人間乱数

統計数理研究所　予測制御系　伊庭幸人
椙山女学園大学　生活科学部　田中美栄子
平岡千佳
可児美佳子

1　人間乱数

人間の特性として、なにか決まった作業をするのは得意でも、まったくでたらめにやれといわれると却って癖が出てしまうものである。これを補うために、乱数表や乱数サイコロが昔から作られているわけだが、逆に、人間に無理に乱数を作らせたらどういう特性をもつ数列になるか、というのも興味深い問いである。具体的な実験としては、“0 から 9 までの数字をできるだけデタラメに書いて (言って) ください” といったものが考えられる。

この種の実験 (“乱数テスト”、“人間乱数”) は実はかなり以前から精神医学者、心理学者によって考察されている (村上ほか (1973)、Wagenaar(1972)、Spatt and Goldenberg(1993))。多くの著者は、乱数を生成する能力が被験者の精神状態を調べるための独特の尺度になると考えているようである。

われわれがこの問題を知ったのは、村上らの解説 (村上ほか (1973)) によってである。日本人の精神医学者による研究の多くは村上を乱数テストの創始者としている。後になって、Spatt and Goldenberg(1993) によって外国の研究者によっても研究がなされていることを知った。それによれば、乱数テストの起源は相当古く、また多くの精神医学者、心理学者によって独立に考察されているようである。古い研究の総説としては Wagenaar(1972) が引用される。

われわれは、ともかく、自分たちでデータ (2節) を取って、それを眺めることからはじめた。その結果は 3節,4節に述べたが、現在のところ、文献 (村上 (1973)、Spatt and Goldenberg (1993) など) と比較して、特に新鮮な発見があるとはいえないと思う。5節では、もう一歩すすんだ解析として、人間乱数を表現するような簡単な確率モデルを作り、それをデータにあてはめてみた。5節では、このモデルを拡張すべき方向、確率モデルを明示するアプローチの利点なども議論する。

2　データ

この報告では、村上のオリジナルな方法によって生成された整数の列 $\{S_i\}$, $0 \leq S_i \leq 9$ の解析を論じる ($\{0..9\}$ の人間乱数)。村上の方法では、2 分ないし 3 分の時間を与えて、その間にできるだけ多くの “でたらめ” な数字の列を書かせ、それを 1 回の試行とする。われわれの経験では、1 回の試行の典型的な個数は 100 から 200 である。キーボードからの直接入力は解析には便利であるが、キー配置が結果に影響しそうなので今回は見合わせることにした。個数でなく時間を指定するのは、個数をデータとして使いたいという意図であるが、解析の際のデータの扱いは個数の不揃いのために繁雑になった。これ以外に、0 と 1 からなる数列をキーボードから入力するテストも行なったが、それについてはここでは触れない。

大学生 (女子) 20 人、中学生 36 人について、1 回づつデータをとった (以下、これらを A、B とする)。これ以外に、研究者自身のものを含めて、個人について複数回 ($10 \sim 30$ 回) とったデータが何組かある (Ha,Hb,K,K1,K2)。

3　数字の頻度

村上ら (1973) は多くの被験者に共通にでにくい数字 (とくに 7) があると述べているが、われわれの研究では、はっきりした傾向は確認できなかった。図 1a にはデータ A(20 人, 総数 2614 個)、図 1b にはデータ B(36 人, 総数 4413 個) についての結果を示した。データ B については多少の変動があるが、著しく 7 が少ないようにはみえない。誤差棒は独立性を仮定した場合の標準偏差の 2 倍 $\pm 2\sqrt{n_\alpha(N-n_\alpha)/N}$ の範囲を示す (但し n_α は数字αの出た回数、Nはデータの総数)。この誤差棒には数字の間の相関や被験者 ・試行ごとの系統的なばらつきの効果は含まれていない。

これに対して、被験者に固有の出やすい数字はあるようにみえる。図 1c は特定の被験者 (研究者のひとり) についての繰り返し実験の結果 (データ Ha、30 回, 総数 3915 個) が示されている。図 1d は同じ被験者についての数か月後の結果 (データ Hb、19 回, 総数 1992 個) についてのものであるが、基本的な特徴はかなり保存されている。

