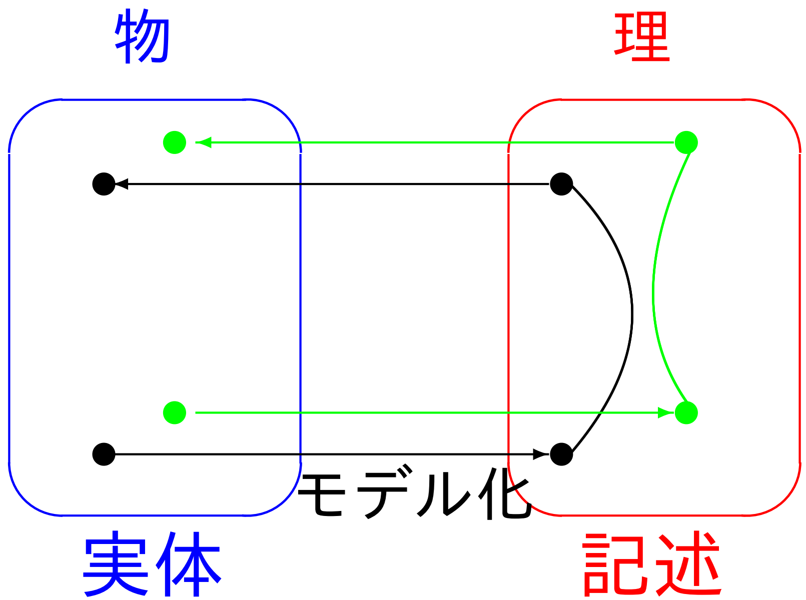
記述の 恣意性

‖

任意性

⇕

客観性



実体の本質は記述の仕方に依らない

‖

許容変換の下で不変なものが本質的

⇒ 許容される変換は？ (これが要点)

行列の変換と不変量

A: 行列 (**S**:正則)

- SA のランク $=$ A のランク
- $S^{-1}AS$ の固有値 $=$ A の固有値

A: 対称行列

- $Q^\top AQ$ の固有値 $=$ A の固有値 (**Q**:直交)
- $S^\top AS$ の固有値の符号 $=$ A の固有値の符号

行列 $=$ システムの記述, 変換 $=$ 記述の恣意性,
不変量 $=$ システムの性質

どの概念が意味をもつか, は 線形代数の外の話

物理学（力学）と不変性

古典論	ガリレイ変換	$x' = x - vt$
相対論	ローレンツ変換	$\|x\|^2 - c^2t^2$
量子論	ゲージ変換	$\psi', A'_\mu = \cdots$

1. 指導原理**(**公理，美意識**)**：

支配方程式は不変な形式をもつべし

2. 客観性：物理量（＝実体）は不変量

理論を学ぶ／理論を作る

理論を学ぶ＝定義＋定理＋応用

理論を作る＝奥義＋定石＋事実

［精神］　［技術］　［博識］

不変性，共変性，対称性

invariance, covariance, symmetry

計算過程 の 不変性

反復法 の 不変性

$$[Sx =: y] \quad (S\text{: 正則行列})$$

$$\min\ f(x) \qquad\qquad \min\ g(y) = f(S^{-1}y)$$

$$x_0\ x_1\ x_2\ \cdots \qquad\qquad y_0\ y_1\ y_2\ \cdots$$

不変性とは： $Sx_0 = y_0 \Rightarrow Sx_k = y_k$

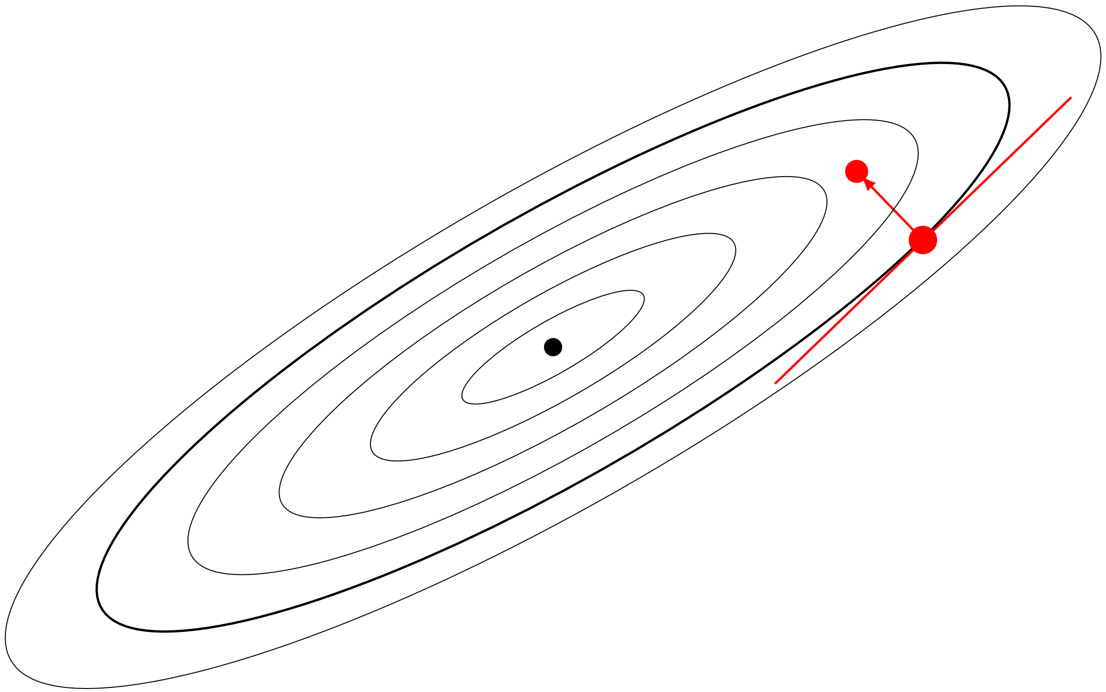
不変だと何が嬉しいのか？

不変でないと何が困るのか？

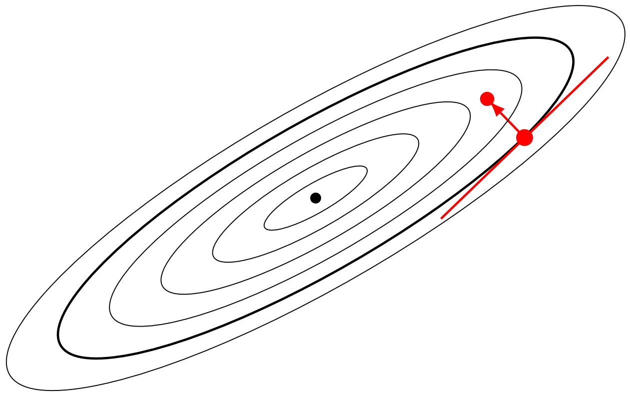
- 最急降下法は 不変性をもたない
- **Newton** 法は 不変性をもつ

