

与信判断が確率変動するときの倒産企業の 信用リスク値分布のモデル化

— Skew-normal 分布の応用 —

大野 忠士¹ · 山下 智志² · 椿 広計³

(受付 2010 年 9 月 30 日 ; 改訂 2011 年 3 月 30 日 ; 採択 3 月 30 日)

要 旨

正規分布に従う確率変数が別の正規分布に従う閾値を超過する場合にできる歪んだ分布を非対称正規分布 (skew-normal distribution) という。近年のファイナンス理論では企業は信用リスク値がある一定の閾値 (与信判断基準) を超えた時に倒産すると考える問題設定が一般的である。本稿では非対称正規分布の考え方に基づき、信用リスク値と閾値が共に確率変動するものと考え、信用リスク値分布が確率変動する閾値によって切断されることで倒産企業の信用リスク値分布が形成されると考えた。

この考察に従い非対称正規分布の性質を説明した後、実証データを用い非対称正規分布の閾値パラメータ推定を行ったところ、金融環境の変化に合わせて閾値 (与信判断) の位置パラメータが変動していく様子を示すことができた。また、このモデルは倒産企業分布の歪度が閾値のパラメータ、特に尺度パラメータ (与信判断の振れ幅) の大きさを説明され得ることを示唆している。

キーワード：非対称正規分布、信用リスク、skew-normal、hidden truncation.

1. はじめに

倒産は企業の信用状態が悪化することによって起こると考えられるが、銀行等与信を供与する金融機関側の判断基準が厳しくなることによっても引き起こされる。このため、同じ信用リスク値をもつ企業であっても経済環境が良く銀行等の与信判断基準が甘い時には非倒産となり、経済環境が悪く銀行等の与信判断基準が厳しくなれば倒産する。

また倒産企業の信用リスク値の分布は左右対称の釣鐘状カーブを形成する場合と信用リスク値の高いほうに裾が重い非対称分布を形成する場合がある (大企業倒産のケース) (大野 他, 2010)。

さて、一般に、金融機関は与信判断の前提として外部格付と似た内部格付制度を有している。また、金融機関は各々独自の基準を持つが、監督官庁の指導もあり同規模の金融機関の与信判断基準は似通ったものになっている。

¹ 筑波大学大学院 ビジネス科学研究科: 〒112-0012 東京都文京区大塚 3-29-1; ono@mbaib.gsbs.tsukuba.ac.jp

² 統計数理研究所: 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3; yamasita@ism.ac.jp

³ 統計数理研究所: 〒190-8562 東京都立川市緑町 10-3; tsubaki@ism.ac.jp

企業は複数の金融機関からあるいは資本市場から借入を行っているのが通常で、1行が与信をストップすれば必ず倒産するというわけではないが、ある特定企業に対する取引銀行団の与信判断全体が大きくネガティブに変化すれば倒産に至る。そういう意味で、「与信判断基準はその時々々の景気、金融情勢を反映した期待値と標準偏差をもつ」と想定することが可能である。

本稿は、倒産が対象企業の信用リスク値のみではなく与信を供与する側の判断基準との相互作用により引き起こされる点に注目し、倒産企業の信用リスク値分布の形成と与信判断の変化が倒産企業の信用リスク値分布に与える影響のモデル化を行う。即ち、本稿では、倒産という事象が企業の信用リスク値がある閾値(与信判断基準)を超える場合に発生すると仮定するが、閾値は一定ではなく確率変動すると考え、非対称正規分布(skew-normal distribution)を適用することで上記事象を包括的に説明する。

2. 先行研究

2.1 信用リスクモデル

企業の信用リスクに関する研究は従来主に倒産判別、倒産確率の予測という方向で研究がなされてきた。こうした信用リスクモデルとしては1. 統計モデル、2. 構造型モデル、3. ハザード率過程モデルの3つがある。

2.1.1 統計モデル

倒産に関する統計的アプローチとしては、古くは単変量の財務指標を用いた Beaver (1966)の研究があり、多変量線形判別モデルを提案した Altman (1968), Deakin (1972), Betts and Belhoul (1987)の研究がある。特に本格的な多変量線形判別モデルとしては Altman (1968)の Zスコア・モデルが有名である。更に、Ohlson (1980), Hopwood et al. (1994), Lennox (1999)は倒産予測においてロジット・モデルが線形判別モデルに比べ予測力が高いこと、より頑健なモデルであることを示した。

金融実務では Altman 流の判別モデルのほか、0%から100%の倒産確率を出力できる便宜性、モデルの頑健性等からロジット・モデルが広く用いられている。ただ、これらの倒産モデルはいずれも企業の財務指標を説明変数とするものであり、経済環境により銀行の与信判断が変化する点を上手くは捉えられていない。

経済指標を説明変数に組み込もうとする試みとしては森平・岡崎(2009)の多期間ロジット・モデルの応用があるが、企業信用リスク値とは別の与信判断の変更というメカニズムまではモデルに反映されていない。

2.1.2 構造型モデル

構造型モデルは企業価値がある確率過程に従って変動し、閾値(負債額等)を下回るとデフォルトが発生すると仮定する。代表的なモデルとして Merton (1974)がある。Merton (1974)は、企業価値の変動が幾何ブラウン運動に従うとし、満期時点においてデフォルト閾値を下回った企業がデフォルトであると仮定した。