4　隣接数字間の相関

多くの著者が認めているように、$\{0..9\}$ の人間乱数では、数字の頻度の偏りより隣接数字間の相関の方が目立つ。そのひとつの原因は、1-2-3-4 や 8-6-4-2 のような数列 (Spatt and Goldenberg (1993) が "counting sequences" と呼んでいるもの) が頻繁にあらわれることである。また、同じ数字が続けて出ることがまれなのは人間乱数の重要な特徴である。

これらの結果は、人間乱数の列 $\{S_i\}\,(i=1..N)$ について、$d=S_{i+1}-S_i$であるような対の数を $d\,(-9\le d\le 9)$ に対してプロットすることで明瞭に示すことができる。図 2a、図 2d はそれぞれデータ A、データ Ha の全体についてこのような図を書いたものである。斜めの線は理想的な乱数列に対して期待される度数を表している。$|d_i|=8$ ないし 9 のところで、再び期待値より数が増える場合があるのは、0 もしくは 9 の近くまで到達してはじめて、"counting sequence" を書いていることに気がついてあわてて反対側にジャンプするためかも知れない。

理想的な乱数列に対しても、長さが有限である以上、各 d に対応する対の数にばらつきを生じる。また、相関の効果にのみ着目するなら、理想的な乱数列より、各数字が独立にしかし異なった頻度で出現するような列と比較するべきであろう。同じ数字が連続して現れないことはあまりにきわだった特徴であるから、この特徴を採り入れた上でさらにどれだけのずれが生じるのかも知りたくなる。

これらの要求に答える素朴な方法は、データ中の各数字の頻度に従って独立に数字を発生して得られる数列、及び、次の数字を直前の数字以外の中から各数字の頻度に比例した確率で選んで得られる数列をシミュレートして、対の数の分布を調べることである。図 2b、図 2e はデータ A、データ Ha に対して、データ中の数字の頻度に従って独立に数字を発生した場合に期待される度数の範囲 (上側の 1 %点と下側の 1 %点) が示されている。2 本の線の間に 98 %が含まれることになる。また、図 2c と図 2f には次の数字を直前の数字以外の中から各数字の頻度に比例した確率で選んだ場合について同様の結果が示されている。

数字が増大する方向で隣接対の差の小さいものが出やすいか、数字が減少する方向で隣接対の差の小さいものが出やすいかは個人差があるようである。図 3 は横軸に d が 1 または 2 の隣接対の度数を、縦軸に d が$=-1$ または-2 の隣接対の度数を、各試行ごとにプロットしたものである。多数の人についての結果 (データ A) をもとにした図 3a では点が散らばっているのに対し、個人についての反復実験の結果 (データ Ha、K1) をもとにした図 3b、図 3c では点が一方の側に偏っているのがわかる。

5　人間乱数の統計モデル

5.1　簡単な統計モデルを作る

もう少し進んだ解析をするために、人間乱数の特徴を確率モデルで表現することを考える。まず、最初の近似として、図 1 及び図 2 の特徴を再生するようなもっとも簡単なモデルを考えよう。

ひとつの考え方は 1 次のマルコフ連鎖を考えて、その遷移確率に制約を加えることである。具体的には、$\{h_\beta,\, \beta = 0, .., 9\}$ と $\{g_\gamma,\, \gamma = -9, -8, .., 8, 9\}$ をパラメータとして数字αの次に数字βが出る確率を

$$P_{\alpha\,|\beta} = \frac{\exp(h_\beta + g_{\beta-\alpha})}{\sum_{\beta=0}^{9} \exp(h_\beta + g_{\beta-\alpha})} \tag{1}$$

のように書くことが考えられる。$n_{\alpha\beta}$を $\{S_i\}$ の中の隣接数字の (順序) 対$\alpha\beta$の数とすると、われわれのモデルの対数尤度は

$$\log L(\{S_i\} \mid \{h_\alpha\}, \{g_\gamma\}) = \sum_{\alpha=0}^{9} \sum_{\beta=0}^{9} n_{\alpha\beta} \log P_{\alpha\,|\beta} \tag{2}$$

