

クラスター点過程の疑似尤度解析と パルム型強度の性質

田中 潮¹・尾形 良彦^{2,3}

(受付 2011年7月11日; 改訂 2012年5月30日; 採択 6月4日)

要 旨

ネイマン・スコット点過程は集中型点配置データの代表的な統計モデルである。しかし最尤法に基づくモデルの適合性比較や効率的な推定が叶わなかった。これは異なる点群同士の区別の無い配置データを扱うためである。筆者らは点配置座標間の差ベクトルの点過程を考えた。差ベクトルの配置データを非一様ポアソン過程とみなして、これを表現する強度関数(パルム型強度)でポアソン過程の尤度関数を記述し最尤法(パルム型最尤法)を適用し、その有効性を数値実験で示し、精度の良い解析を可能にした。近年これを支持するパルム型最尤法の漸近論が整いつつある。

さらに筆者らは、異なるネイマン・スコット点過程が複数混在する点配置座標データから、それぞれのパラメタを推定する一般的な問題を考えた。しかし、この場合パルム型最尤法では、それぞれのクラスターのパラメタが同定できない。そこで、最も近い点同士の差ベクトルを集めた座標データについて、その距離分布密度関数に基づく対数尤度とパルム型対数尤度の和とで与えられた疑似対数尤度の最大化で同定問題を解消し、それぞれのパラメタを推定することを提案した。現在このような複合型ネイマン・スコット点過程の理論的研究も進行中である。

キーワード：(重ね合わせ)ネイマン・スコット点過程, パルム型強度, パルム型最尤法, 点過程モデル同定問題, 最近接接触距離型最尤法。

1. 序論

本論文は、クラスター点過程に対して、Tanaka et al. (2008b), Tanaka and Ogata (2011)による疑似最尤法(パルム型最尤法(+最近接接触距離型最尤法))を概説する。パルム型強度は、等方均質的点過程の2次オーダーの振る舞いを記述し、これらの疑似尤度法において中心的な役割を果たす。本論文では、さらに、ネイマン・スコット点過程のパルム型強度に関する結果(Tanaka, 2011)をその拡張モデルである重ね合わせネイマン・スコット点過程へ適用する。

本論文における確率幾何学・点過程論・空間統計に関する諸概念の定義・性質は、紙数の都合上、クラスター点過程およびパルム型強度とそれに基づくパルム型最尤法にまつわる最小限のものに留めた。これらの分野を網羅的に扱っている里程碑として、Baddeley et al. (2007), Cressie (1993), Daley and Vere-Jones (1988, 2003, 2008), Diggle (1983, 2003), Illian et al. (2008), 間

¹ 立教大学：〒171-8501 東京都豊島区西池袋 3-34-1

² 東京大学：〒153-0041 東京都目黒区駒場 4-6-1

³ 統計数理研究所 名誉教授：〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3

瀬・武田(2001), Ripley (1981), Stoyan and Stoyan (1994), Stoyan et al. (1995), van Lieshout (2000) もあわせて参照されたい. 特に, Illian et al. (2008) は, パルム型最尤法(Tanaka et al., 2008b)についても触れている.

点過程は, 平面・空間の幾何学的データによる点パターンを捉える確率モデルである. ポアソンクラスター点過程は, 様々な科学に見受けられる時空間的クラスター現象に対する代表的な点過程モデルの一つであり, ネイマン・スコット点過程はその典型的なクラスターモデルである. このモデルは, 歴史的には, Neyman and Scott (1958) による銀河にまつわる問題に端を発し, 後続する時空間解析の研究事例としては, 時空間における地震活動, 生物学・数理生態学における病原菌の位置, 種子の散乱位置, 樹木の位置, 近年では犯罪学にまで至る.

このように, ネイマン・スコット点過程のモデリングが適用される分野は多岐に亘り, それらの解析法は, 概して点過程の相関を記述する2次特性量による経験的・理論的値の差に対する最小二乗法であった. 実際, ネイマン・スコット点過程自身の尤度を導出することはできない(Baudin, 1981).

Tanaka et al. (2008b) は, 点過程解析において2次特性量として最も有力なパルム型強度に基づく尤度解析であるパルム型最尤法を展開し, 従来の解析法に対してその優位性を示した. パルム型最尤法のシナリオは, クラスター点過程自身の点の位置ではなく, それらの相異なる点間の距離に着目し, その分布を点過程の重ね合わせに対する極限定理により等方非均質的ポアソン過程で近似することにある. 換言すると, ネイマン・スコット点過程に対する difference 点過程の強度関数が, 近似的に等方非均質的ポアソン過程のそれと与えられるのである. ところで, 一般に, ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の一般形を明示することはできない. それ故パルム型最尤法を実行するために, Tanaka et al. (2008b) は, 数値微分・積分によりパルム型強度の数値的近似表現を与え, パルム型最尤推定値を計算している. Tanaka et al. (2008a) は, そのアルゴリズムを定式化し, 同時にソフトウェアも提供している: <http://www.ism.ac.jp/editsec/csm/>.

Tanaka et al. (2008b) は, パラメタのサイズが異なる2種類のネイマン・スコット点過程の重ね合わせにより拡張される重ね合わせネイマン・スコット点過程を定義し, 特に代表的なモデルであるトーマス点過程の重ね合わせを考察している. このとき, パルム型強度は, 2種類の重ね合わせトーマス点過程に対して, いわゆる点過程の2次特性量による点過程モデル同定問題を引き起こす. これに対し, Tanaka and Ogata (2011) は, 安定した最近接接触距離によるパラメトリック点過程解析のために, 付随的に最近接接触距離に基づく最近接接触距離型最尤法を展開し, この問題を回避した. これら一連のパラメトリックモデルによるクラスター点過程解析法のスローガンは, 次のように記述できる:

$$\begin{aligned}
 & (\star) \quad (2 \text{ 種類の重ね合わせ}) \text{ ネイマン・スコット点過程解析法} \\
 & \quad = \underbrace{\text{パルム型最尤法}}_{\text{ネイマン・スコット点過程}} + \text{最近接接触距離型最尤法.} \\
 & \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{2 \text{ 種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程}}
 \end{aligned}$$

次に, より一般の多種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程に対して, これを幾何学的に特徴付けるパルム型強度の内在的量である原点における極と相関域を考察する. ネイマン・スコット点過程のパルム型強度が原点において極をもつとき, そのオーダーは, 点過程のフラクタル次元を特徴付け(Stoyan, 1994), また, クラスターの集中度を示唆し, データ解析において適当なモデルをみるための指標となる(Stoyan and Stoyan, 1996, p. 260).

