

## レプリカ法による制限等長定数の評価

# Estimation of Restricted Isometry Constants by Replica method

坂田綾香\*  
Ayaka Sakata

樺島祥介†  
Yoshiyuki Kabashima

**Abstract**— We propose a method for evaluating restricted isometry constants (RICs). This evaluation is reduced to the identification of the zero-points of entropy density which is defined for submatrices that are composed of columns selected from a given measurement matrix. Using the replica method, we assess RICs for Gaussian random matrices. Our theoretical estimation of an RIC corresponds to an upper bound that is tighter than in preceding studies. The assessment of the RIC is improved by taking into account the replica symmetry breaking.

**Keywords**— Compressed sensing, Restricted Isometry, Replica method

## 1 はじめに

### 1.1 圧縮センシング

圧縮センシング (compressed sensing, CS) は、原信号がゼロ成分を多く持つ (スパース性) という事前知識の下で、次元より少ない観測から信号を復元する枠組みである。スパース性を用いることで、標準化定理が要求するよりも少ないサンプル数から原信号を復元することが可能となる [1]. CS は特にデータの大规模な観測が困難な医療や天文学における画像解析など様々な分野の問題に適用されている [2, 3]. CS の性能は、特にランダム線形観測の場合について数学的に解析されてきた [4, 5].  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  を観測行列とすると、CS は次の線形観測を通して得られた  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (1)$$

から、 $S (< N)$  個の非ゼロ要素を持つ信号  $\mathbf{x}$  ( $S$  スパースベクトル) を再構成する問題である。ここでは (1) を解く際に、次の  $\ell_0, \ell_1$  再構成法を用いる。

$$\ell_0 \text{再構成} : \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_0, \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (2)$$

$$\ell_1 \text{再構成} : \min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{x}\|_1, \text{ subject to } \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3)$$

このとき、 $S$  スパースベクトル  $\mathbf{x}$  が完全復元される十分条件は制限等長定数により与えられる [6].

### 1.2 制限等長定数とは

以下では、観測行列  $\forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  はコラムが典型的に  $(\mathbf{A}^T \mathbf{A})_{ii} = 1$  ( $i \in \{1, \dots, N\}$ ) を満たすように規格

\* 統計数理研究所 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3, Institute of Statistical Mathematics, Midori-cho 10-3 Tachikawa, 190-8562  
† 東京工業大学 大学院総合理工学研究科 〒226-8502 神奈川県横浜市緑区長津田町 4259-G5-22, Tokyo institute of Technology, Nagatsuta-cho 4259-G5-22, Midori-ku, Yokohama, 226-8502

化されているものとする。制限等長定数の定義は次の通りである。

**定義 [制限等長定数]:** 全ての  $S$  スパースベクトル  $\mathbf{x}$  について次の関係を満たす行列  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  は

$$(1 - \delta_S^{\min}) \|\mathbf{x}\|_F^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_F^2 \leq (1 + \delta_S^{\max}) \|\mathbf{x}\|_F^2 \quad (4)$$

制限等長性 (restricted isometry property, RIP) を満たす。また  $0 < \delta_S^{\min} \leq \delta_S^{\max}$  を制限等長定数 (RIC) と呼ぶ。

RIC は  $\mathbf{A}$  の  $S$  個のコラムが張る空間と、正規直交系の Frobenius ( $\ell_2$ -) ノルムの意味での近さの指標であり、RIC が小さいほど、 $\mathbf{A}$  による線形変換は直交変換に近づく。RIC が与える  $\ell_0, \ell_1$  再構成による完全復元条件は次の通りである。

**定理 1 [Candès et al. [4]]:**  $\delta_{2S} = \max[\delta_{2S}^{\min}, \delta_{2S}^{\max}] < 1$  のとき、(1) は一意な  $S$  スパースベクトルの解  $\mathbf{x}$  を持ち、これは  $\ell_0$  の最も疎な解である。また  $\delta_{2S} < \sqrt{2} - 1$  のとき、 $\ell_1$  再構成は一意な  $S$  スパース解を持ち、これは  $\ell_0$  の解と一致する。

**定理 2 [Candès et al. [4] の改善 [7]]:**  $(4\sqrt{2} - 3)\delta_{2S}^{\min} + \delta_{2S}^{\max} < 4(\sqrt{2} - 1)$  の時、一意な  $S$  スパース解は  $\ell_1$  の最も疎な解であり、 $\ell_0$  再構成の解と一致する。

### 1.3 RIC と固有値

RIC は  $\mathbf{A}$  のグラム行列の固有値と関係づけられる。 $S$  スパースベクトル  $\mathbf{x}$  の非ゼロ要素の位置を  $T \subseteq V = \{1, \dots, N\}$ ,  $|T| = S$  として表現する。 $\mathbf{A}$  の  $i \in T$  コラムからなる行列を  $\mathbf{A}_T$ , また  $\mathbf{x}_T = \{x_i | i \in T\}$  とすると、 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_T$  である。全ての  $T$  について、次の不等式が成立する。

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) \|\mathbf{x}_T\|_F^2 \leq \|\mathbf{A}_T \mathbf{x}_T\|_F^2 \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) \|\mathbf{x}_T\|_F^2$$

$\lambda_{\min}(\mathbf{B})$ ,  $\lambda_{\max}(\mathbf{B})$  は  $\mathbf{B}$  の最小・最大固有値を表し、上付きの  $T$  は転置を表す。(4) との比較から、固有値を用いて RIC は次のように表現される。

$$\delta_S^{\min} = 1 - \lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; S), \quad \delta_S^{\max} = \lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; S) - 1, \quad (5)$$