更に、改良されたモデルとしては Black and Cox (1976)や Longstaff and Schwarz (1995)の初到達モデルがあり、満期前であっても企業価値がデフォルト閾値を下回った瞬間にデフォルトが発生すると仮定した。これらの構造モデルにおいては各企業ごとの閾値が負債額等一定の値であるとし、各企業の内生変数であるデフォルト距離を測ることで倒産確率を予測している。一方、構造モデルの枠組みを利用するもののデフォルト境界が確率変動に従うとするものに Giesecke and Goldberg (2004), Giesecke (2005), 敦賀・山下(2007)の研究がある。

Giesecke and Goldberg (2004)では企業価値は観測できるがデフォルト境界は観測できないとの前提に立ち、それゆえデフォルト境界がある確率変動に従うとの仮定において倒産確率を

予測している。

2.1.3 ハザード率過程モデル

Jarrow and Turnbull (1992, 1995), Duffie and Singleton (1999)に代表されるハザード率過程モデルは各企業のデフォルト確率がハザード率で定義され、企業のデフォルトは外生的に(ハザード率の確率に従って)発生すると仮定するものである。従来このモデルの研究では社債やCDS (Credit Default Swap) のリスクプレミアムのスプレッド評価という形で外生的なハザード率の推定がなされてきた。

2.2 非対称正規分布 (Skew-normal Distribution)

本稿では倒産企業の信用リスク値分布が時に歪みを持つ現象をモデル化するが、本節ではまず非対称正規分布の定義と性質について述べる。歪んだ分布は数多くあるが、二つの確率変数の相互作用として歪んだ分布が形成されるという考え方に立つ分布として非対称正規分布がある。Azzalini (1985, 1986), Arnold et al. (1993)は共に正規分布に従う2つの確率変数の一方が他方を切断する (hidden truncation) ことで歪んだ分布が形成されるとし、これを非対称正規分布 (skew-normal distribution) と呼んだ。

その後、Azzalini and Dalla Valle (1996)はこれを2変量のケースに拡張し、Azzalini and Capitanio (1999), Arnold and Beaver (2002), Gupta and Gupta (2004)は多変量のケースに拡張した。また、元の分布の前提を正規分布ではなく他の分布とする拡張も行われ、Azzalini and Capitanio (2003), Arnold and Beaver (2002)は多変量 skew-t 分布等へ拡張している。非対称正規分布の適用例としては、裾が重い映画配給収入データの分布に skew-t 分布を当てはめた Walls (2005)の研究があり、金融分野では収益リターンの歪度、尖度に注目してヘッジファンドのリターン分布に skew-normal 分布や skew-t 分布を適用した研究がある (Benedetti, 2004)。しかしながら、倒産分布の形成に切断という選択メカニズムがある点に注目し非対称正規分布を適用した研究は現状ない。

Azzalini (1985)が示した1パラメータの場合の非対称正規密度関数は以下の通り。Y, W が互いに独立の変数で共に標準正規分布に従うとし、 $\lambda Y > W$ というイベントが起こったときの条件付き確率変数 Y を Z と定義する (λ は歪度パラメータ) と Z の密度関数 $f(z)$ は次のように導出される。 $\varphi(\cdot)$ は標準正規分布の密度関数、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数である。

$$Y, W \sim N(0, 1)$$

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(Y \leq z | \lambda Y > W) = \frac{P(Y \leq z, \lambda Y > W)}{P(\lambda Y > W)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^z \int_{-\infty}^{\lambda y} \varphi(y) \varphi(w) dw dy}{P(\lambda Y > W)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^z \varphi(y) \Phi(\lambda y) dy}{P(\lambda Y > W)} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^z \varphi(y) \Phi(\lambda y) dy}{1/2} \end{aligned}$$

よって、Z の密度関数は、次のようなものとなる。

$$(2.1) \quad f(z; \lambda) = 2\varphi(z)\Phi(\lambda z) \quad (-\infty < \lambda < \infty, -\infty < z < \infty)$$

この密度関数(2.1)式は歪度パラメータ λ の大きさにより歪度が変化し、図1に示すように λ が大きいほど歪度が大きくなる。

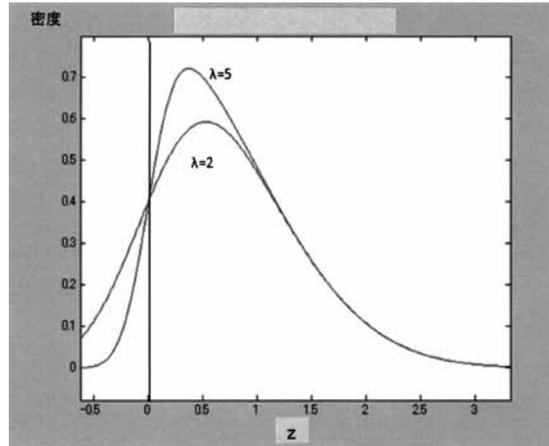


図 1. 非対称正規分布の形状 ($f(z; \lambda) = 2\varphi(z)\Phi(\lambda z)$, $\lambda = 2, 5$ の場合).