- $f \to af$ の変換に対する不変性も考えられる

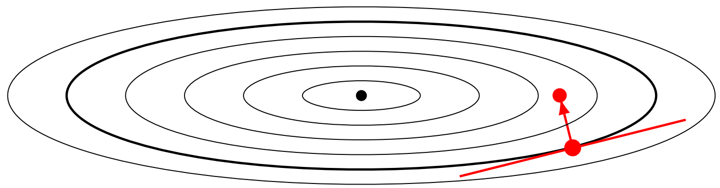
最急降下法



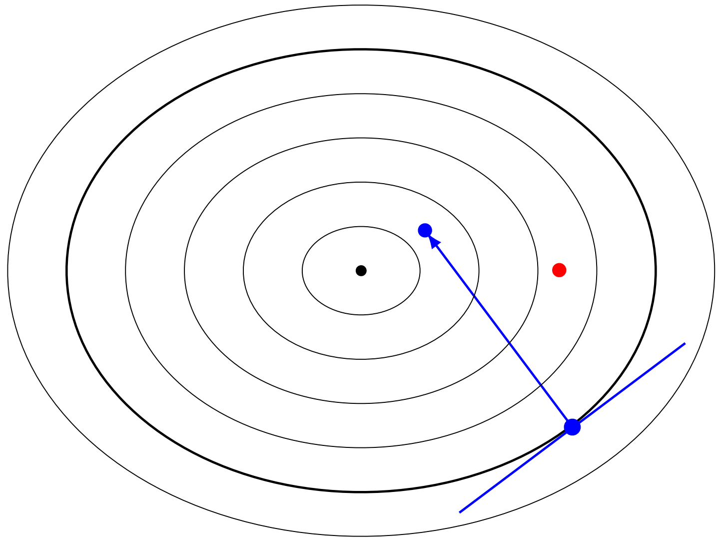
最急降下法 は 不変性をもたない



座標軸の回転



座標軸の伸縮



最急降下法 は 不変性をもたない

$f(x)$ に対する最急降下法：

$$x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$$

[勾配]

$y = Sx, \quad g(y) = f(x)$ に対する最急降下法：

$$y_{k+1} = y_k - \alpha \nabla g(y_k)$$

$$\boxed{\text{不変？:} \quad y_0 = Sx_0 \quad \Rightarrow ? \quad y_k = Sx_k}$$

両者の関係：$g(y) = f(S^{-1}y), \quad \nabla g(y) = S^{-\top} \nabla f(x)$

$\Rightarrow \ y_{k+1} - y_k = S^{-\top}(x_{k+1} - x_k)$ （不変でない）

- S が直交行列なら $S^{-\top} = S$ なので，不変である

Newton法 は 不変性をもつ

$f(x)$ に対するNewton法：

$$x_{k+1} = x_k - H(f;x_k)^{-1}\ \nabla f(x_k)$$

[ヘッセ行列]　　[勾配]

$y = Sx$, $g(y) = f(x)$ に対するNewton法：

$$y_{k+1} = y_k - H(g;y_k)^{-1}\ \nabla g(y_k)$$

$$\boxed{\text{不変性をもつ：}\quad y_0 = Sx_0 \Rightarrow y_k = Sx_k}$$

証明：$g(y) = f(S^{-1}y)$, $\nabla g(y) = S^{-\top}\nabla f(x)$,

$$H(g;y) = S^{-\top}H(f;x)S^{-1}$$

$$\Rightarrow H(g;y)^{-1}\nabla g(y) = S\ H(f;x)^{-1}\nabla f(x)$$

$$\Rightarrow y_{k+1} - y_k = S(x_{k+1} - x_k)$$

Gaussの消去法 と 不変性

連立方程式 $\boldsymbol{Ax = b}$

⇒ **Gaussの消去法：**

変数と方程式を 任意の順番 に消去していく

$$\boldsymbol{Ux = L^{-1}b}, \quad \boldsymbol{x = U^{-1}L^{-1}b}$$

- 最終結果 $\boldsymbol{x}$ は 選んだ順番に依らない
- 途中結果 $\boldsymbol{U}$ は 依存する

計算結果の不変性 **vs** 計算過程の不変性

適切な順序 ⇒ 効率

共役勾配法(CG法)　$Ax = b$ (対称)

初期値 x_0 をとる;　$r_0 := b - Ax_0$;　$p_0 := r_0$;

for $k := 0, 1, \cdots$ **until** $r_k = 0$ **do**

begin

$$\alpha_k := \frac{(r_k, p_k)}{(p_k, Ap_k)};$$

$$x_{k+1} := x_k + \alpha_k p_k; \quad r_{k+1} := r_k - \alpha_k A p_k;$$

$$\beta_k := -\frac{(r_{k+1}, Ap_k)}{(p_k, Ap_k)};$$

$$p_{k+1} := r_{k+1} + \beta_k p_k$$

end

CG法は不変性をもつか

$$\boldsymbol{Ax = b}$$

[×] 対称行列 $\boldsymbol{A_{\lambda\kappa}}$ $\boxed{\boldsymbol{A^\top = A}}$

[◎] 計量 $\boldsymbol{G_{\lambda\kappa}}$ に関する自己随伴行列 $\boldsymbol{A^{\kappa}{}_{\lambda}}$