ここで次のように定義した。

$$\lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; S) = \min_{T: T \subseteq V, |T|=S} \lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T), \quad (6)$$

$$\lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; S) = \max_{T: T \subseteq V, |T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T). \quad (7)$$

## 1.4 先行研究

(5) を定義通り評価するには、 $N!/(S!(N-S)!)$  個のグラム行列  $\{\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T\}$  の最大・最小固有値を得る必要があり、計算量的に困難である。ガウスランダム行列  $\mathbf{A}$  については、Wishart 行列の最大・最小固有値の大偏差性質を用いて RIC の上界が導出されている [6, 8, 9]。これら先行研究についてまとめる。

### 1.4.1 Candès and Tao's (CT) bound

CT 上界の導出には、次の不等式を用いる [6, 10]

$$\text{Prob}[\lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) > (1 + \sqrt{S/M} + t)^2] \leq e^{-Mt^2/2} \quad (8)$$

$$\text{Prob}[\lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) < (1 - \sqrt{S/M} - t)^2] \leq e^{-Mt^2/2} \quad (9)$$

union bounds を用いると、

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\left[\max_{T:|T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) > (1 + \sqrt{S/M} + t)^2\right] \\ & \leq N C_S e^{-Mt^2/2} \sim \exp(NH(S/N) - Mt^2/2) \quad (10) \end{aligned}$$

ここで  $H(p) = -p \log p - (1-p) \log(1-p)$  とし、また  $O(1)$  の項は無視した。ここから RIC の上界は次のように導出される。

$$\delta_S^{\text{CT}} = -1 + [1 + \sqrt{S/M} + \sqrt{2NH(S/N)/M}]^2 \quad (11)$$

### 1.4.2 Blanchard, Cartis and Tanner's (BCT) bound

BCT 上界は CT 上界を改善することが経験的に知られている [8]。導出には、 $|T| = S$  とした Wishart 行列  $\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T$  の最大・最小固有値の確率分布関数  $f_{\max}$ ,  $f_{\min}$  を用いる [11]。

$$f_{\max}(S, M; \lambda) \leq p_{\max} \exp(M\psi_{\max}(\lambda, \rho/\alpha)) \quad (12)$$

$$f_{\min}(S, M; \lambda) \leq p_{\min} \exp(M\psi_{\min}(\lambda, \rho/\alpha)) \quad (13)$$

ここで  $p_{\max}$ ,  $p_{\min}$  は  $N$  と  $\lambda$  に関する多項式で、また 
$$\psi_{\min}(\lambda, x) = H(x) + \frac{1}{2} \{(1-x) \log \lambda + 1 - x + x \log x - \lambda\}$$
 
$$\psi_{\max}(\lambda, x) = \frac{1}{2} \{(1+x) \log \lambda + 1 + x - x \log x - \lambda\}.$$

である。 $O(1)$  の項は無視し union bound を用いると、 $\mathbf{A}$  から生成される全ての行列  $\mathbf{A}_T$  を考慮した大偏差関数は  $\exp\{N(\alpha\psi_{\min}(\lambda, \rho/\alpha) + H(\rho))\}$ ,  $\exp\{N(\alpha\psi_{\max}(\lambda, \rho/\alpha) + H(\rho))\}$  となる。よって、 $\lambda_{\min}$ ,  $\lambda_{\max}$  の典型値は次式の解として与えられる。

$$\alpha\psi_{\min}(\lambda^{\min}(\alpha, \rho/\alpha), \rho/\alpha) + H(\rho) = 0 \quad (14)$$

$$\alpha\psi_{\max}(\lambda^{\max}(\alpha, \rho/\alpha), \rho/\alpha) + H(\rho) = 0 \quad (15)$$

解を  $\lambda^{\min}(\alpha, \rho/\alpha) (\leq 1 - \rho/\alpha)$ ,  $\lambda^{\max}(\alpha, \rho/\alpha) (\geq 1 + \rho/\alpha)$  と表記すると、BCT 上界は次の通りである。

$$\delta_S^{\text{min,BCT}} = 1 - \lambda_{\min}(\alpha, \rho/\alpha) \quad (16)$$

$$\delta_S^{\text{max,BCT}} = \min_{\nu \in [\rho/\alpha, 1]} \lambda^{\max}(\alpha, \nu) - 1 \quad (17)$$

### 1.4.3 Bah and Tanner (BT) bound

BT 上界は BCT 上界の改善であることが証明されている [9]。BT 上界の評価では、コラム番号  $\{1, \dots, N\}$  をカバーするように  $u$  個のグループ  $\{G_1, \dots, G_u\}$  を構成する。ここで  $|G_i| = S' (> S), \forall i$  とすると、グループ数は  $u = N_N C_S / S' C_S$  個で十分である。 $T$  に関する最大化は、グループに関する最大化とグループ内の要素に関する最大化という二重の最大化として表現される。グループに関する最大化を union bound により評価すると

$$\begin{aligned} & \text{Prob}\left[\max_{T:|T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T > \theta)\right] \\ & = \text{Prob}\left[\max_i \max_{T: T \subset G_i, |T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T > \theta)\right] \\ & \leq \sum_{i=1}^u \text{Prob}\left[\max_{T: T \subset G_i, |T|=S} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T > \theta)\right] \\ & \leq u \text{Prob}\left[\max_{T:|T|=S'} \lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T > \theta)\right] \quad (18) \end{aligned}$$

