統計数理(2011)
第 59 巻 第 1 号 105–124

特集「金融リスクの統計解析」
[研究ノート]

危険理論における Gerber-Shiu 関数と統計的推測

清水 泰隆[1,2]

(受付 2010 年 4 月 20 日;改訂 7 月 8 日;採択 8 月 4 日)

要　旨

保険会社の破産リスクに対する分析は,いわゆるアクチュアリー数学における最も重要な問題の一つであり,その統計的推測は実務上の重要な課題である.そのようなリスクを扱う保険数学の一分野として危険理論がある.近年の危険理論において,破産時刻や破産時損害額などの同時分布に関する期待割引罰則関数(Gerber-Shiu 関数)といわれるリスク関数が注目を集めている.本論文では,あるレヴィ過程によって表現される一般化リスク過程とその Gerber-Shiu 関数について紹介し,その統計的推測に関して議論する.

キーワード: 危険理論,Gerber-Shiu 関数,一般化リスク過程,正則化 Laplace 逆変換,経験推定.

1. はじめに

1.1 古典的危険理論

保険数学,特に損害保険数学において,保険ポートフォリオの破産問題を扱う理論は危険理論(risk theory)と言われ,主に欧米のアクチュアリーや統計学者を中心に固有の発展を遂げてきた.その数学的な基礎を最初に築いたのはスウェーデンのアクチュアリーであった Lundberg, F. や,同じくスウェーデンの数理統計学者でアクチュアリーでもあった Cramér, H. であり,彼らは,ある時刻 t までのクレーム(保険金請求)の累積額を複合ポアソン過程 C_t を用いて表現し,保険会社の持つサープラス(準備金) R_t を以下のようにモデル化した.

$$R_t = u + \beta t - C_t; \quad C_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i. \tag{1.1}$$

ここに,u は初期サープラス,β は保険料率を表す正の定数,N は強度 λ を持つポアソン過程でクレームの頻度に対応し,U_i は分布 F_U に従う IID 正値確率変数で i 番目のクレーム額を表す. ただし,$\{U_i\}$ と N は独立とする.確率過程 $R = (R_t)_{t\geq 0}$ を,危険理論ではリスク過程という.(1.1) のリスク過程は,以後の危険理論発展における最も基本的なモデルであり,古典的リスクモデルとか Cramér-Lundberg モデルと言われる.

危険理論における古典的問題の一つは,保険会社の破産時刻:

$$\tau(u) := \inf\{t > 0 \mid R_t < 0\} \tag{1.2}$$

---

[1] 大阪大学大学院 基礎工学研究科:〒560–8531 大阪府豊中市待兼山町 1–3
[2] 科学技術振興機構(JST),CREST:〒102–0075 東京都千代田区三番町

に関する分布の評価であり，例えば破産確率

$$\psi(u) := \mathbb{P}\{\tau(u) < \infty\} = \mathbb{P}\left\{\inf_{t\geq 0} R_t < 0\right\} \tag{1.3}$$

の評価である．大数の法則によれば，確率 1 での破産を回避するためには，ある $\theta > 0$ に対して $\beta = (1+\theta)\mathbb{E}[C_1]$ とすれば十分であることが容易に分かる．これは**純益条件**(net profit condition) と言われ，危険理論において最も基本的な条件である．θ は安全付加率(safety loading)と言われる．ψ の陽な表現を得ることは一般には困難であり，古典的な危険理論では，適当な正則条件の下で，以下のような結果が標準的なものとして知られている：

不完全再生方程式(defective renewal equation, DRE)：

$$\psi(u) = H(u) + \int_0^u \psi(u-x)g(x)\,dx. \tag{1.4}$$

ただし，$H(u) := \lambda\beta^{-1}\int_u^\infty (1 - F_U(x))\,dx$; $g(x) := \lambda\beta^{-1}(1 - F_U(x))$.

Pollaczek-Khinchin 公式：上で与えた関数 H, g に対して，

$$\psi(u) = \left(H * \sum_{n=0}^\infty g^{*n}\right)(u). \tag{1.5}$$

ただし，$\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ 上の関数 f, h に対して，

$$f * h(x) = \int_0^x f(x-y)h(y)\,dy$$

とし，$h^{*0} = \delta_0$ (デイラック関数); $h^{*n} = h * (h^{*(n-1)})$ と定める．“Pollaczek-Khinchin” の名は “待ち行列理論” からの由来で，危険理論では Beekman 公式とも呼ばれる(Beekman, 1969)．

Laplace 変換公式：任意の $s > 0$ に対して，

$$\mathcal{L}\psi(s) = \frac{1}{s} - \frac{\beta - \lambda\mu}{\beta s - \lambda(1 - \mathcal{L}_{F_U}(s))}. \tag{1.6}$$

ただし，関数 F に対して，以下の記法を用いている：

$$\mathcal{L}F(s) := \int_0^\infty e^{-sx}F(x)\,dx; \quad \mathcal{L}_F(s) := \int_0^\infty e^{-sx}\,F(dx).$$

Lundberg 不等式：ある定数 $\gamma > 0$ が存在して，

$$\psi(u) \leq e^{-\gamma u}. \tag{1.7}$$

不等式の右辺を Lundberg 限界という．いくつかのリスクモデルでは下限の評価も可能である; 例えば，Willmot and Lin (2001)，Rolski et al. (1999) の 5, 6 章などを参照.

Cramér-Lundberg 近似： $u \to \infty$ のとき，(1.7) の定数 γ に対して，

$$\psi(u) \sim Ce^{-\gamma u}; \quad C = \frac{\beta - \lambda m(0)}{\lambda m(-\gamma) - \beta}. \tag{1.8}$$

ただし，$m(s) = -(\mathcal{L}_{F_U})'(s)$ である($'$ は微分を表す)．

上記(1.7), (1.8) を得るためには，F_U に対する十分なモーメント条件が必要である：例えば，十分大きな $s > 0$ に対して，$\mathcal{L}_{F_U}(-s) < \infty$ なら十分．このような指数モーメントを持たないような裾の重い分布に対する近似に関しては，例えば Embrechts et al. (2003) を参照されたい.

定数 $\gamma > 0$ は**調整係数**(adjustment coefficient) といわれ，Lundberg 型方程式：

$$l(s) := \log \mathbb{E}[e^{-s(R_1 - u)}] = 0 \tag{1.9}$$

の正の解である．関数 $l(s)$ は，R_1-u の Laplace 変換に対する指数(Laplace 指数)の形になっており，調整係数は一意に決まることに注意しておこう．特に，古典的リスクモデル(1.1)の場合には，$l(s)=-\beta s-\lambda(1-\mathcal{L}_{F_U}(-s))$ であり，十分なモーメント条件と純益条件の下で，$l(0)=0; l'(0)<0; l''(s)>0; l(s)\to\infty$ より $\gamma>0$ の存在と一意性が導かれる．これらの諸結果については既に多くの成書があるが，Grandell (1991)，Rolski et al. (1999)，Asmussen (2000)，Mikosch (2004) などが良い教科書であろう．

注意 1. 定数 $\delta\geq 0$ を用いて(1.9)を一般化した以下の方程式:

$$\ell(s):=l(-s)=\delta \tag{1.10}$$

は**一般化 Lundberg 方程式**と言われ，危険理論において本質的に重要となる．この方程式は一般に異なる 2 つの解(負の解と非負解)を持つことが簡単な計算から分かるが，$\delta=0$ のときの負解が $-\gamma$ であることに注意しておこう．一方，非負解 $\varrho\geq 0$ は **Lundberg 指数**(Lundberg exponent)と言われ，後述する Gerber-Shiu 関数の解析において本質的な役割を果たす．特に，$\delta=0$ なら $\varrho=0$ である．

1.2 Gerber-Shiu 関数

破産確率を拡張した概念の一つが破産の“深刻度”(severity)であり，数学的には，$\tau(u)$: 破産時刻(the time of ruin)と $|R_{\tau(u)}|$: 破産時損害額(the deficit at ruin)の同時分布における $|R_{\tau(u)}|$ の周辺分布(周辺リスク)である．この概念は，古典的リスクモデルの文脈で Gerber et al. (1987) らによって導入され，さらに Dufresne and Gerber (1988)，Dickson (1992) らにより $R_{\tau(u)-}$: 破産直前サープラス(the surplus prior to ruin)と $\tau(u)$ との同時分布による周辺リスクも“深刻度”の指標として研究された．その後，H. U. Gerber と E. S. W. Shiu による一連の共著論文 Gerber and Shiu (1997a, 1997b, 1998) において，$(\tau(u), R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|)$ の同時分布に対する周辺リスクを拡張した概念として以下の(1.11)のようなリスク関数が考察された．この関数は，近年，危険理論の分野で大きな注目を集めており，彼らの名前にちなんで **Gerber-Shiu 関数**とも呼ばれている．