$$\boxed{\boldsymbol{G^\top = G, \quad (GA)^\top = GA}}$$

幾何学的不変性 をもつ計算過程

- 収束特性は $\boldsymbol{A}$ の固有値で決まる
- 数値実験で $\boldsymbol{A}$ を対角行列としてよい
- 前処理の自由度

共役勾配法の テンソル表記

$$r := b - Ax \qquad r^\kappa := b^\kappa - A^\kappa{}_\lambda\, x^\lambda$$

$$p := r \qquad p^\kappa := r^\kappa$$

$$\alpha := \frac{(r,p)_G}{(p,Ap)_G} \qquad \alpha := \frac{r^\lambda\, G_{\lambda\kappa}\, p^\kappa}{p^\lambda\, G_{\lambda\kappa}\, A^\kappa{}_\mu\, p^\mu}$$

$$x := x + \alpha p$$

$$r := r - \alpha Ap$$

$$\beta := -\frac{(r,Ap)_G}{(p,Ap)_G}$$

$$p := r + \beta p$$

$\boldsymbol{A}$: 混合テンソル

$\boldsymbol{G}$: 2階共変テンソル

$\boldsymbol{x, p, b, r}$: 反変ベクトル

$\boldsymbol{\alpha, \beta}$: スカラー

$\Rightarrow$ 杉原，室田: 線形計算の数理，岩波，**2009**

離散近似 の 不変性

２次元のLaplace方程式

２次元領域Ω，Laplace方程式(Dirichlet問題)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0 \ (x \in \Omega), \quad u(x) = f(x) \ (x \in \partial\Omega)$$

Laplace方程式は不変性をもつ

- 座標スケール　$x \to \alpha x \Rightarrow u(x) \to u(\alpha x)$
- 境界条件　$f(x) \to f(x) + c \Rightarrow u(x) \to u(x) + c$

近似スキームも不変性をもつか

$\Delta u = 0$を満たす関数を調和関数という$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)$

調和関数の近似（代用電荷法）

- $a \notin \Omega$ のとき，$h(x; a) = \log \|x - a\|$ は Ω 上の調和関数
- 「電荷点」 $y_j \notin \Omega$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ を適当に選んで，

$$u(x) = \sum_{j=1}^{n} Q_j \log \|x - y_j\|$$

と近似し，係数 Q_j を選点法や最小２乗法で定める（代用電荷法）

- 不変性をもたない

$\boxed{\text{変数}}$ $x \to \alpha x$，$y_j \to \alpha y_j$

$\Rightarrow$ $\log \|\alpha x - \alpha y_j\| = \log |\alpha| + \log \|x - y_j\|$ だから

$u(x) \to u(\alpha x)$ $\boxed{+ (\log |\alpha|) \sum Q_j}$ （余分な項）

$\boxed{\text{関数}}$ $f \to f + c \Rightarrow u \not\to u + c$

代用電荷法：不変スキーム

$$u(x) = Q_0 + \sum_{j=1}^{n} Q_j \log \|x - y_j\|, \qquad \sum_{j=1}^{n} Q_j = 0$$

の形を設定する

- 不変性をもつ

$\boxed{\text{変数}}$ $x \to \alpha x,\ y_j \to \alpha y_j$

$\Rightarrow \quad \log \|\alpha x - \alpha y_j\| = \log |\alpha| + \log \|x - y_j\|$ だから

$$u(x) \to u(\alpha x) \ \boxed{+ (\log |\alpha|) \sum Q_j} = u(x)$$

$\boxed{\text{関数}}$ $f \to f + c \Rightarrow \quad Q_0 \to Q_0 + c,\ Q_j \to Q_j \ (j \geq 1)$

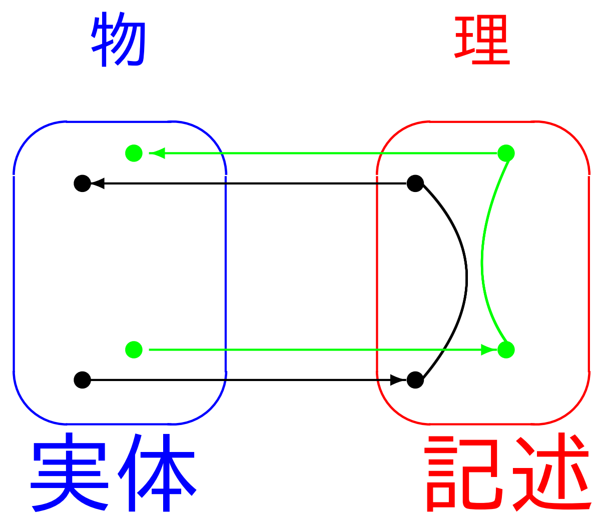
$\Rightarrow \quad u \to u + c$

- 解析も綺麗になる

(室田: 代用電荷法におけるスキームの
「不変性」について, 1993)

対 称 性

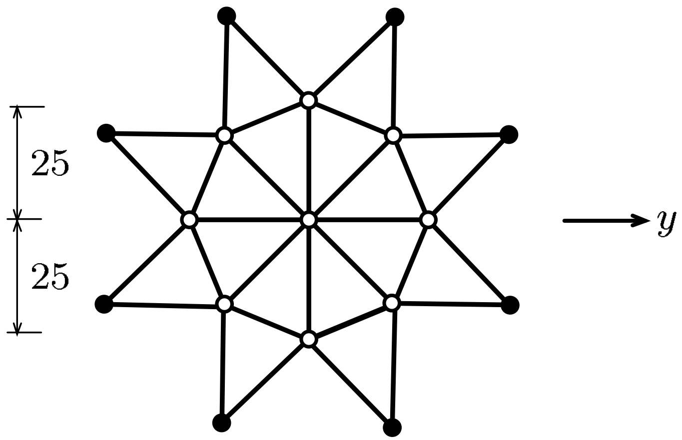
対称性（symmetry）

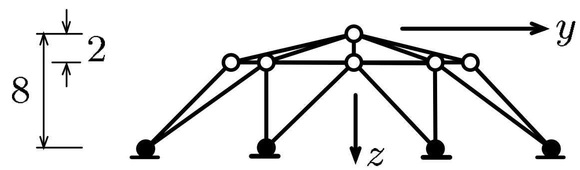


対称操作に関する

不変性　$Tx = x$

対称なトラス構造　（T: **45**度回転，鏡映）





因数分解と対称性 **(T: 変数の置換)**

対称式 の因子は 対称式

$$x^3+y^3+z^3$$
$$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

各因子は 対称とは限らない

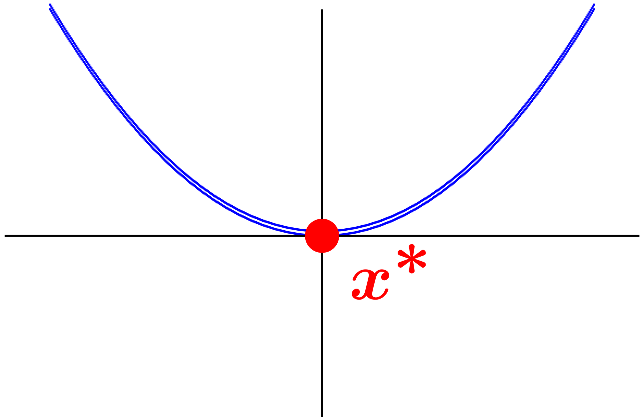
$$xy^2+yz^2+zx^2+yx^2+zy^2+xz^2+2xyz$$
$$=(x+y)(y+z)(z+x)$$

