マルチンゲール理論の基礎

西山陽一
(統計数理研究所)
nisiyama@ism.ac.jp

2007 年 9 月*

本稿は、2007 年 5 月に東京大学経済学部において 2 回にわたって行った講義のノートに若干の加筆をしたものである。内容は、測度論的確率論の知識を前提とした上で、条件付き期待値の復習から入り、マルチンゲールの定義、予測可能性、有界変動性、Doob-Meyer 分解定理、二次変分の解説をし、確率積分と伊藤の公式の紹介をしたものである。伊藤の公式の応用として、マルチンゲール中心極限定理のひとつの証明を与え、その応用として拡散過程の母数推定（最尤推定量の漸近正規性）を扱っている。

マルチンゲール理論は本来、通年の講義で扱うべき広く深い理論である。それを 2 回（計 3 時間）で解説したわけであるから、証明はほとんど省略せざるをえなかった。同じ理由で、本稿も「レジュメ」と呼ぶべきものとなり、数学的にはまったく不完全なものとなった。しかしながら、マルチンゲール理論を詳細に扱った良書は既にたくさん出版されている。そういった中で、本稿は同理論のエキスのみを抽出したパンフレットのようなものを敢えて目指した。より深い研究のための道しるべとなれば幸いである。

最後に、同講義は研究会「保険と金融の統計学」の一環として行ったものであり、このような機会を与えてくださった国友直人教授（東京大学）と川崎能典准教授（統計数理研究所）に感謝したい。

1　条件付き期待値

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする。$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族 $\mathcal{G}$、すなわち

$$\{\phi, \Omega\} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$$

が与えられたとする。

定理 1 X が $\mathcal{F}$-可測な実数値可積分確率変数であるとき、ある $\mathcal{G}$-可測な実数値可積分確率変数 $E[X|\mathcal{G}]$ であって

$$\int_G E[X|\mathcal{G}]dP = \int_G XdP \quad \forall G \in \mathcal{G}$$

をみたすものが一意的に存在する。この $E[X|\mathcal{G}]$ のことを $\mathcal{G}$ が与えられたもとでの X の**条件付き期待値**とよぶ。

特に $\mathcal{G} = \{\phi, \Omega\}$ であるとき $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ である。

*本稿は、2011 年 12 月に若干の改訂をしました。ちなみに、本稿を膨らませた著書『マルチンゲール理論による統計解析』が近代科学社より発売中です（xiv+168 頁）。

特に $\mathcal{G}=\mathcal{F}$ であるとき $E[X|\mathcal{G}]=X$ である。

一般には X をよりシンプルな確率変数に近似したものが $E[X|\mathcal{G}]$ であると解釈すればよい。$\mathcal{G}$ が貧弱な σ-加法族であるときには $E[X|\mathcal{G}]$ は階段関数に近いようなシンプルな形をしており、$\mathcal{G}$ が豊富な σ-加法族であるときには $E[X|\mathcal{G}]$ は情報をたくさんもった複雑な形をしている。

2　確率基、適合過程、マルチンゲール

$(\Omega,\mathcal{F},P)$ を確率空間とする。**フィルトレーション** $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ とは $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族が時間パラメータ $t\in[0,\infty)$ によって系列になっているものであって、右連続かつ増加するものであるとする。ただし「右連続」は本稿の範囲内ではあまり気にする必要はない。また「増加」とは

$$\mathcal{F}_s\subset\mathcal{F}_t \quad \text{for} \quad s\le t$$

を意味するものとする。このとき、四つ組

$$(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)},P)$$

を**確率基**とよぶ。

実数値確率過程 $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ が $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ に**適合**しているとは、各 $t\in[0,\infty)$ に対し X_t が $\mathcal{F}_t$-可測であることをいう。この性質は、X_t が時刻 t までの情報のみによって定まる確率変数であることを意味する。

マルチンゲールを定義するためには必ず確率基を用意し、適合過程の概念を思い出さなければならない。

定義 2 右連続かつ左極限をもつ適合過程 $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ に対し

$$(1)\quad X_s=E[X_t|\mathcal{F}_s]\quad a.s.\ for\quad s\le t$$

$$(2)\quad X_s\le E[X_t|\mathcal{F}_s]\quad a.s.\ for\quad s\le t$$

$$(3)\quad X_s\ge E[X_t|\mathcal{F}_s]\quad a.s.\ for\quad s\le t$$

を考える。*(1)* のとき**マルチンゲール**といい、*(2)* のとき**劣マルチンゲール**といい、*(3)* のとき**優マルチンゲール**という。

劣マルチンゲールと優マルチンゲールは、なんとなく用語が逆のような気がするかもしれないが、なぜかこうよばれている。

面白い例は後に述べることにして、とりあえず簡単な例を挙げる。$t\mapsto M_t$ がマルチンゲールであるとき、

$$\begin{aligned} X_t &= t+M_t && \text{は劣マルチンゲールであり、}\\ X_t &= -t+M_t && \text{は優マルチンゲールであるが、}\\ X_t &= \sin t+M_t && \text{はいずれでもない。}\end{aligned}$$

しかし、最後のものも含めて、いま挙げた例は全て**半マルチンゲール**である。半マルチンゲールの正確な定義は後に述べるが、先走って簡単に言うと

$$X_t = \text{有界変動適合過程} + \text{マルチンゲール}$$

の形に表されるもののことである。

では最も重要な例を2つ挙げる。一つ目は**ウィナー過程**である。

定義 3 $t \mapsto W_t$ が以下の2条件を満たすとき、標準ウィナー過程であるという：
(1) 確率 1 で、$W_0 = 0$ および $t \mapsto W_t$ が連続である。
(2) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *(*n は任意の自然数*)* に対して $\{W_{t_i} - W_{t_{i-1}}\}_{i=1}^n$ は互いに独立であり、それぞれ $N(0, t_i - t_{i-1})$ に従う。