定義 1. リスク過程 $R=(R_t)_{t\geq 0}$ に対して，以下で定まるリスク関数 ϕ を**期待割引罰則関数**(expected discounted penalty function)という:

$$\phi(u):=\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau(u)}w(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|)\mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}\middle|R_0=u\right]. \tag{1.11}$$

ここに，$\tau(u)$ は(1.2)で与えられる破産時刻，$\delta\geq 0$ は定数，$\mathbf{1}_A$ は集合 A に対する定義関数，$w(x,y)$ は $w_0:=w(0,0)>0$ を満たす $\mathbb{R}_+^2$ 上の有界関数である．

関数 $w(x,y)$ は，破産直前のサープラス $R_{\tau(u)-}$ や破産時の損害額 $|R_{\tau(u)}|$ に対する広義の“罰則”と解釈され，それが“定数” $e^{-\delta\tau(u)}$ によって，破産時刻 $(t=\tau(u))$ から現在 $(t=0)$ へ割引率 δ で割り引かれていると見なせるため，このように呼ばれている．w の有界性の仮定は議論や正則条件の単純化のためのもので，多くの論文で仮定されているが本質的ではない．この関数は，リスク過程 R を特に(1.1)に限定せず，一般のリスク過程に対して定義される．特に，$w\equiv 1$，$\delta=0$ とすると，$\phi(u)=\psi(u)$: 破産確率(1.3)となる．以下，他の例をいくつか挙げよう．

例 1. $\delta=0, w(x,y)=\mathbf{1}_{\{x\leq x_0, y\leq y_0\}}$ とすると，

$$\phi(u)=\mathbb{P}\{R_{\tau(u)-}\leq x_0, |R_{\tau(u)}|\leq y_0, \tau(u)<\infty\}$$

は，事象 $\{\tau(u)<\infty\}$ 上における $(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|)$ の不完全同時分布を与える．

例 2. 上の同時分布が密度 p_u を持つとき，$w(x,y)=\mathbf{1}_{(x_0,y_0)}(x,y)$ とすれば，$\phi(u)=p_u(x_0,y_0)$ が密度 p_u の表現を与える．

例 3. $\delta>0$ を金利と見なし，$w(x,y)$ を破産時の“深刻度”$(R_{\tau(u)-},|R_{\tau(u)}|)=(x,y)$ に応じて支払われる再保険金額と考えれば，$\phi(u)$ はそのための一時払い保険料と見なせる．

例 4. $w(x,y)=\delta^{-1}(1-e^{-\varrho y})$ とおく．ただし，$\varrho\geq 0$ は注意 1, (1.10) で述べた Lundberg 指数である．このとき，$\phi(u)$ は，$\tau(u)$ から $T(u):=\inf\{t>\tau(u)|R_t\geq 0\}$ までの間に単位時間当たり 1 が支払われる (連続払い) 年金保険原価となることが知られている (Gerber and Shiu, 1997b)．

以上のような保険に関する応用のほかにも，次のようなオプション価格付けへの応用があり，Gerber-Shiu 関数はこれまでそれぞれに固有の発展を遂げてきた保険数学と数理ファイナンスとの両分野に“接点”を与える重要な意味を持つであろう．

例 5. $X_t=e^{R_t}$ となる株価 X を考えよう．このとき，ペイオフ $\max\{K-X_t,0\}$ で表されるアメリカン・プット・オプションを考える．ただし，K は権利行使価格である．今，$\tau(u):=\inf\{t>0|X_t<e^a\}\,(a\leq\min\{u,\log K\})$ で権利行使する戦略を考えたときのオプション価格は $w(x,y)=\max(K-e^{a-y},0)$ としたときの $\phi(u-a)$ で表現される (Gerber and Shiu, 1998)．

Gerber-Shiu 関数は近年の危険理論における最も重要な話題の一つであり，最近では Gerber-Shiu 関数に関する話題に特化した国際会議“*International Gerber-Shiu Workshop*”が開かれたり，金融・保険数理の分野で権威ある国際誌“*Insurance*: *Mathematics and Economics*”でも，Gerber-Shiu 関数に関する特集号 (Vol. 46, Issue 1, 1–270, Feb. 2010) が出版されるなど，盛んに研究されている．本論文の目的は，この Gerber-Shiu 関数に関する最近の結果について概観し，その統計的推測について議論することである．

2. 一般化リスク過程に対する Gerber-Shiu 関数

Lundberg や Cramér らによる古典的リスク理論の後，(1.1) におけるクレーム過程 C の部分は様々な確率過程として拡張され，さらにブラウン運動などによる摂動が付加されるなど，リスク過程が一般化されながら破産の問題が議論されてきた．最近では C を，レヴィ過程 S として一般化し，さらに S とは独立なレヴィ過程 Z を摂動として加えたレヴィ保険リスク過程 (Lévy insurance risk process)：

$$R_t=u+\beta t-S_t+Z_t$$

などが議論されている．

本節では，完全に一般化されたレヴィ保険モデルまでの拡張は考えず，実用上十分広いクラスに属するが理論的にも扱いやすい上記モデルのある部分族を“一般化リスク過程”として紹介する．そのための準備として，初めにいくつかの重要なレヴィ過程とその性質について簡単に触れておく．より詳細に関してはレヴィ過程に関する成書，Bertoin (1996)，Sato (1999) 等を参照されたい．応用書では Cont and Tankov (2004)，3 章などでも平易で簡潔な解説が得られる．

2.1 従属過程

レヴィ保険リスク過程における S は，累積クレームのモデルとして，しばしばパスが非減少なレヴィ過程である**従属過程** (subordinator) の一つとして定義される．

S をレヴィ測度 ν_S を持つ従属過程とすると，$S_t\geq 0$ より，Laplace 変換 $\mathbb{E}[e^{-sS_1}]\,(s>0)$ は常

に存在する．そこで，Laplace 指数 Ψ_S を

$$\Psi_S(s) := -\log \mathbb{E}[e^{-sS_1}]; \quad s \geq 0$$

の形で定義すると，ある定数 $a \in \mathbb{R}$ が存在して以下のように書ける：

$$\Psi_S(s) = as + \int_0^\infty (1 - e^{-sx}) \nu_S(dx).$$

このとき，S のパスは以下のような表現を持つ：

$$S_t = at + \sum_{s \leq t} \Delta S_s \mathbf{1}_{\{\Delta S_s \neq 0\}}; \quad \Delta S_t := S_t - S_{t-}.$$

従属過程では $\Delta S_t > 0$ であり，任意の区間 $[0,t]$ においてジャンプは可算回起こりうるが，上記右辺の和は収束する．したがって，パスは有界変動である．また，上記表現における定数 a を“ドリフト”と言う．

保険リスクモデルにおける S は累積クレーム額を表すという性格上，通常ドリフトを持たない $(a=0)$ 従属過程として定義される．(1.1) における複合ポアソン過程 C もドリフトのない従属過程であり，$\nu_C(dz) = \lambda F_U(dz)$ である．従属過程では，複合ポアソン過程に限り $[0,t]$ におけるジャンプの回数が有限になる．

2.2　ジャンプが負のレヴィ過程

レヴィ保険リスク過程における Z は，しばしば負のジャンプのみを持つ (spectrally negative) レヴィ過程として定義される．ただし，ジャンプサイズは負値のみをとるが，パス自体は非減少とは限らない．したがって，$-Z$ としても必ずしも従属過程にはならない．

Z の Laplace 指数を，従属過程のときとは符号を変えて以下のように定義する．

$$\psi_Z(s) := \log \mathbb{E}[e^{sZ_1}]; \quad s \geq 0.$$

任意の $s,t > 0$ に対して $\mathbb{E}[e^{sZ_t}] < \infty$ となる (Bertoin, 1996, p. 187) ので，これは常に存在する．このとき，ある定数 $b, \sigma \in \mathbb{R}$ が存在して，以下が成り立つ．

$$\psi_Z(s) = bs + \frac{\sigma^2}{2} s^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx)\, \nu_Z(dx) < \infty.$$

ただし，ν_Z は Z のレヴィ測度である．特に，$\nu_Z \equiv 0$ のとき，Z はブラウン運動である．したがって，Z はブラウン運動 $B_t \sim N(bt, \sigma^2 t)$ と，レヴィ測度 ν_Z を持つようなある“純粋ジャンプ過程” (pure jump process) J によって

$$Z_t = B_t + J_t \tag{2.1}$$

なる分解表現をもつ．特に，J の Laplace 指数は以下である：

$$\psi_J(s) = \int_{-\infty}^0 (e^{sx} - 1 - sx)\, \nu_Z(dx). \tag{2.2}$$

J も，従属過程と同様に，一般には無限頻度のジャンプをもつレヴィ過程であるが，そのパスの構造は複雑で，“小さい”ジャンプの和：

$$\sum_{s \leq t} \Delta J_s \mathbf{1}_{\{|\Delta J_s| \leq 1\}}$$

が一般には(絶対)収束せず，ある種の補填(compensator)を必要とする．これが従属過程との大きな違いである．適当な補填によって，J からあるマルチンゲール部分 M を取り出すことが出来て，

$$J_t = -t\int_{|x|>1} x\,\nu_Z(dx) + M_t + \sum_{s\le t}\Delta J_s \mathbf{1}_{\{|\Delta J_s|>1\}}$$