- 全体としては対称 **(**⇒ガロア理論 **)**

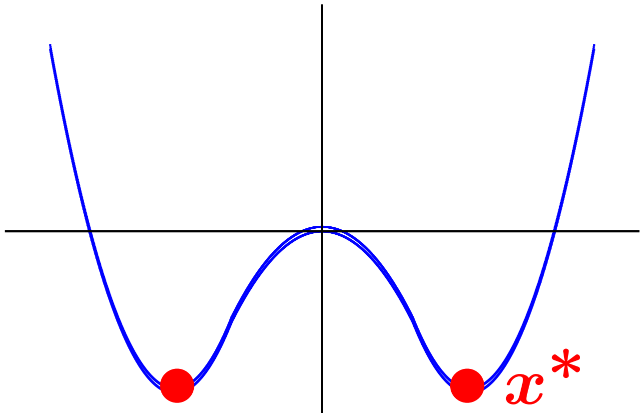
系(方程式)の対称性 と 挙動(解)の対称性

偶関数 $f(x) = x^4 - \lambda x^2$ の最小点

変換 $T(x) = -x$　　$f(Tx) = f(x)$　　$Tx^* = x^*$ か?



$\lambda < 0$

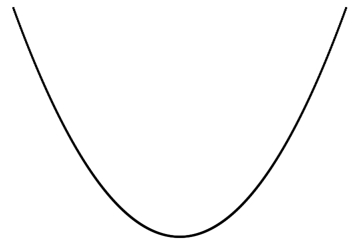


$\lambda > 0$

- 対称な問題の 最適解は 対称と限らない
- 凸計画問題なら 対称最適解が存在

対称な凸計画問題は 対称な最適解 をもつ

Min. $f(x)$　　対称な凸関数: $f(Tx) = f(x)$



証明

１つの最適解 x に対称操作を施して 平均する：

$$x_1 = T_1 x, \quad x_2 = T_2 x, \cdots \Rightarrow \bar{x} = (x_1 + x_2 + \cdots)/N$$

- $\bar{x}$ は対称　$(T_i \bar{x} = \bar{x})$
- $\bar{x}$ は最適解　f の対称性 $\Rightarrow$ $f(x_i) = f(x)$

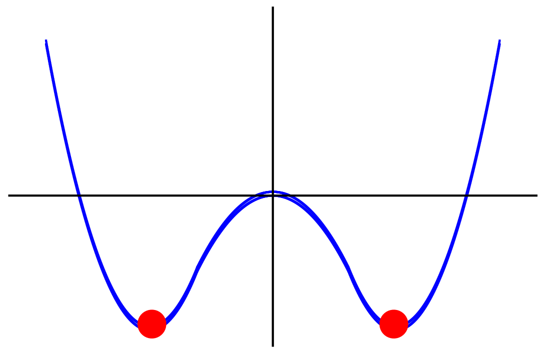
f の凸性 $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) \leq [f(x_1) + f(x_2) + \cdots]/N = f(x)$

SDP の内点法は 対称性を保存 ？

SDP の内点法で 対称性を利用 ？

解の非対称性＝パターン形成

⇒ 群論的分岐理論



砂の円柱供試体のパターン

ダイアモンドパターン　　ストライプパターン　　エシェロンモード

⇒ **Ikeda, Murota: Imperfection Bifurcation in Structures Materials, Springer, 2002; 3rd. ed., 2019**

混合行列 と 不変性

Dulmage–Mendelsohn分解：階層構造の抽出

与えられた行列 $A =$

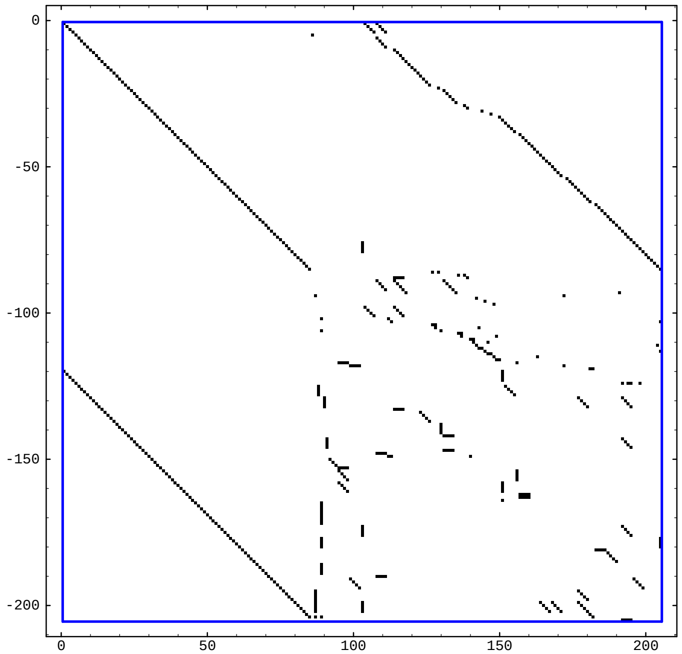
$$
\begin{array}{c|ccccccc|}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\
\hline
e_1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\
e_2 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 5 & 0 \\
e_3 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \\
e_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
e_5 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
e_6 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\
e_7 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 6 \\
\hline
\end{array}
$$