倒産企業の信用リスク値分布の実証分析のためには、元の分布と閾値分布それぞれの位置パラメータおよび尺度パラメータを導入した 4 パラメータでのモデル化が必要となる。その前段階として Arnold and Beaver (2002) が示す 2 パラメータの場合の密度関数を示せば以下の通りである。

Y, W が互いに独立の変数で共に標準正規分布に従い、 $\lambda_0 + \lambda_1 Y > W$ というイベントが起こったときの Y を Z と定義すれば、 Z の密度関数 $f(z)$ は次のように導出される。ここで λ_0 は位置パラメータ、 λ_1 は尺度パラメータである。

$$Y, W \sim N(0, 1)$$

$$(2.2) \quad f(z; \lambda_0, \lambda_1) = \frac{\varphi(z)\Phi(\lambda_0 + \lambda_1 z)}{P(\lambda_0 + \lambda_1 Y > W)} = \frac{\varphi(z)\Phi(\lambda_0 + \lambda_1 z)}{\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right)}$$

Arnold and Beaver (2002) は、更に元の Y, W の分布が位置パラメータ μ 、尺度パラメータ σ をもつ正規分布の場合、 Z の密度関数は (2.3) 式のような 4 パラメータ ($\lambda_0, \lambda_1, \mu, \sigma$) をもつ式となることを示した。

$$Y, W \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$(2.3) \quad f(z; \lambda_0, \lambda_1, \mu, \sigma) = \frac{\varphi\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda_0 + \lambda_1\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right)\right)}{\sigma\Phi\left(\frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \lambda_1^2}}\right)}$$

3. 非対称正規分布の倒産分布への応用

上記で述べた非対称正規分布の枠組みを倒産事象に適用するにあたって、確率変数たる企業の信用リスク値 Y を以下のように設定する。通常、信用リスク値 Y は、(3.1) 式のような企業

の財務比率の線形結合の形で表わされる。

$$(3.1) \quad Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_m x_m + \varepsilon$$

β_j : パラメータ

x_j : 企業の財務比率観測データ

ε : 誤差項

($j=0,1,2,\dots,m$, 但し x の添字は 0 を含まない)

Y の値は各企業の信用状態のみに依存する確率変数である。また、ここで与信判断基準たる閾値を W とする。この閾値 W は与信判断基準であり、金融経済環境に依存するが与信対象たる企業の信用状態には依存しない確率変数である。時点により閾値分布は分布のパラメータ(位置・尺度)を変化させていくと考えられる。倒産事象において、倒産直前期の Y の値は観測されるが、閾値 W の値は観測され得ない。倒産に関して観測されるのは $Y > W$ というイベント(倒産)が発生した時の倒産企業の直前期における信用リスク値 $Y (= Z)$ のみである。この前提は、理論の枠組みは異なるものの、デフォルト境界が確率変動とした構造モデル(Giesecke and Goldberg, 2004)が企業価値は観測されるがデフォルト境界は観測されないとした前提と類似している。

3.1 倒産企業の信用リスク値分布の密度関数

倒産企業の信用リスク値を Z とする。この値は Y と等しいが、非倒産企業は対象としておらず、倒産企業のみを対象とする信用リスク値である。さて、Azzalini (1985) や Arnold and Beaver (2002) を参考に、非対称正規分布を倒産事象に当てはめて密度関数を導出すれば以下の通り。

前述の通り、企業の信用リスク値を表わす確率変数を Y とし、与信判断基準たる閾値を表わす確率変数を W とした。 Y は企業の信用状態のみに依存し、 W の分布は金融経済環境にのみ依存する。補論で言及しているが、分析対象の全企業の信用リスク値は正の歪度があるものの連続分布の中ではロジスティック分布、student-t 分布、正規分布の順に適合度が高い。また、企業の倒産分布が財務内容の分布(元の分布)と信用判断(閾値の分布)の組合せで発生すると考え、対称分布からでも閾値が確率変動することで非対称分布が形成されるという仮説を適用するという本稿の目的からは全企業の信用リスク値と閾値が正規分布すると考えても不都合ないと考えたため、ここでは Y と W が互いに独立で共に正規分布に従うと仮定する。

Y の位置、尺度パラメータを μ_1, σ_1 、 W の位置、尺度パラメータを μ_2, σ_2 とし、 Y, W の分布関数を $F(y), G(w)$ 、 Y, W の密度関数を $f(y), g(w)$ とする。また、 $Y > W$ というイベントが起こったときの Y を Z (倒産企業の信用リスク値)と定義すると、 Z の密度関数は、次式で与えられる。

$$(3.2) \quad f(z; \mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2) = \frac{\varphi\left(\frac{z - \mu_1}{\sigma_1}\right) \Phi\left(\frac{z - \mu_2}{\sigma_2}\right)}{\sigma_1 \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}}\right)}$$

これは、既述の(2.3)式に $\mu = \mu_1, \sigma = \sigma_1, \lambda_0 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma_2}, \lambda_1 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ を代入しパラメータ変換を行った結果と同値である。

また、(3.2)式から導かれる対数尤度関数 $l(\theta)$ は次式の通り。ここで $\theta = (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2)$ とする。 n は閾値 W を超えたデータ数(倒産企業数)である。

$$(3.3) \quad l(\theta) = \sum_{i=1}^n \log \left(\varphi \left(\frac{z_i - \mu_1}{\sigma_1} \right) \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\Phi \left(\frac{z_i - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \\ - n \cdot \log \sigma_1 - n \cdot \log \left(\Phi \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}} \right) \right)$$