他方, ネイマン・スコット点過程の相関域は, 一般にはモデルからは直接明示的ではないクラスターの大きさを示唆することが知られている(Illian et al., 2008, p. 239). 本論文では, 一

一般のネイマン・スコット点過程に対して、これらを定量的に与えた結果 (Tanaka, 2011) を一般の重ね合わせネイマン・スコット点過程に適用する。このとき、そのパルム型強度を定式化し、これを構成する各クラスター点過程のパルム型強度が原点において極をもたないとき、その重ね合わせクラスター点過程のパルム型強度の原点における下からの評価とその極が存在するための十分条件、および相関域とその評価を与える。これの応用として、そのパルム型強度の原点と相関域における局所的振る舞いを評価し、重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度が引き起こす点過程モデル同定問題に適用する。

以下、2節では、ネイマン・スコット点過程とその重ね合わせクラスター点過程を定義する。3節では、パルム型最尤法において中心的役割を果たすパルム型強度の概念を導入し、重ね合わせネイマン・スコット点過程に対するその原点における極と相関域を定量的に求める。4節では、ネイマン・スコット点過程に対する最小二乗法による古典的点過程解析法を概観する。5節では、ネイマン・スコット点過程に対するパルム型最尤法を論ずる。6節では、パルム型強度がもたらす2種類の重ね合わせトーマス点過程に関する点過程モデル同定問題を概説する。さらに、3節において得られた結果をこのモデル同定問題に適用する。7節では、このモデル同定問題を回避するための最近接接触距離型最尤法を導入する。本論文の補遺として、8節では、ネイマン・スコット点過程のパルム型強度に関する未解決問題と重ね合わせネイマン・スコット点過程のそれとの関係に触れる。最後に、著者らが本論文執筆中に知った、Prokešová and Jensen (2010) により証明されたパルム型最尤推定量の漸近論的性質：一致性・漸近正規性にも触れる。

2. 点過程モデル

本論文を通して扱う空間は、簡単のため、2次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^2 とする。以後、観測集合 W は、周期的境界条件 (即ち、 W を2次元トーラス T^2 と同一視) が満たされている \mathbb{R}^2 内の部分集合とし、その上で考察する点過程には、等方性ならびに均質性 (定常性) が与えられていると仮定する。また、 N , o は、それぞれ、計数測度、 \mathbb{R}^2 内の原点をあらわす。

2.1 ネイマン・スコット点過程

定義 2.1. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.1 節) クラスター (集中型点パターン) の中心がポアソン過程に従うとき、クラスター点過程はポアソンクラスター点過程という。

例 2.2. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.3 節) ネイマン・スコット点過程は、ポアソンクラスター点過程の典型的なモデルである。

与えられた点過程からそれへの実際的作用：重ね合わせ、クラスタリングにより新しい点過程を構成することができる：

定義 2.3. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.1 節) 各点過程 X_i に対してそれらの重ね合わせは、 $X_i \cap X_j = \emptyset$ w.p.1, $i \neq j$ のとき、点過程の和集合

$$\bigsqcup_i X_i,$$

として、または、計数測度の和

$$N \left(\bigsqcup_i X_i \right) = \sum_i N(X_i)$$

として定義される。

事実 2.4. このとき、点過程の重ね合わせの1次特性量は、各点過程のそれらの和に他ならない。

本論文では、以後、重ね合わせを考えると、各点過程は独立であると仮定する。

定義 2.5. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.1 節) はじめに点過程 Φ_p を与える. これをクラスターの中心とする. クラスターの中心に付随する点, i.e., クラスターの点を与えられた確率的メカニズムにより生成され, 局所的クラスター点過程 $N^x, x \in \Phi_p$ が構成される. 点過程のクラスタリングは, 局所的クラスター点過程の $x \in \Phi_p$ に関する重ね合わせであり, それにより得られる点過程 Φ はクラスター点過程という:

$$\Phi = \bigcup_{x \in \Phi_p} N^x.$$

局所的クラスター点過程 $N^x, x \in \Phi_p$ は *representative cluster* (Stoyan et al., 1995, 5.3 節) といわれ, 以後これを単に N_0 であらわす.

定義 2.6. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.3 節) 強度 μ をもつ均質的ポアソンクラスター点過程 $\{p_i\}$ をクラスターの中心とする. 各 p_i は, $N_0 = \bigcup_{j=1}^{m_i} \{p_i + x_{ij}\}$ を生成する, ここに各 m_i は, i.i.d. $\Pr(\{M_i = m_i\})$, $m_i = 0, 1, \dots$ に従い, また, 各クラスターの点 x_{ij} は, クラスターの中心の周りに等方的に散乱する. クラスターの中心からクラスターの点までの等方的散乱距離は, i.i.d. q_τ (dispersal kernel) に従う, ここに τ は dispersal kernel のパラメータをあらわす. $\{p_i\}$, $\{m_i\}$, $\{x_{ij}\}$ は独立である. ネイマン・スコット点過程は, クラスターの中心を除外した N_0 の和集合: $\bigcup_i \bigcup_{j=1}^{m_i} \{p_i + x_{ij}\} \setminus \{p_i\}$ により定義される点過程モデルであり, そのモデルパラメータは (μ, ν, τ) である ($\nu := \mathbb{E}M_i, \forall i$). 特に, 各 m_i がポアソン分布に従うとき, N_0 はポアソン過程に従うという.

事実 2.7. (e.g., Stoyan et al., 1995, 5.3 節) クラスターの中心が均質的点過程かつ dispersal kernel が等方的ならば, ネイマン・スコット点過程は等方均質的であり, その強度 λ は $\mu\nu$ に等しい.

注意 2.8. dispersal kernel の極座標表示は, 点過程の等方性により, クラスターの中心からクラスターの点までの距離のみに依存する.

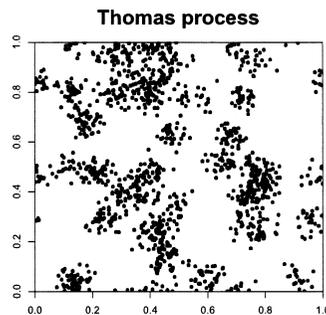


図1. Tanaka et al. (2008a) による $W(= T^2)$ 内のトーマス点過程のシミュレーション ($(\mu, \nu, \sigma) = (50.0, 30.0, 0.03)$).

例 2.9. (Thomas, 1949) トーマス点過程 (Thomas process) は、クラスター点過程解析において最も多くモデリングされるネイマン・スコット点過程モデルである (cf. 図 1). 対応する N_0 はポアソン過程に従い, dispersal kernel は 2 次元のガウス分布 $N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$ で与えられる, ここに I は 2 次の単位行列をあらわす. dispersal kernel は, 極座標表示により次で与えられる:

$$(2.1) \quad q_\sigma(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), \quad \forall r \geq 0.$$

例 2.10. (Matérn, 1960) マタンクラスター点過程 (Matérn cluster process) は, 典型的なネイマン・スコット点過程モデルである. 対応する N_0 はポアソン過程に従い, その各点は, クラスターの中心から半径 ρ の円内に独立かつ一様に散乱する (cf. 図 3 (左図)). dispersal kernel は, 極座標表示により次で与えられる:

$$q_\rho(r) = \begin{cases} \frac{2r}{\rho^2}, & 0 \leq r \leq \rho, \\ 0, & \forall r > \rho. \end{cases}$$

2.2 重ね合わせネイマン・スコット点過程

2 種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程は, Stoyan and Stoyan (1996, p. 265) による “pair cluster process” に端を発し, ネイマン・スコット点過程の自然な拡張モデルである. Tanaka et al. (2008a, 2008b), Tanaka and Ogata (2011) は, 2 種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程を定義している. また, Shimatani (2010) は, ネイマン・スコット点過程の構造をくりかえし生成する意味で, このモデルを拡張した replicated ネイマン・スコット点過程を定式化している. 2.2 節では, これを一般化した多種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程を定義する.

定義 2.11. k 種のネイマン・スコット点過程 X_i ((μ_i, ν_i, τ_i) , $i=1, \dots, k$) に対して, これらへ重ね合わせ (cf. 定義 2.3) を作用することにより得られる点過程 $\bigsqcup_{i=1}^k X_i$ を k 種の重ね合わせネイマン・スコット点過程 (superposed Neyman-Scott cluster point process) とよぶ (cf. 図 2). このモデルパラメタは (μ_i, ν_i, τ_i) , $i=1, \dots, k$ である.