命題 4 $t \mapsto W_t$ が標準ウィナー過程であるとき、自然なフィルトレーションのもとで、

$$X_t = W_t$$

はマルチンゲールであり、

$$X_t = W_t^2 - t$$

もマルチンゲールである。

注意 この命題を示すだけなら、確率解析の難しい道具を使う必要は全くなく、いまの時点で証明することもできる。しかしながら、本稿の目標はマルチンゲール理論の見通しの良い統一的な扱いを紹介することである。よって、上記の命題は、もっと話を一般化して覚えやすい公式の形にして述べる。

二つ目の例は**ポアソン過程**である。

定義 5 $t \mapsto N_t$ が以下の2条件を満たすとき、強度 λ のポアソン過程であるという：
(1) 任意の $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *(*n は任意の自然数*)* に対して $\{N_{t_i} - N_{t_{i-1}}\}_{i=1}^n$ は互いに独立である。
(2) $s < t$ に対して $N_t - N_s$ はパラメータ $\lambda(t-s)$ のポアソン分布に従う。

命題 6 $t \mapsto N_t$ が強度 λ のポアソン過程であるとき、自然なフィルトレーションのもとで、

$$X_t = N_t - \lambda t$$

はマルチンゲールであり、

$$X_t = (N_t - \lambda t)^2 - \lambda t$$

もマルチンゲールである。

注意 やはり、この命題の覚え方は後で述べる。

3　局所●●って何？

マルチンゲール理論を勉強されたことのある方なら、「停止時刻」に基づいた「局所●●」の概念に出会って戸惑われたことがあるかもしれない。なぜこのような概念が必要なのかを説明しよう。とりあえずその概念の定義を述べる。

定義 7 停止時刻とは、写像 $T : \Omega \to [0, \infty]$ であって $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が任意の $t \geq 0$ に対して成り立つようなもののことである。

定義 8 $\mathcal{C}$ が確率過程の族であるとき、**局所化された族**を次のように定義し $\mathcal{C}_{loc}$ と表す: $X \in \mathcal{C}_{loc}$ であるのは、停止時刻の増大列 (T_n) であって確率 1 で $T_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ が成り立ちかつ $t \mapsto X_{t \wedge T_n}$ が $\mathcal{C}$ に属するものが存在するときにいう。

例で説明しよう。適合増加過程 $t \mapsto A_t$ が**可積分**であるとは $EA_\infty < \infty$ が成り立つときにいう。この定義によると、ポアソン過程は可積分ではない：$EN_\infty = \infty$。そこで**局所可積分**という概念を導入したい。ひとつの自然な定義は

$$EN_t < \infty \quad \forall t > 0$$

であると思われるかもしれない。確かに、ポアソン過程の場合 $EN_t = \lambda t < \infty$ である。しかし、強度 λ が定数でなく確率過程 $\lambda_t(\omega)$ であるような場合（つまり、一般の**計数過程**である場合）には $EN_t = E \int_0^t \lambda_s ds$ が有限であるかどうかは明らかではない。ところが「局所●●」の定義を上述のように与えておけば、停止時刻 T_n を

$$T_n = \inf\{t \geq 0 : N_t \geq n\}$$

にとっておくだけで容易に局所可積分であることがチェックできる。実際、

$$E(N_{\infty \wedge T_n}) = E(N_{T_n}) \leq n < \infty$$

つまり局所●●とは、「各 t に対し X_t が●●を満たす」という概念を緩めて、「停止時刻の増大列 T_n に対し X_{T_n} が●●を満たす」という概念にまで一般化させたものである。

4　$\varphi(M)$ は劣マルチンゲール

次の命題は後に重要になる。特に $\varphi(x) = x^2$ の形で繰り返し用いることになる。

命題 9 M はマルチンゲールであるとし、$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は下に凸であるとする。可積分性の条件のもとで、$\varphi(M)$ は劣マルチンゲールになる。

証明：下に凸な関数は連続であるから、$\varphi(M_t)$ は $\mathcal{F}_t$-可測である。条件付き期待値に対するイェンセンの不等式より、全ての $s \leq t$ に対し

$$\varphi(E[M_t|\mathcal{F}_s]) \leq E[\varphi(M_t)|\mathcal{F}_s]$$

が成り立つ。M がマルチンゲールであることから左辺の $\varphi(\cdot)$ の中身は確率１で M_s に等しい。すなわち、

$$\varphi(M_s) \leq E[\varphi(M_t)|\mathcal{F}_s]$$

であり、$\varphi(M)$ は劣マルチンゲールである。 □

5 予測可能性と有界変動性

マルチンゲール理論を展開するにあたって最も基本的な概念は「予測可能 (predictable) 性」と「有界変動性」である。これなくしては、Doob-Meyer 分解定理も語れない。

5.1 予測可能性

定義 10 予測可能 σ-加法族とは、$\Omega \times [0,\infty)$ 上の σ-加法族 $\mathcal{P}$ であって、全ての左連続適合過程によって生成されるもののことである。

丁寧に言えば次のようになる。まず左連続適合過程 $t \mapsto X_t$ をひとつとってきて、これを $\Omega \times [0,\infty)$ 上で定義された実数値関数 $(\omega, t) \mapsto X_t(\omega)$ と見なす。これに対し、$\Omega \times [0,\infty)$ の部分集合族 $\mathcal{A}_X$ を

$$\mathcal{A}_X = (\{(\omega, t) : X_t(\omega) \in B\} : B \in \mathbf{B}(\mathbb{R}))$$

によって定義する。この操作を全ての左連続適合過程 X について行い、それを含む最小の σ-加法族を $\mathcal{P}$ とおく：

$$\mathcal{P} = \sigma(\mathcal{A}_X : X \text{ は左連続適合過程})$$

お分かりのように、予測可能 σ-加法族 $\mathcal{P}$ の定義の中には適合性の概念を要請している。つまり、フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty)}$ が与えられることによってはじめて定まるものである。

定義 11 確率過程 $t \mapsto X_t$ が予測可能であるとは、それを $\Omega \times [0,\infty)$ 上で定義された実数値関数と見たときに $\mathcal{P}$-可測であるときにいう。