3.2 倒産分布形成のメカニズム

上記(3.2)式を金融経済的に解釈すれば以下の通り。企業の信用リスク値 Y が閾値 W を超えた場合に倒産すると考え、与信判断基準たる閾値 W を固定したものと捉えずに確率変動するものとする。(3.2)式に即して言えば、企業の信用リスク値 Y が μ_1, σ_1 をパラメータとする正規分布に従い、閾値 W が μ_2, σ_2 をパラメータとする正規分布に従うと考える。企業の財務内容は分布し、また、時点が変われば企業の財務内容も変化するが(これは信用リスク値 Y の変化として計測される)、他方、与信を行う側の判断基準(閾値 W)も変化する。図2が示すように Y は正規分布に従うと仮定している。横軸は信用リスク値 Y 、縦軸は確率密度である。

信用リスク値 Y の高い企業(財務内容の悪い企業)は図2の分布上右寄りに位置し、信用リスク値 Y の低い企業(財務内容の良い企業)は左寄りに位置する。倒産判断の基準となる閾値 W の位置(μ_2)は分布のかなり右寄りにあると考えられる。好景気時に企業の収益力が高まり財務内容が向上すれば、 Y の分布位置(μ_1)は左方向にシフトする。仮に、景気拡大期に与信判断の閾値が変化しなければ、企業の信用リスク値分布が左にシフトする結果、信用リスク値が閾値を超えるケース(倒産企業数)は少なくなる。景気が悪化するときには企業の信用リスク値分布全体が右方向にシフトし閾値を超える企業が増える結果、倒産企業が増加する。他方、与信判断基準の変化は閾値の位置(μ_2)の移動で説明される。信用緩和時には閾値の位置が右にシフトする結果、閾値を超える企業が少なくなり倒産企業が減少する。逆に与信基準が厳格化の際には閾値が左にシフトする結果、閾値を超える企業が増え倒産企業数が増大する。また、閾値の尺度(σ_2)が変化することで倒産分布の形状が変化すると考えられる。

3.3 非対称正規分布の歪度

元の信用リスク値の分布が標準正規分布に従い、閾値が位置パラメータ μ 、尺度パラメータ σ をもつ正規分布であるとすれば、生成される非対称正規分布の歪度 γ は以下の通りとなる。

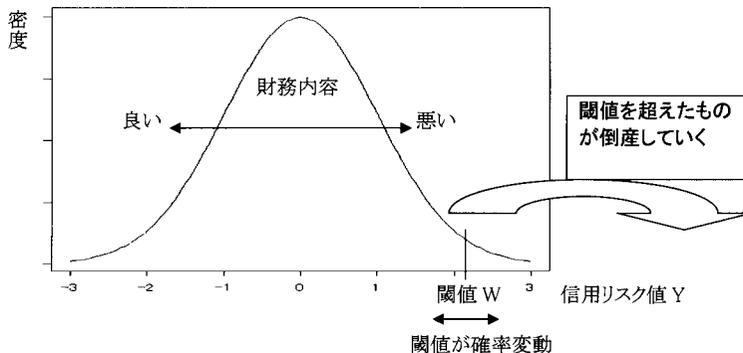


図2. 倒産企業発生メカニズム。

$$(3.4) \quad \gamma = \frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^3 \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} \left[(\alpha^2 - 1) + 3\alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + 2 \left\{ \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} \right\}^2 \right]}{\left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2+1}}\right)^2 \left\{ \alpha \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} + \left\{ \frac{\varphi(\alpha)}{\Phi(\alpha)} \right\}^2 \right\} \right]^{3/2}}$$

(ここで $\alpha = \frac{-\mu}{\sqrt{\sigma^2+1}}$)

非対称正規分布モデルを倒産分布に適用する場合、閾値の位置パラメータは元の分布のそれより大きいところに位置し(値の大きい方がより高い信用リスク)、閾値の尺度パラメータは非負であると考えれば良いから、

$$0 \leq \mu$$

$$0 \leq \sigma$$

の範囲で非対称正規分布(倒産企業分布)の歪度変化を考察すればよい。(3.4)式で μ , σ それぞれについて歪度 γ の変化をみれば、単調減少関数となる(図3, 図4)。倒産事象でいえば、閾値の位置が大きいほど(与信緩和時)倒産分布の歪度は小さくなり、閾値の尺度が大きいほど歪度は小さくなる。

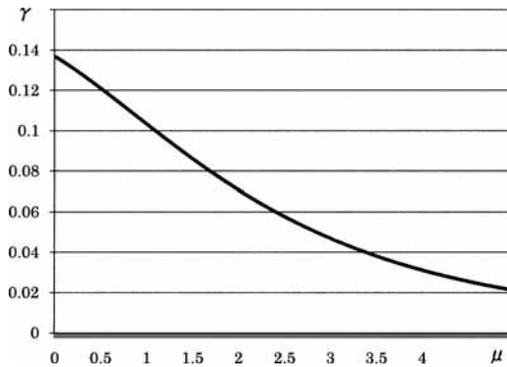


図3. 閾値位置を変化させた場合の非対称正規分布の歪度. 横軸: 閾値位置 μ , 縦軸: 歪度 γ , 閾値尺度を1とした場合.