事実 2.12. 定義 2.3 において述べたように, 重ね合わせネイマン・スコット点過程の強度

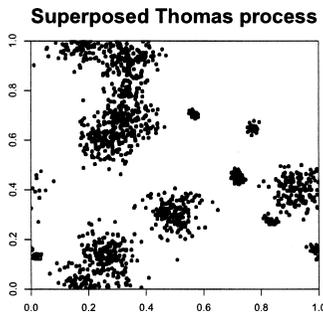


図 2. Tanaka et al. (2008a) による $W(=T^2)$ 内の 2 種類の重ね合わせトーマス点過程のシミュレーション ($(\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2, \sigma_1, \sigma_2) = (5.0, 9.0, 30.0, 150.0, 0.01, 0.05)$).

λ は次で与えられる:

$$(2.2) \quad \lambda = \sum_{i=1}^k \lambda_i,$$

ここに

$$(2.3) \quad \lambda_i := \mu_i \nu_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

3. パルム型強度

パルム分布は、条件付き点過程を定式化した概念である。歴史的には、“telephone traffic”の研究のために、ドイツの通信技術者であり1次元点過程の数学的理論の先駆者 C. パルム (1907–1951) により展開された。点過程は、突然に発生する事象を数学的に抽象した「点」の発生の確率メカニズムを記述する確率過程であり、点過程論において重要な役割を果たす条件付き強度関数は、事象(点)の発生し易さの瞬間的強さ(発生確率の微分)を記述する概念である (cf. Ogata, 2012)。

パルム型条件付き強度関数(以後パルム型強度と略称)につき、点過程 X の点 x における事象のパルム確率測度 $\Pr^x(A)$ は、直観的には、 $x \in X$ が与えられたとき、i.e., X の点が x にあるとき、事象 A が発生する条件付き確率である。パルム型強度 λ_o は次のように形式的に記述される:

定義 3.1. (cf. Ogata and Katsura, 1991, p. 464; Tanaka et al., 2008b, 2.2 節; Tanaka and Ogata, 2011; Tanaka, 2011)

$$\begin{aligned} \lambda_o(x) &:= \frac{\Pr^o(\{N(U(x))=1\})}{\text{Vol}(U(x))} \\ &:= \frac{\Pr(\{N(U(x))=1 \mid N(\{o\})=1\})}{\text{Vol}(U(x))} \\ &= \frac{\mathbb{E}[N(U(x)) \mid N(\{o\})=1]}{\text{Vol}(U(x))}, \end{aligned}$$

ここに $U(x)$ は任意の与えられた点 $x \in X$ を含む十分小さい集合をあらわす。

以下に定義する difference 点過程は、パルム型強度の実現において本質的役割を果たす:

定義 3.2. (cf. Tanaka et al., 2008b, 2.3 節) 与えられた点過程の各点を o へシフトすることにより得られる点過程 $\{x_j - x_i; x_i, x_j \in X, x_i \neq x_j\}$ を difference 点過程という。いわゆる点過程の重ね合わせに対する極限定理 (cf. Daley and Vere-Jones, 2008, 11.2 節, Proposition 11.2.VI., Exercise 11.2.4; cf. Ogata and Katsura, 1991, p. 465) をオリジナル点過程(ネイマン・スコット点過程)に適用すると、それによる difference 点過程が、強度 $N(W)\lambda_o$ の等方非均質的ポアソン過程で近似される。換言すると、ネイマン・スコット点過程のパルム型強度が、等方非均質的ポアソン過程の強度関数で近似されるのである。

注意 3.3. 定義 3.1 の確率の条件: $N(\{o\})=1$ は、与えられた点過程に対する difference 点過程の強度関数を求め、それを点過程の強度に関して正規化することを示唆している。このことは、定義 3.1 が、パルム確率測度の概念そのものとみなすことにより正当化される (Illian et al., 2008, 4.1 節)。

注意 3.4. λ_o の極座標表示は、点過程 X の等方性により o から $x \in X$ までの距離 r のみに依存する： $\lambda_o(x) = \lambda_o(r)$.

3.1 クラスター点過程のパルム型強度

定理 3.5. (cf. Tanaka et al., 2008b, 2.2 節) \mathbb{R}^2 内のネイマン・スコット点過程のパルム型強度は次で与えられる：

$$(3.1) \quad \lambda_o(r) = \lambda + \frac{\nu f_\tau(r)}{2\pi r}, \quad \forall r \geq 0,$$

ここに f_τ は、 N_0 内の任意の 2 つのクラスターの点間の距離 r に関する確率密度であり、その確率分布 F_τ は次で与えられる：

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \frac{F_\tau(r)}{2} = & \int_0^{\frac{r}{2}} \left\{ \int_{r-r_1}^{r+r_1} \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1 r_2}\right) q_\tau(r_2) dr_2 \right\} q_\tau(r_1) dr_1 \\ & + \int_{\frac{r}{2}}^\infty \left\{ \int_{r_1}^{r+r_1} \frac{1}{\pi} \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - r^2}{2r_1 r_2}\right) q_\tau(r_2) dr_2 \right\} q_\tau(r_1) dr_1 \\ & + \int_0^{\frac{r}{2}} \left\{ \int_{r_1}^{r-r_1} q_\tau(r_2) dr_2 \right\} q_\tau(r_1) dr_1, \quad \forall r \geq 0, \end{aligned}$$

ここに各 r_i は、各クラスターの中心から N_0 内の点までの距離をあらわす。

例 3.6. (e.g., Tanaka et al., 2008b, 2.2 節) トーマス点過程のパルム型強度は次で与えられる：

$$(3.3) \quad \lambda_o(r) = \lambda + \frac{\nu}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2}\right), \quad \forall r \geq 0.$$

例 3.7. マタンクラスター点過程のパルム型強度は次で与えられる (cf. 図 3)：

$$(3.4) \quad \lambda_o(r) = \begin{cases} \lambda + \frac{2\nu}{\pi^2 \rho^2} \arccos\left(\frac{r}{2\rho}\right) - \frac{\nu r}{\pi^2 \rho^3} \sqrt{1 - \frac{r^2}{4\rho^2}}, & 0 \leq \forall r \leq 2\rho, \\ \lambda, & \forall r > 2\rho. \end{cases}$$

3 節では、以後、ネイマン・スコット点過程のパルム型強度をその重ね合わせクラスター点過程へ適用し、その原点における極と相関域を調べる。次の定理は、3.2 節における諸結果に対して基本的である：

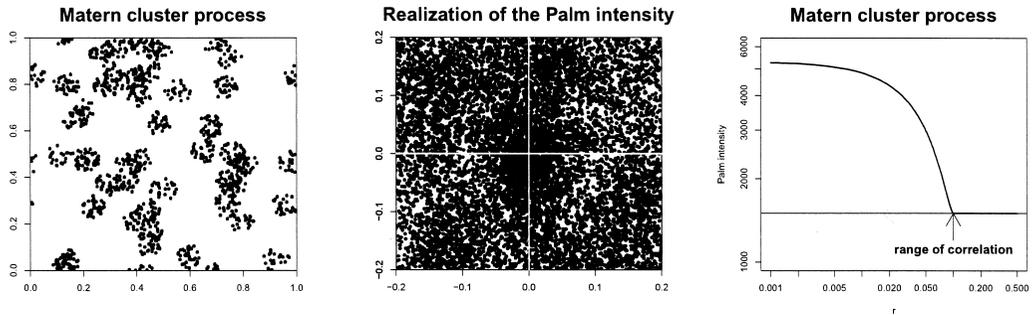


図 3. (左) マタンクラスター点過程のシミュレーション ($(\mu, \nu, \rho) = (50.0, 30.0, 0.05)$), (中央) マタンクラスター点過程に対する difference 点過程の実現, (右) 対数スケールによるマタンクラスター点過程のパルム型強度 (3.4).