となる。データが与えられれば、パラメータ $\{h_\beta\},\ \{g_\gamma\}$ は対数尤度を最大にすることで求められる (最尤推定)。ただし、表現の一意性のための拘束条件が 3 つ (たとえば、$\sum_{\beta=0}^{9} h_\beta = 0,\ \sum_{\gamma=-9}^{9} g_\gamma = 0,\ \sum_{\gamma=-9}^{9} \gamma g_\gamma = 0$) 必要である。このモデルでは、$g_{\beta-\alpha}$が数字の差$\beta - \alpha$だけによっているので、パラメータの総数は一般の 1 次のマルコフ連鎖に比べて減少している。拘束条件が 3 つ必要なことに留意すると、独立なパラメータ数は $10 + 19 - 3 = 26$ 個となる。これに対して一般の 1 次のマルコフ連鎖では、$100 - 10 = 90$ 個である。26 個というパラメータ数は図 1 及び図 2 の結果を残差なしにフィットするために必要な最小の数である。

別の考え方はいわゆる対数線形モデルを利用することである。$\{\widetilde{h}_\alpha,\, \alpha = 0, .., 9\}$ と $\{\widetilde{g}_\gamma,\, \gamma = -9, -8, .., 8, 9\}$ をパラメータとして数列 $\{S_i\}$ に対応する “エネルギー” を

$$-\,E(\{S_i\}) = \sum_{\alpha=0}^{9} \widetilde{h}_\alpha n_\alpha + \sum_{\alpha=0}^{9} \sum_{\beta=0}^{9} \widetilde{g}_{\beta-\alpha}\, n_{\alpha\beta} \tag{3}$$

と定義する。但し、n_αは数字αが列に現れる度数で、数列の端の数字を無視すれば、$n_\alpha = \sum_\beta n_{\alpha\beta} = \sum_\beta n_{\beta\alpha}$ となる。すると、尤度は

$$L(\{S_i\} \mid \{\widetilde{h}_\alpha\}, \{\widetilde{g}_\gamma\}) = \frac{1}{Z} \exp(-E(\{S_i\})) \tag{4}$$

とギブス分布の形にかける。Zは分布の規格化定数である。この場合も、一意性のためには 3 つの拘束条件が必要である。

複雑系 4 での発表の際は後者のモデルをもとに話したが、実は前者と後者は等価である。前者の形なら、最尤法による当てはめが簡単な繰り返し計算でできることが見てとれるし、人間乱数の生成プロセスとしての意味づけもしやすい。両者の対応は端の効果を無視すれば、

$$\widetilde{h}_\alpha = \quad h_\alpha - \log \textstyle\sum_\beta \exp(h_\beta + g_{\beta-\alpha}) \tag{5}$$

$$\widetilde{g}_\gamma = \qquad\qquad g_\gamma \tag{6}$$

となる。この等価性はモデルが 1 次元的で、かつ、1 体の項 h_α に特別な制約条件がないことの当然の帰結であるが、うっかり見落としていた。

このモデルを最尤法によってデータに当てはめた結果は図 4、図 5 のようになる。図 4、図 5 ではデータに対する当てはまりを、数字の隣接対 ab の期待度数とデータの度数との比較で示している。ここでは、各データに含まれる数列全部から各一組のパラメータを推定した。図 4 はデータ A 全体、図 5 はデータ Ha 全体に対する結果である。

5.2 統計モデルを考える意味

ここでは確率モデルを明示的に書くと何がうれしいのか、ということを考えてみる。モデルを当てはめなくても、対応する特徴を表す統計量を図 1 や図 2 のように与えればそれで十分だという考えもあるだろう。人間乱数についての文献でも、いろいろな統計量を定義して特徴を記述するタイプの考え方が多い。

数列 (一般に研究対象) の特徴を確率モデルで表現する利点のひとつは、それによって “そのモデルのもとでの典型的な数列” を生成できるようになることである。これから、典型的な数列についての任意の統計量の期待値が定義できる。これは、たとえば、次のように利用できる。