実用上は次の２つの事実を覚えておけば十分である：
(1) 左連続適合過程は予測可能である。よって連続適合過程はもちろん予測可能である。
(2) ランダムでない（ω に依存しない）確率過程は予測可能である。

5.2 有界変動性

有界変動性の概念は、ランダム性とは関係なく、単なる実数値関数に対して定義されるものである。

定義 12 関数 $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ が有界変動であるとは、それが 2 つの単調増加関数 F_+, F_- の差として表されるときにいう：$F(t) = F_+(t) - F_-(t)$

ここで有界変動関数に関するルベーグ・スティルチェス積分 $\int_0^T \varphi(t)dF(t)$ の定義を思い出しておこう。

有界変動関数 F が与えられたとき、まずそれを上述のように $F = F_+ - F_-$ と分解する。そして F_+ に対して $\int_0^T \varphi(t)dF_+(t)$ を次のように定義する：分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ をとり、$\xi_i \in (t_{i-1}, t_i]$ をとり、

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\xi_i)[F_+(t_i) - F_+(t_{i-1})]$$

とおく。そして分点を細かくとって $n \to \infty$ としたときの極限をとる：

$$\int_0^T \varphi(t)dF_+(t) := \lim_{n\to\infty} S_n$$

同様にして $\int_0^T \varphi(t)dF_-(t)$ を定義し、最終的に

$$\int_0^T \varphi(t)dF(t) := \int_0^T \varphi(t)dF_+(t) - \int_0^T \varphi(t)dF_-(t)$$

と定義する。厳密には、極限が分点の取り方に依らないことを示さなければならない。

さて、ランダムな世界に話を戻そう。確率過程 $t \mapsto X_t$ が有界変動であるとは、全ての $\omega \in \Omega$ に対して、$t \mapsto X_t(\omega)$ が任意の $T > 0$ に対し有界区間 $[0,T]$ 上で有界変動関数であるときにいう。この場合、さらにもう一つ適合過程 $t \mapsto H_t$ が与えられたとき、確率積分 $H \bullet X_t$ を次のように定義する：

$$H \bullet X_t(\omega) := \int_0^t H_s(\omega)dX_s(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega$$

注意： 連続関数は有界変動であるとは限らない。実際、ウィナー過程 $t \mapsto W_t(\omega)$ は確率 1 で有界変動ではない。よって

$$H \bullet W_t(\omega) = \int_0^t H_s(\omega)dW_s(\omega)$$

というような**安直な定義はできない**。だから後に述べるような**確率積分**を定義する必要があるのである。

なお、予測可能性と有界変動性の重要性を先走って説明しておく。後に述べる Doob-Meyer 分解定理の系として「予測可能かつ有界変動なマルチンゲールは 0 に限られる」ということが出てくる。これ自体、美しい結果である。すなわち、予測可能であるが有界変動でないマルチンゲールの例はいくらでも存在する。例えばウィナー過程がそうである。一方、予測可能ではないが有界変動であるマルチンゲールの例も存在する。例えば計数過程の残差マルチンゲールがそうである。ところが、予測可能性と有界変動性の両方を併せもつマルチンゲールは 0 という自明な例しか存在しないわけである。

6　さまざまなマルチンゲールとクラスD

抽象的な説明になるが、マルチンゲールのさまざまなバリエーションと「クラスD」について結果のみまとめておく。クラスDは次の節でDoob-Meyer 分解定理を述べるために必要な概念である。

マルチンゲール X が一様可積分であるとは、

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{t\in[0,\infty)} E|X_t|1_{\{|X_t|>K\}}=0$$

であるときにいい、その全体を $\mathcal{M}$ と書く。$\mathcal{M}_{loc}$ の元のことを局所マルチンゲールという。

マルチンゲール X が二乗可積分であるとは、

$$\sup_{t\in[0,\infty)} E|X_t|^2<\infty$$

であるときにいい、その全体を $\mathcal{H}^2$ と書く。$\mathcal{H}^2_{loc}$ の元のことを局所二乗可積分マルチンゲールという。

確率過程 X がクラスDに属するとは

$$\lim_{K\to\infty}\sup_{T} E|X_T|1_{\{|X_T|>K\}}=0$$

が成り立つときにいう。ただし $\sup_T$ は全ての有限停止時刻 T でとる。

これらの間には次のような関係がある。

定理 13 *(a)* マルチンゲールは局所マルチンゲールである。つまり $\mathcal{M}\subset\{$ マルチンゲール $\}\subset\mathcal{M}_{loc}$
(b) 一様可積分マルチンゲールはクラスDに属する。つまり $\mathcal{M}\subset$ クラスD
(c) 局所マルチンゲールが一様可積分であるための必要十分条件はそれがクラスDに属することである。つまり $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{loc}\cap$ クラスD

7　Doob の不等式と Doob-Meyer 分解定理

我々の最終目標は伊藤の公式であるが、そのためには二次変分を定義する必要がある。二次変分の一意的存在を示すためにはDoob-Meyer 分解定理を用いる。Doob-Meyer 分解定理の仮定をチェックするために、Doob の不等式が有用となる。

7.1 Doob の不等式

定理 14 (Doob の不等式) X が二乗可積分マルチンゲールであるとき

$$E\left(\sup_{t\in[0,\infty)} X_t^2\right) \leq 4 \sup_{t\in[0,\infty)} E(X_t^2) = 4E(X_\infty^2)$$

Doob の不等式で著しいのは、左辺において $\sup_{t\in[0,\infty)}$ が積分の中に入っている点である。その量が右辺のように $\sup_{t\in[0,\infty)}$ が積分の外にあるという扱いやすいもので押さえられているのが便利なのである。

7.2 Doob-Meyer 分解定理

まず単調増加過程はもちろん有界変動であることを思い出しておこう。

定理 15 (Doob-Meyer 分解定理) クラスDに属する劣マルチンゲール X に対し、単調増加可積分予測可能過程 A であって $A_0 = 0$ かつ $X - A$ が一様可積分マルチンゲールとなるようなものが一意的に存在する。