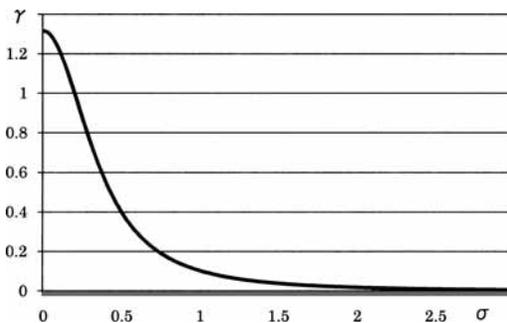


図4. 閾値尺度を変化させた場合の非対称正規分布の歪度. 横軸: 閾値尺度 σ , 縦軸: 歪度 γ , 閾値位置を1とした場合.

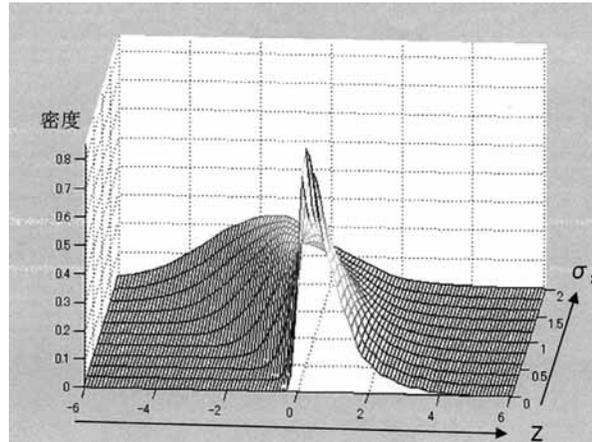


図5. 閾値スケールパラメータ σ_2 の変化と倒産企業信用リスク値 Z 密度. σ_2 を $0 \sim 2$ と変化させた場合, ここでは $\mu_1 = -6.25$, $\sigma_1 = 2.5$, $\mu_2 = 0$ と設定.

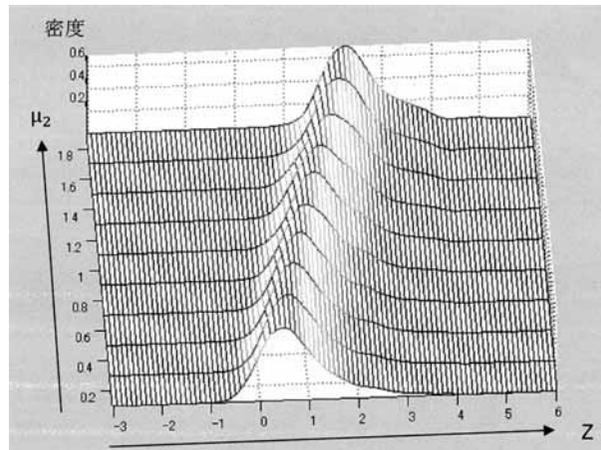


図6. 閾値位置パラメータ μ_2 の変化と倒産企業信用リスク値 Z 密度. μ_2 を $0 \sim 2$ と変化させた場合, ここでは $\mu_1 = -6.25$, $\sigma_1 = 2.5$, $\sigma_2 = 1.5$ と設定.

実際の信用リスク値データに則した値の近傍で閾値の尺度パラメータ σ_2 や位置パラメータ μ_2 を変化させた場合のシミュレーションを行ってみれば以下の通り. 閾値の尺度パラメータ σ_2 が小さいほど倒産企業の信用リスク値分布の歪度は大きくなり(図5手前), 逆に σ_2 が大きいほど歪度は小さくなる(図5奥). 他方, 閾値の位置パラメータ μ_2 が大きくなれば, 倒産企業の信用リスク値分布の位置は右に移動することになるが視覚的には倒産分布の形状はさほど変化しない(図6).

4. 実証分析

本章では第3章で述べた非対称正規分布を実際の企業データに適用した結果を示す. 実証分

析のためには企業の信用リスク値 Y に関するデータが必要である。しかしながら、現在社会的に認知された信用リスクデータ(所与の値としての信用リスク値)は存在しない。そこで本研究では便宜的に二項ロジット・モデルを用いて信用リスクデータを自作することにした。二項ロジット・モデルに用いた財務変数や財務データについては補論に記載した。

4.1 正常企業の信用リスク値と倒産企業の信用リスク値分布

2001年から2006年までの信用リスク値(Y の値)の分布状況を正常先と倒産先別の箱髭図で示せば図7の通り。図中、上の箱髭図が倒産企業の分布を示し、下が正常先の分布を示している。左端が2001年データ、右端が2006年データである。このうち、正常先のみ分布推移(箱髭図)を示せば図8の通り。

正常先全体の信用リスク値(Y の値)は基本的に景気に左右される。好景気の場合、財務内容が改善し信用リスク値が小さくなるため分布は下にシフトし、逆に不況時には信用リスク値が大きくなる結果分布は上にシフトする。左端の2001年、2002年(米国ITバブル崩壊後のミニ不況)以降は、2003年から2006年までほぼ一貫して景気拡大が続いたこともあって、信用リスク値が次第に低下(財務内容が改善)している。