と書けることが知られている．特に，M の 2 次変分は $[M,M]_t = \sum_{s\le t}(\Delta M_s)^2 < \infty$ となることが知られており，これは J の不規則な変動が，本質的にジャンプのみによることを意味している．これが“純粋ジャンプ”といった意味である．ここではこれ以上の詳細は述べないが，例えば，本節冒頭に挙げたような成書を参照されたい．

通常，リスクモデルにおける Z はノイズのようなものであり，$\mathbb{E}[Z_t]\equiv 0$ が仮定される．つまり，$\psi'(0)=0$ を満たす必要があり，このとき $b=0$ である．

摂動 Z の保険数理的意味は，保険料収入の不規則性やクレーム以外で支払うべきコスト，あるいは，投資などに伴う備金の変動などであり，クレームと保険料収入以外の様々な不規則性をこの項にまとめてしまうというのが，この分野での一つの考え方である．

注意 2.　摂動 Z に対して応用上重要な場合は，$\sigma>0, \nu_Z=0$ なる拡散摂動(diffusion-perturbation)や，$\sigma=0, \nu_Z(dx)=c|x|^{-(\alpha+1)}\mathbf{1}_{(-\infty,0)}\,dx$; $\alpha\in(1,2)$ なる α-安定摂動(α-stable perturbation)などである．

注意 3.　従属過程の場合とジャンプが負のレヴィ過程の場合で Laplace 指数の定義を変えたが，こうすることで任意の $s\ge 0$ で $\Psi_S(s), \psi_Z(s)$ が存在し得，また，

$$\psi_{R-u}(s) = \beta s - \Psi_S(s) + \psi_Z(s) \tag{2.3}$$

のように，サープラス $R_t - u = \beta s - S_t + Z_t$ とその Laplace 指数の符号がそろうという利便性もある．Laplace 指数の定義の仕方(特に符号に関して)は，著者，論文によってまちまちであるので注意が必要である．本論文の記法は Huzak et al. (2004) に依っている．

2.3　一般化リスク過程

以下のようなリスク過程を考える．

$$R_t = u + \beta t - S_t + Z_t\,. \tag{2.4}$$

ここで，S はドリフトを持たない従属過程，Z はジャンプが負のレヴィ過程で $\mathbb{E}[Z_t]\equiv 0$ とする．すなわち，S と Z はそれぞれ以下の Laplace 指数を持つ：

$$\Psi_S(s) = \int_0^\infty (1-e^{-sx})\nu_S(dx)\,;$$
$$\psi_Z(s) = \frac{\sigma^2}{2}s^2 + \int_{-\infty}^0 (e^{sx}-1-sx)\,\nu_Z(dx)\,.$$

また，レヴィ過程の定義により $S_0 = Z_0 = 0$ $a.s.$ に注意しておく．本論文で“一般化リスク過程(モデル)”というときは，上記を満たすモデルを指すものとする．

実際的な S や Z の解釈は，S が累積クレーム額に対する一種の近似であり，それ以外の不確実性・摂動が Z に対応している．したがって，ある $\theta>0$ に対して

$$\beta = (1+\theta)\mathbb{E}[S_1] = (1+\theta)\Psi_S'(0)$$

が純益条件となる．特に，$S\equiv C$，$Z\equiv 0$ の時が古典的リスクモデルである．摂動を含み，応用上よく用いられる重要なモデルは $S\equiv C$，$Z=\sigma W$ ($\sigma>0$，W はウィナー過程)の場合で，拡散摂動モデルとか，ウィナー・ポアソン・リスクモデルなどと言われる．

このような一般化リスクモデルに対しても，一般化 Lundberg 方程式や調整係数が(1.9)や(1.10)と同様に定義される．すなわち，(2.3)により，注意 1 で述べた一般化 Lundberg 方程式は，定数 $\delta>0$ に対して

$$\ell(s):=\beta s-\Psi_S(s)+\psi_Z(s)=\delta \tag{2.5}$$

と書け，$\delta=0$ の時の負解 $s=-\gamma$ に対して $\gamma>0$ が調整係数となるのである．これによって，一般化リスク過程の破産確率に対しても(1.4)-(1.8)と類似の結果が得られている．これらについての詳細は例えば，Yang and Zhang (2001)，Morales and Schoutens (2003)，Huzak et al. (2004)などを参照されたい．また，さらに一般のレヴィ過程やセミマルチンゲールモデルに対する破産確率評価もあり，Bertoin and Doney (1994)，Sørensen (1996)，Klüppelberg et al. (2004)，Doney and Kyprianou (2006)等の仕事がある．

3. Gerber-Shiu 関数に対する諸結果

1.1 節において，古典的リスク過程の破産確率 ψ が満たす不完全再生方程式(DRE)を紹介したが，実は一般化リスク過程に対しても同様な DRE が成り立つ；cf. Huzak et al. (2004)．DRE と，Pollaczek-Khinchin 型公式，Laplace 変換公式などは，再生理論を介して密接に関連しており，これらいずれかの導出問題が破産確率評価の中心的な話題となっている．

今，Gerber-Shiu 関数は破産確率を内包する表現を持っていることを考えれば，Gerber-Shiu 関数も同様に，DRE や，Pollaczek-Khinchin 型公式のような関係式を満たすことが期待されよう．実際，以下のように，様々な一般化リスク過程に対してそれらが導かれている：Gerber and Landry (1998)は，S が複合ポアソン過程，Z がブラウン運動の場合に，罰則 $w(x,y)$ が x に依存しない場合の DRE を導出，Tsai and Willmot (2002)がその結果を一般の $w(x,y)$ の場合へ拡張した．Garrido and Morales (2006)は，$Z\equiv 0$ だが S が一般の従属過程の場合に DRE, Pollaczek-Khinchin 型公式等を導出し，Morales (2007)は，それを Z がブラウン運動の場合へ拡張．ごく最近の結果として，Biffis and Morales (2010)が一般化モデル(2.4)に対して Pollaczek-Khinchin 型公式を導出している．ここでは，最後に挙げた Biffis and Morales (2010)の結果を紹介しておく．

定理 1.（Biffis and Morales, 2010, Corollary 4.1）一般化リスク過程 R に対して純益条件を仮定する．また，Z は(2.1)の分解 $Z=B+J$ をもつとする．このとき，R に対する Gerber-Shiu 関数 ϕ は以下の表現を持つ．

$$\phi(u)=\left[w_0e^{-\varrho u}\int_u^\infty k(y)\,dy+H_w(u)\right]*\sum_{k=0}^\infty g^{*k}(u);\quad x\geq 0, \tag{3.1}$$

ここに，$k(u):=\beta D^{-1}e^{-\beta D^{-1}u}$;　$D:=\sigma^2/2$;

$$g(y):=\frac{1}{\beta}\int_0^y e^{-\varrho(y-s)}k(y-s)\left[\int_s^\infty e^{-\varrho(x-s)}\nu_S(dx)+G_\varrho(s)\right]ds;$$
$$H_w(u):=\frac{1}{\beta}\int_0^u e^{-\varrho(u-s)}k(u-s)\int_s^\infty e^{-\varrho(x-s)}K_{\nu_{S-Z}}(x)\,dxds;$$
$$K_{\nu_{S-Z}}(x):=\int_x^\infty w(x,y-x)\,\nu_{S-Z}(dy).$$

また，ν_{S-Z} はレヴィ過程 $S-Z$ のレヴィ測度であり $\nu_{S-Z}(dz)=\nu_S(dz)+\nu_Z(-dz)$．$\varrho$ は一般化 Lundberg 方程式(2.5)の非負一意解であり，特に $\delta=0$ のときは $\varrho=0$．さらに，G_ϱ は以下の Laplace 変換表現を介して定義される関数である：

$$\mathcal{L}G_\varrho(s)=\frac{\psi_J(s)-\psi_J(\varrho)}{\varrho-s}.$$

ただし，ψ_J は(2.2)で与えられる．

再生理論の標準的な議論(例えば，Feller (1971)の XI 章や，Rolski et al. (1999)の 6 章，Lemma 6.1.2 など)により，(3.1)は，以下の再生方程式(3.2)の解であることが分かる．

系 1.　定理 1 と同じ仮定の下で，ϕ は以下の DRE を満たす．

$$\phi(u)=\left[w_0e^{-\varrho u}\int_u^\infty k(y)\,dy+H_w(u)\right]+\int_0^u\phi(u-y)g(y)\,dy. \tag{3.2}$$

注意 4.　今，関数 f に対して $\Delta f_h(u):=[f(u+h)-f(u)]/h$ とおくと，(3.2)の形から以下の等式を得る：$h>0$ に対して，