$$\bar{A} = P_{\mathrm{r}} A P_{\mathrm{c}}$$

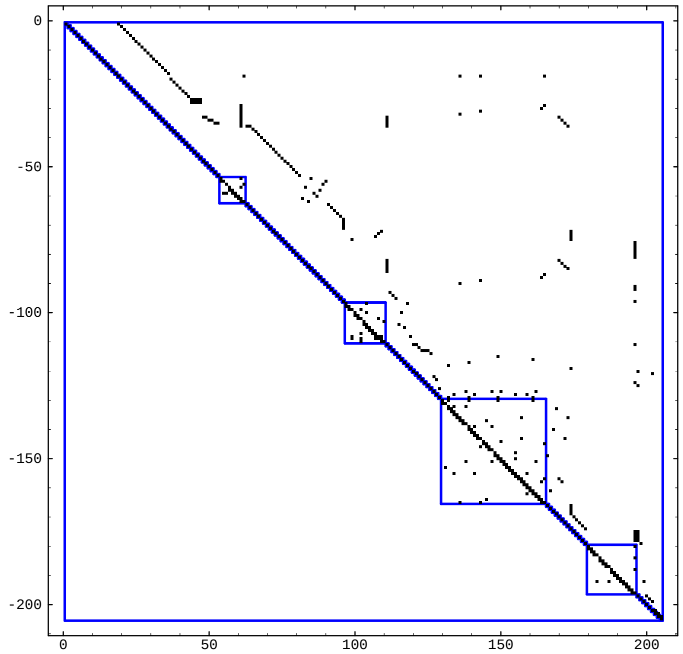
並べ替えた行列 $\bar{A} =$

$$
\begin{array}{c|cc|c|cc|cc|}
 & x_2 & x_5 & x_1 & x_3 & x_6 & x_4 & x_7 \\
\hline
e_1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
e_5 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
e_4 & & & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
e_2 & & & & 2 & 5 & 1 & 0 \\
e_7 & & & & 1 & 3 & 0 & 6 \\
\hline
e_3 & & & & & & 4 & 1 \\
e_6 & & & & & & 3 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

ＤＭ分解：化学工学の例題 $n = 205$

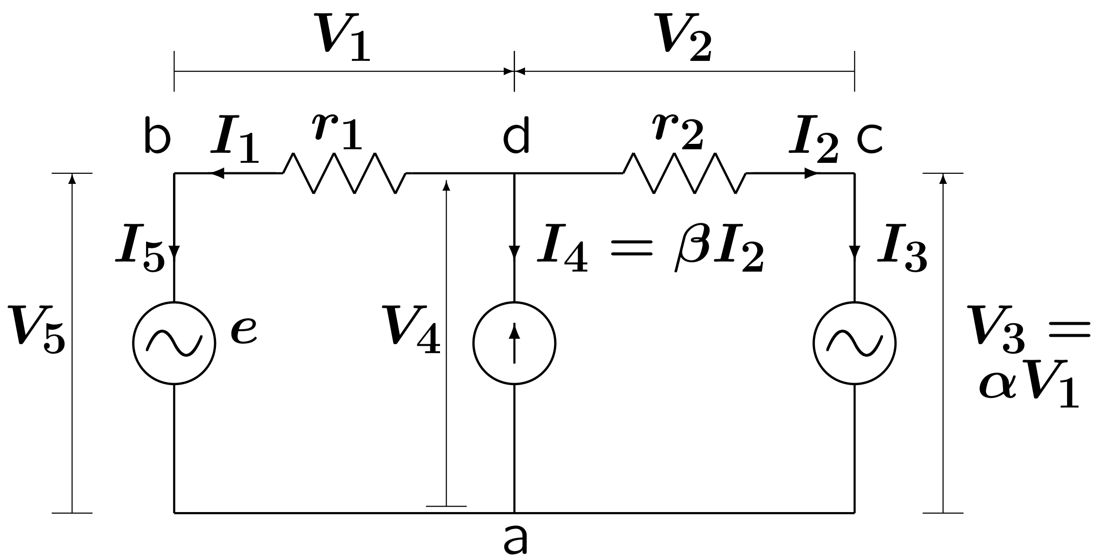


与えられた行列



並べ替えた行列

電気回路の記述



電流保存則（a，b，c）：

$$I_3 + I_4 + I_5 = 0, \quad I_1 - I_5 = 0, \quad I_2 - I_3 = 0$$

電圧保存則: $V_1 - V_4 + V_5 = 0, \quad V_2 + V_3 - V_4 = 0$

素子特性： $V_1 = r_1 I_1, \quad V_2 = r_2 I_2, \quad I_4 = \beta I_2$

$$V_5 = -e, \quad V_3 = \alpha V_1$$

⇒ 保存則の記述は非一意　　素子特性の記述は一意

この記述のＤＭ分解

$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
\hline
r_1 & & & & & -1 & & & & \\
 & r_2 & & & & & -1 & & & \\
 & & 0 & & & \alpha & & -1 & & \\
 & \beta & & -1 & & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & & & -1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \hline V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e
\end{array}\right]
$$

ＤＭ分解　（２つに分解）

$$\{I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, V_1, V_2, V_3, V_4\} \leftarrow \{V_5\}$$