これに対して、倒産先の分布推移をみれば図9の通り。倒産先の信用リスク値 Z の分布推移が与信基準の変化を示唆している。与信判断が甘くなれば財務内容のかなり悪い企業のみが振るい落とされる為、倒産企業の分布の位置は信用リスク値の高い方(グラフでは上方向)にシフトすると考えられ、与信判断基準が厳しくなれば比較的良い財務内容の企業でも倒産可能性が出てくる為、分布の位置が信用リスク値の小さい方(グラフでは下方向)にシフトすることになる。特にここでは倒産先分布と正常先分布の動きが異なっている点に留意を要する。正常先の分布が景気拡大期に下にシフトするのに対し、倒産先の分布は閾値の移動を反映して上にシフトしており、正常先と倒産先の分布では一見逆の動きを示している。また、図8が示す通り、

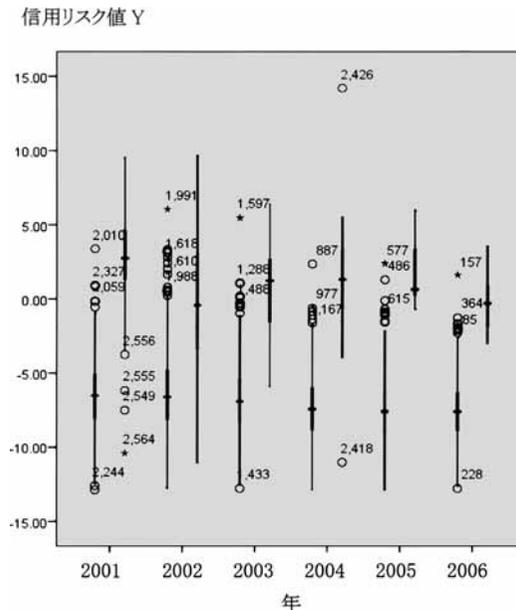


図7. 正常先+倒産先分布推移. 下: 正常先, 上: 倒産先.

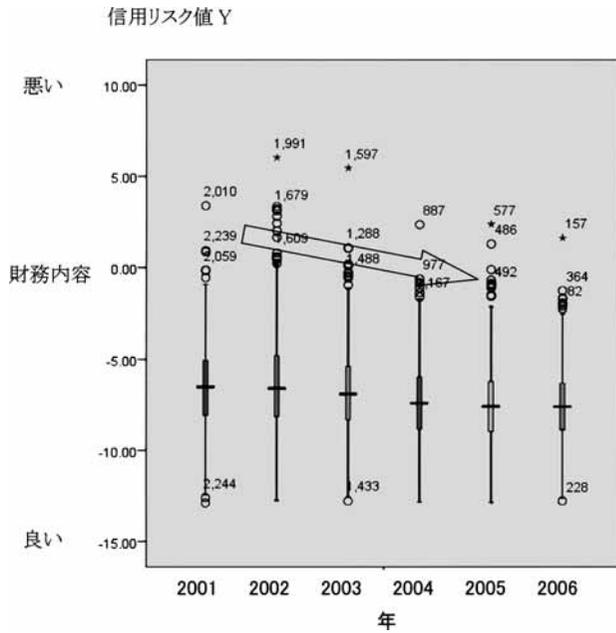


図 8. 正常先 6 年間分布推移. 左端 2001 年, 右端 2006 年.

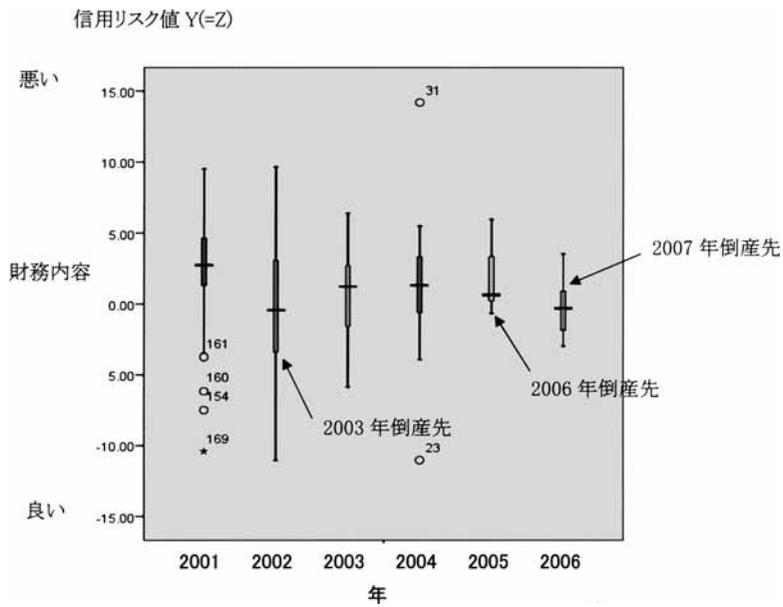


図 9. 倒産先分布推移. 左端 2001 年データ, 右端 2006 年データ.