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\Delta\phi_h(u)&=\frac{1}{h}\Delta[w_0A+H_w]_h(u)\\&\quad+\frac{1}{h}\int_0^h\phi(u+y)g(-y)\,dy+\int_{-1}^u\phi(u-y)\left(\frac{1}{h}\Delta g_h(u)\right)\mathbf{1}_{\{y\geq -h\}}\,dy.\end{aligned}$$

ただし，$A(u):=e^{-\varrho u}\int_u^\infty k(y)\,dy$．ここで，$h\to 0$ とするとき，最後の積分の極限が存在すれば微分可能性が得られる．したがって，例えば，g' が $[0,u]$ 上有界であれば，最後の積分と $h\to 0$ による極限は交換可能となり ϕ の微分可能性を得る．特に，次節で扱う拡散変動モデルでは，これが成り立っている．

系 2.　定理 1 と同じ条件を仮定し，さらに以下の条件をおく：

$$\int_0^\infty\left[\int_0^z e^{-sx}w(x,z-x)\,dx\right]\nu_{S-Z}(dz)<\infty. \tag{3.3}$$

このとき，任意の $s>0$ に対して $\mathcal{L}K_{\nu_{S-Z}}(s)$ は存在し，以下の ϕ の Laplace 変換表現を得る．

$$\mathcal{L}\phi(s)=\frac{\mathcal{L}H_w(s)+w_0\,(\varrho+\beta/D+s)^{-1}}{1-\mathcal{L}g(s)};\quad s\geq 0,$$

ただし，

$$\begin{aligned}\mathcal{L}g(s)&=\frac{[\Psi_S(\varrho)-\Psi_S(s)]+[\psi_J(s)-\psi_J(\varrho)]}{(\varrho-s)(D(s+\varrho)+\beta)};\\\mathcal{L}H_w(s)&=\frac{\mathcal{L}K_{\nu_{S-Z}}(s)-\mathcal{L}K_{\nu_{S-Z}}(\varrho)}{(\varrho-s)(D(s+\varrho)+\beta)}.\end{aligned}$$

この結果は，系 1 から直ちに従う．すなわち，畳み込みの Laplace 変換について $\mathcal{L}(h*g)(s)=\mathcal{L}h(s)\mathcal{L}g(s)$ であり，関数 $Q(s):=\int_s^\infty e^{-\varrho(x-s)}\nu_S(dx)$ に対して，

$$\mathcal{L}Q(s)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_\varepsilon^\infty e^{-(s-\varrho)y}\left[\int_y^\infty e^{-\varrho x}\,\nu_S(dx)\right]dy=\frac{\Psi_S(s)-\Psi_S(\varrho)}{s-\varrho}$$

となることに注意して，DRE (3.2)の両辺を Laplace 変換すればよい．

上記結果において，$Z\equiv 0$，S を複合ポアソン過程とし，特に $w\equiv 1,\delta=0$ とすると，1.1 節で述べた古典的モデルにおける破産確率の対応する結果(1.4)-(1.6)と一致することが確認できる．

注意 5. 条件(3.3)は Z のジャンプ項が有界変動: $\int_{|z|<1} z\nu_Z(dz) < \infty$, であれば成り立つ条件であり，応用上はそれほど制限的でない．Z が無限変動ジャンプを持つ場合には，例えば，$w \equiv 1$ のような重要な場合が含まれないが，この場合には，別のアプローチにより ϕ のラプラス表現が得られる．例えば，Huzak et al. (2004)等を参照せよ．

Pollaczek-Khinchin 型公式や Laplace 変換公式は，次節で述べる Gerber-Shiu 関数の統計的推測の際にその指針を与えてくれるであろう．他にも Feller (1971)，XI.6–XI.7 節などの議論を ϕ の DRE に適用することによって，Cramér-Lundberg 型の近似公式を得ることができるが，本稿の目的は ϕ の統計的推測について述べることなので，ここでは割愛する．例えば，Tsai and Willmot (2002)では，S が複合ポアソン過程，Z がブラウン運動の場合に ϕ の Cramér-Lundberg 型の近似を求めているので参考にされたい．

4. Gerber-Shiu 関数の推定

リスクモデル(2.4)において，S や Z に関する分布の特性量(レヴィ測度や σ の値など)は実際には未知であり，過去のクレーム・財務データによって推定されるべきものである．Gerber-Shiu 関数もこれらに依存する以上，その推定は統計的な課題となろう．この推定問題を考える上で参考になるのは，特殊ケースである破産確率の推定法であり，Gerber-Shiu 関数の推定法はそれらを含むような手法になるべきである．

4.1 破産確率に対する経験推定

破産確率に対する統計的推測には伝統的に 2 種類のアプローチがある：一つは，調整係数を推定して Lundberg 型不等式や Cramér 型近似を求めるものであり，もう一つはノンパラメトリックに破産確率そのものを推定するものである．前者に対する研究は数多くあり，調整係数の推測論には M-推定の枠組みによる Grandell (1979)，Csörgö and Teugels (1990)；順序統計量に基づく Deheuvels and Steinebach (1990)，Csörgö and Steinebach (1991)；ブートストラップ法による Embrechts and Mikosch (1991)などである．調整係数は本質的に Lundberg 方程式の解であるから，これらの推定手法は，Lundberg 指数を推定する際の良い指針となろう．一方，後者に関しては Frees (1986)，Croux and Veraverbeke (1990)などがその先駆けとしてあったが，これらの推測論ではクレーム頻度を非ランダムな定数 N とおき，$N \to \infty$ に基づく漸近理論が展開されていた．Bening and Korolev (2002)らはこれに異を唱え，連続時間型のサープラスモデルでは時間 $[0,T]$ における観測に基づいて推測すべきとし，クレーム頻度を点過程 $(N_t)_{t\in[0,T]}$ として $T \to \infty$ に基づく漸近理論を展開した．クレーム数 N がランダムであるようないわゆる集合的危険理論(collective risk theory)において，$N \to \infty$ という設定は確率論的意味が不明確であり，漸近理論のためには Bening and Korolev (2002)らの設定が極めて自然である．我々も以下ではこのような考え方に立って推定を論ずる．

さて，我々は Gerber-Shiu 関数に対する後者のような直接的推定法に興味がある．破産確率に対する先行研究の中で，Gerber-Shiu 関数に対して有力と思われる手法として，先に述べた Bening and Korolev (2002)，あるいは，Mnatsakanov et al. (2008)を挙げておきたい．Bening and Korolev (2002)は，破産確率の Pollaczek-Khinchin 型の級数表現を適当な有限和で近似し，それを経験推定することで破産確率の推定量を構成した．一方，Mnatsakanov et al. (2008)は，古典的モデルにおける破産確率の Laplace 変換表現の経験推定量をつくり(実際には，彼らは生存確率 $\overline{\psi}(u) := 1 - \psi(u)$ の Laplace 変換を考えている)，それにある種の逆変換を施して破産確率を復元する手法を提案している．今，一般化リスク過程の Gerber-Shiu 関数に対して，その Pollaczek-Khinchin 型公式も Laplace 変換表現も既知であるから，これらの両手法を Gerber-Shiu

関数に対して利用できそうである．

次節では，Mnatsakanov et al. (2008) の一つの拡張として，Gerber-Shiu 関数の Laplace 変換に基づいた経験推定法に関するノートを述べる．Mnatsakanov et al. (2008) では，古典的リスクモデルにおける $\overline{\psi}$ の推定に対して，クレーム頻度を非確率的な設定にして論じているが，ここでは少しモデルを拡張し，拡散摂動モデルを考え，Bening and Korolev (2002) と同様に $[0,T]$-観測に基づいて，Gerber-Shiu 関数の漸近推測を論ずる．以下，研究ノートとして概略にとどめるが，詳細に興味のある読者は Shimizu (2010a) を参照されたい．

もう一つのトピックである Pollaczek-Khinchin 型公式を利用した推定法に関しては，いくつかの技術的困難のためにまだ実現しておらず，5.4 節にいくらかコメントを残すにとどめる．

4.2 $\mathcal{L}\phi$ に対する経験推定量（拡散摂動モデルの場合）

本節では以下のような拡散摂動モデル（ウィナー・ポアソンモデル）を考え，その Gerber-Shiu 関数の推定について論ずる．

$$R_t = u + \beta t - C_t + \sigma W_t; \quad C_t = \sum_{i=1}^{N_t} U_i .$$

ここに，σ は正の定数で，N は強度 λ をもつポアソン過程，$\{U_i\}$ は N と独立で，分布 F_U をもつ IID 確率変数列，W はウィナー過程である．このリスク過程に対する Gerber-Shiu 関数の Laplace 変換は，系 2 により以下で与えられる：

$$\mathcal{L}\phi(s) = \frac{\mathcal{L}K(s) - \mathcal{L}K(\varrho) + w_0 D(\varrho - s)}{[\beta + D(s+\varrho)](\varrho - s) - \lambda[\mathcal{L}_{F_U}(s) - \mathcal{L}_{F_U}(\varrho)]} . \tag{4.1}$$

ただし，$D := \sigma^2/2$,

$$K(x) := \lambda \int_x^\infty w(x, y-x) F_U(dy),$$

であり，ϱ は Lundberg 指数：$\ell(\varrho) = \delta$;

$$\ell(s) := \beta s - \lambda(1 - \mathcal{L}_{F_U}(s)) + Ds^2 ,$$

である．

我々は，R の時間 $[0,T]$ におけるパスを時間連続的に観測できると仮定する．すなわち，任意の時点 $t \in [0,T]$ における R_t の値は既知であり，クレームサイズ $(U_1, U_2, \ldots, U_{N_T})$ も特定可能であるとする．さらに，以下を仮定する：

- 純益条件: $\beta > \lambda\mu$，ただし，$\mu := \mathbb{E}[U_1]$;
- 十分大きな $p > 0$ に対して，$\int_0^\infty |u|^p F_U(du) < \infty$;
- 与えられた $\delta > 0$ に対し，ある既知の定数 $\underline{\varrho}, \overline{\varrho} > 0$ が存在して，$\varrho \in (\underline{\varrho}, \overline{\varrho})$.