ある特徴的な部分列、たとえば、“1-2” がデータの中に多いとする。この場合、“1-2” が多いのは、単に 1 が多いためかもしれないし、“差が 1 の隣接対が多い” ということの一般的帰結かもしれない。一般にある部分列がデータ中に多いとき、その多さが “図 1 と図 2 であらわされる特徴をデータが持っている” ということで十分表現されているのか、そうでないか、という疑問が生じてくる。似た問題は図 2 で誤差範囲を考えたときにすでにあらわれているが、ここでは状況がより複雑になっている。この場合に、確率モデルで図 1 と図 2 であらわされる特徴を表現しておけば、モデルのもとで典型的な数列とデータを比較することによって、“図 1 と図 2 の特徴だけでは説明できないパターン” の有無を調べることができるわけである。

図 4、図 5 はこの観点から解釈することができる。図 5 では 2 文字列 “7-0” がわれわれのモデルのもとでの期待度数よりかなり多い。これは、図 1 と図 2 に含まれる “一般的特徴” ではあらわせないような特徴をデータが持っていることを示唆している。図 5 はひとりの被験者についてのデータであるが、被験者にはこの文字列を出しやすいという “癖” があるのかもしれない。図 4 では大勢の被験者についてのデータ (データ A) について同じプロットが示されているが、当てはまりは図 5 よりうんと良い。これは、“癖” がならされた結果とも解釈できる。ただし、同じ大勢の被験者についてのデータでもデータ B の方はもっと当てはまりが悪いので、断定はできない。

確率モデルのこれ以外の利点としては、モデルの比較を通じて、どのような生成機構がデータを良く説明するのか、どのような特徴がデータに有意に認められるのか、などを議論できる点があげられる。モデルの比較には AIC(赤池情報量規準) や尤度比検定が利用できる。人間乱数についてこれを試みることは今後の課題である。

5.3 モデルの改良など

先に提案した確率モデルは人間乱数の特性を描写するために十分なものではない。特に問題なのは、このモデルをデータにあてはめると “1-2-1” とか “4-3-4” のようなタイプの部分列が起こりやすいことになるが、これは事実に反するという点である。人間乱数では、“1-2-3” は起こりやすくても、“1-2-1” はまれなのが普通である。

これを改良する素朴な方法は、2 つ前までの数字から次の数字が決まるとして、2 次のマルコフ連鎖を用いることである。勿論、一般の 2 次のマルコフ連鎖はパラメータ数が 900 個にもなるから論外であり、数字の差が 1 の場合を特別扱いするなどの方法でパラメータを減らす必要がある。Spatt and Goldenberg (1993) は、決まった機能をもつ “procedure” あるいは “agent” のようなものがいくつか心の中にあって、それを交代で呼び出すことで人間乱数が作られるという見方をしている。このような見方を反映した確率モデルを作ることもできるかもしれない。 たとえば、“counting sequence” を生成する agent がある確率で呼び出されるが、それ以外は好みの数字がランダムに生成されるといったモデルである。次の段階では AIC や尤度比検定を用いてこれらのモデルを比較することが問題になるだろう。

残差の部分を個人の特徴的な部分列 (さきの例では特徴的な 2 文字の対) とみなすという考えもなお検討を要する。実は、先のモデルでは “0-9” 及び “9-0” という列が特徴的パターンとみなされることはない。差が 9 あるいは -9 である対はそれぞれ 1 種類しかないから、残差は常に 0 になってしまうのである。もっ

とモデルのパラメータを減らすか、あるいは、もっと長い特徴的パターンに着目するか、いずれかの方向に研究を進めるべきかもしれない。

研究をはじめる前の予想には、“自分の家 (地域) の電話番号が出やすいのではないか” といったものがあった。もし、なんらかの統計的モデリングを通じて面白い癖がみえてくることがあれば興味深いと思われる。