定理 3.8. 強度 λ をもつ k 種の重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度は次で与えられる:

$$(3.5) \quad \lambda_o(r) = \lambda^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \lambda_o^i(r) + \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j \right), \quad \forall r \geq 0,$$

ここに λ_o^i は第 i 種のパルム型強度をあらわす. また, \sum^{\neq} は, 相異なる添え字に関する和をあらわす.

証明. 証明のシナリオは, 重ね合わせネイマン・スコット点過程に対する difference 点過程を与えてその強度関数を求め, それを重ね合わせネイマン・スコット点過程の強度に関して正規化することである.

X_i を各 i 種のネイマン・スコット点過程とし, X をその重ね合わせネイマン・スコット点過程とする: $X = \bigsqcup_{i=1}^k X_i$.

各 X_i の重ね合わせを考える. このとき, X_i によるそれ自身への重ね合わせ, ならびに X_i による X_j ($i \neq j$) への重ね合わせが考えられる. X に対する difference 点過程の強度関数は, これらの重ね合わせクラスター点過程のそれの和に等しい.

X_i によるそれ自身への重ね合わせクラスター点過程に対する difference 点過程の強度関数は, パルム確率測度の定義により,

$$(3.6) \quad \lambda_i \lambda_o^i(r), \quad \forall r \geq 0, \quad i=1, \dots, k$$

に等しいことが正当化される. 他方, 相異なる X_i, X_j に対して, X_i による X_j への重ね合わせクラスター点過程に対する difference 点過程の強度関数は同様に

$$(3.7) \quad \lambda_i \lambda_j, \quad i \neq j$$

に等しい. ここで, (3.6), (3.7) の λ_i は, X_i のすべての点に対する o へのシフトによる.

よって, X に対する difference 点過程の強度関数は, (3.6) と (3.7) との和:

$$(3.8) \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i \lambda_o^i(r) + \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j, \quad \forall r \geq 0$$

に等しい. 最後に, (3.8) を強度 λ に関して正規化することにより求めるパルム型強度 (3.5) を得る. \square

例 3.9. (cf. Tanaka et al., 2008b, p. 46) 2 種類の重ね合わせトーマス点過程のパルム型強度は次で与えられる:

$$(3.9) \quad \lambda_o(r) = \lambda + \frac{a\nu_1}{4\pi\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_1^2}\right) + \frac{(1-a)\nu_2}{4\pi\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma_2^2}\right), \quad \forall r \geq 0, \quad \sigma_1 < \sigma_2,$$

ここに

$$(3.10) \quad a := \lambda_1 / \lambda$$

は, モデルパラメタ (μ_1, ν_1, σ_1) をもつトーマス点過程の強度 $\lambda_1 (= \mu_1 \nu_1)$ のその重ね合わせモデルの強度 λ に対する割合をあらわす.

注意 3.10. 2 種類の重ね合わせトーマス点過程は, a に関する線形結合モデル (Type A: Tanaka et al., 2008a, 2.3 節, 2008b, Example 3; mixture Gaussian distributions: Tanaka and Ogata, 2011)

$$(3.11) \quad aq_{\sigma_1}(r) + (1-a)q_{\sigma_2}(r), \quad 0 < a < 1,$$

とは異なる. Stoyan and Stoyan (1996, p. 269) は, 特に, $\nu_1 = \nu_2$ のとき, (3.9) を満たすクラスター点過程を一般化トーマス点過程とよび, そのモデルは (3.11) であると論じていたが, (3.11) のモデルに対応する実際のパルム型強度の様相は, (3.9) とは全く異なる非常に複雑なものであった (Tanaka, 2006). なお, (3.11) は, モデルとして (2.1) の拡張となっている. 実際, 特に $a=0, 1$ がトーマス点過程に対応している. (3.11) に対応するパルム型強度もまた (3.3) の拡張となっている.

3.2 極と相関域

(重ね合わせ) ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の内在的量である原点における極と相関域は, クラスターモデルを幾何学的に特徴付ける. Stoyan (1994) は, それの原点における極が存在するとき, そのオーダーによる点過程のフラクタル次元に関する注意を論じている. また, Stoyan and Stoyan (1996, p. 260) は, そのオーダーは, クラスターの集中度を検出するために用いられ, データ解析において適当なモデルをみるための指標であることを論じている.

しかしながら, これらのクラスター点過程のパルム型強度の一般形は非明示的であるため, 原点における極と相関域に関する定量的性質は明らかにされていなかった. 3.2 節では, 重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度に対して, これを構成する各クラスター点過程のパルム型強度が原点において極をもたないとき, その重ね合わせクラスター点過程のパルム型強度の原点における下からの評価とそれの原点における極が存在するための十分条件, および相関域とその評価を与える. これらに関する証明は基本的に Tanaka (2011) による. なお, 3.2 節では, 特に断わらない限り, dispersal kernel は $[0, \infty)$ 上連続と仮定する.

3.2.1 極

ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の興味深い性質にその原点近傍の振る舞いがある (cf. Stoyan and Stoyan, 1996). 3.2.1 節では, 重ね合わせネイマン・スコット点過程に対するその評価を与える.

定義 3.11. ネイマン・スコット点過程のパルム型強度 λ_o につき,

$$\lambda_o(0) := \lim_{r \downarrow 0} \lambda_o(r) = \infty$$

を満たすとき, λ_o は原点において極 (pole) をもつという.

次の定理は, ネイマン・スコット点過程のパルム型強度が原点において極をもたないとき, それの原点における下からの評価を重ね合わせネイマン・スコット点過程に適用したものであり, (3.5), Tanaka (2011) から直ちに従う.

定理 3.12. k 種の重ね合わせネイマン・スコット点過程につき, 各ネイマン・スコット点過程の dispersal kernel を $[0, \infty)$ 上 C^r 級 ($r \geq 1$) とする. これのパルム型強度が原点において極をもたないとき,

$$\lambda^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\lambda_i + \frac{q_{\tau_i}(0)^2 \nu_i}{2\pi} \right) + \sum_{i,j=1}^k \lambda_i \lambda_j \right\} \leq \lambda_o(0) < \infty$$

が成り立つ.