注意 6. 最後に挙げた条件は，$\ell(s)$ が未知である以上一見不自然に映るかもしれない．一般に，十分小さな $\underline{\varrho} > 0$ と十分大きな $\overline{\varrho} > 0$ をとることで $\varrho \in (\underline{\varrho}, \overline{\varrho})$ は満たされるが，$\underline{\varrho}, \overline{\varrho}$ らが既知という仮定は，以下の (4.2) のように，ϱ の推定量 $\widehat{\varrho}$ を定義するための技術的な仮定である．実際には区間 $(\underline{\varrho}, \overline{\varrho})$ の中に $\widehat{\varrho}$ が存在することが多く，応用上，$\underline{\varrho}, \overline{\varrho}$ を知る必要性は少ないであろう．

ここで注意すべきことは，上のような連続観測の下では，拡散係数 σ の値は，その局所的な 2 次変分を計算することで確定的に推定可能ということである：

$$\sum_{i=1}^m \left(R_{i/m} - R_{(i-1)/m}\right)^2 - \sum_{i=1}^{N_1} U_i^2 \to \sigma^2 \quad a.s. \quad (m \to \infty) .$$

したがって，以下では $\sigma > 0$ は既知として扱う．

さて，(4.1) における未知量 $\lambda, \mathcal{L}K, \mathcal{L}_{F_U}$ を以下で推定する．

$$\widehat{\lambda} := \frac{N_T}{T}; \quad \widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s) := \frac{1}{N_T}\sum_{i=1}^{N_T} e^{-sU_i}; \quad \widehat{\mathcal{L}K}(s) := \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{N_T}\int_0^{U_i} e^{-sx} w(x, U_i - x)\,dx.$$

また，ϱ を以下で推定する．

$$\widehat{\varrho} := \arg\min_{s\in I} |\widehat{\ell}(s) - \delta|, \tag{4.2}$$

ただし，$I := [\underline{\varrho}, \overline{\varrho}]$; $\widehat{\ell}(s) := \beta s - \widehat{\lambda}(1 - \widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s)) + Ds^2$ であり，特に，$\delta = 0$ のときは $\widehat{\varrho} = 0$ と定める．

注意 7. 上の推定量に対して，大数の法則によって以下のことが証明できる．

$$\widehat{\lambda} \to \lambda \quad a.s.; \quad \sup_{s\in I} |\widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s) - \mathcal{L}_{F_U}(s)| \xrightarrow{P} 0; \quad \sup_{s\in I} |\widehat{\mathcal{L}K}(s) - \mathcal{L}K(s)| \xrightarrow{P} 0. \tag{4.3}$$

さらに，中心極限定理により，$T \to \infty$ のとき，

$$\widehat{\lambda} = \lambda + O_p(T^{-1/2}); \quad \widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s) = \mathcal{L}_{F_U}(s) + O_p(T^{-1/2}); \quad \widehat{\mathcal{L}K}(s) = K(s) + O_p(T^{-1/2})$$

となることも分かる．詳細は，例えば Shimizu (2009b)，Theorems 3.2，3.3 などを参照されたい．

注意 8. (4.3) により，

$$\sup_{s\in I} |\widehat{\ell}(s) - \ell(s)| \xrightarrow{P} 0,$$

となることが分かるので，M-推定の標準的な理論により，$\widehat{\varrho} = \varrho + O_p(T^{-1/2})$ が容易に示される；Grandell (1991)，あるいは van der Vaart (1998)，5 章を参照のこと．

これらの推定量を用いて，$\mathcal{L}\phi$ の推定量を，

$$\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) := \frac{\{\widehat{\mathcal{L}K}(\widehat{\varrho}) - \widehat{\mathcal{L}K}(s)\} + w_0 D(s - \widehat{\varrho})}{(\beta + D(s + \widehat{\varrho}))(s - \widehat{\varrho}) + \widehat{\lambda}\{\widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(s) - \widehat{\mathcal{L}_{F_U}}(\widehat{\varrho})\}}$$

のように定めれば，これは $\mathcal{L}\phi$ の一致推定量になっている．すなわち，各 $s \in I$ に対して，$\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) \xrightarrow{P} \mathcal{L}\phi(s)$.

4.3 正則化 Laplace 逆変換による ϕ の推定

前節で $\mathcal{L}\phi$ の一致推定量を構成できたので，あとは $\mathcal{L}\phi$ に対する Laplace 逆変換 $\mathcal{L}^{-1}$ を施せば，

$$\mathcal{L}^{-1}\widehat{\mathcal{L}\phi}(s) \xrightarrow{P} \phi(s)$$

となることが期待される．しかし，話はそう単純ではない．

一般に，Laplace 変換 $\mathcal{L}$ は L^2 上の有界作用素 ($\|\mathcal{L}\| = \sqrt{\pi}$) であり L^2 からそれ自身への単射にはなっているが，全射ではなく，$\mathcal{L}^{-1}$ は非有界であることが知られている．このことが，$\mathcal{L}^{-1}$ の連続性を保証しない．すなわち，$g_n \to \mathcal{L}f$ なる関数列に対して，$\mathcal{L}^{-1}g_n \to f$ が必ずしも保証されない．これは典型的な**不適切問題** (ill-posed problem) として知られている；Carroll et al. (1991)，Vapnik (2006) など．この問題を回避するために，Chauveau et al. (1994) で与えられた“正則化”Laplace 逆変換を用いる．

定義 2. $m>0$ を定数とする． 関数 $g\in L^2$ に対して，正則化 Laplace 逆変換 $\mathcal{L}_m^{-1}:L^2\to L^2$ を以下で定める：

$$\mathcal{L}_m^{-1}g(t)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty \Psi_m(y)y^{-1/2}e^{-tvy}g(v)\,dvdy;\quad t>0.$$

ここに，

$$\Psi_m(y)=\int_0^{a_m}\cosh(\pi x)\cos(x\log y)\,dx;\quad a_m:=\pi^{-1}\cosh^{-1}(\pi m)$$

である．

Chauveau et al. (1994) によれば，各 $m>0$ に対して $\|\mathcal{L}_m^{-1}\|\le m\|\mathcal{L}\|=\sqrt{\pi}m$ で L^2 上の有界作用素となり，これが正則化の意味である．任意の $f\in L^2$ に対して，

$$\|\mathcal{L}_m^{-1}\mathcal{L}f-f\|\to 0\quad(m\to\infty)$$

となり，“正則化パラメータ” m を十分大きくとることで，逆変換が定義される．

さて，正則化逆変換 $\mathcal{L}_m^{-1}$ は L^2 上の写像として定義されたが，一般に L^2-関数でないものも扱えるように，Mnatsakanov et al. (2008) のアイデアを借り，一つのデバイスを用意しておこう．

関数 G は $\mathbb{R}_+$ 上で微分可能とし，定数 $\vartheta\ge 0$ に対して，次のようにおく．

$$G_\vartheta(u):=e^{-\vartheta u}G(u);\quad g_\vartheta(u):=\frac{\partial}{\partial u}G_\vartheta(u).$$

また，$\mathcal{L}G$ の時刻 T までの観測に基づく推定量を $\widehat{\mathcal{L}G}$ とかき，$\mathcal{L}G_\vartheta$ の推定量を以下のように定める．

$$\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta(s):=\widehat{\mathcal{L}G}(s+\vartheta)\quad a.s. \tag{4.4}$$

実際，$\mathcal{L}G_\vartheta(s)=\mathcal{L}G(s+\vartheta)$ となることから，上の定義は自然であろう．もしも，$s\to 0$ や $s\to\infty$ のとき，$\widehat{\mathcal{L}G}(s)=O(s^{-1})$ であれば (実際，$\widehat{\mathcal{L}\psi}(s)$ などはこの場合である)，任意の $\vartheta>0$ に対して $\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta\in L^2$ となり，$\mathcal{L}_m^{-1}$ が適用できる状況となる．以上の記法を用いて，

$$\widehat{G}_m^\vartheta(u):=e^{\vartheta u}\mathcal{L}_m^{-1}\big(\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta\big)(u), \tag{4.5}$$