文献

われわれが主に参考にしたのは、村上ほか (1973)、及び、渡辺登 ・川久保芳彦による論文 (東大出版会 “分裂病の精神病理” シリーズに所収のもの) である。複雑系 4 での発表のあと、Spatt and Goldenberg (1993) を入手した。現在は、中間報告 (Iba and Tanaka-Yamawaki (1996)) を書きおえて、渡辺 ・川久保及び Spatt and Goldenberg の reference を手がかりとした包括的な文献の調査を開始したところである。本稿を書いている途中で、文献の複写が届きはじめたが、それらについて検討するのはまたの機会に譲ることにする。1970 年代以前の研究に関しては、Wagenaar(1972) が重要な情報源のようである。{0..9} の数字だけでなく、{0,1} の数字、アルファベットや図形などをランダムに生成させるものを含めて、20 件以上の文献が分類整理されている。

Iba,Y. and Tanaka-Yamawaki,M. (1996)
A statistical analysis of human random number generators
ISM Research Memorandum No.593.

村上公克 ・乱数テスト研究会 (1973)
人間乱数
自然, 28 8, pp.49-57, 1973 年 8 月号.

Spatt,J. and Goldenberg,G.(1993)
Components of random generation by normal subjects and patients with dysexecutive syndrome
Brain and Cognition, 23, pp.231-242.

Wagenaar,W.A. (1972)
Generation of random sequences by human subjects: A critical survey of literature
Phychological Bulletin, 77, pp.65-72.

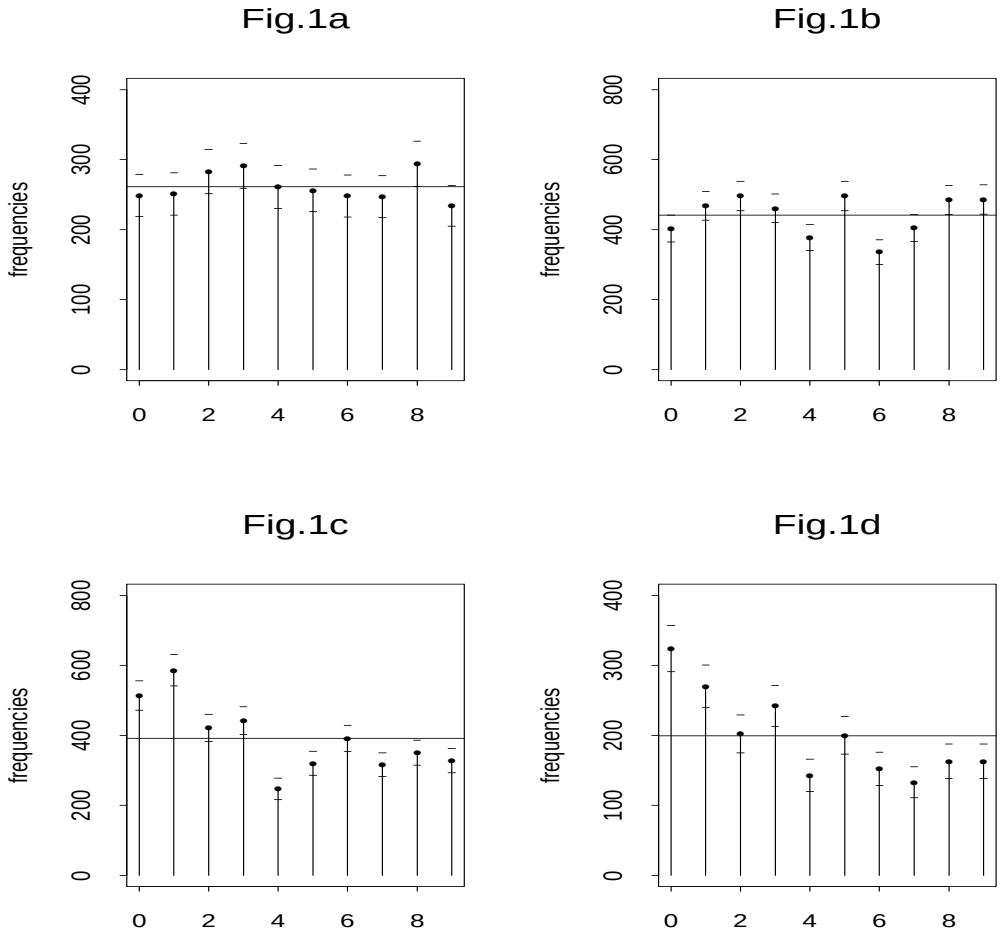

図 1: 数字の頻度

図 1a はデータ A、図 1b はデータ B について、図 1c、図 1d は特定の被験者についての繰り返し実験の結果 (それぞれ、データ Ha, データ Hb) について、各数字の度数を示す。いずれもデータ全体 (各試行を合わせたもの) についての結果。