となる。同様の議論は最小固有値に関しても適用できる。この不等式は全ての  $S' (> S)$  について成立するため、最もタイトな評価を与える  $S'$  を選べば良い。確率分布関数 [11] を用いて tail bound を評価すると、最大・最小固有値  $\lambda_{\min}(\alpha, \rho/\alpha; \eta)$ ,  $\lambda_{\max}(\alpha, \rho/\alpha; \eta)$  は次式の解として与えられる。

$$\begin{aligned} \alpha\psi_{\min}(\lambda_{\min}(\alpha, \rho/\alpha; \eta), \eta) + H(\rho) - \alpha\eta H(\rho/(\alpha\eta)) &= 0 \\ \alpha\psi_{\max}(\lambda_{\max}(\alpha, \rho/\alpha; \eta), \eta) + H(\rho) - \alpha\eta H(\rho/(\alpha\eta)) &= 0, \end{aligned}$$

BT 上界はこれを  $\eta = S'/N$  について最大化・最小化したものである。

$$\delta_S^{\text{min,BT}} = 1 - \max_{\eta \in [\rho/\alpha, \alpha^{-1}]} \lambda_{\min}(\alpha, \rho/\alpha; \eta) \quad (19)$$

$$\delta_S^{\text{max,BT}} = \min_{\eta \in [\rho/\alpha, \alpha^{-1}]} \lambda_{\max}(\alpha, \rho/\alpha; \eta) - 1. \quad (20)$$

この改善は、同じグループに属し、多くのコラムを共有する  $\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T$  と  $\mathbf{A}_{T'}^T \mathbf{A}_{T'}$  の固有値の相関を考慮した結果であると解釈できる。

## 1.5 本研究について

先行研究は  $T$  に関する最大化・最小化を union bound で評価している。本研究では、統計力学的手法により、最大化・最小化を直接的に評価する。そのために、最小・最大固有値をエネルギー関数として扱い、あるエネルギー値を持つサブ行列のエントロピーを計算する。行列  $\mathbf{A}$  の RIC はエントロピーゼロという条件から導出される。この方法をガウシアンランダム行列においてレプリカ法を用いて実行し、先行研究と比較する。またレプリカ対称性の破れと RIC 評価の関係について議論する。

## 2 統計力学による評価

最大・最小固有値を解析的に扱うために、変数  $\mathbf{c} \in \{0, 1\}^N$  を導入し、次の関数を定義する。

$$Z_c(\mathbf{c}, \mathbf{A}; \beta) = \int_{\mathbb{R}^N} d\mathbf{u} P(\mathbf{u}|\mathbf{c}) \exp \left\{ -\frac{\beta}{2} \|\mathbf{A}(\mathbf{c} \circ \mathbf{u})\|_F^2 \right\} \times \delta(\|\mathbf{c} \circ \mathbf{u}\|_F^2 - N), \quad (21)$$

$\circ$  は成分ごとの積を意味し、 $P(\mathbf{u}|\mathbf{c}) \propto \exp(-\sum_{i=1}^N (1 - c_i)u_i^2/2)$  は非ゼロ要素による発散を除去するために導入した。 $i \in T$  のとき  $(\mathbf{c}(T))_i = 1$ 、それ以外で  $(\mathbf{c}(T))_i = 0$  となるように  $\mathbf{c}(T) \in \{0, 1\}^N$  を構成すると、 $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$  の最小・最大固有値は次のように与えられる。

$$\lambda_{\min}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) = -\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \frac{2}{N\beta} \log Z_c(\mathbf{c}(T), \mathbf{A}; \beta) \quad (22)$$

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T) = -\lim_{\beta \rightarrow -\infty} \frac{2}{N\beta} \log Z_c(\mathbf{c}(T), \mathbf{A}; \beta) \quad (23)$$

引数  $(\mathbf{A}_T^T \mathbf{A}_T)$  を  $(\mathbf{c}(T), \mathbf{A})$  と書き直すと、(6-7) は次のようになる。

$$\lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; S) = \min_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S} \lambda_{\min}(\mathbf{c}, \mathbf{A}), \quad (24)$$

$$\lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; S) = \max_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S} \lambda_{\max}(\mathbf{c}, \mathbf{A}), \quad (25)$$

ここで  $\mathbf{c}_S$  は  $\sum_i c_i = S$  を満たす配位  $\mathbf{c}$  の集合である。

以下では、 $\alpha, \rho \sim O(1)$  を用いて  $M = N\alpha$ ,  $S = N\rho$  となる場合を考える。 $\mathbf{c}$  のエネルギー密度を  $\Lambda_+(\mathbf{c}|\mathbf{A}) = \lambda_{\min}(\mathbf{c}, \mathbf{A})/2$ ,  $\Lambda_-(\mathbf{c}|\mathbf{A}) = \lambda_{\max}(\mathbf{c}, \mathbf{A})/2$  とし、自由エントロピー密度を定義する。

$$\begin{aligned} \phi(\mu|\mathbf{A}; \rho) &\equiv N^{-1} \log \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S} e^{-N\mu\Lambda_{\text{sgn}(\mu)}(\mathbf{c}|\mathbf{A})} \\ &= \lim_{\beta \rightarrow +\infty} N^{-1} \log \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S} Z_c^{\frac{\mu}{\beta}}(\mathbf{c}, \mathbf{A}; \beta). \end{aligned} \quad (26)$$

$\text{sgn}(\mu)$  は  $\mu$  の符号とし、(22-23) を用いた。

$\Lambda_{\pm}(\mathbf{c}|\mathbf{A}) = \lambda/2$  となる配位  $\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S$  の数をエントロピー密度  $\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)$  を用いて  $\exp(N\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A}; \rho))$  とすると、ミクロな配位  $\mathbf{c}$  に関する和は  $\Lambda_{\pm}(\mathbf{c}|\mathbf{A})$  が取りうる値  $\lambda$  に渡る積分として表現できる。鞍点法を用いると

$$\begin{aligned} \phi(\mu|\mathbf{A}; \rho) &= \frac{1}{N} \log \int d\lambda \exp\{-N\mu\lambda + N\omega_{\text{sgn}(\mu)}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)\} \\ &\rightarrow \max_{\lambda} \{-\mu\lambda + \omega_{\text{sgn}(\mu)}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)\} \end{aligned} \quad (27)$$