ラフに言えば、X がよい可積分性をもつ劣マルチンゲールであるとき、

$$X = A + M$$

と分解できる。ただし A は単調増加（よって有界変動）かつ予測可能で、M はよい可積分性をもつマルチンゲール。もっとラフにいえば

$$\text{劣マルチンゲール} = \text{単調増加トレンド} + \text{マルチンゲール}$$

ということである。

なお、トレンド + マルチンゲールへの分解自体は一意的ではない。Doob-Meyer 分解定理のポイントは、トレンドの部分が予測可能かつ有界変動であると仮定した瞬間、分解が一意的になる、という点である。そのことは、次の系をみるとはっきりする。

系 16 原点を出発する局所マルチンゲールであって予測可能かつ有界変動であるものは、0 に限られる。

この結果については、5 節の末尾で述べた説明を思い出して欲しい。

例 17 $t \mapsto W_t$ が標準ウィナー過程であるとき $t \mapsto W_t^2 - t$ はマルチンゲールとなると先に予告した。イェンセンの不等式から $t \mapsto W_t^2$ は劣マルチンゲールである。よって *Doob-Meyer* 分解 $W^2 = A + M$ が可能である訳であるが、その $t \mapsto A_t$ がこの場合ランダムでない関数 $A_t = t$ となるのである。

さて、次の系は単調増加過程に対する予測可能カンペンセイターの存在を保証するものである。

系 18 X は単調増加局所可積分過程であるとする。このとき、原点を出発する**予測可能**単調増加局所可積分過程 X^p であって $X - X^p$ が局所マルチンゲールとなるようなものが一意的に存在する。

この X^p のことを X の予測可能カンペンセイターとよぶ。

例 19 $t \mapsto N_t$ は整数値単調増加局所可積分過程であって $N_0 = 0$ かつ $N_t - N_{t-} \leq 1$ であるものであるとする。このとき、原点を出発する**予測可能**単調増加局所可積分過程 $t \mapsto A_t$ であって $N - A$ が局所マルチンゲールとなるようなものが一意的に存在する。このような N を**計数過程**とよび、それに対応する A を**予測可能カンペンセイター**とよぶ。この A がルベーグ測度に関して絶対連続であるとき、すなわち

$$A_t(\omega) = \int_0^t \lambda_s(\omega) ds$$

と書けるとき、$t \mapsto \lambda_t$ のことを**強度**とよぶ。強度は増加のトレンドの微係数である。

8 二次変分

いままで Doob の不等式と Doob-Meyer 分解定理を見てきたが、それらを組み合わせることによって、局所二乗可積分マルチンゲールの二次変分の一意的な存在が証明できる。

定理 20 M が局所二乗可積分マルチンゲールであるとき、原点を出発する単調増加（よって有界変動）予測可能過程 $t \mapsto \langle M, M \rangle_t$ であって $M^2 - \langle M, M \rangle$ が局所マルチンゲールとなるものが一意的に存在する。

証明の概略： 局所化したものに対して、まずイェンセンの不等式から $t \mapsto M_t^2$ が劣マルチンゲールであることを示し（命題 9）、また Doob の不等式からそれがクラスDに属することを示す。そうすると Doob-Meyer 分解定理が適用できて $\langle M, M \rangle$ の一意的な存在がいえる。 □

定理 21 M, N が局所二乗可積分マルチンゲールであるとき、原点を出発する有界変動予測可能過程 $t \mapsto \langle M, N \rangle_t$ であって $MN - \langle M, N \rangle$ が局所マルチンゲールとなるものが一意的に存在する。

証明の概略：

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{4}(\langle M+N, M+N \rangle - \langle M-N, M-N \rangle)$$

とおけばよい。右辺は前述の定理によって定義できている。 □

二次変分は次のように解釈するのがよい。

局所二乗可積分マルチンゲール M が与えられたとき、$\langle M \rangle = \langle M, M \rangle$ は**条件付き分散**であって、予測可能かつ有界変動であるものである。

局所二乗可積分マルチンゲール M, N が与えられたとき、$\langle M, N\rangle$ は**条件付き共分散**であって、予測可能かつ有界変動であるものである。

最初の方で挙げた命題 4, 6 は、次のように覚えておくのがよい。

例 22 *(a)* W が標準ウィナー過程であるとき

$$\langle W, W\rangle_t = t$$

(b1) N が強度 λ のポアソン過程であるとき、$M_t = N_t - \lambda t$ は局所二乗可積分マルチンゲールであって

$$\langle M, M\rangle_t = \lambda t$$

(b2) より一般に、N が強度 $t \mapsto \lambda_t(\omega)$ の計数過程であるとき、$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ は局所二乗可積分マルチンゲールであって

$$\langle M, M\rangle_t(\omega) = \int_0^t \lambda_s(\omega) ds$$

9 確率積分

いよいよ確率積分の説明に入る。使いこなせるようになるのが本稿の主目標であるから、(1) まず「初等確率過程」に対する確率積分の定義を行い、(2) 次に一般の予測可能過程に対する確率積分の性質を敢えて先にリストアップし、(3) 最後に一般の予測可能過程に対する確率積分の構成についての少し詳しい説明をする。

9.1 初等確率過程に対する確率積分の定義

まず

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^{k} Y_{i-1}(\omega) 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

の形をした確率過程を考える。ただし $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$ は $[0, \infty)$ の分点で、各 Y_i は $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測で有界なものである。このような確率過程を**初等確率過程**とよび、その全体を $\mathcal{L}_0$ と表すことにする。初等確率過程は予測可能過程の特別な場合である。

二乗可積分マルチンゲール M が与えられたときに、各 $t \in [0, \infty)$ に対し $t_l \le t < t_{l+1}$ となる l を選び、

$$I(H)_t(\omega) = \sum_{i=1}^{l} Y_{i-1}(\omega)(M_{t_i} - M_{t_{i-1}}) + Y_l(\omega)(M_t - M_{t_l})$$