横軸は $\{0..9\}$ の数字、縦軸は度数。誤差棒は標準偏差の 2 倍。

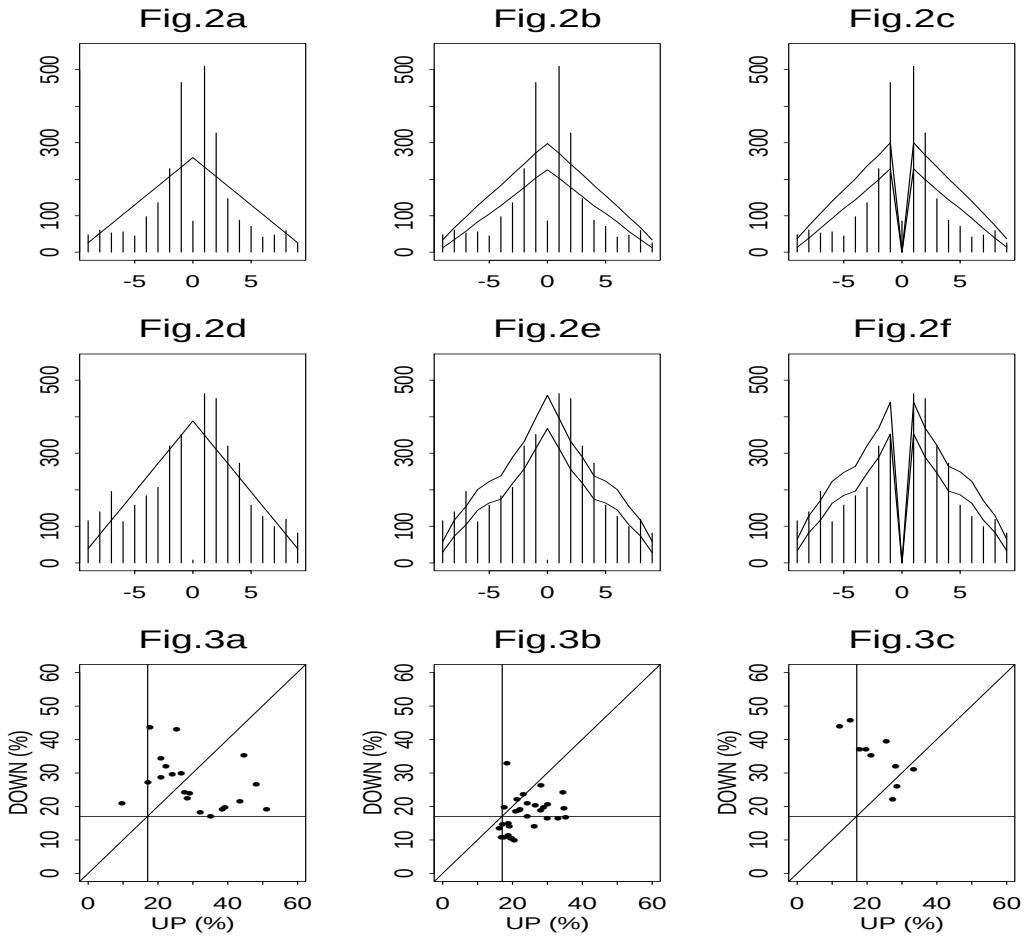

図 2: $d = S_{i+1} - S_i$ であるような対の数 (横軸: d、縦軸: 度数)
図 2a,b,c にはデータ A、図 2d,e,f にはデータ Ha についての結果を縦線で表示。
いずれもデータ全体 (各試行を合わせたもの) についての結果。
図 2a,d: 斜めの線は理想的な乱数での期待値。
図 2b,e: 折れ線はデータと同じ頻度で独立に数字を発生した場合の範囲 (98 %)。
図 2c,f: 折れ線は直前の数字以外からデータと同頻度で発生した場合の範囲 (98 %)。