正常先の分布が景気変動にも拘わらず変化が比較的緩やかなのに対し、図9の倒産企業分布の時系列的な変化は正常先の変化に比べれば大きい。

4.2 閾値パラメータの推定と閾値の時系列推移

倒産企業の Z の値から倒産年の閾値パラメータ (μ_2, σ_2) を求めようとするならば、(4.1)式に示すように対数尤度を最大化する閾値パラメータ $(\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2)$ を推定すれば良い。

ここで、 (μ_1^*, σ_1^*) は全企業の信用リスク値の平均(位置パラメータ)、標準偏差(尺度パラメータ)を示すが、真の分布パラメータが未知であるため、ここでは全企業データの平均と標準偏差を用いた(補論参照)。この2パラメータ (μ_1^*, σ_1^*) は下記(4.1)式では定数として扱われる。

$$(4.1) \quad (\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2) = \arg \max_{\mu_2, \sigma_2} l(\theta) \\ = \arg \max_{\mu_2, \sigma_2} \left[\sum_{i=1}^n \log \left(\varphi \left(\frac{z_i - \mu_1^*}{\sigma_1^*} \right) \right) + \sum_{i=1}^n \log \left(\Phi \left(\frac{z_i - \mu_2}{\sigma_2} \right) \right) \right. \\ \left. - n \log \sigma_1 - n \log \left(\Phi \left(\frac{\mu_1^* - \mu_2}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^{*2}}} \right) \right) \right]$$

z_i : 倒産直前期の倒産先信用リスク値

μ_1^* : 倒産直前期の全企業信用リスク値の平均(位置パラメータ)

σ_1^* : 倒産直前期の全企業信用リスク値の標準偏差(尺度パラメータ)

$\hat{\mu}_2$: 倒産年における閾値の位置パラメータ最尤推定値

$\hat{\sigma}_2$: 倒産年における閾値の尺度パラメータ最尤推定値

倒産企業が非対称正規分布に従うとして、各年毎の倒産企業の信用リスク値データから閾値分布の2パラメータ $(\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2)$ を推定した。各年の推定値を表1に示す。

表1に示す推定パラメータによりシミュレーションした閾値の分布推移(箱髭図)をみれば図10の通り。

倒産分布の推移で予測した通り、与信判断が厳しくなる時に閾値は下方向(信用リスクの小さい方)にシフトし、信用緩和期に閾値は上方向(信用リスクの大きい方)にシフトしている。2002年及び2003年はEnron(2001年12月倒産)、Kmart(2002年1月倒産)、WorldCom(2002年6月倒産)等の大型倒産を受け与信基準が一段と厳しくなった年で、その後米国景気は拡大時期に入った。

米国景気をGDPベースでみる限り2007年末まで拡大傾向をたどるが、推定した与信判断の閾値を見る限り2006年に既に厳格化が始まっている。米国では2006年から住宅価格がいくつかの地域で下落を開始し、住宅市場の減速が本格化した。また2006年初にはGM、Fordの経営不振が表面化した。更に2007年に入ると全国的に住宅価格下落が広がり、遂に2007年8月にはサブプライム問題に起因する金融危機が発生した。本モデルによる与信判断閾値のトレンドは2006年に早くも与信判断引締め兆候があることを示し、2007年には一段と厳格化したことを示していると解釈しうる。

表1. 閾値分布のパラメータ推定値。

与信判断年 (データ年)	2002 (2001)	2003 (2002)	2004 (2003)	2005 (2004)	2006 (2005)	2007 (2006)
位置パラメータ($\hat{\mu}_2$)	5.4098	0.9972	2.9975	4.9862	0.0238	-1.5699
尺度パラメータ($\hat{\sigma}_2$)	1.5686	2.1614	1.3437	1.7775	0.3028	0.5071

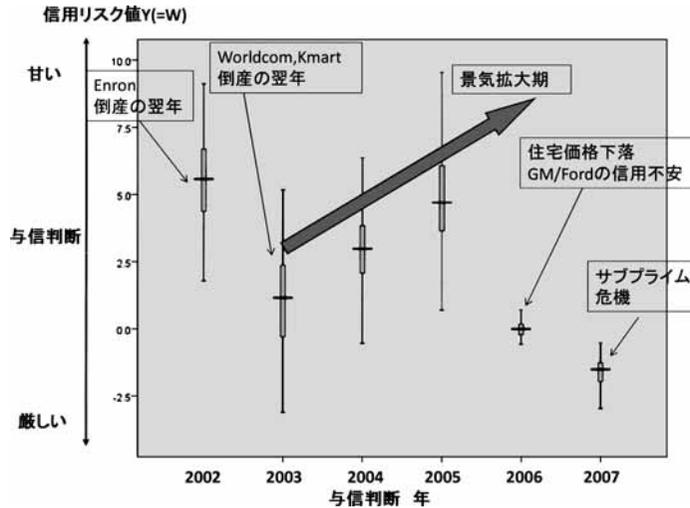


図 10. 推定される閾値の分布推移 (2002 年～2007 年)。

4.3 倒産企業分布形状(歪度)と推定される閾値パラメータ

実際データに基づき総資産 1 億ドル以上の倒産先と 5 億ドル以上の倒産先分布の歪度推移をみれば表 2 の通り. 1 億ドル以上先の場合, 分布の歪みは明確ではないが, 5 億ドル以上先の分布に関しては正に歪む傾向がある.