次の命題は、ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の原点における極の存在に対する十分条件を重ね合わせネイマン・スコット点過程に適用したものである。

命題 3.13. k 種を重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度の原点における極の存在に対する十分条件は次で与えられる：

$$(3.12) \quad \lim_{r \downarrow 0} \frac{\int_0^{\frac{r}{2}} \left\{ \int_{r_1}^{r-r_1} q_{\tau_{i_0}}(r_2) dr_2 \right\} q_{\tau_{i_0}}(r_1) dr_1}{r^2} = \infty \Rightarrow \lambda_o(0) = \infty, \quad 1 \leq i_0 \leq k.$$

証明. (3.5) より、ある i_0 で $\lambda_o^{i_0}$ ならびに λ_o が、それぞれ、原点において極をもつことは同値であることが直ちにわかる。従って、 $\lambda_o^{i_0}$ に対する十分条件が求めるものであり、それは Tanaka (2011) により、ネイマン・スコット点過程に対応する (3.12) に他ならないことがわかる。
□

例 3.14. 各 dispersal kernel がパラメタ β_i の指数分布： $q_{\beta_i}(r) = \beta_i \exp(-\beta_i r)$, $\beta_i > 0, \forall r \geq 0$, $i = 1, \dots, k$ により与えられる指数型モデルの重ね合わせクラスター点過程を考える。指数型モデルのパルム型強度は非明示的であるが、命題 3.13 により、これは原点において極をもつことがわかる。

3.2.2 相関域

パルム型強度の相関域 (range of correlation) は、相異なる 2 点間の相関の消滅域を示唆する。また、これは、5 節におけるパルム型対数尤度関数 (5.3) においても大切な役割も果たしている (cf. 注意 5.5)。3.2.2 節では、重ね合わせネイマン・スコット点過程の相関域とその評価を与える。

定義 3.15. (cf. Illian et al., 2008, p. 220) 相関域 r_o は次で定義される：

$$(3.13) \quad \exists r_o; \lambda_o(r) = \lambda, \quad \forall r \geq r_o > 0.$$

注意 3.16. 相関域は、(3.1), (3.13) より、difference 点過程の非均質性と均質性の境界点 r_o を与えている (cf. 図 3 (中央・右図))。

事実 3.17. ネイマン・スコット点過程のパルム型強度は単調減少関数である (cf. Illian et al., 2008, p. 220)。従って、その相関域は一意的である。

例 3.18. トーマス点過程のパルム型強度の相関域は、(3.3) より、 $r_o = \infty$ で与えられる。

例 3.19. (cf. Illian et al., 2008, p. 239) マタンクラスター点過程のように N_0 が球形を呈しているネイマン・スコット点過程のパルム型強度の相関域は、その直径を与えることが知られている。実際、(3.4) より、 $r_o = 2\rho$ が従う。

次の定理は、重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度の相関域を与える。

定理 3.20. r_o を k 種を重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度の相関域とする。 r_o は一意的であり、次で与えられる：

$$r_o = \max_i r_o^i,$$

ここに r_o^i は、重ね合わせクラスター点過程を構成する第 i 種のクラスター点過程に対応する相関域である。

証明. r_o の一意性は, (3.5), 事実 3.17 から直ちに従う. ところで, (3.13), 事実 3.17 より,

$$r_o^i = \min_{\lambda_o^i(r)=\lambda_i} r, \quad i=1, \dots, k$$

が従う.

さて,

$$(3.14) \quad r = \max_i r_o^i$$

とおく. このとき, (3.5) より,

$$\begin{aligned} \lambda_o &= \lambda^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \lambda_o^i \left(\max_i r_o^i \right) + \sum_{i,j=1}^{k \neq} \lambda_i \lambda_j \right) \\ &= \lambda^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i^2 + \sum_{i,j=1}^{k \neq} \lambda_i \lambda_j \right) \quad \text{by (3.13)} \\ &= \lambda^{-1} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_i \right)^2 \\ &= \lambda^{-1} \lambda^2 \quad \text{by (2.2)} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

が従う. これから, r_o の一意性に注意して, 求める相関域は (3.14) に等しいことがわかる. \square

次の定理は, ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の相関域の評価を重ね合わせネイマン・スコット点過程に適用したものである.

定理 3.21. r_o を k 種の重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度の相関域とする. 第 i 種のネイマン・スコット点過程の dispersal kernel q_{τ_i} につき,

(1) 一様有界とする, i.e.,

$$(3.15) \quad \exists C > 0 \forall i \sup_{r \geq 0} q_{\tau_i}(r) \leq C.$$

このとき, 次が成り立つ:

$$(3.16) \quad \frac{1}{2C} \leq r_o.$$

(2) 単調とする. このとき, 次が成り立つ:

$$(3.17) \quad \begin{cases} r_o < \frac{\sqrt{2}}{\max_i q_{\tau_i}(0)}, & q_{\tau_i}(0) > 0, \quad q_{\tau_i} : \text{非減少}, \quad \text{supp}(q_{\tau_i}) : \text{コンパクト}, \\ r_o \max_i \sqrt{q_{\tau_i}(r_o/2)q_{\tau_i}(r_o)} < \sqrt{2}, & q_{\tau_i} : \text{非増大}. \end{cases}$$

証明. (3.1), (3.5), (3.13) より, 次が従う:

$$(3.18) \quad \lambda^2 = \sum_{i=1}^k \left(\lambda_i^2 + \frac{\lambda_i \nu_i f_{\tau_i}(r)}{2\pi r} \right) + \sum_{i,j=1}^{k \neq} \lambda_i \lambda_j, \quad \forall r \geq r_o.$$

(1) (2.2) より $\lambda^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 + \sum_{i,j=1}^{k \neq} \lambda_i \lambda_j$ に注意して, (3.18) より,

$$f_{\tau_i}(r) \equiv 0, \quad \forall r \geq r_o, \quad i=1, \dots, k$$

が従う。それ故各 i につき、 f_{τ_i} は、サポート r_o をもつ確率密度であること、i.e.,

$$(3.19) \quad F_{\tau_i}(r_o) = \int_0^{r_o} f_{\tau_i}(r) dr = 1, \quad i=1, \dots, k$$

が従う。

さて、(3.15) による (3.3) の上からの評価ならびに (3.19) より、Tanaka (2011) の証明と同様にして (3.16) を得る。

(2) 特に、 q_{τ_i} が単調非減少のとき、これが確率密度であることから、 $\text{supp}(q_{\tau_i})$ がコンパクトでなければならないことに注意する。

さて、各 i につき、単調非減少 (resp. 単調非増大) による (3.3) の下からの評価ならびに (3.19) より、Tanaka (2011) の証明と同様にして $r_o < \sqrt{2}/q_{\tau_i}(0)$ (resp. $r_o \sqrt{q_{\tau_i}(r_o/2)q_{\tau_i}(r_o)} < \sqrt{2}$) を得る。これから直ちに (3.17) が従う。□

4. 古典的 point process 解析法

Tanaka et al. (2008b), Tanaka and Ogata (2011) は、(2 種類の重ね合わせ) ネイマン・スコット点過程に対するパラメトリック解析法である疑似尤度：パルム型最尤法(5 節)・最近接接触距離型最尤法(7 節)を展開し、このモデルのノンパラメトリック解析による先行研究: Cressie (1993, p. 666), Diggle (1983, p. 74), Stoyan and Stoyan (1996, 4 節) に対してそれによる点過程解析法の優位性を示した。4 節では、これらの古典的パラメタ推定法を概観する。

Baudin (1981) は、既述したように、ネイマン・スコット点過程自身の尤度を導出できないことを示した。その背景には、そのデータには、

- クラスターの中心が明示されていない、
- 各クラスターの点と対応するクラスターの中心への属性が明示されていない、
- 各クラスター (N_0) が互いに重なり合う故、クラスターの範囲を明示することができない、

ということに基因している。歴史的には、尤度解析の代わりに点過程解析法として、パラメトリックなネイマン・スコット点過程の 2 次特性量および最近接接触距離・球状接触距離の経験的ノンパラメトリック・理論的パラメトリックな値の差に対する最小二乗法が典型的であった。その代表的例に、トーマス点過程に対して、2 次特性量として、累積関数である Ripley の K -関数 (cf. Ripley, 1977) を空間の次元で正規化した Besag の L -関数 (cf. Besag, 1977, pp. 193–195) に対する最小二乗法がある (cf. Cressie, 1993, p. 666; Diggle, 1983, p. 74; Stoyan and Stoyan, 1996, 4 節)。しかしながら、この推定法では、残差平方和の独立性が期待されない、i.e., 推定値のバイアス等への疑念がある (cf. Tanaka et al., 2008b, p. 44)。他方、 K -関数の微分により定義される 2 点相関関数 (動径分布関数 \propto パルム型強度) は、点過程解析において K - L -関数より有力な 2 次特性量として知られている (e.g., Stoyan and Stoyan, 1996; Illian et al., 2008)。実際、Stoyan and Stoyan (1996) は、2 点相関関数を採用し、これに対する最小二乗法によりパラメタを推定している。