となる。(27) の  $\lambda$  の極値は  $\frac{\partial \omega_{\text{sgn}(\mu)}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)}{\partial \lambda} = \mu$  から決まり、重み  $e^{-N\mu\Lambda_{\text{sgn}(\mu)}(\mathbf{c}|\mathbf{A})}$  に従ってサンプリングされた  $\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S$  のエネルギー典型値に対応する。(27) より、 $\phi(\mu|\mathbf{A}; \rho)$  と  $\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)$  はルジャンドル変換で結びつくため、 $\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A}; \rho)$  に凸性を仮定することで

$$\omega_{\text{sgn}(\mu)}(\lambda|\mathbf{A}; \rho) = \phi(\mu|\mathbf{A}; \rho) - \mu \frac{\partial \phi(\mu|\mathbf{A}; \rho)}{\partial \mu}, \quad (28)$$

としてエントロピー密度が得られる。

エントロピー密度  $\omega_{\pm}$ ,  $\omega_{\pm}$  は凸で、それぞれ  $\lambda$  の増加・減少関数である。定義からエントロピーは非負であり、 $\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A}; \rho) < 0$  は  $\Lambda_{\pm}(\mathbf{c}|\mathbf{A}) = \lambda/2$  となる  $\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S$  が存在しないことを意味する。したがって、 $\omega_{\pm}(\lambda_{\pm}^*|\mathbf{A}; \rho) = 0$  を与えるゼロ点  $\lambda_{\pm}^*$  は可能な最小・最大固有値に対応する。したがって、(24-25) は次のように与えられる。

$$\lambda_{\min}^*(\mathbf{A}; \rho) = \lambda_+^*, \quad \lambda_{\max}^*(\mathbf{A}; \rho) = \lambda_-^*, \quad (29)$$

## 3 レプリカ法による計算

以上の方法を、 $\mathbf{A}$  の各成分が平均ゼロ、分散  $(N\alpha)^{-1}$  のガウス分布に従う場合に適用する。 $\phi(\mu|\mathbf{A})$ ,  $\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A})$  は  $\mathbf{A}$  に依存するが、典型値  $\phi(\mu) \equiv [\phi(\mu|\mathbf{A})]_A$ ,  $\omega_{\pm}(\lambda) \equiv [\omega_{\pm}(\lambda|\mathbf{A})]_A$  より  $\forall \epsilon > 0$  だけ大きくなる確率は  $N \rightarrow \infty$  でゼロになる。ここで  $[\cdot]_A$  は  $\mathbf{A}$  に関する平均を意味する。したがって、 $\phi(\mu)$ ,  $\omega_{\pm}(\lambda)$  の典型的性質は、それらの典型値を計算することで評価できる。

レプリカ法は、ランダム変数の対数平均という困難な計算を実行するために導入される [12, 13]。母関数と分配関数

$$\phi_n(\mu) = \frac{1}{N} \log [\mathcal{Z}^n(\mathbf{A})]_A, \quad \mathcal{Z}(\mathbf{A}) = \sum_{\mathbf{c} \in \mathbf{c}_S} Z_c^m(\mathbf{c}|\mathbf{A}),$$

を用いて、次の恒等式から母関数を評価する。

$$\phi(\mu) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial n} \phi_n(\mu) \quad (30)$$

$n, m = \mu/\beta$  が正の整数のとき、 $[\mathcal{Z}^n(\mathbf{A})]_A$  は  $n, nm$  個のレプリカ変数  $\{\mathbf{c}^a\}$  and  $\{\mathbf{c}^a \circ \mathbf{u}^{a\sigma}\}$  ( $a \in \{1, 2, \dots, n\}, \sigma \in \{1, 2, \dots, m\}$ ) に関する和と積分として表現できる。これにより  $N \rightarrow \infty$  の極限で鞍点法を用いると、 $\phi_n(\mu)$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \phi_n(\mu) &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \text{extr}_{\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}} \left\{ -\text{Tr} \mathbf{Q} \hat{\mathbf{Q}}^T + \frac{\alpha}{2} \log \det \left( \frac{\beta \mathbf{Q}}{\alpha} + \mathbf{I} \right) \right. \\ &\quad \left. + \log \int \{d\mathbf{u}^{a\sigma}\} \sum_{\{\mathbf{c}^a\}} \prod_{a\sigma} P(\mathbf{u}^{a\sigma}|\mathbf{c}^a) \exp \left( \sum_{(a,\sigma)(b,\tau)} \hat{q}^{(a,\sigma)(b,\tau)} c^a c^b u^{a\sigma} u^{b\tau} \right) \right\} \end{aligned}$$

$\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{nm \times nm}$  は  $\{q^{(a,\sigma)(b,\tau)}\}$  の行列表示で、 $Q^{(a-1)m+\sigma, (b-1)m+\tau} = q^{(a,\sigma)(b,\tau)}$  とした。 $\hat{\mathbf{Q}}$  も同様である。ここまでの  $\phi_n(\mu)$  は  $n, m \in \mathbb{N}$  について定義されるが、次節の通り仮定を置くことで  $n, m \in \mathbb{R}$  に接続され、(30) が計算される。