別の記述のＤＭ分解

電流則:　$I_1 - I_5 = 0, \quad I_2 - I_3 = 0, \quad I_1 + I_2 + I_4 = 0$

電圧則:　$V_1 - V_4 + V_5 = 0, \quad -V_1 + V_2 + V_3 - V_5 = 0$

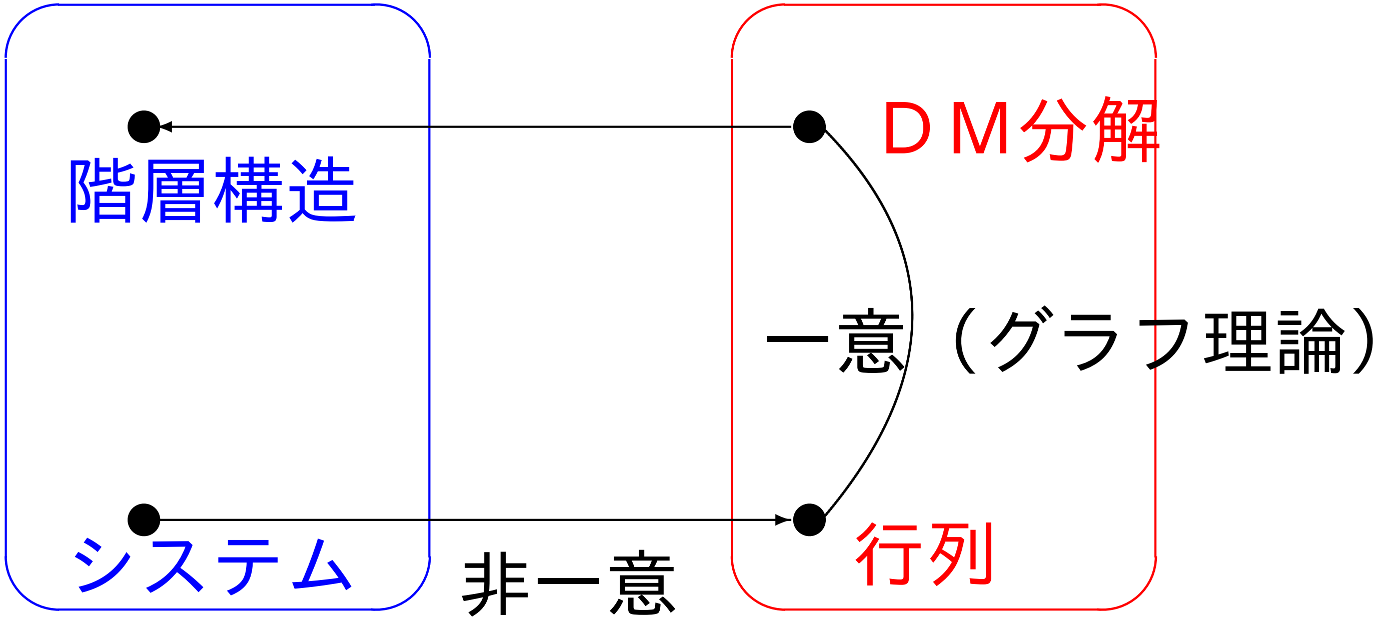
$$
\left[\begin{array}{ccccc|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & & & & & \\
0 & 1 & -1 & 0 & 0 & & & & & \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
 & & & & & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
\hline
r_1 & & & & & -1 & & & & \\
 & r_2 & & & & & -1 & & & \\
 & & 0 & & & \alpha & & -1 & & \\
 & \beta & & -1 & & & & & 0 & \\
 & & & & 0 & & & & & -1
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ \hline V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5
\end{array}\right]
=
\left[\begin{array}{c}
0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ e
\end{array}\right]
$$

ＤＭ分解
$$
\begin{array}{ccccc}
\{I_3\} & \nwarrow & & & \\
\{I_5\} & \leftarrow & \{I_1, I_2, I_4, V_1, V_2, V_3\} & \leftarrow & \{V_5\} \\
\{V_4\} & \swarrow & & &
\end{array}
$$

(５つに分解)

ＤＭ分解は 保存則の記述 の仕方に依存する

ＤＭ分解の 一意性と恣意性



本質は記述の仕方に依らない

ＤＭは記述の仕方に依存する

⇒ この階層構造は 物理的に意味があるか？

ＤＭを超えて：混合行列と許容変換

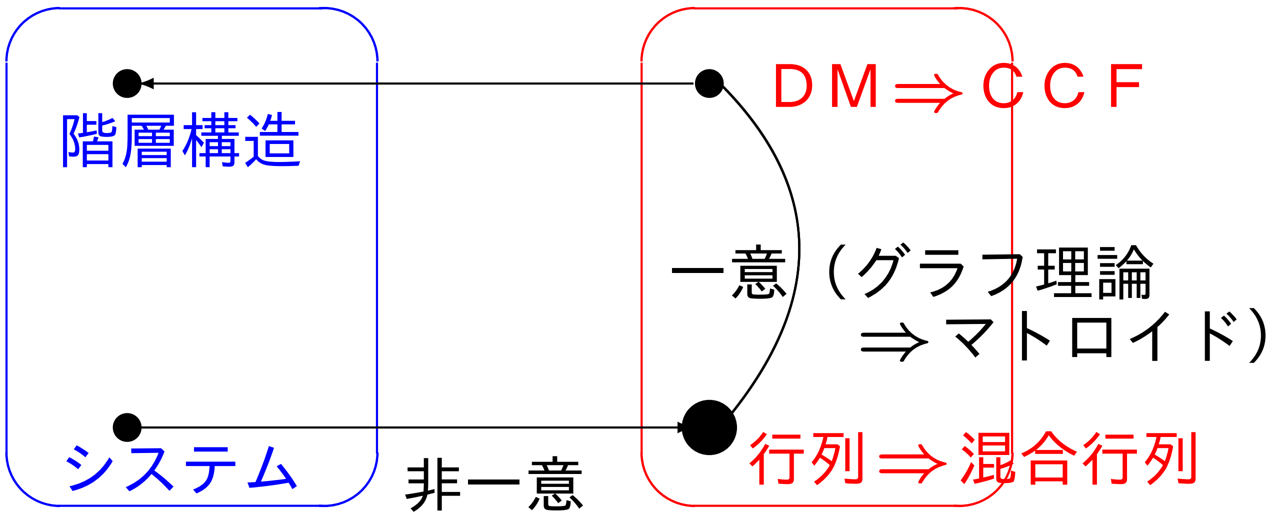
$$\bar{A} = P_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} S & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} P_{\mathrm{c}}$$

Q：保存則の係数

T：構成則の係数

記述の非一意性を 許容変換で吸収

$\Rightarrow$ **CCF** (Combinatorial Canonical Form)