ところで、5 節、7 節において述べる我々のパラメトリック点過程解析法 (パルム型最尤法 (+ 最近接接触距離型最尤法)) は、これよりもさらに優位な結果をもたらす (cf. Tanaka et al., 2008b, 4.3 節; Tanaka and Ogata, 2011)。

5. パルム型最尤法

本節では、ネイマン・スコット点過程およびその重ね合わせクラスター点過程に対するパ

ラメトリック解析のために、点過程の2次特性量として最も有力なパルム型強度に基づく疑似尤度: パルム型最尤法を導入する. これの本質は、これらのオリジナル点過程のパルム型強度を等方非均質的ポアソン過程の強度関数で近似することにある.

定義 5.1. (e.g., Illian et al., 2008, p. 118) (等方)非均質的ポアソン過程は、均質的ポアソン過程の自然な一般化であり、次で定義される: N を強度関数 λ をもつ非均質的ポアソン過程とする.

(1) 任意の有界なボレル集合 B に対して、

$$\Pr(\{N(B) = m\}) = \frac{(\int_B \lambda(x) dx)^m}{m!} \exp\left(-\int_B \lambda(x) dx\right), \quad m = 0, 1, \dots,$$

(2) 任意のボレル集合列 $\{B_i\}_{i=1}^m, \forall m \in \mathbb{N}$ に対して、 $\bigcap_{i=1}^m B_i = \phi$ ならば、 $\{N(B_i)\}_{i=1}^m$ は独立である.

注意 5.2. (e.g., Illian et al., 2008, p. 118) 均質的ポアソン過程では、定義 5.1(1)における $\lambda(x)$ が特に定数強度 λ で与えられ、(2)に関しては変わらない.

パルム型最尤法を導入するために、

- $\Pr(\{N(W) = m\})$: 離散確率分布,
- $f(x_1, \dots, x_m)$: 点過程の各点 x_i に対して、対称な, i.e., 各点 x_i の順序に依らない location density, 換言すると、 W 上のルベーク測度に関する確率密度

により構成される W の有限点過程を考える (cf. Daley and Vere-Jones, 2003, 5 節; Illian et al., 2008, p. 103; van Lieshout, 2000, 1.4 節).

事実 5.3. (e.g., Illian et al., 2008, p. 103) 有限点過程の尤度は、条件 $N(W) = m$ のもと、各 $U(x_i)$ の点 x_i が丁度一つ含まれる確率密度で与えられる. 求める尤度は、点の数のランダム性による $\Pr(\{N(W) = m\})$ とその点のすべての順列, i.e., $m!$ を考慮して、これらを乗じた

$$(5.1) \quad L(\theta) := L(\theta; x_1, \dots, x_m) = f(x_1, \dots, x_m) \Pr(\{N(W) = m\}) m!$$

により与えられる. 以後、尤度関数の表記につき、(5.1)のように、便宜上確率密度を規定するモデルパラメタ θ は尤度関数 L のみに反映させる.

ここで、location density f を次で決める:

$$f(x_1, \dots, x_m) = \frac{\prod_{i=1}^m \lambda(x_i)}{(\int_W \lambda(x) dx)^m}, \quad \forall x_i \in W, \quad i = 1, \dots, m.$$

このとき、非均質的ポアソン過程の尤度は、

$$\begin{aligned} L(\theta) &= \frac{\prod_{i=1}^m \lambda(x_i)}{(\int_W \lambda(x) dx)^m} \frac{(\int_W \lambda(x) dx)^m}{m!} \exp\left(-\int_W \lambda(x) dx\right) m! \\ &= \prod_{i=1}^m \lambda(x_i) \exp\left(-\int_W \lambda(x) dx\right), \end{aligned}$$

により与えられ、対応する対数尤度は、

$$(5.2) \quad \log L(\theta) = \sum_{i=1}^m \log \lambda(x_i) - \int_W \lambda(x) dx$$

となる.

定義 5.4. (Tanaka et al., 2008b, 2.4 節) ネイマン・スコット点過程のパルム型強度に基づくパルム型最尤法は、点過程の重ね合わせに対する極限定理により、その difference 点過程を強度関数 $N(W)\lambda_o$ の等方非均質的ポアソン過程で近似することにより得られる。(5.2) よりパルム型強度 λ_o の極座標表示を用いることにより、そのパルム型対数尤度関数は次で与えられる:

$$(5.3) \quad \log L(\mu, \nu, \tau) = \sum_{i,j; r_{ij} \leq R}^{N(W) \neq} \log\{N(W)\lambda_o(r_{ij})\} - N(W) \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \lambda_o(r)r dr \right) d\theta,$$

ここに $r_{ij} := \|x_i - x_j\| > 0$. このとき、対応する最尤推定値であるパルム型最尤推定値は *MPLE* という.

注意 5.5. (5.3) のチューニング定数 R は、相関域に対して十分大きくとる必要がある (Tanaka et al., 2008b, p. 48). 3.2 節において述べたように、(重ね合わせ) ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の一般形は非明示的であるため、相関域の評価には、パルム型強度のノンパラメトリック推定によるアドホックな手法が採られていた. しかしながら、ネイマン・スコット点過程に対しては、Tanaka (2011) を適用し、また、その重ね合わせクラスター点過程に対しては、定理 3.21 を適用することにより定量的に R を評価することが可能となる. なお、ここでは、観測集合である単位正方形 W の周期的境界条件により、その測地距離である $R=1/2$ でよい.

6. 点過程モデル同定問題

以後特に断わらない限り、2種類の重ね合わせトーマス点過程を扱う. Tanaka et al. (2008b, 4 節, 5 節), Tanaka and Ogata (2011) によると、パルム型強度は、これらのモデルを同定できない. 点過程モデル同定問題は、幾何学の分野においても重要な問題の一つであり (e.g., Kac, 1966), 例えば、確率幾何学・点過程論のモデル同定問題 (Julesz, 1975) がある. Baddeley and Silverman (1984) は、点過程の 2 次特性量の一つである Ripley の K -関数を扱い、この予想に否定的結論, i.e., K -関数の同定不能性を与えた結果はよく知られている.

事実 6.1. (e.g., Tanaka et al., 2008a, 3.1.2 節; Tanaka and Ogata, 2011) 2種類の重ね合わせトーマス点過程に対するパルム型対数尤度関数は、(3.9), (5.3) より次で与えられる:

$$(6.1) \quad \log L(\mu_1, \nu_1, \sigma_1, \mu_2, \nu_2, \sigma_2) \\ = \sum_{\{i,j; r_{ij} \leq R\}}^{\neq} \log \left\{ \lambda + \frac{a\nu_1}{4\pi\sigma_1^2} \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{4\sigma_1^2}\right) + \frac{(1-a)\nu_2}{4\pi\sigma_2^2} \exp\left(-\frac{r_{ij}^2}{4\sigma_2^2}\right) \right\} \\ - N(W) \left[\pi\lambda R^2 + a\nu_1 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4\sigma_1^2}\right) \right\} + (1-a)\nu_2 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{R^2}{4\sigma_2^2}\right) \right\} \right],$$

ここに a は (3.10) により与えられ、7 節において中心的役割を果たすパラメタである.

