24pZQ-5

ベイズ統計と統計物理

統計数理研究所　伊庭 幸人
Bayesian Statistics and Statistical Physics
The Institute of Statistical Mathematics　Yukito IBA

はじめに

一般的なタイトルであるが，具体的には「イジング模型による画像再構成」について再考することとしたい．時間があれば他の空間・画像関係の話題にも触れる．著者がこの分野で研究[1]をしていたのは10年前であり，その後，動的モンテカルロなどの統計物理の手法が適用される統計の分野は爆発的に増えたが，相転移のあるモデルによる画像処理の問題には依然として謎があるように思われる[2]．

ベイズ統計

ベイズ統計の枠組みでは，未知の対象xを与えたときの観測データyの確率$P(y|x)$，及び，データが無い場合のxについての事前知識を表す事前分布$\pi(x)$をモデルとして与える．すると，データyを与えたときのxの確率(事後分布)は条件つき確率の公式から，

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)\pi(x)}{\sum_x P(y|x)\pi(x)} \tag{1}$$

と与えられる．$\pi(x)$というものをどう考えるかで「399通り」(?)の「ベイズ統計学」がありうるが，最近の時系列解析，画像モデルなどでは$\pi(x)$を対象の性質をあらわすものとして積極的に活用する．たとえば，2値画像$\{x_i\}$, $x_i \in \{\pm 1\}$についてイジング事前分布

$$\pi_J(x) = \exp(J\sum_{(i,j)} x_i x_j)/Z_J \qquad Z_J : \text{分配関数} \tag{2}$$

を仮定することで，白と白，黒と黒の画素が互いに隣合う確率が高いということを表現できる．このような仮定が妥当な画像については，雑音を含む観測過程，たとえば，$P_h(y|x) = \exp(h\sum_i y_i x_i)/(2\cosh h)^N$ (N：画素(スピン)数)を与えたときに，以下の事後分布を用いて画像回復を行うことができる．

$$P_{hJ}(x|y) = \exp(h\sum_i y_i x_i + J\sum_{(i,j)} x_i x_j)/Z_{hJ} \qquad Z_{hJ} : \text{分配関数} \tag{3}$$

ベイズ的解釈の意味 [4]

上の「事後分布」から具体的に画像を再構成する手法のひとつは事後確率が最大になるx (MAP推定値)を選ぶことである．これは(3)の場合「$h\sum_i y_i x_i + J\sum_{(i,j)} x_i x_j \to$最大」に帰着される．しかし，これだけであれば，必ずしもベイズ統計はいらない．単に，$\sum_{(i,j)} x_i x_j$が小さいという制約条件のもとで$h\sum_i y_i x_i$の最適化をしているとみてもよいのである．また，$P_h(y|x)$の部分のみを確率として解釈するという考え方もできる．事後「分布」を考える意味のひとつは，それから誤差や使用目的に応じた(MAP推定値とは異なる)推定値を得ることができることである[3,4]．もうひとつの利点は，周辺尤度最大化規準

$$l(J,h) = \sum_x P_h(y|x)\pi_J(x) \to \text{最大} \tag{4}$$

を用いて,データから(ハイパー)パラメータJ, hを推定する方法が使えることである.この式の意味は,J, hについて(4)を微分してできた式を零と置いて導かれる,J, hの推定値が満たすべき方程式を考えることで,よく理解できる.たとえば,$\frac{\partial l(J,h)}{\partial J} = 0$は

$$\langle \sum_{(i,j)} x_i x_j \rangle_{pos} = \langle \sum_{(i,j)} x_i x_j \rangle_{\pi} \tag{5}$$

に帰着される.但し,$\langle \cdots \rangle_{\pi}$, $\langle \cdots \rangle_{pos}$はそれぞれ事前分布(2),事後分布(3)での期待値を表わす.

相転移

(5)式の意味は「復元画像(についての重み付き平均)である左辺が,事前分布から抽出したsnapshotについての平均である右辺と同じになるようにJ, hを選べ」という意味である.ところが,イジング模型では相転移があるので,Jの値が臨界点をある程度超えると,(有限系でも)右辺の平均に使われるパターンはほぼ白一色に黒がちらほらあるのものか,その逆がほとんどになってしまう(この領域 – 秩序相 – は磁場に対して1次転移がみられる領域でもある).一方,復元したい画像のほうは,普通,黒と白それぞれの大きな領域からなるようなものであろう.このような場合に,(5)式を解いて,J, hを求めることに意味があるのだろうか? 対応するポッツ事前分布の場合は状態数qが増えると温度方向にも1次転移になるので,より一層問題は深刻である.

どうすればいいか?

■ ベイズの立場からいえば,問題は「事前分布の性質が『原画像に期待される性質』をglobalに反映していない」ということにつきる.ひとつの考え方としては,カノニカル分布を事前分布に使うのをやめて,対応するマルチカノニカル・マルチマグネティカル分布を事前分布に使うということが考えられる.これによって,1次転移で「飛んで」しまっている領域のパターンが事前分布に導入されるが,これはまさに欲しかった種類のパターンであるように思われる.

■ もうひとつの方法は,ベイズ的解釈を廃止して,式(4)を使わないで「画像復元に有効な」J, hを推定することである.たとえば,bootstrap法による方法が考えられる.注意すべき点は,pseudo likelihood法やモーメント法など「イジング模型のカノニカル分布からのサンプルに雑音を入れたものが与えられた画像である」という仮定のもとで有効な方法で(4)を置き換えても,この立場ではあまり意味が無いということである.

文献

[1] 伊庭幸人: 統計数理 **39** (1991) 1.
[2] 伊庭幸人: 物性研究 **65-5** (1996) 657.
[3] これは「有限温度の情報処理」とも解釈できるが,物理学者が考え出したわけではない: Y.Iba: J. Phys. A **32** (1999) 3875 (Sec.5と文献を参照).
[4] Y. Iba: In *Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems*, p.235, ed. H. Takayama, Springer (1989).
[*] 講演者による統計学に関する解説や議論,それに関連する文献などが以下にあるので興味のある方は参照されたい: 物性研究 **60-6** (1993) 677; **65-5** (1996) 678; **71-6** (1999) 923; **72-1** (1999) 1; **73-5** (2000).