のように定めると，これは G 自身の“良い”推定量になっていることが期待される．実際，以下の補題を得る．

補題 1. (Shimizu, 2010a) 関数 $G:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ は 1 階導関数 g を持ち，G,g は高々多項式増大とする．また，(4.4) で与えられる $\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta$ が，ある実数列 $\gamma_T\to\infty\,(T\to\infty)$ に対して，以下を満たすとする：

$$\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta\in L^2; \tag{4.6}$$

$$\big\|\widehat{\mathcal{L}G}_\vartheta-\mathcal{L}G_\vartheta\big\|_{L^2}=O_p(\gamma_T^{-1}). \tag{4.7}$$

このとき，(4.5) で定義される $\widehat{G}_{m(T)}^\vartheta$ は以下を満たす：任意の正数列 K_T と数列 $m(T)=O(\gamma_T(\log\gamma_T)^{-1/2})$ に対して

$$\int_0^{K_T}|\widehat{G}_{m(T)}^\vartheta(s)-G(s)|^2\,ds=O_p(e^{2\vartheta K_T}(\log\gamma_T)^{-1}).$$

今，Gerber-Shiu 関数の推定量を

$$\widehat{\phi}_T^\vartheta(u):=e^{\vartheta u}\mathcal{L}_{m(T)}^{-1}(\widehat{\mathcal{L}\phi}_\vartheta)(u) \tag{4.8}$$

で定める．このとき，補題 1 を直接適用することによって以下の定理を得る．

定理 2.（Shimizu, 2010a） Gerber-Shiu 関数 $\phi(u)$ の導関数 ϕ' と，罰則関数 w が以下の条件を満たすとする：ある定数 $C>0$ に対して，

$$|\phi'(x)| + \left|\int_0^\infty w(x,dy)\right| \le C(1+|x|^C).$$

さらに，定数 $\vartheta>0$ を $(\beta-\lambda\mu)\vartheta>\delta$ を満たすように取るとする．このとき，数列 $m(T)$ を $m(T)=O\big(\sqrt{T/\log T}\big)$ $(T\to\infty)$ と選ぶことによって，以下の (i), (ii) が成り立つ：

(i) 任意の $K>0$ に対して，

$$\int_0^K |\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u)-\phi(u)|^2\,du = O_p((\log T)^{-1}) \quad (T\to\infty).$$

(ii) $\vartheta\in(0,1/2)$ と取れるならば，

$$\int_0^{\log\log T} |\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u)-\phi(u)|^2\,du = O_p((\log T)^{2\vartheta-1}) \quad (T\to\infty).$$

この定理は，推定量 $\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u)$ がある種の L^2-ノルムについて弱一致性を持っていることを示している．

注意 9. 定理では (4.8) のように $\vartheta>0$ による推定量の正則化を行っているが，実は $\widehat{\mathcal{L}\phi}\in L^2$ であり，この正則化は補題 1 の (4.6) のためのものではない．上の定理の証明では，$\vartheta=0$ のとき条件 (4.7) の確認が困難であり，$\vartheta>0$ とすると容易になる．したがって，$\vartheta>0$ と取ることは，必ずしも本質的でないかもしれないことに注意しておく．

注意 10. ϑ に関する条件：$(\beta-\lambda\mu)\vartheta>\delta$ は，λ,μ が未知であるから直接は確認できないが，現実的には，$(\beta-\widehat{\lambda}\widehat{\mu})\vartheta>\delta$ となるように，ϑ は“十分大きく”選ばれるべきであろう．十分なサンプル数の下では，大数の法則と純益条件によって上記の条件が満足される．また，定理 2 より，推定量 $\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u)$ の (i) の意味での収束率は ϑ によらないことに注意すると，ϑ を大きく選ぶことは，漸近的には問題はない．

注意 11. Chauveau et al. (1994), (3.6) によると，$\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u)$ は，次のように陽な積分表現で書くことができる：

$$\begin{aligned}\widehat{\phi}_T^{\vartheta}(u) &= \frac{e^{\vartheta u}}{\pi^2}\iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{-uxy}\Phi_T(y)\widehat{\mathcal{L}\phi}(x+\vartheta)\,dxdy\\ &= \frac{e^{\vartheta u}}{\pi^2}\int_0^\infty (\mathcal{L}\Phi_T)(ux)\widehat{\mathcal{L}\phi}(x+\vartheta)\,dx.\end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned}\Phi_T(y) &= \frac{\pi\sinh(\pi r_T)\cos(r_T\log y)+\log y\cosh(\pi r_T)\sin(r_T\log y)}{\sqrt{y}\{\pi^2+(\log y)^2\}};\\ r_T &:= \pi^{-1}|\cosh^{-1}(\pi m(T))| = \pi^{-1}\log(\pi m(T)+\sqrt{\pi^2 m^2(T)-1}).\end{aligned}$$

5. いくつかの拡張と今後の課題

5.1 一般化リスク過程への拡張について

前節では，ウィナー・ポアソンモデルに対して Laplace 変換に基づく Gerber-Shiu 関数の推定について述べたが，この推定法は (2.4) の一般化モデルにも適用可能である．ただし，モデル

を無限ジャンプ型にまで一般化したときには，観測スキームに対していくらか統計的問題が生ずる．

前節のようにリスク過程のパス $(R_t)_{t\geq 0}$ が完全に観測可能とすると，R の可算無限個のジャンプまで観測可能ということになるが，これはあまり現実的な設定とはいえないであろう．そこで実際には，サイズ(絶対値)がある定数 $\varepsilon>0$ より大きな R のジャンプ

$$J_R(\varepsilon,T):=\left\{\Delta R_t:=R_t-R_{t-}\,\middle|\,|\Delta R_t|>\varepsilon, t\in[0,T]\right\}$$

のみ観測可能という設定を考えることができる．一方，このような観測スキームの下では，前節とは異なり，Z の中の拡散係数 σ が確定せず推定の対象となってくる．このとき，以下のような推定量によって σ^2 が推定可能である：

$$\widehat{\sigma^2}:=\sum_{i=1}^m (R_{i/m}-R_{(i-1)/m})^2-\sum_{t\leq 1}|\Delta R_t|^2\mathbf{1}\{\Delta R_t\in J_R(\varepsilon,1)\}.$$

この一致推定のためには，$m\to\infty$ だけでなく $\varepsilon\downarrow 0$ のような漸近スキームが必須であり，

$$\widehat{\sigma^2}\xrightarrow{P}\sigma^2 \quad (m\to\infty,\varepsilon\downarrow 0)$$

を示すことができる．

さて，系 2 の Laplace 表現を見ると，Ψ_S，ψ_J，$\mathcal{L}K_{\nu_{S-Z}}$，および ϱ が推定対象である．これらの推定のためには，関数 H とレヴィ測度 $\nu^*=\nu_S$, ν_J, ν_{S-Z} に対して，

$$\nu^*(H):=\int_0^\infty H(z)\nu^*(dz)$$

の形の汎関数が推定できればよい．今，ジャンプは S と Z 両方で起こり得るので，一般には，$\Delta R_t>0$ がどちらの項に起因するかという識別性の問題が考えられるが，保険リスクを考える際には S は累積クレームであり，Z は非クレームによる変動という明確な区別があるので，$J_S(\varepsilon,T)$ と $J_Z(\varepsilon,T)$ が識別可能とするのは不自然でない．このような設定を認めれば，以下のような $\nu^*(H)$ の推定量が構成可能である：レヴィ過程 $X=S,Z$ に対して，

$$\widehat{\nu}_X(H):=\frac{1}{T}\sum_{t\leq T}H(\Delta X_t)\mathbf{1}\{\Delta X_t\in J_X(\varepsilon,T)\}; \tag{5.1}$$

$$\widehat{\nu}_{S-Z}(H):=\frac{1}{T}\sum_{t\leq T}H(-\Delta R_t)\mathbf{1}\{\Delta R_t\in J_R(\varepsilon,T)\}. \tag{5.2}$$

ここでも，$\varepsilon=\varepsilon(T)\downarrow 0\,(T\to\infty)$ を適当に取ることで，これらの $\sqrt{T}$-漸近正規性を示すことができる．この証明には，複合点過程に関するマルチンゲール収束定理が必要だが，それは例えば，Kutoyants (1984)，Theorem 4.5.4 の証明と同様の議論によって得ることができる．

以上のような推定量を用いて $\mathcal{L}\phi$ を推定すれば，前節と同様な議論で，その正則化逆変換により ϕ を復元できる．具体的な ϕ の推定量に関しては，ここでは割愛するが，Shimizu (2010b) は(2.4)のレヴィ保険リスクモデルに対して，R のパスに関する適当な離散的観測とジャンプ $J_R(\varepsilon,T)$ に基づく Gerber-Shiu 関数の推定問題を扱い，定理 2，(i) と同様の結果を導いている．