### 3.1 レプリカ対称仮定

鞍点がレプリカの置換に対して不変である、という仮定をレプリカ対称 (RS) 仮定と呼ぶ。

$$q^{(a,\sigma)(b,\tau)} = \begin{cases} 1 & \text{for } a = b, \sigma = \tau \\ q_1 & \text{for } a = b, \sigma \neq \tau \\ q_0 & \text{for } a \neq b. \end{cases} \quad (31)$$

RS 仮定下の  $\phi_n(\mu)$  の関数形は次のようになる [14]

$$\phi_n^{\text{RS}}(\mu) = \frac{n\hat{Q}}{2} - \frac{n\hat{q}_1\chi}{2\mu} - \frac{n(\hat{q}_1 - \hat{q}_0q)}{2} - \frac{n^2\hat{q}_0q}{2} + nK\rho + \log \Xi_{\text{RS}} - \frac{\alpha}{2} \left[ n \log \left( \frac{d}{\alpha + \chi} \right) + \log \left( \frac{d + n\mu q}{d} \right) \right] \quad (32)$$

ここで  $d = \alpha + \chi + \mu(1 - q)$ ,  $\Xi_{\text{RS}} = \int Dz W_{\text{RS}}^n(z)$

$$W_{\text{RS}}(z) = 1 + \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Q} - \hat{\Delta}}} \exp \left( -K + \frac{\hat{q}_0 z^2}{2(\hat{Q} - \hat{\Delta})} \right)$$

また  $\hat{\Delta} = \hat{q}_1 - \hat{q}_0$  とした. 変数  $\{\chi, q_0, \hat{Q}, \hat{\Delta}, \hat{q}_0, K\}$  は  $\phi_n^{\text{RS}}(\mu)$  の極値条件を満たすように決める.

RS 自由エントロピー密度は (30), (32) から導出され, これを  $\phi^{\text{RS}}(\mu)$  と表記する. RS 鞍点方程式はいくつかの解をもつが, その一つは  $q = \hat{q}_0 = 0$  である. この解は次の条件が満たされているとき安定である.

$$\frac{\alpha\mu^2\rho^2}{\{\alpha + \chi + \mu\}^2(\hat{Q} - \hat{\Delta})^2} < 1. \quad (33)$$

以下では,  $q = 0$ ,  $q > 0$  の  $\phi_n^{\text{RS}}(\mu)$  をそれぞれ  $\phi_n^{\text{RS1}}(\mu)$  and  $\phi_n^{\text{RS2}}(\mu)$  と表記し, また対応する自由エントロピー密度をそれぞれ  $\phi^{\text{RS1}}(\mu)$ ,  $\phi^{\text{RS2}}(\mu)$  とする.

### 3.2 1 段階レプリカ対称性の破れ

1 段階レプリカ対称性の破れを仮定するには,  $n$  個のレプリカを,  $l$  個のレプリカから成る  $n/l$  個のグループに分ける. 支配的な鞍点はグループ内のレプリカの置換と  $\sigma \in \{1, \dots, m\}$  の置換について不変とする.

$$q^{(a,\sigma)(b,\tau)} = \begin{cases} 1 & \text{for } a = b, \sigma = \tau \\ q_1 & \text{for } a = b, \sigma \neq \tau \\ q_0^1 & \text{for } B(a) = B(b), a \neq b \\ q_0^0 & \text{for } B(a) \neq B(b). \end{cases} \quad (34)$$

ここで  $B(a)$  は  $a$  が属すグループの番号である. この仮定により  $\phi_n(\mu)$  は次のように与えられる.

$$\phi_n^{\text{RSB}}(\mu) = \frac{n\hat{Q}}{2} - \frac{n\hat{q}_1\chi}{2\mu} - \frac{n(\hat{q}_1 - \hat{q}_0^1q_0^1)}{2} - \frac{nl(\hat{q}_0^1q_0^1 - \hat{q}_0^0q_0^0)}{2} - \frac{n^2\hat{q}_0^0q_0^0}{2} + K\rho n + \log \Xi_{\text{RSB}} - \frac{\alpha}{2} \left[ \frac{1}{l} \log \left( \frac{d + \mu l(q_0^1 - q_0^0)}{d} \right) + n \log \left( \frac{d}{\alpha + \chi} \right) + \log \left\{ \frac{d + \mu l(q_0^1 - q_0^0) + \mu n q_0^0}{d + \mu l(q_0^1 - q_0^0)} \right\} \right] \quad (35)$$

ここで  $d = \alpha + \chi + \mu(1 - q_0^1)$ ,  $\Xi_{\text{RSB}} = \int Dz Y_{\text{RSB}}^{n/l}(z)$ ,  $Y_{\text{RSB}}(z) = \int Dy W_{\text{RSB}}^l(y, z)$ ,

$$W_{\text{RSB}}(y, z) = 1 + \sqrt{\frac{\hat{Q}}{\hat{Q} - \hat{\Delta}}} \exp \left( -K + \frac{(\sqrt{\hat{\Delta}_0}y + \sqrt{\hat{q}_0^0}z)^2}{2(\hat{Q} - \hat{\Delta})} \right),$$

また  $\hat{\Delta} = \hat{q}_1 - \hat{q}_0^1$ ,  $\hat{\Delta}_0 = \hat{q}_0^1 - \hat{q}_0^0$  とした. 変数  $\{\chi, q_0^1, q_0^0, \hat{Q}, \hat{q}_1, \hat{q}_0^1, \hat{q}_0^0\}$  は鞍点条件を満たすように決める.