図 3: d=1,2 の対の頻度 (横軸) と d=−1,−2 の対の頻度 (縦軸)
各試行ごとに、各試行で出た対の総数との比率をプロットした。
図 3a: データ A(20 回)、図 3b: データ Ha(30 回)、図 3c: データ K1(10 回)
縦及び横の線は理想的な乱数での期待値、斜めの線は縦=横の直線。

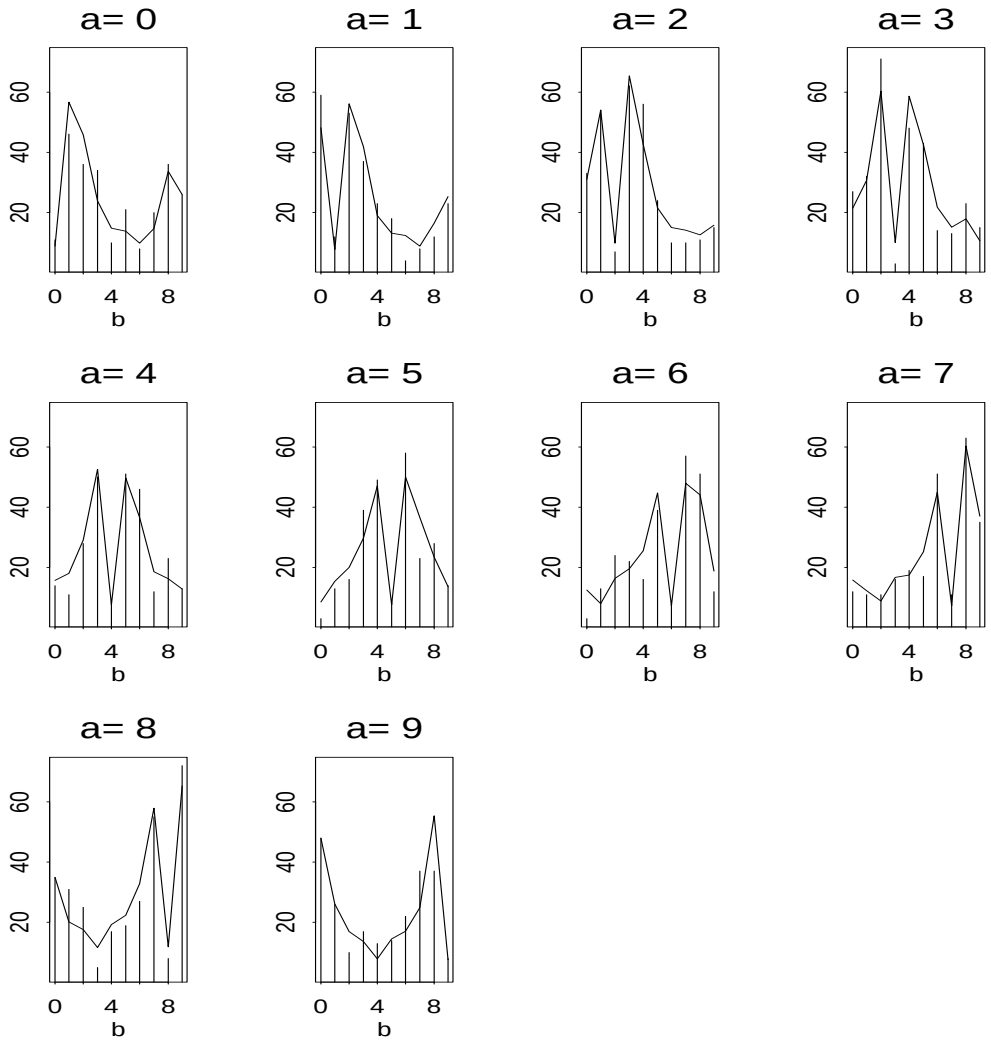

図 4: 隣接対の期待度数と実際の度数 (データ **A**)
本文中で説明したモデルをデータ A 全体に当てはめた結果。
隣接対 “ab” の期待度数を折れ線で、データ中の実際の度数を縦線で、それぞれ示した。対 “ab” の “a” を各パネルの上に、“b” を横軸に示した。