5.2 Gerber-Shiu 関数の拡張について

Gerber-Shiu 関数は(1.11)の形で初めて考察されたのであるが，最近では，その様々な方向への拡張が試みられている．例えば，Biffis and Kyprianou (2010) や，Biffis and Morales (2010) 等によって，リスク過程 R のパス依存型 Gerber-Shiu 関数：

$$\overline{\phi}(u):=\mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau(u)}w\left(R_{\tau(u)-},|R_{\tau(u)}|,\inf_{t\leq\tau(u)-}R_t\right)\mathbf{1}_{\{\tau(u)<\infty\}}\middle|R_0=u\right] \tag{5.3}$$

(ただし，w は $\mathbb{R}^3$ 上の有界関数) が一般化リスク過程に対して議論されており，定理 1, (3.1) を含むような DRE を導出している．

また，本論文では，無限境界型 (infinite horizon) の破産確率 (1.3) の拡張として Gerber-Shiu 関数を紹介したが，危険理論でのもう一つの重要なトピックである有限境界型 (finite horizon) の破産確率 $\psi(u,T) := \mathbb{P}\{\tau(u) \le T\}$ の拡張として，有限境界型 Gerber-Shiu 関数

$$\phi(u,T) := \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau(u)} w\left(R_{\tau(u)-}, |R_{\tau(u)}|, \inf_{t\le\tau(u)-} R_t \right) \mathbf{1}_{\{\tau(u)\le T\}} \middle| R_0 = u \right] \tag{5.4}$$

を考えることもできる．これに関する研究はあまり進展がなく，筆者の知る限り Morales and Zuznetsov (2010) らの研究がある程度である．その一因は解析の困難さにあるであろう．実際，古典的モデルに対する $\psi(u,T)$ の場合でも，DRE に類似の等式は成り立つが漸化式型の等式となるため (e.g., Rolski et al., 1999, Theorem 5.6.2)，本論文のような議論を直接適用することは難しい．Morales and Zuznetsov (2010) らは，いくつかの特別な罰則と特別なリスク過程に対して，そのような等式表現を介さずに (5.4) の級数表現を与えている．

Gerber-Shiu 関数のパス依存型拡張として別の方向へのものがある．Cai et al. (2009) は，クレーム支払い等にかかる保険会社のオペレーティング・コストまで含めて考察する目的で，以下のような関数を導入した：

$$H_l(u) := \mathbb{E}\left[\int_0^{\tau(u)} e^{-\delta t} l(R_s)\, dt \middle| R_0 = u \right]. \tag{5.5}$$

特に，原点におけるディラック測度 δ_0 と，$\tilde{\nu}_{S-Z}(dz) := -\nu_{S-Z}(-dz)$ なる表記法を用いて，

$$l_0(x) := w_0\delta_0(x) + \int_x^\infty w(x, x-z)\, \tilde{\nu}_{S-Z}(dz)$$

とおくと，適当な正則条件の下で，$H_{l_0} \equiv \phi$ となることが分かり (cf. Cai et al., 2009, Proposition 3.1), (5.5) は Gerber-Shiu 関数 (1.11) の一つの拡張になっている．ただし，この形式では (5.3) を含まないことに注意しておく．いくつかの特別な場合，たとえば，S が複合ポアソン過程で，Z がウィナー過程のような場合であれば，一般の連続関数 l に対して H_l がある DRE を満足することが示される (Feng, 2010) ので，H_l に対する推測には本論文の手法が適用できるであろう．

更にごく最近の話題として，Gerber-Shiu 関数のダイナミックな拡張も話題になっている．ϕ は初期値を与えた下での非確率的な関数として与えられているが，Garrido (2010) は，これを現在時刻 t で条件付けることにより，**Gerber-Shiu 過程**

$$\phi_t(u) := \mathbb{E}\left[e^{-\delta\tau(u)\vee t} w\left(R_{(\tau(u)\vee t)-}, |R_{\tau(u)\vee t}| \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \tag{5.6}$$

を提案した．ただし，$\mathcal{F}_t := \sigma(R_s; s \le t)$ である．もともと保険数理では，破産確率に対して，VaR などの短期的なリスク指標とは異なる長期的リスク指標としての利用可能性が議論されてきたという経緯があるが，その拡張として Gerber-Shiu 過程がより動的なリスク管理に応用できるのではないかと期待されており，今後の研究が待たれている．

5.3 リスク過程に対するある統計的視点

リスク過程 R のパスを完全に (連続的に) 観測できるということは，R 自体が厳密なサープラスを記述していると見なすことに相当し，統計理論上も有用である．しかしながら，摂動項があるパスや，前節のように可算無限個のジャンプを連続観測するということは実は非現実的であり，リスクモデル (2.4) はサープラスの一種の近似である，と考えるほうが自然であろう．そもそも無限頻度でクレームが起こるというモデル自体非現実的であり，無限回起こる S の小さなジャンプも摂動の一種と見るほうが理解しやすい．R が近似であるとすれば，実際に我々

が R そのものを完全に観測するという設定は不自然で，むしろ，背後に存在する(完全には観測できない)無限頻度型のサープラス R を時間離散的に観測していると考えるほうが自然である．このような考え方の上で，Shimizu (2009a) は，ウィナー・ポアソンリスクモデルに対する離散観測に基づく破産確率推定を扱っている．

一方，S については厳密に累積クレームに対するモデルであるという立場をとれば，保険会社にとって S のジャンプサイズは既知である．したがって，完全な離散観測を考えずに S のジャンプのみ連続観測可能とすることは不自然とは言えない．つまり，S の(ある一定以上の)ジャンプサイズは特定可能で，それ以外のパスに関しては離散的にしか観測できない，というような立場も，特に保険リスクに関してはとることができるであろう．

以上のように，保険リスク過程の観測に対する視点にはいくつかの立場をとることができ，立場によって統計的推測の手法は大きく異なることになる．それぞれの視点からの Gerber-Shiu 関数の推定は，応用上の重要な課題であろう．

5.4 その他の推定法について

本稿では，主にノンパラメトリックな推定法について述べたが，もちろんパラメトリックなアプローチも考えられる．レヴィ測度にパラメトリックモデルを与え，パラメータに推定値を代入してしまえば，あとは解析的な Laplace 逆変換や高速フーリエ変換などを利用した数値的 Laplace 逆変換を用いたり，DRE のような積分方程式を数値的に解くことによって ϕ を求めることができる．しかしながら，Gerber-Shiu 関数はクレーム分布の裾の挙動に大きく依存しており，有限サンプルに基づく推定では，その最大値を超える(サンプルの無い)部分の裾確率に対するパラメトリックモデルを与えることは実際には難しい問題である．また，モデルの誤特定(misspecification)という普遍的な問題もあり，一般化リスクモデルのような複雑なモデルでは，この問題が顕著に現れるであろう．したがって，レヴィ測度にモデルを与えないノンパラメトリック法の提案は無意味ではない．ただし，ノンパラメトリック・アプローチでは誤特定の問題を回避する代わりに，データの無い裾部分については極めて“保守的”な推定しかしないので，結局，両者のアプローチには一長一短があるといわざるを得ない．

一方，Laplace 変換公式に基づく推定法だけでなく，Bening and Korolev (2002) らが破産確率を推定したように，定理 1 の Pollaczek-Khinchin 型公式を利用した推定も考えられる．すなわち，(3.1) の級数を適当な $M_T \in \mathbb{N}$ までの有限和で近似し，

$$\widehat{\phi}(u) = \left[w_0 e^{-\widehat{\varrho} u} \int_u^\infty \widehat{k}(y)\,dy + \widehat{H}_w(u) \right] * \sum_{k=0}^{M_T} \widehat{g^{*k}}(u) \tag{5.7}$$

なる推定量を考えることである．特に，Bening and Korolev (2002) による破産確率推定量の収束率は標準的な $\sqrt{T}$-オーダーを達成しており，前節のような対数オーダーよりもはるかに良好な推定量が提案されていることから，統計的推測の意味では，Laplace 変換に基づいた推定よりも将来的な期待が持てるかも知れない．しかしながら，一般化リスクモデルにこの方法を適用するには，いくつか課題が残る．例えば，g に含まれる G_ϱ の形が Laplace 変換表現を通してのみ既知であり，一般に G_ϱ 自体の形が不明で推定量構成が難しい．正則化 Laplace 逆変換を用いることも考えられるが，漸近論的評価は困難となるであろう．Z がブラウン運動の場合には $G_\varrho \equiv 0$ となるので，推定量 (5.7) の構成は，5.1 節の (5.1), (5.2) で述べた統計量を用いれば原理的には可能である．しかし，$M_T \to \infty (T \to \infty)$ の発散のレートの問題や，畳み込みによる多重積分の収束評価，あるいは数値的な近似といった問題も残る．これらについては未解決の課題である．

謝　辞

査読者の方には，本論文の初稿を丁寧に読んで頂き，誤りを的確に指摘していただきました．加えて有益なコメントを頂きましたことを，ここに感謝申し上げます．本研究は，科研費/若手研究(B)：no. 21740073，及び，科学技術振興機構(JST)，CREST の助成を受けたものです．

参 考 文 献

Asmussen, S. (2000). *Ruin Probability*, World Scientific, Singapore.