と定義する。これに対し次が成り立つ。

補題 23 $I(H)$ は二乗可積分マルチンゲールであり、

$$\langle I(H), I(H)\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s$$

この事実により、$I(H)$ のことを H の M に関する確率積分とよび、

$$H \bullet M_t = \int_0^t H_s dM_s := I(H)_t(\omega)$$

と書く。

確率積分は H が予測可能過程で M が局所マルチンゲールである状況まで一般化できる。

9.2 確率積分の性質

以下 H, K は適当な可積分性をもつ予測可能過程で、M, N は二乗可積分マルチンゲールであるとする。このとき、次の諸性質が成り立つ。

定理 24 *(1)* $t \mapsto H \bullet M_t$ は二乗可積分マルチンゲール
(2) $(aH + bK) \bullet M = a(H \bullet M) + b(K \bullet M)$
(3) M が有界変動ならば $H \bullet M$ も有界変動
(4) $\Delta(H \bullet M) = H \Delta M$
(5) $K \bullet (H \bullet M) = (KH) \bullet M$
(6) $\langle H \bullet M, K \bullet N \rangle = (HK) \bullet \langle M, N \rangle$
最後の公式 *(6)* は特に重要であるからもうひとつの記法でも書いておこう：

$$\left\langle \int_0^\cdot H_s dM_s, \int_0^\cdot K_s dN_s \right\rangle_t = \int_0^t H_s K_s d\langle M, N \rangle_s$$

ここは急所であるから、もう一度繰り返しておこう。X_t が二乗可積分マルチンゲールであるとき、その二次変分とは $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ がマルチンゲールとなるような予測可能単調増加可積分過程 $t \mapsto \langle X \rangle_t$ のことであった。その計算例を 2 つ示そう。

例 25 (ウィナー過程) W を標準ウィナー過程とし、確率積分

$$X_t^{(i)} = \int_0^t H_s^{(i)} dW_s, \quad i = 1, 2$$

を考える。$M = W$ とみなす。例 *22 (a)* より

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t ds \quad \text{よって} \quad d\langle M \rangle_s = ds$$

であるから、$X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ の二次変分は

$$\begin{aligned} \langle X^{(1)}, X^{(2)} \rangle_t &= \int_0^t H_s^{(1)} H_s^{(2)} d\langle M \rangle_s \\ &= \int_0^t H_s^{(1)} H_s^{(2)} ds \end{aligned}$$

例 26 (計数過程) 確率積分

$$X_t^{(i)} = \int_0^t H_s^{(i)} (dN_s - \lambda_s ds), \quad i = 1, 2$$

を考える。$M_t = N_t - \int_0^t \lambda_s ds$ とみなす。例 *22 (b2)* より

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t \lambda_s ds \quad \text{よって} \quad d\langle M \rangle_s = \lambda_s ds$$

であるから、$X^{(1)}$ と $X^{(2)}$ の二次変分は

$$\begin{aligned}\langle X^{(1)}, X^{(2)} \rangle_t &= \int_0^t H_s^{(1)} H_s^{(2)} d\langle M \rangle_s \\ &= \int_0^t H_s^{(1)} H_s^{(2)} \lambda_s ds\end{aligned}$$

9.3 確率積分の構成（少し詳しく）

以下、簡単のため $(M_t)_{t \in [0,\infty)}$ ではなく $(M_t)_{t \in [0,T]}$ を考える。$\langle M, M \rangle$ のことを簡単に $\langle M \rangle$ と書く。3つの補題を用意する。

補題 27 $\mathcal{H}^2$ は $||M||_T = \sqrt{EM_T^2}$ をノルムとするヒルベルト空間である。

次に

$$\mathcal{L}_2(\langle M \rangle) = \left\{ H : H \text{ は予測可能で } E\int_0^T H_s^2 d\langle M \rangle_s < \infty \right\}$$

とおく。

補題 28 $\mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ は

$$|H|_T = \sqrt{E\int_0^T H_s^2 d\langle M \rangle_s}$$

をノルムとするヒルベルト空間である。

補題 29 $\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ 内で稠密である。

以上を使って $H \in \mathcal{L}_0$ のみならず一般の $H \in \mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ に対して確率積分 $H \bullet M_t = \int_0^t H_s dM_s$ を次の手順で定義する。

(Step 1) まず補題 29 (つまり $\mathcal{L}_0$ の $\mathcal{L}_2(\langle M \rangle)$ における稠密性) より $H^{(n)} \in \mathcal{L}_0$ で $|H^{(n)} - H|_T \to 0$ となる列 $\{H^{(n)}\}$ が取れる。すなわち、

$$\lim_{n \to \infty} E\int_0^T |H_s^{(n)} - H_s|^2 d\langle M \rangle_s = 0$$

となるものが取れる。そこで

$$X_t^{(n)} := \int_0^t H_s^{(n)} dM_s$$

とおく。ただし右辺の確率積分は 9.1 節で定義した通りである。

(Step 2) 補題 23 (つまり初等確率過程に対する確率積分の二次変分の公式) を使って、$n, m \to \infty$ のとき

$$E|X_T^{(n)} - X_T^{(m)}|^2 = E\int_0^T |H_s^{(n)} - H_s^{(m)}|^2 d\langle M\rangle_s \to 0$$

である。すなわち $||X^{(n)} - X^{(m)}||_T \to 0$ であり、$\{X^{(n)}\}$ は $\mathcal{H}^2$ のコーシー列である。