全ての  $n$  について, 鞍点の一つは  $q_0^0 = \hat{q}_0^0 = 0$  である. このとき他の変数は  $n$  に依存せず,  $n = l$  での  $\phi_n^{\text{RS1}}$  の鞍点に対応する. 実際この系では, 解  $(q_0^0, \hat{q}_0^0) \neq (0, 0)$  は見つからないため, 以下ではこの解にのみ着目する. このとき, 自由エントロピー密度は次の関係式を満たす.

$$\phi^{\text{RSB}}(\mu) = \text{extr}_l \{ \phi_l^{\text{RS}}(\mu)/l \} \quad (36)$$

以下では一般の  $l$  について  $\phi_l^{\text{RS}}(\mu)/l$  を  $\phi^{1\text{RSB}}(\mu, l)$  と表記する. また  $\phi_n^{1\text{RSB}}(\mu, l) = n\phi_l^{\text{RS}}(\mu)/l$  である.

(34) より, RS 仮定は 1RSB 仮定の特別な場合であることがわかる. 1RSB 解が存在しない時, 系の挙動を記述するには RS 解で十分であるが, 1RSB 解が現れるシナリオは次の 2 種類が知られている.

- AT 条件

$n \rightarrow 0$  で RS 母関数の鞍点が次の式を満たす時,

$$\frac{\alpha\mu^2}{d^2} \int Dz \left\{ \frac{\hat{\rho}_{\text{RS}}(z)}{\hat{Q} - \hat{\Delta}} \left( \frac{\hat{q}_0 z^2}{W_{\text{RS}}(\hat{Q} - \hat{\Delta})} + 1 \right) \right\}^2 > 1 \quad (37)$$

$(\Delta_0, \hat{\Delta}_0) \neq (0, 0)$  の 1RSB 解が存在する. (37) は de Almeida-Thouless (AT) 条件と呼ばれる [15].

- ランダム一次転移

(34) から,  $l = 1$  で 1RSB 仮定は RS 仮定と一致する. 結果として  $\Delta_0, \hat{\Delta}_0$  によらず  $\phi^{1\text{RSB}}(\mu, l = 1) = \phi^{\text{RS}}(\mu)$  が成立する.  $|\mu|$  が十分小さい時,  $(\Delta_0, \hat{\Delta}_0) = (0, 0)$  は  $\phi^{1\text{RSB}}(\mu, l = 1)$  の極値条件の一意的な解となる. しかし, ある臨界値  $\mu$  で,  $(\Delta_0, \hat{\Delta}_0) \neq (0, 0)$  の解が不連続に現れる. これはランダム一次転移 (random first order transition, RFOT) と呼ばれる [16, 17]. さらに大きい  $\mu$  で, 1RSB 解が大域的に安定になる. これを 1RSB 転移と呼ぶ.

次ステップの RSB (2RSB) では, 1RSB において同じグループに属していた  $l$  個のレプリカが,  $l'$  個のレプリカから成る  $l/l'$  個のサブグループに分けられ, このサブグループ内のレプリカ置換対称性が仮定される. このプロセスを  $k$  回繰り返したものが  $k$ RSB 解で, Full step RSB (FRSB) 解は  $k = \infty$  に対応する [12, 13]. RS 解を 0RSB 解と見なすと, RS 解と 1RSB 解の対応関係と同様に,  $k$ RSB 解は  $(k + 1)$ RSB 解の特殊な場合になっている.  $(k + 1)$ RSB 解が見つからなかった時,  $k$ RSB 解は系の記述について十分であると見なされる. しかし,  $k$  ( $2 \leq k < \infty$ )RSB 解が十分である系は未だ見つからない. そのため経験的に, RS 解が AT 不安定であるときには FRBS 解の構成が必要と考えられている. 一方で RFOT が起きた時は, ある  $\mu$  領域では 1RSB 解が十分であるが, より大きい  $|\mu|$  で 1RSB 解が AT 不安定化し, FRSB 解の構成が必要となることもある. これは Gardner 転移と呼ばれる [18].

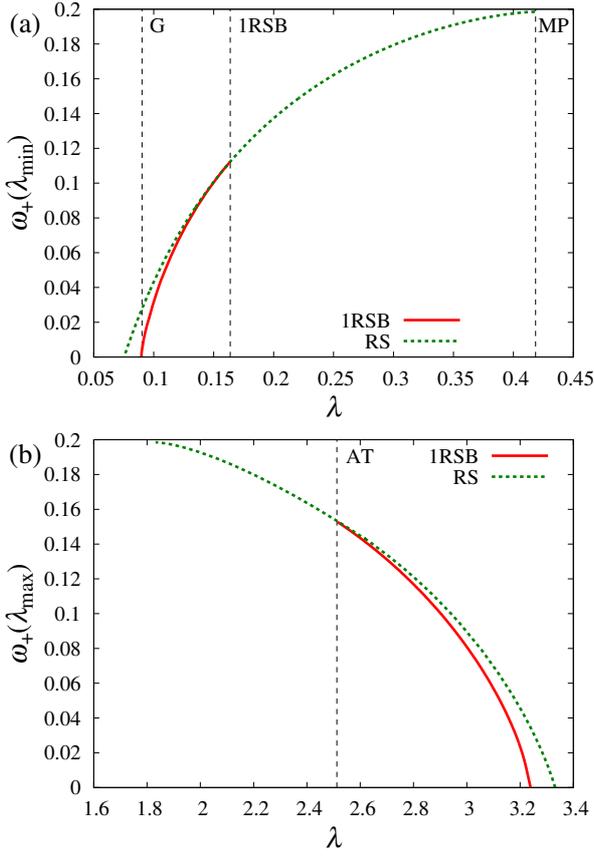


図 1:  $\alpha = 0.4, \rho = 0.05$  におけるエントロピー曲線. (a) は最小固有値, (b) は最大固有値.