Beekman, J. A. (1969). A ruin function approximation, *Transactions of Society of Actuaries*, **21**, 41–48; 275–279.

Bening, V. E. and Korolev, V. Yu. (2002). Nonparametric estimation of the ruin probability for generalized risk processes, *Theory of Probability and Its Applications*, **47** (1), 1–16.

Bertoin, J. (1996). *Lévy processes*, Cambridge Tracts in Mathematics, 121, Cambridge University Press, Cambridge.

Bertoin, J. and Doney, R. A. (1994). Cramér's estimate for Lévy processes, *Statistics & Probability Letters*, **21** (5), 363–365.

Biffis, E. and Kyprianou, A. E. (2010). A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, **46**, 85–91.

Biffis, E. and Morales, M. (2010). On a generalization of the Gerber-Shiu function to path dependent penalties, *Insurance: Mathematics and Economics*, **46**, 92–97.

Cai, J., Feng, R. and Willmot, G. E. (2009). On the expectation of total discounted operating costs up to default and its applications, *Advances in Applied Probability*, **41** (2), 495–522.

Carroll, R. J., Vanrooji, A. C. M. and Ruymgaart, F. H. (1991). Theoretical aspects of ill-posed problems in statistics, *Acta Applicandae Mathematicae*, **24**, 133–140.

Chauveau, D. E., van Rooij, A. C. M. and Ruymgaart, F. H. (1994). Regularized inversion of Noisy Laplace transforms, *Advances in Applied Mathematics*, **15**, 186–201.

Cont, R. and Tankov, P. (2004). *Financial Modelling with Jump Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Florida.

Croux, K. and Veraverbeke, N. (1990). Nonparametric estimators for the probability of ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **9** (2), 127–130.

Csörgö, M. and Steinebach, J. (1991). On the estimation of the adjustment coefficient in risk theory via intermediate order statistics, *Insurance: Mathematics and Economics*, **10** (1), 37–50.

Csörgö, S. and Teugels, J. L. (1990). Empirical Laplace transform and approximation of compound distributions, *Journal of Applied Probability*, **27** (1), 88–101.

Deheuvels, P. and Steinebach, J. (1990). On some alternative estimates of the adjustment coefficient in risk theory, *Scandinavian Actuarial Journal*, No. 3–4, 135–159.

Dickson, D. C. M. (1992). On the distribution of the surplus prior to ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **11** (3), 191–207.

Doney, R. A. and Kyprianou, A. E. (2006). Overshoots and undershoots of Lévy processes, *The Annals of Applied Probability*, **16** (1), 91–106.

Dufresne, F. and Gerber, H. U. (1988). The surpluses immediately before and at ruin, and the amount of the claim causing ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **7** (3), 193–199.

Embrechts, P. and Mikosch, T. (1991). A bootstrap procedure for estimating the adjustment coefficient, *Insurance: Mathematics and Economics* **10** (3), 181–190.

Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (2003). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer-Verlag, Berlin.

Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. II*, 2nd ed., John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.

Feng, R. (2010). An operator based approach to the analysis of defective renewal equations in a jump diffusion risk model, 3rd International Gerber-Shiu Workshop, University of Waterloo, June 14–16, preprint.

Frees, E. W. (1986). Nonparametric estimation of the probability of ruin, *ASTIN Bulletin*, **16**, 81–90.

Garrido, J. (2010). Five easy pieces on Gerber-Shiu analysis, 3rd International Gerber-Shiu Workshop, University of Waterloo, June 14–16.

Garrido, J. and Morales, M. (2006). On the expected discounted penalty function for Lévy risk processes, *North American Actuarial Journal*, **10** (4), 196–217.

Gerber, H. U. and Landry, B. (1998). On the discounted penalty at ruin in a jump-diffusion and the perpetual put option, *Insurance: Mathematics and Economics*, **22** (3), 263–276.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1997a). The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, **21** (2), 129–137.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1997b). From ruin theory to pricing reset guarantees and perpetual put options, *Insurance: Mathematics and Economics*, **24** (1–2), 3–14.

Gerber, H. U. and Shiu, E. S. W. (1998). On the time value of ruin; with discussion and a reply by the authors, *North American Actuarial Journal*, **2** (1), 48–78.

Gerber, H. U., Goovaerts, M. J. and Kaas, R. (1987). On the probability and severity of ruin, *ASTIN Bulletin*, **17** (2), 151–163.

Grandell, J. (1979). Empirical bounds for ruin probabilities, *Stochastic Processes and Their Applications*, **8**, 243–255.

Grandell, J. (1991). *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag, New York.

Huzak, M., Perman, M., Šikić, H. and Vondraček, Z. (2004). Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes, *The Annals of Applied Probability*, **14** (3), 1378–1397.

Klüppelberg, C., Kyprianou, A. E. and Maller, R. A. (2004). Ruin probabilities and overshoots for general Lévy insurance risk processes, *The Annals of Applied Probability*, **14** (4), 1766–1801.

Kutoyants, Y. (1984). *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Heldermann Verlag, Berlin.

Mikosch, T. (2004). *Non-life Insurance Mathematics. An Introduction with Stochastic Processes*, Springer-Verlag, Berlin.

Mnatsakanov, R., Ruymgaart, L. L. and Ruymgaart, F. H. (2008). Nonparametric estimation of ruin probabilities given a random sample of claims, *Mathematical Methods of Statistics*, **17** (1), 35–43.

Morales, M. (2007). On the expected discounted penalty function for a perturbed risk process driven by a surbordinator, *Insurance: Mathematics and Economics*, **40**, 293–301.

Morales, M. and Schoutens, W. (2003). A risk model driven by Lévy processes, *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, **19** (2), 147–167.

Morales, M. and Kuznetsov, A. (2010). On the finite-time Gerber-Shiu function for three new Lévy insurance risk processes, 3rd International Gerber-Shiu Workshop, University of Waterloo, June 14–16.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Ltd., Chichester.

Sato, K. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge.

Shimizu, Y. (2009a). A new aspect of a risk process and its statistical inference, *Insurance: Mathematics and Economics*, **44**, 70-77.

Shimizu, Y. (2009b). Functional estimation for Lévy measures of semimartingales with Poissonian jumps, *Journal of Multivariate Analysis*, **100** (6), 1073–1092.

Shimizu, Y. (2010a). Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Wiener-Poisson risk model, Research Report Series 10-03, Department of Mathematical Science, Osaka University, Osaka.

Shimizu, Y. (2010b). Estimation of the Gerber-Shiu function for a Lévy insurance risk process from certain discrete data, Research Report Series 10-05, Department of Mathematical Science, Osaka University, Osaka: available at SSRN: `http://ssrn.com/abstract=1622924`.

Sørensen, M. (1996). A semimartingale approach to some problems in risk theory, *ASTIN Bulletin*, **26** (1), 15–23.

Tsai, C. C. and Willmot, G. E. (2002). A generalized defective renewal equation for the surplus process perturbed by diffusion, *Insurance*: *Mathematics and Economics*, **30** (1), 51–66.

Willmot, G. E. and Lin, X. S. (2001). *Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Springer-Verlag, New York.

Yang, H. and Zhang, L. (2001). Spectrally negative Lévy processes with applications in risk theory, *Advances in Applied Probability*, **33** (1), 281–291.

van der Vaart, A. W. (1998). *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge.

Vapnik, V. (2006). *Estimation of Dependences Based on Empirical Data*, Springer, New York.

124 Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics Vol. 59, No. 1, 105–124 (2011)

Gerber-Shiu Function in Risk Theory and Statistical Inference

Yasutaka Shimizu

Graduate School of Engineering Science, Osaka University; JST, CREST

Gerber and Shiu introduced the concept of *expected discounted penalty function* in a series of their classical papers. This function is called *the Gerber-Shiu function* in risk theory. Since its introduction, the analysis has been getting a lot of attention in the field of insurance and finance, and many authors have studied it for various risk processes from probabilistic aspects. However, from a practical point of view, statistical inference for the Gerber-Shiu function is also an important issue in actuarial mathematics, since it has some unknown quantities that need to be estimated from real data. This paper briefly reviews some recent results on the Gerber-Shiu function for a class of Lévy insurance risk processes and discuss their statistical inference. The estimation procedure treated in this paper is nonparametric: we consider an empirical type estimator of the Laplace transform of the Gerber-Shiu function, and take a *regularized inverse* to recover the Gerber-Shiu function. We illustrate the procedure for a Wiener-Poisson risk process, and show a kind of consistency and the rate of convergence of a proposed estimator. We also make some remarks on an extension of the method to a generalized risk process, and on another estimation procedure.

Key words: Risk theory, Gerber-Shiu function, generalized risk processes, regularized Laplace inversion, empirical estimation.