Tanaka et al. (2008b), Tanaka and Ogata (2011) によれば、Tanaka et al. (2008a) を用いて (6.1) の MPLE を計算すると、 $\hat{\lambda}$, $\hat{a}\hat{\nu}_1$, $(1-\hat{a})\hat{\nu}_2$ は、ある正定数に等しい, i.e., 各 $(\hat{\mu}_i, \hat{\nu}_i)$ は一意的ではない. 他方、各 MPLE $\hat{\sigma}_i$ は一意的に決まる. これが、2種類の重ね合わせトーマス点過程に対してパルム型強度が引き起こす点過程モデル同定問題の原因である.

7 節では、このモデル同定問題を解くために、パルム型最尤法を付随的にサポートするような最大尤度解析: 最近接接触距離型最尤法を展開する.

6 節の最後に、注意として、本論文の主結果を重ね合わせネイマン・スコット点過程のパル

ム型強度が引き起こす点過程モデル同定問題に適用する:

注意 6.2. 定理 3.12, 命題 3.13, 定理 3.21 により, 一般の多種類の重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度の原点と相関域における局所的振る舞いを評価することができる. これは, パルム型強度が点過程モデル同定問題を引き起こすか調べることができることを示唆している.

7. 最近接接触距離型最尤法

点過程の 2 次特性量とは異なる最近接接触距離により, 点過程を特徴付ける最近接距離分布は, 点過程論において基本的概念であり, 2 次特性量より比較的容易に推定できることが知られている. しかしながら, 後述するように, 最近接接触距離が解析的に記述されるモデルはほとんど存在しない, それ故最近接接触距離に基づくパラメタ推定・推測は容易ではない(cf. van Lieshout and Baddeley, 1996, 1 節).

注意 7.1. パルム型強度と最近接接触距離の点過程に対する潜在的解析能力を比較する. パルム型強度は, 相異なる 2 点間のすべての距離に関する相関を与える. 他方, 最近接距離分布は, 最近接接触距離に関する確率分布である. 距離の観点からこれらを比較すると, 点パターンを解析する情報量として, パルム型強度が優位であることがわかる.

本節では, 重ね合わせネイマン・スコット点過程に対して, パルム型最尤法がもたらす点過程モデル同定問題を回避するために, パルム型強度と独立な最近接距離分布に基づく最大尤度解析である最近接接触距離型最尤法を展開する. これにより, 2 種類の重ね合わせトーマス点過程に対する完全なパラメトリック解析が可能となる. その実際の解析のために, R パッケージ: spatstat (cf. Baddeley and Turner, 2005) は一般的なアルゴリズムを提供し, 彼らは一般のユーザーも意識して spatstat を論じている. 紙数の都合上割愛せざるを得なかった 7 節において扱う最近接接触距離に関する概念につき, 特に好著である Baddeley et al. (2007; Spatial Point Processes and their Applications) が手際よく論じている.

さて, (2.3), (3.10), および 6 節において述べた点過程モデル同定問題の原因により, 各 a ($0 \leq a \leq 1$) を固定すると対応する各 (μ_i, ν_i) が決まる. このとき, それに対応する 2 種類のトーマス点過程の点パターンが決まり, これらに対応する a が付随する各球状接触距離分布 F_a^i および各最近接距離分布 G_a^i が決まる. ところで, 一般の 2 種類の独立な点過程の重ね合わせの最近接距離分布 G_a は次で与えられる (cf. van Lieshout and Baddeley, 1996, p. 350):

$$1 - G_a(r) = a\{1 - G_{a^1}(r)\}\{1 - F_{1-a^2}(r)\} + (1-a)\{1 - F_{a^1}(r)\}\{1 - G_{1-a^2}(r)\}, \quad \forall r \geq 0.$$

そこで, a を最尤推定するために, Tanaka and Ogata (2011) は, 次の尤度関数を考えた:

定義 7.2. (cf. Tanaka and Ogata, 2011) 定義 3.2 におけるパルム型最尤法の着想と同様, 最近接接触距離型最尤法もまた最近接距離分布の確率密度 g_a を等方非均質的ポアソン過程の強度関数とみなすことにより実現される. このとき, (5.2) より, g_a に基づくその最近接接触距離型対数尤度関数は次で与えられる:

$$(7.1) \quad \log L(a) = \sum_{j=1}^{N(W)} \log g_a(r_j) - G_a(1/2), \quad 0 \leq \forall a \leq 1,$$

ここに各 r_j は点過程の各点 x_j の最近接接触距離をあらわす. (7.1) の右辺の $1/2$ は注意 5.5 に

よる. ここで, $G_a(1/2) = N(W), \forall a$ を満たすように最近接接触距離が $1/2$ より十分小さいと仮定する. このとき, 対応する最尤推定値である最近接接触距離型最尤推定値は NND-最尤推定値という.

注意 7.3. 一般に, G_a は非明示的であるため, g_a もまたそうである. それ故 (7.1) の実際的計算は, 各 a から決まるモデルシミュレーションからの数値的 g_a による. ところで, 本論文のスローガン: (*) にあるように, 我々の最近接接触距離型最尤法は, パルム型最尤法に付随したパラメトリック点過程解析法である. この付随性は, MPLE の結果のもと, その数値的 g_a による (7.1) の最大化に由来する. 換言すると, MPLE の制約条件のもと, NND-最尤推定値を求めることに他ならない.

MPLE の制約条件のもと, 一意的な NND-最尤推定値を求めるために, (7.1) の滑らかさと単峰性を調べる必要がある. 最後に, これのためのアルゴリズムのアウトラインを述べて本節を終える (cf. Tanaka and Ogata, 2011):

(1) 2 種類の重ね合わせトーマス点過程に対して, パルム型最尤法を Tanaka et al. (2008a) が提供しているソフトウェアにより実行し, 各 MPLE を計算する: $(\hat{\lambda}, \hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)$, ここに $c_1 := a\nu_1, c_2 := (1-a)\nu_2$.

(2) 各 a につき, それに対応する $(\mu_i(a), \nu_i(a), \sigma_i), i=1, 2$ が一意的に決まる.

(3) それに対応する 2 種類のトーマス点過程を生成し, それらを重ね合わせることで 2 種類の重ね合わせトーマス点過程を生成する. これの各点に対する最近接接触距離を計算する.

(4) 各 a につき, 最近接距離分布 G_a とその確率密度 g_a の振る舞いが安定になるまで以上のステップを繰り返す.

(5) 最近接接触距離型対数尤度 (7.1) を計算する.

(6) ステップ (3)–(5) を繰り返し, 各 a につき, モデルシミュレーションを繰り返すことにより生じる (7.1) の変動を定め, これらを用いて (7.1) のとり得る値を評価する.

(7) ステップ (2) へ戻り, 各 a につき, 以上のステップを繰り返し, 探索的に (7.1) の NND-最尤推定値 \hat{a} を求める.

8. 補遺

Stoyan (1994), Stoyan and Stoyan (1996) は, ネイマン・スコット点過程のパルム型強度の原点における極に関する未解決問題・重要性を論じている. 関連する今後の問題として, 本論文で与えた重ね合わせネイマン・スコット点過程のパルム型強度に関する性質を用いて, この未解決問題を重ね合わせクラスター点過程に対して考察することが挙げられる.