(Step 3) 補題 27 (つまり $\mathcal{H}^2$ の完備性) より、ある $X \in \mathcal{H}^2$ であって

$$||X^{(n)} - X||_T \to 0$$

となるものが存在する。この X は $H^{(n)}$ の取り方に依存しないことも証明できる。

(Step 4) このようにして決まる $X \in \mathcal{H}^2$ を H の M に関する確率積分といい、

$$H \bullet M_t = \int_0^t H_s dM_s := X_t$$

と書く。

10 半マルチンゲールの定義と例

定義 30 X が**半マルチンゲール**であるとは、ある原点を出発する有界変動適合過程 A と原点を出発する局所マルチンゲール M が存在して

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

と書けるときにいう。この分解は一意ではない。

定義 31 X が**特別**半マルチンゲールであるとは、ある原点を出発する**予測可能**有界変動適合過程 A と原点を出発する局所マルチンゲール M が存在して

$$X_t = X_0 + A_t + M_t$$

と書けるときにいう。この分解は一意である。

例 32 (計数過程) 強度 $t \mapsto \lambda_t$ をもつ計数過程 $t \mapsto N_t$ は特別半マルチンゲールである。実際、

$$N_t = \int_0^t \lambda_s ds + (N_t - \int_0^t \lambda_s ds)$$

と書ける。

例 33 (拡散過程) β, σ を $\mathbb{R}$ 上で定義された適当な条件を満たす関数であるとする。$t \mapsto W_t$ を標準ウィナー過程であるとする。このとき

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

を満たす特別半マルチンゲール X が存在する。このような X は拡散過程の一例であり、β をドリフト係数、σ を拡散係数という。

半マルチンゲールの重要性な点は、少なくとも次の 2 つある。まず、確率積分が自然に定義できる確率過程である点である：

$$\int_0^t H_s dX_s := \int_0^t H_s dA_s + \int_0^t H_s dM_s$$

$$H \bullet X_t := H \bullet A_t + H \bullet M_t$$

ただし右辺の第 1 項は実現値 ω ごとのルベーグ・スティルチェス積分であり、第 2 項は前節で定義した確率積分である。

もうひとつは、次の節で紹介する「伊藤の公式」が使える点である。

11 連続半マルチンゲールに対する伊藤の公式

$X = (X^1, ..., X^d)$ は**連続な** d-次元半マルチンゲールであるとする。つまり、各 $i = 1, ..., d$ に対し

$$X_t^i = X_0^i + A_t^i + M_t^i$$

は連続な半マルチンゲールであるとする。$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は 2 回連続的微分可能な関数であるとする。

定理 34 (伊藤の公式) 上述の設定のもとで、

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) &= \sum_{i=1}^d D_i f(X) \bullet X_t^i \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d D_{ij} f(X) \bullet \langle M^i, M^j \rangle_t \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $D_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$

証明の細部には触れないが、出発点はテイラー展開である。分点 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = t$ をとったとき

$$\begin{aligned} f(X_{t_k}) - f(X_{t_{k-1}}) &= \sum_{i=1}^d D_i f(X_{t_{k-1}})(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d D_{ij} f(\xi_k)(X_{t_k}^i - X_{t_{k-1}}^i)(X_{t_k}^j - X_{t_{k-1}}^j) \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし ξ_k は $X_{t_{k-1}}$ と X_{t_k} を結ぶ線分上の点である。

実解析のテイラー展開はこの ξ という一種の「近似」が入ってしまうが、確率解析の伊藤の公式は近似が一切入らない恒等式であることが著しい点である。

伊藤の公式はジャンプがある半マルチンゲールにまで一般化されている。

12 連続マルチンゲールに対する中心極限定理

伊藤の公式の応用例として、連続マルチンゲールに対する中心極限定理を述べる。

定理 35 $M^n = (M^{n,(1)}, ..., M^{n,(q)})$ は連続なマルチンゲールの q-次元ベクトルの列であるとし、T_n を停止時刻の列であるとする。$n \to \infty$ とするとき

(1) $$\langle M^{n,(j)}, M^{n,(k)} \rangle_{T_n} \to^p C^{(j,k)} \quad (\text{定数})$$

であることを仮定する。このとき、

$$M^n_{T_n} \to^d N(0, C)$$

が成り立つ。ただし $C = (C^{(j,k)})_{j,k=1}^q$

証明の概略：一次元の場合を考える。多次元の場合はクラーメル・ウォルドのデバイスによる。以下 $M^n = M^{n,(1)}$, $C = C^{(1,1)}$ と読め。積率母関数を計算する。$z \in \mathbb{R}$ を固定する。

$$X_t = -\frac{z^2}{2}\langle M^n, M^n \rangle_t + zM^n_t$$

とおく。以下

$$E\exp(X_{T_n}) \approx 1$$

を示すことによって

$$E\exp(zM^n_{T_n}) \approx \exp\left(\frac{z^2}{2}C\right)$$

を示す。

さて、$t \mapsto X_t$ は連続な半マルチンゲールであり

$$\langle zM^n, zM^n \rangle_t = z^2 \langle M^n, M^n \rangle_t$$

である。よって伊藤の公式を関数 $f(x) = \exp(x)$ に対して適用することにより

$$\begin{aligned}
\exp(X_t) - 1 &= \exp(X) \bullet X_t + \frac{z^2}{2}\exp(X) \bullet \langle M^n, M^n \rangle_t \\
&= -\frac{z^2}{2}\exp(X) \bullet \langle M^n, M^n \rangle_t + z\exp(X) \bullet M^n_t \\
&\quad + \frac{z^2}{2}\exp(X) \bullet \langle M^n, M^n \rangle_t \\
&= z\exp(X) \bullet M^n_t
\end{aligned}$$

である。右辺はマルチンゲールである。ここで停止時刻

$$S_n = \inf\{t \in [0, \infty) : \langle M^n, M^n \rangle_t \geq C\}$$

を導入する。このとき

$$\langle M^n, M^n \rangle_{S_n} = C$$

である。（ここは少し不正確である。$\langle M^n, M^n\rangle_t$ の値が C に至らないこともあり得るからである。修正は演習問題とする。）よって

$$E\exp(X_{S_n}) - 1 = 0$$

より

$$E\exp(zM^n_{S_n}) = \exp\left(\frac{z^2}{2}C\right)$$

が得られた。従って

$$M^n_{S_n} \sim N(0, C)$$

である。後は

$$M^n_{T_n} - M^n_{S_n} \to^p 0$$

を示せばよいが、これは

$$Y^n_t = M^n_{t\wedge T_n} - M^n_{t\wedge S_n}$$

によって定義される二乗可積分マルチンゲール $t \mapsto Y^n_t$ に対して Lenglart の不等式（付録１）を適用し、仮定 (1) より

$$\begin{aligned}\langle Y^n, Y^n\rangle_\infty &= \langle M^n, M^n\rangle_{T_n} + \langle M^n, M^n\rangle_{S_n} - 2\langle M^n, M^n\rangle_{T_n\wedge S_n} \\ &\to^p 0\end{aligned}$$