## 4 結果

### 4.1 RS, 1RSB のエントロピー

図 1 は RS 仮定, 1RSB 仮定の下で導出されたエントロピー曲線である. 最小固有値側 (a) では RFOT, 1RSB 転移, Gardner 転移が起き, 最大固有値側 (b) では AT 不安定性が現れる. 1RSB エントロピーは, RS エントロピーの内側に入ることがわかる. また MP として示されている  $\mu \rightarrow +0, \mu \rightarrow -0$  での  $\lambda$  の値は,  $M \times S$  のガウスランダム行列に対する Marchenko-Pastur (MP) 分布の値域の最小値と最大値に対応する [19].

図 2 は, RS, 1RSB 仮定下での RIC と Bah-Tanner の上界, 数値的に得られた下界の比較である [6, 20]. 我々の結果は特に大きい  $\rho/\alpha$  において上界をタイトにする. また全領域で, 数値的に得られた下界と整合性を持つ.

### 4.2 上界評価と RSB の関係

図 1 のように RSB を考慮するとエントロピーが内側に入り, 結果として RIC の上界がタイトになるが, これは物理的描像から説明することができる. より一般に,  $k$ RSB RIC は  $k + 1$ RSB RIC の上界となることを示すことができる.

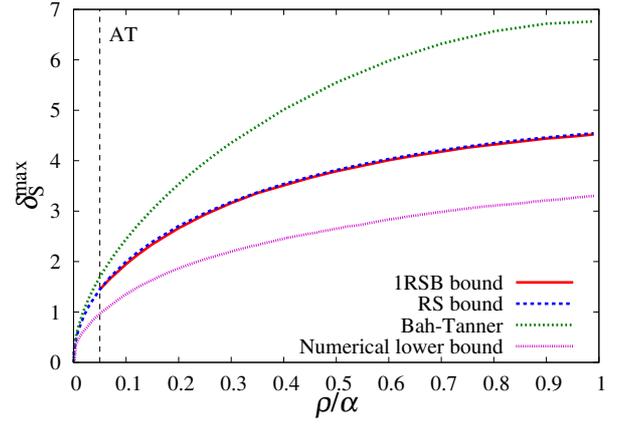


図 2:  $\alpha = 0.5$  での RIC の  $\rho/\alpha$  依存性.

一般に, 大自由度極限  $N \rightarrow \infty$  で得られるシステムの状態は全体と比較して無視し得る少数の変数に関する境界条件に依存して複数存在し得る. 各極限は純状態と呼ばれる. 例えば強磁性模型では, 力学変数  $\sigma$  の分布関数  $p_{\text{ferro}}(\sigma)$  が逆温度  $0 < \beta < 1$  では一つの純状態に収束するのに対し,  $\beta > 1$  ではそれぞれプラスとマイナスの磁化により特徴づけられる 2 つの純状態が出現する. RSB は指数関数個の純状態の出現として捉えられる.

以下では簡単のため  $\mu > 0$  のみを考えるが,  $\mu < 0$  でも同じ議論が可能である. 純状態を  $\gamma$  でラベルづけ, 純状態内の自由エントロピー密度を  $\phi_\gamma(\mu|\mathbf{A})$  とする. 純状態内のエネルギー  $\lambda_\gamma(\mu|\mathbf{A}) = -\frac{\partial \phi_\gamma(\mu|\mathbf{A})}{\partial \mu}$  とエントロピー密度  $s_\gamma(\mu|\mathbf{A}) = \hat{\phi}_\gamma(\mu|\mathbf{A}) + \mu \lambda_\gamma$  を導入すれば  $\hat{\phi}_\gamma(\mu|\mathbf{A}) = -\mu \lambda_\gamma(\mu|\mathbf{A}) + s_\gamma(\mu|\mathbf{A})$  と表記できる. 純状態が指数関数個ある場合, complexity と呼ばれる次の関数は  $N \rightarrow \infty$  で有限となる.

$$\Sigma(\lambda, s; \mu|\mathbf{A}) = \frac{1}{N} \log \sum_{\gamma} \delta(\lambda_\gamma(\mu|\mathbf{A}) - \lambda) \delta(s_\gamma(\mu|\mathbf{A}) - s) \quad (38)$$

定義より, complexity は  $\mu$  に依存する定義域  $s \in [s_L, s_U]$  において有限・非負で, それ以外の領域では負に発散する. complexity を用いると自由エントロピー密度は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \phi(\mu|\mathbf{A}) &= \frac{1}{N} \log \sum_{\gamma} e^{N \phi_\gamma(\mu|\mathbf{A})} \\ &= \frac{1}{N} \log \int d\lambda ds e^{N(-\mu\lambda + s + \Sigma(\lambda, s; \mu|\mathbf{A}))} \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} \max_{\lambda, s} \{-\mu\lambda + s + \Sigma(\lambda, s; \mu|\mathbf{A})\} \quad (39) \end{aligned}$$

これを (27) と比較すると, 次の式が得られる.

$$\omega_+(\lambda(\mu)|\mathbf{A}) = \max_s \{s + \Sigma(\lambda, s; \mu|\mathbf{A})\}. \quad (40)$$

残念ながら, complexity を直接評価することは難しい. ところが RIC 評価と類似した例に対し, complexity

は 1RSB 自由エネルギーとルジャンドル変換によって結びつくことが示されている [21, 22]. この関係が RIC 評価にも適用できると仮定すると,

$$\Sigma(\lambda(\mu, x), s(\mu, x); \mu | \mathbf{A}) = -x^2 \frac{\partial \phi^{\text{RSB}}(\mu, x | \mathbf{A})}{\partial x} \quad (41)$$

にもとづき  $x \in \mathbb{R}$  を媒介変数とすることで complexity を評価することができる. ただし  $\phi^{\text{RSB}}$  は鞍点評価によって求められているため, 仮定した鞍点の妥当性を別途検討する必要がある.