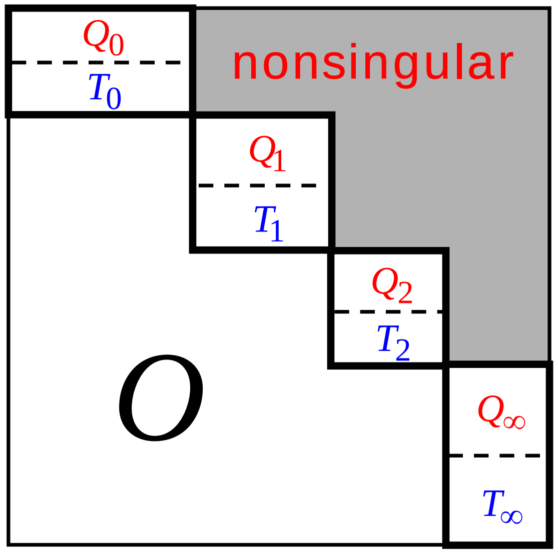


Combinatorial Canonical Form of LM-matrix

Admissible transformation

nonsingular (constant) $\in K$

$$\underbrace{P_{\mathrm{r}}}_{\text{permut.}} \left(\begin{array}{c:c} S & O \\ \hdashline O & I \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} Q \\ \hdashline T \end{array}\right) \underbrace{P_{\mathrm{c}}}_{\text{permut.}} =$$



Combinatorial Canonical Form (CCF)

- Uniquely determined
- Efficiently computed

階数公式と許容変換—CCFの構成法

- 階数公式：

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} = \min\{\text{劣モ関数}\, f(X) : X \subseteq \text{列番号}\, C\}$$

- 分解原理：劣モジュラ関数のJordan-Hölder型定理　（伊理）

	合併マトロイド型	独立マッチング型
$f(X)$	$\rho(X) + \tau(X) + \lvert C \setminus X \rvert$	$\rho(X) + \gamma(X) + \lvert C \setminus X \rvert$
変換	$P_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} S & O \\ O & S_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} P_{\mathrm{c}}$	$P_{\mathrm{r}} \begin{bmatrix} S & O \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q \\ T \end{bmatrix} P_{\mathrm{c}}$

$\rho(X) = \mathrm{rank}\, Q[X]$,　　　$\gamma(X) = T[X]$の非零行数

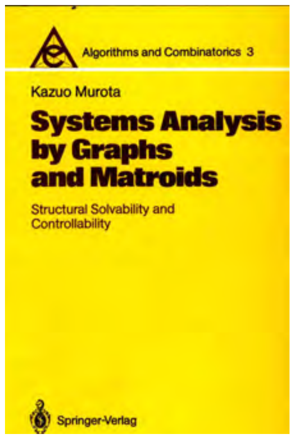
$$\tau(X) = \mathrm{rank}\, T[X] = \text{term-rank}\, T[X]$$

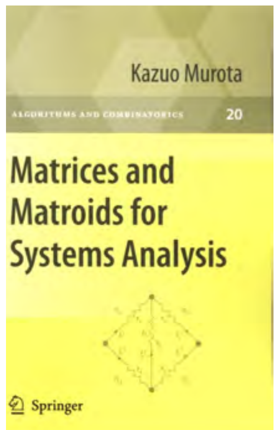
$$= \min\{\gamma(Y) + \lvert X \setminus Y \rvert\} \qquad \text{(Hall–Oreの定理)}$$

混合行列 の 参考文献

- 混合行列の話，「数理工学への誘い」，日本評論社，**139–149**，**2002**
- 離散システムの不変な階層構造を求めて——グラフからマトロイドへ，応用数理，**1**，**30–48**，**1991**
- マトロイドとシステム解析「離散構造とアルゴリズム**I**」(藤重悟 編)，近代科学社，第2章，**57–109**，**1992**

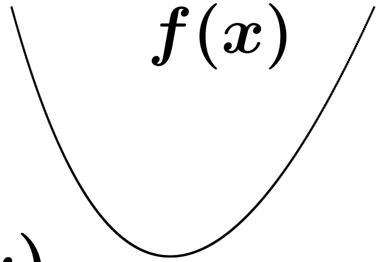
- **Systems Analysis by Graphs and Matroids, Springer, 1987**
- **Matrices and Matroids for Systems Analysis, Springer, 2000**





離散凸関数 と 不変性

座標変換と凸性



連続変数　$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$

$\Rightarrow$ $x = Sy$ (S:正則)　$g(y) = f(Sy)$

$\boxed{f(x)\text{: 凸関数} \iff g(y)\text{: 凸関数}}$

離散変数　$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R}$

$\Rightarrow$ $x = Sy$ (S:単模)　$g(y) = f(Sy)$

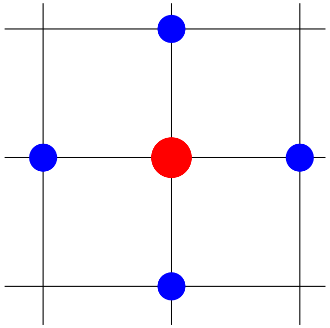
- 単模行列：整数行列で行列式$= \pm 1$
- 単模行列により $\mathbf{Z}^n$ は $\mathbf{Z}^n$ に移る

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{f(x)\text{: 離散凸関数} \Leftarrow ? \Rightarrow g(y)\text{: 離散凸関数}}$

局所的最適 $\Longleftrightarrow$ 大域的最適

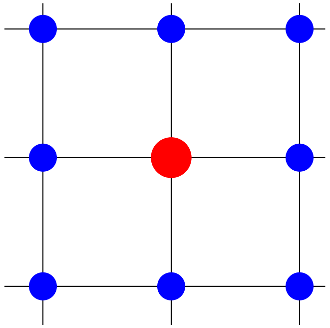
分離凸



$\mathbf{2}\boldsymbol{n}+\mathbf{1}$

$\{\pm \boldsymbol{e}_1, \ldots, \pm \boldsymbol{e}_n\}$

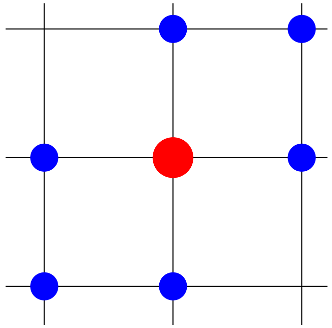
整凸



$\mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}$

$\{\chi_X - \chi_Y\}$

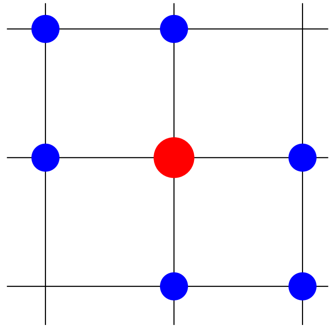
$\mathrm{L}^\natural$凸



$\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}+\mathbf{1}} - \mathbf{1}$