本論文において紙数の都合上割愛せざるを得なかった, Prokešová and Jensen (2010) が証明した, ある種の点過程の MPLE の漸近論的性質: 一致性・漸近正規性は, 著者らが本論文執筆中に知った大変興味深い結果である. 一致性のために, 彼女らは, 点過程に対してエルゴード性を仮定している (Tanaka et al., 2008a, 2008b は, エルゴード性を仮定せずに精度の良い MPLE を得ている). さらに, 漸近正規性のために, エルゴード性に加え点過程に対して strongly mixing condition および strong mixing coefficient の減衰オーダーに関する条件を仮定している (これら一連の仮定は, 点過程の最尤推定量の漸近論においてよく見受けられる).

ところで, Tanaka and Ogata (2011) は, 7 節において述べたようなアルゴリズムにより NND-最尤推定値を得ているが, この推定量の漸近論的性質を調べることは自然な問題意識である. それ故漸近論を用いて, この NND-最尤推定量を定量的に特徴付けるため, Tanaka and Ogata

(2011)は、特にその一致性を調べている。その証明のシナリオは、Prokešová and Jensen (2010)に基づく。

謝 辞

匿名査読者には有益なコメントを頂きました。感謝致します。

参 考 文 献

- Baddeley, A. J. and Silverman, B. W. (1984). A cautionary example on the use of second-order methods for analyzing point patterns, *Biometrics*, **40**, 1089–1093.
- Baddeley, A. J. and Turner, R. (2005). spatstat: an R package for analyzing spatial point patterns, *Journal of Statistical Software*, **12**, 1–42, www.jstatsoft.org, ISSN: 1548–7660.
- Baddeley, A. J., Bárány, I., Schneider, R. and Weil, W. (2007). *Stochastic Geometry*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1892, Springer-Verlag, Berlin.
- Baudin, M. (1981). Likelihood and nearest-neighbor distance properties of multidimensional Poisson cluster processes, *Journal of Applied Probability*, **18**, 879–888.
- Besag, J. E. (1977). Contribution to the discussion on Dr. Ripley's paper, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 193–195.
- Cressie, N. (1993). *Statistics for Spatial Data*, Revised ed., John Wiley & Sons, Inc., New York.
- Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (1988). *An Introduction to the Theory of Point Processes*, Springer, New York.
- Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2003). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume I: Elementary Theory and Methods*, 2nd ed., Springer, New York.
- Daley, D. J. and Vere-Jones, D. (2008). *An Introduction to the Theory of Point Processes, Volume II: General Theory and Structure*, 2nd ed., Springer, New York.
- Diggle, P. J. (1983). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*, Academic Press, London.
- Diggle, P. J. (2003). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*, 2nd ed., Arnold, London.
- Illian, J., Penttinen, A., Stoyan, H. and Stoyan, D. (2008). *Statistical Analysis and Modelling of Spatial Point Patterns*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Julesz, B. (1975). Experiments in the visual perception of texture, *Scientific American*, **232**, 34–43.
- Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum?, *American Mathematical Monthly*, **73**, 1–23.
- 間瀬 茂, 武田 純 (2001). 『空間データモデリング—空間統計学の応用』, 共立出版, 東京.
- Matérn, B. (1960). Spatial variation: Stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations, *Meddelanden fran Statens Skogsforskningsinstitut*, **49**(5), 1–144.
- Neyman, J. and Scott, E. (1958). Statistical approach to problems of cosmology, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **20**, 1–43.
- Ogata, Y. (2012). <http://www.ism.ac.jp/~ogata/>.
- Ogata, Y. and Katsura, K. (1991). Maximum likelihood estimates of the fractal dimension for random spatial patterns, *Biometrika*, **78**, 463–474.
- Prokešová, M. and Jensen, E. B. V. (2010). Asymptotic Palm likelihood theory for stationary point processes, Research Report, Centre for stochastic geometry and advanced bioimaging, Department of Mathematical Sciences, Aarhus University, Denmark.
- Ripley, B. D. (1977). Modelling spatial patterns, *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, **39**, 172–212.
- Ripley, B. D. (1981). *Spatial Statistics*, John Wiley & Sons, New York.

- Shimatani, K. (2010). Spatially explicit neutral models for population genetics and community ecology: Extensions of the Neyman-Scott clustering process, *Theoretical Population Biology*, **77**, 32–41.
- Stoyan, D. (1994). Caution with “fractal” point patterns!, *Statistics*, **25**, 267–270.
- Stoyan, D. and Stoyan, H. (1994). *Fractals, Random Shapes and Point Fields*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Stoyan, D. and Stoyan, H. (1996). Estimating pair correlation functions of planar cluster processes, *Biometrical Journal*, **38**, 259–271.
- Stoyan, D., Kendall, W. S. and Mecke, J. (1995). *Stochastic Geometry and its Applications*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Chichester.
- Tanaka, U. (2006). Parameter estimation and model selection of the Neyman-Scott type spatial cluster models, Ph. D. dissertation, The Graduate University for Advanced Studies, Tokyo.
- Tanaka, U. (2011). Remark on the Palm intensity of Neyman-Scott clustering point processes, Research Memorandum, No. 1144, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo.
- Tanaka, U. and Ogata, Y. (2011). Identification and estimation of superposed Neyman-Scott spatial cluster processes (in revision).
- Tanaka, U., Ogata, Y. and Katsura, K. (2008a). Simulation and estimation of the Neyman-Scott type spatial cluster models, *Computer Science Monographs*, No. 34, 1–44, The Institute of Statistical Mathematics, Tokyo, <http://www.ism.ac.jp/editsec/csm/>.
- Tanaka, U., Ogata, Y. and Stoyan, D. (2008b). Parameter estimation and model selection for Neyman-Scott point processes, *Biometrical Journal*, **50**, 43–57.
- Thomas, M. (1949). A generalization of Poisson’s binomial limit for use in ecology, *Biometrika*, **36**, 18–25.
- van Lieshout, M. N. M. (2000). *Markov Point Processes and Their Applications*, Imperial College Press, London.
- van Lieshout, M. N. M. and Baddeley, A. J. (1996). A nonparametric measure of spatial interaction in point patterns, *Statistica Neerlandica*, **50**, 344–361.

Maximum Pseudo-likelihood Analyses of Clustering Point Processes and Some Properties of Palm Intensity

Ushio Tanaka¹ and Yosihiko Ogata²

¹Rikkyo University

²The University of Tokyo; The Institute of Statistical Mathematics, Professor Emeritus

The Neyman-Scott point process provides clustering models for spatial point patterns. However, their efficient estimation and goodness-of-fit by the maximum likelihood method have not been implemented. This is because point data have no distinction among clusters. The authors considered the point process of difference vectors in the original clustering point coordinates, and represent them by a likelihood function assuming that they are distributed according to a non-homogeneous Poisson intensity. We call this pseudo-likelihood Palm-type likelihood. By maximizing the logarithm of the Palm-type likelihood, we demonstrated the consistency and efficiency of the parameter estimation by numerical experiments. Recently, the maximum Palm-type likelihood method has been supported by an asymptotic theory of point processes.

The authors have further considered the more general problem for point coordinates from a mixture of different multiple Neyman-Scott point processes, to estimate the parameters of each. However, in Palm intensity solely, the parameter values of each Neyman-Scott point process cannot be identified in this general case. This is because the Palm intensity is one of the second-order statistics of point processes. Thus, we have solved the identification problem in the Palm-type likelihood function combined with a pseudo-likelihood for nearest neighbor distance distribution to estimate the parameters of each. Some theoretical research on the mixed Neyman-Scott point process is also in progress.