であることを用いればよい。 □

付録１：Lenglart の不等式

定理 36 X は原点を出発する非負の局所劣マルチンゲールであるとし、その予測可能カンペンセイターを A とする。T は停止時刻であるとする。このとき、任意の $\eta, \delta > 0$ に対し

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} X_t > \eta\right) \le \frac{\delta}{\eta} + P(A_T > \delta)$$

が成り立つ。
特に M が原点を出発する局所二乗可積分マルチンゲールであるとき、 $t \mapsto M_t^2$ は局所劣マルチンゲールであり、その予測可能カンペンセイターは $\langle M, M\rangle$ であるから

$$\begin{aligned}P\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t| > \eta\right) &= P\left(\sup_{t\in[0,T]} |M_t|^2 > \eta^2\right) \\ &\le \frac{\delta}{\eta^2} + P(\langle M, M\rangle_T > \delta)\end{aligned}$$

が成り立つ。

これらの不等式が著しいのは、左辺において t に関する supremum が確率の中に入っている点である。使い方としては「二乗可積分マルチンゲールが 0 に確率収束することを示したいときには、その二次変分が 0 に確率収束することを示せばよい」と覚えておけばよい。なお、劣マルチンゲール性の仮定は「Lenglart の支配性質」と呼ばれるものに置き換えることができる。

以下の証明では「予測可能時刻」の概念を用いる。それは停止時刻の特別な場合（アナウンス列の存在と呼ばれる良い性質をもつ停止時刻）であるが、詳しくは、例えば Jacod and Shiryaev (1987) を参照されたい。

証明：前半のみ示せば十分である。$T_n = T \wedge n$ とおく。このとき

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\in[0,T_n]} X_t > \eta\right) = P\left(\sup_{t\in[0,T]} X_t > \eta\right)$$

かつ

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{t\in[0,T_n]} A_{T_n} > \delta\right) = P\left(A_T > \delta\right)$$

であるから、各 T_n に対して不等式を示せばよい。いいかえれば、停止時刻 T が有界であると仮定してよい。

$R = \inf(s : X_s > \eta)$ および $S = \inf(s : A_s > \delta)$ とおく。このとき、R は停止時刻であり、S は予測可能時刻である。$\{\sup_{s\le T} X_s > \eta\} \subset \{A_T > \delta\} \cup \{R \le T < S\}$ であるから、

$$P\left(\sup_{t\in[0,T]} X_t > \eta\right) \le P(R \le T < S) + P(A_T > \delta)$$

である。ここで S は予測可能時刻であるから、ある停止時刻の列 (S_n) が存在して $S_n < S$ a.s. on $S > 0$ かつ $\lim_n S_n = S$ a.s. が成り立つ。（これをアナウンス列とよぶ。Jacod and Shiryaev (1987) の I.2.16 参照。）よって

$$\begin{aligned} P(R \le T < S) &\le \lim_n P(R \le T < S_n) \\ &\le \lim_n P(X_{R\wedge T\wedge S_n} > \eta) \\ &\le \frac{1}{\eta}\lim_n E(X_{R\wedge T\wedge S_n}) \\ &\le \frac{1}{\eta}\lim_n E(A_{R\wedge T\wedge S_n}) \end{aligned}$$

である。（最後の不等式で X が劣マルチンゲールであることを使った。前述のように、この部分は「 Lenglart の支配性質」に置き換えることができる。）さらに $A_{R\wedge T\wedge S_n} \le A_{S_n} \le \delta$ である（後の不等式でアナウンス列を導入したことを使った）から、不等式が証明された。
□

付録２：拡散過程の母数推定（最も基本的なモデルとして）

確率微分方程式

$$X_t = X_0 + \int_0^t \beta(X_s, \theta) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

を考える。ただし $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^q$ は未知母数であるとし、拡散係数 σ は既知であるとする。
エルゴード性を仮定し、その不変分布を F とする。すなわち、任意の F-可積分関数 h に対し

$$\frac{1}{T}\int_0^T h(X_t)dt \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} h(x)F(dx) \quad \text{a.s. as } T \to \infty$$

が成り立つとする。
この母数モデルにおいて、対数尤度比は

$$\log \left.\frac{dP_\theta}{dP_{\theta_0}}\right|_{\mathcal{F}_T} = l_T(\theta) - l_T(\theta_0)$$

となる。ただし

$$l_T(\theta) = \int_0^T \frac{\beta(X_t,\theta)}{\sigma(X_t)^2}dX_t - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\beta(X_t,\theta)^2}{\sigma(X_t)^2}dt$$

である。微分と積分の順序交換ができることを仮定すると、スコア統計量

$$\mathbf{U}_T(\theta) = (U_T^1(\theta), ..., U_T^q(\theta))$$

は

$$\begin{aligned} U_T^j(\theta) &= \frac{\partial}{\partial\theta_j} l_T(\theta) \\ &= \int_0^T \frac{\frac{\partial}{\partial\theta_j}\beta(X_t,\theta)}{\sigma(X_t)^2}dX_t - \int_0^t \frac{\beta(X_t,\theta)\frac{\partial}{\partial\theta_j}\beta(X_t,\theta)}{\sigma(X_t)^2}dt \end{aligned}$$