$\{\pm \chi_X\}$

$\mathrm{M}^\natural$凸



$\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+\mathbf{1}$

$\{\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{e}_j\}$

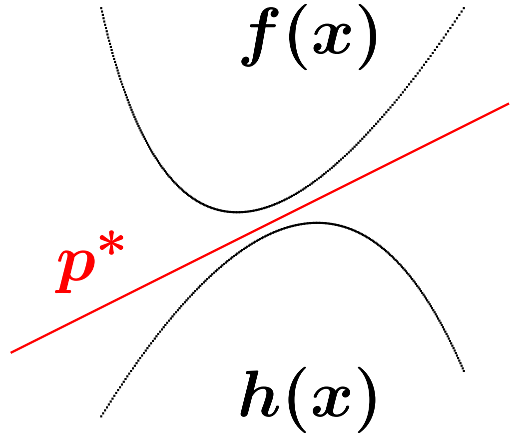
局所＝近傍の立方体

$\Rightarrow$「局所」を保存する変換は $\mathbf{diag}\,(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$

離散凸関数の許容変換

関数族	許容変換 S
	置換行列　および
L凸関数	$\pm\mathrm{diag}\,(1,1,1)$
M凸関数（基多面体）	$\pm\mathrm{diag}\,(1,1,1)$
M凸関数（ジャンプ）	$\mathrm{diag}\,(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$
整凸関数	$\mathrm{diag}\,(\pm 1,\pm 1,\pm 1)$
凸拡張可能関数	任意の単模行列

離散分離定理



$$f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \qquad \text{“凸関数”}$$

$$h : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z} \qquad \text{“凹関数”}$$

$$f(x) \geq h(x) \quad (\forall x) \;\Rightarrow\; \exists\ \alpha^* \in \mathbf{Z},\quad \exists\ p^* \in \mathbf{Z}^n:$$

$$f(x) \geq \alpha^* + \langle p^*, x \rangle \geq h(x) \qquad (x \in \mathbf{Z}^n)$$

離散分離定理は 任意の単模変換でＯＫ

$$x = Sy,\ p^* = S^{-\top} q^*$$

$$\Rightarrow \quad q^* \in \mathbf{Z}^n \quad \langle p^*, x \rangle = \langle q^*, y \rangle$$

マルチモジュラ関数 と L♮凸関数

単模行列

$$
D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}
$$

変数変換　$f(Dp) = g(p), \quad f(x) = g(D^{-1}x)$

定理　f: マルチモジュラ $\iff$ g: L♮凸

$\Rightarrow$ マルチモジュラ関数に対して離散分離定理が成立

離散凸解析 の 参考書

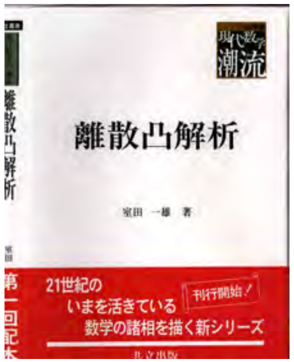
2001: 室田，離散凸解析，共立出版

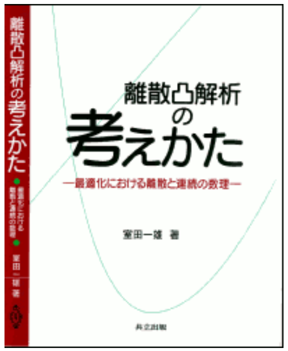
2007: 室田，離散凸解析の考えかた，共立出版

2009: 田村，離散凸解析とゲーム理論，朝倉書店

2013: 室田，塩浦，離散凸解析と最適化アルゴリズム，朝倉

2015: 穴井，斉藤，今日から使える！組合せ最適化，講談社





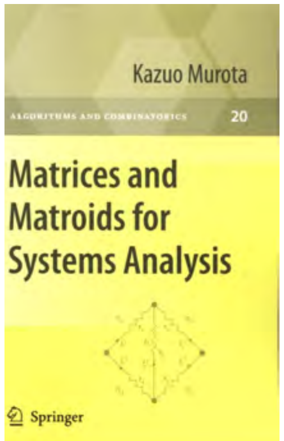
Books (discrete convex analysis)

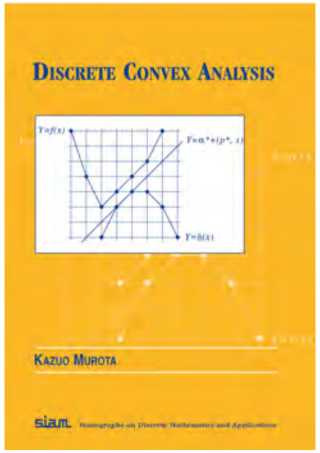
2000: Murota, Matrices and Matroids for
Systems Analysis, Springer

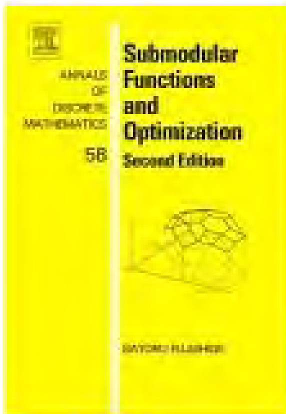
2003: Murota, Discrete Convex Analysis, SIAM

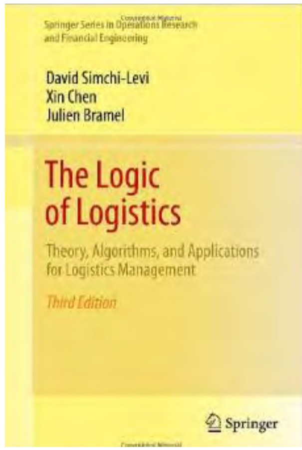
2005: Fujishige, Submodular Functions and
Optimization, 2nd ed., Elsevier

2014: Simchi-Levi, Chen, Bramel,
The Logic of Logistics, 3rd ed., Springer









内容目次（復習）

１．客観性 と不変性　　記述の恣意性，奥義と定石

２．計算過程 の不変性　　**Newton**法,**Gauss**消去法,共役勾配法

３．離散近似 の不変性　　調和関数の離散近似，代用電荷法

４．対称性　　系の対称性と挙動の対称性

５．混合行列 と不変性　　階層分解，許容変換，階数公式

６．離散凸関数 と不変性　　単模変換

E N D