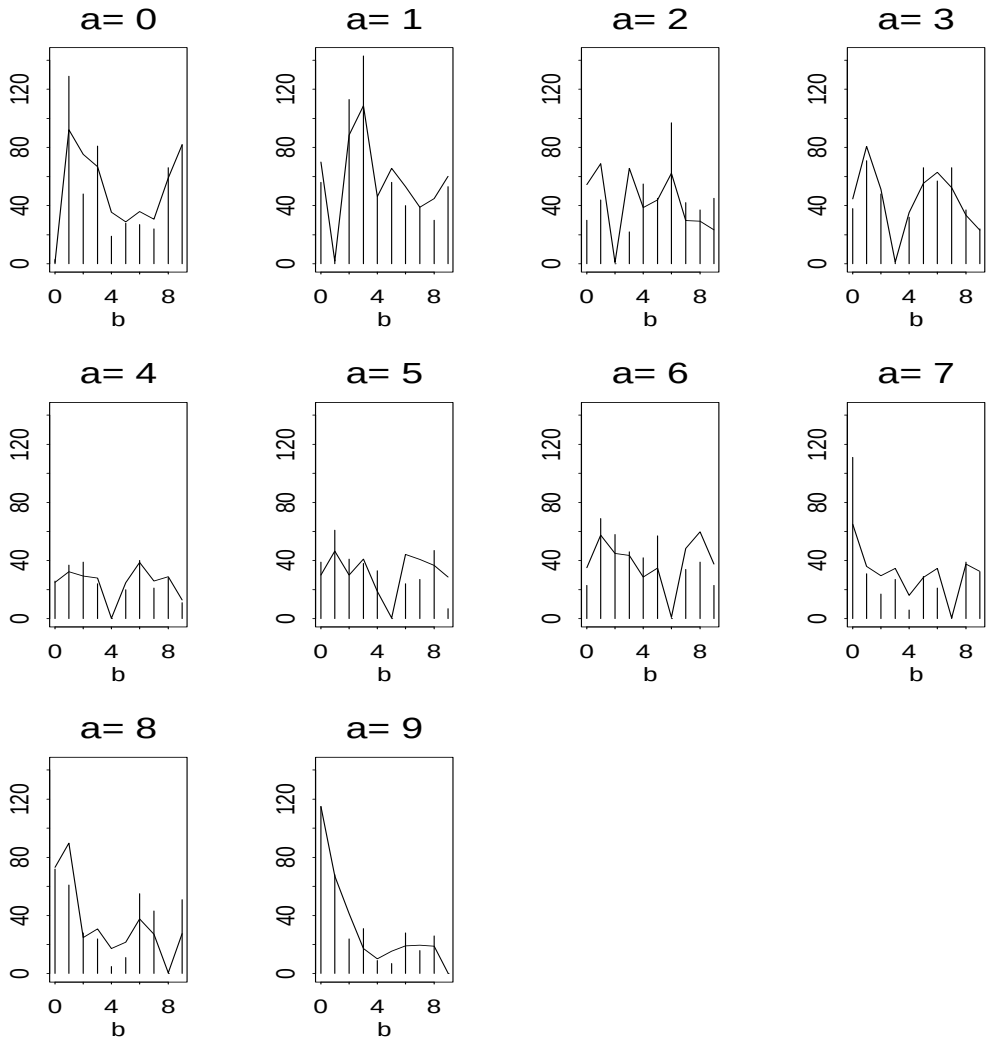

図 5: 隣接対の期待度数と実際の度数 (データ Ha)
本文中で説明したモデルをデータ Ha 全体に当てはめた結果。
隣接対 “ab” の期待度数を折れ線で、データ中の実際の度数を縦線で、それぞれ示した。対 “ab” の “a” を各パネルの上に、“b” を横軸に示した。