(40) は,  $l = 1$  を代入した 1RSB 解によって  $\omega_+$  が得られることを意味する. この解は一般に RS 解の評価と一致する.  $\mu > 0$  が比較的小さい時, この評価に不都合は生じない. しかし  $\mu > \exists \mu_c (> 0)$  に対し, 鞍点解を (41) に代入することにより得られる complexity は負値になる. 一方, 定義 (38) から complexity は非負でなければならない. このことは,  $N \rightarrow \infty$  によって complexity 関数に  $s > s_U$  において ( $s < s_L$  においても)  $\Sigma = -\infty$  となるように解析性の破れが生じていることを示唆している. これを数式で表現すると

$$\omega_+^{\text{RS}}(\lambda(\mu)) = \max_s \{s + \Sigma(\lambda, s; \mu | \mathbf{A})\} \quad (42)$$

$$\omega_+^{\text{1RSB}}(\lambda(\mu)) = \max_{s \in [s_L, s_U]} \{s + \Sigma(\lambda, s; \mu | \mathbf{A})\} \quad (43)$$

となる. 領域制約から,  $\omega_+^{\text{RS}} \geq \omega_+^{\text{1RSB}}$  が結論づけられる.

$\mu \geq \mu_c$  では, 1RSB 解を記述する純状態内で更に指数関数個の純状態が生じる場合がある. これは 2RSB に対応する. 上記の議論は純状態内の純状態に対しても適用可能であり, これらに対して complexity を導入することで不等式  $\omega^{\text{1RSB}}(\lambda) \geq \omega^{\text{2RSB}}(\lambda)$  を得る. 同様の議論を繰り返すと,  $k$ RSB までの転移が起きるとき, エントロピー密度に関して次の不等式が得られる.

$$\omega^{\text{RS}}(\lambda) \geq \omega^{\text{1RSB}}(\lambda) \geq \dots \geq \omega^{\text{kRSB}}(\lambda) \quad (44)$$

したがって,  $\lambda_{\min}^*(\mathbf{A}, S)$  と  $\lambda_{\max}^*(\mathbf{A}, S)$  の厳密な値が,  $k = \infty$  を含む  $k$ RSB 解により得られるとき,  $j (< k)$ RSB 解による値は下界・上界としての意味を持ち, その近似精度は  $j$  が  $k$  に近づくほど改善される.

## 5 まとめ

本研究では, 制限等長定数 (RIC) を統計力学的手法を用いて評価した. ガウスランダム行列では, RS 解でも既存の上界より精度の良い見積もりを与えることができた. 上界評価は 1RSB 解の構成により改善されることを示し, また高階の RSB を考慮することで上界評価がタイトになることを示した.

提案手法は, ガウスランダム行列以外にも適用可能である. 様々な観測行列において RIC を評価すること

で, 効率的な観測方法の指針を与え, RIC 評価における 1RSB・FRSB の起源が明らかになると考える.

## 参考文献

- [1] H. Nyquist, Trans. AIEE **47**, 617 (1928).
- [2] D. D. Lustig and J. Pauly, Magnet. Reson. Med. **58** (6), 1182–1195 (2007).
- [3] J. Bobin et al., IEEE J. Sel. Top. Signal Process. **2** (5), 718–726 (2008).
- [4] E. Candès et al., IEEE Trans. Inform. Theory **52** (2), 489–509 (2006).
- [5] D. Donoho, IEEE Trans. Inform. Theory **52** (4), 1289–1306 (2006).
- [6] E. Candès and T. Tao, IEEE Trans. Inform. Theory **51** (12), 4203–4215 (2005).
- [7] S. Foucart and M.-J. Lai, Appl. Comput. Harmon. Anal. **26** (3), 395–407 (2009).
- [8] J. D. Blanchard et al., SIAM Rev. **53** (1), 105–125 (2011).
- [9] B. Bah, and J. Tanner, SIAM J. Matrix Anal. & Appl. **31** (5), 2882–2898 (2010).
- [10] M. Ledoux, Mathematical Surveys and Monographs, **89** (2001).
- [11] A. Edelman, SIAM J. Matrix Anal. Appl. **9** (4): 543–560 (1988).
- [12] M. Mézard et al., *Spin Glass Theory and Beyond*, (World Sci. Pub., 1987).
- [13] H. Nishimori, *Statistical Physics of Spin Glasses and Information Processing: An Introduction*, (Oxford Univ. Pr., 2001).
- [14] A. Sakata and Y. Kabashima, IEEE ISIT Proceedings. p2006 (2015).
- [15] J. R. L. de Almeida and D. J. Thouless, J. Phys. A: Math. Gen. **11** (5), 983–990 (1978).
- [16] A. Montanari and G. Semerjian, J. Stat. Phys. **125** (1), 23–54 (2006)
- [17] L. Zdeborova and F. Krzakala, Phys. Rev. E, **76** (3), 031131 (2007)
- [18] E. Gardner, Nucl. Phys. B **257** 747–765 (1985).
- [19] V. A. Marchenko and L. A. Pastur, Mat. Sb. (N. S.) **72** (114), 507–536 (1967).
- [20] C. Dossal et al., Linear Algebra Appl. **432**, 1663–1679 (2010).
- [21] A. Cavagna et al., J. Phys. A: Math. Gen. **36** (5), 1175–1194 (2003)
- [22] T. Obuchi, arXiv:1508.05225.