となる。最尤推定量 $\widehat{\theta}_T$ は等式

$$U_T^j(\theta) = 0, \quad j = 1, ..., q$$

の解として定義される。観測フィッシャー情報量行列 $\mathcal{I}_T = (I_T^{jk})_{j,k=1}^q$ はスコア統計量をもう一回微分したもの（つまり対数尤度を二回微分したもの）にマイナスをつけたものである。

$$I_T^{jk}(\theta) = -\frac{\partial}{\partial\theta_k}U_T^j(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_j\partial\theta_k}l_T(\theta)$$

真値 θ_0 のもとで、これが

$$\frac{1}{T}I_T^{jk}(\theta_0) \to^p \sigma^{jk}(\theta_0) \quad \text{as } T \to \infty$$

となることを仮定し、

$$\sqrt{T}(\widehat{\theta}_T - \theta_0) \to^d N(0, \Sigma^{-1}) \quad \text{as } T \to \infty$$

となることを証明する。ただし $\Sigma = (\sigma^{jk}(\theta_0))_{j,k=1}^q$.
この結果を基にして、

$$(\widehat{\theta}_T - \theta_0)^\top \mathcal{I}_T(\widehat{\theta}_T)(\widehat{\theta}_T - \theta_0) \quad \text{Wald 検定統計量}$$

$$\mathbf{U}_T(\theta_0)^\top \mathcal{I}_T(\theta_0)^{-1}\mathbf{U}_T(\theta_0) \quad \text{スコア検定統計量}$$

$$2(l_T(\widehat{\theta}_T) - l_T(\theta_0)) \quad \text{尤度比検定統計量}$$

が漸近的に自由度 q の χ^2-分布に従うことが証明できる。

では主要部分に入ろう。

定理 37 (漸近正規性) $\widehat{\theta}_T$ は $\mathbf{U}_T(\theta) = 0$ の *consistent* な解であるとする。このとき、

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_T - \theta_0) \to^d N(0, \Sigma^{-1}) \quad as\ T \to \infty$$

が成り立つ。

証明の概略： $\theta \mapsto U_T^j(\theta)$ の θ_0 のまわりにおけるテイラー展開により、

$$\frac{1}{\sqrt{T}} U_T^j(\widehat{\theta}_T) \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{T}} U_T^j(\theta_0) - \sum_{k=1}^{q} \sqrt{T}(\widehat{\theta}_T^k - \theta_{0,k}) \frac{1}{T} I_T^{jk}(\theta^*)$$

が得られる。ただし θ^* は $\widehat{\theta}_T$ と θ_0 を結ぶ線分上にある。

左辺がゼロであることに注意すると、

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \mathbf{U}_T(\theta_0) \to^d N(0, \Sigma)$$

と

$$\frac{1}{T} I_T^{jk}(\theta^*) \to^p \sigma^{jk}(\theta_0)$$

を示せば十分である。後者は、もう一回テイラー展開した後、正則条件を用いて示す。

前者は、次のようにマルチンゲール中心極限定理を用いて示す。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{T}} U_T^j(\theta_0) &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(X_t, \theta_0)}{\sigma(X_t)^2} dX_t \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^t \frac{\beta(X_t, \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(X_t, \theta_0)}{\sigma(X_t)^2} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(X_t, \theta_0)}{\sigma(X_t)^2} \sigma(X_t) dW_t \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(X_t, \theta_0)}{\sigma(X_t)} dW_t \end{aligned}$$

このマルチンゲールの二次変分は

$$\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(X_t, \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \beta(X_t, \theta_0)}{\sigma(X_t)^2} dt$$

となり、エルゴード性より、その極限はフィッシャー情報量

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta_j} \beta(x, \theta_0) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \beta(x, \theta_0)}{\sigma(x)^2} F(dx)$$

に一致する。 □

付録３：文献紹介

マルチンゲールの入門～中級といった部分を勉強したい方には Billingsley (1986) の 35, 37 節をお薦めする。

本稿は、連続時間確率過程論としてのマルチンゲール理論を解説することを意図したため、中級といった感じになった。執筆にあたって主として Jacod and Shiryaev (1987) の I 章と II 章を参考にした。同書は証明もほぼ全て書いてあり、自己完結的である。ただし記述は極めて抽象的である。半マルチンゲールに対する極限定理を本格的に勉強したければ同書が最もよい。極限がガウス過程である場合のみならず、一般の半マルチンゲールである場合まで、体系的に書いてある。確率積分と伊藤の公式を深く勉強したければ Ikeda and Watanabe (1989) が最もよい。確率微分方程式の権威的文献である。限られたページ数でマルチンゲールの本質が理解できるように書いてある文献としては Durrett (1999) がある。

和書の中では長井 (1999) を一番にすすめる。後ろの方の章で確率制御や数理ファイナンスへの応用が述べられている。定評ある良書の和訳としては、カラザスとシュレーブ (2001) およびエクセンダール (1999) があり、いずれも記述が詳しく丁寧である。入門的にわかりやすく書いてある文献としては松原 (2003) がある。

2011 年 12 月に改訂の際に追記： 本稿を膨らませたものが、2011 年 10 月に近代科学社より出版された [10]。

参考文献

[1] Billingsley, P. (1986): Probability and Measure. (2nd ed.) Wiley

[2] Durrett, R. (1999): Essentials of Stochastic Processes. Springer

[3] Ikeda, N. and Watanabe, S. (1989): Stochastic Differentail Equations and Diffusion Processes. (2nd ed.) North-Holland/Kodansha

[4] Jacod, J. and Shiryaev, A.N. (1987): Limit Theorems for Stochastic Processes. Springer

[5] カラザス, I. と シュレーブ, S.E. [渡邉壽夫・訳] (2001): ブラウン運動と確率積分. シュプリンガー・フェアラーク東京

[6] Kutoyants, Yu. (2004): Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes. Springer

[7] 松原望 (2003): 入門確率過程. 東京図書

[8] 長井英生 (1999): 確率微分方程式. 共立出版

[9] エクセンダール, B. [谷口説男・訳] (1999): 確率微分方程式. シュプリンガー・フェアラーク東京

[10] 西山陽一 (2011): マルチンゲール理論による統計解析. 近代科学社