次に歪度の異なる実際の倒産企業分布 (図 11) と最尤推定した閾値パラメータにより近似した倒産密度関数グラフ (図 12) をみれば以下の通り. 総資産 1 億ドル以上の 2003 年倒産先分布 (図 11 左) の歪みが小さい(歪度 -0.115) のに対し, 総資産 5 億ドル以上の倒産先分布 (図 11 右) は右裾が重い歪んだ分布(歪度 0.485) となっている.

推定閾値パラメータ ($\hat{\mu}_2, \hat{\sigma}_2$) を用いて近似した密度関数グラフをみると, 歪度が小さい総資産 1 億ドル以上先を近似したグラフ (図 12 左) では閾値の変動幅(尺度 2.7846) が大きくなっており, 歪度が大きい総資産 5 億ドル以上のグラフ (図 12 右) では閾値の変動幅(尺度 0.5001) が小さくなっている.

5. まとめ

ここでは企業倒産を, 企業の財務内容が閾値を超えた時に発生する現象と捉え, 企業分布が確率的に変動する閾値(与信判断)によって切断されることによって倒産企業分布は形成されると考えた. その結果, こうしたメカニズムと整合性のある非対称正規分布に倒産企業の信用リスク値が従うと仮定した.

この非対称正規分布モデルでは閾値が確率変動すると考えるため, 財務内容がさほど悪くなくとも倒産する場合や財務内容が悪くても倒産しない場合を説明することができる. また, 実証データを用いて非対称正規分布の閾値パラメータを推定したところ金融環境の変化に合わせて閾値(与信判断)の位置パラメータが変動していく様子を示すことができた. 更に, このモデルは倒産企業分布の歪度が閾値のパラメータ, 特に尺度パラメータ(与信判断の振れ幅)で説明され得ることを示唆している.

与信判断基準の影響を信用リスク値自体から分離して考えるという前提に立てば, 判断基準

表 2. 倒産先分布の歪度比較. (注) 2005 年, 2006 年の総資産 5 億ドル以上の倒産先は各々 2 社であるため歪度を表示せず.

データ年	2001	2002	2003	2004	2005	2006
歪度(総資産 ≥ 1 億 $^{\text{ドル}}$)	0.099	-0.115	-0.187	1.823	0.965	0.417
[企業数]	[67]	[41]	[23]	[19]	[9]	[11]
歪度(総資産 ≥ 5 億 $^{\text{ドル}}$)	0.264	0.485	0.717	1.797	-	-
[企業数]	[34]	[20]	[9]	[11]	[2]	[2]

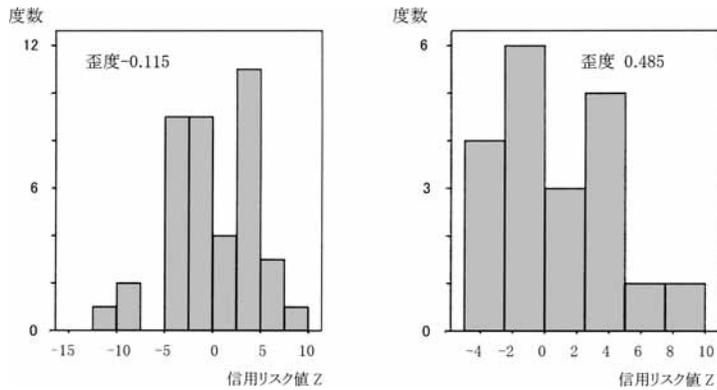
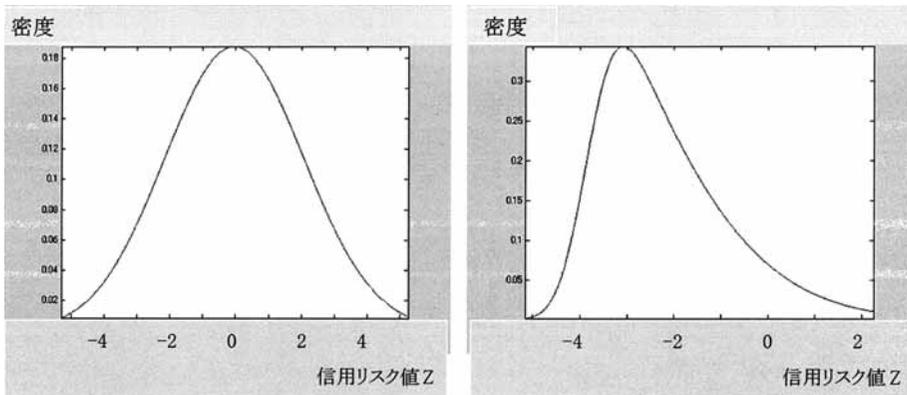


図 11. 2003 年倒産企業(2002 年データ)信用リスク値 Z 度数分布. 左: 総資産 1 億ドル以上先, 右: 総資産 5 億ドル以上先.



総資産 1 億ドル以上先
推定した閾値パラメータ
閾値位置 μ_2 4.2470
同 尺度 σ_2 2.7846

総資産 5 億ドル以上先
推定した閾値パラメータ
閾値位置 μ_2 -3.7496
同 尺度 σ_2 0.5001

図 12. 2003 年倒産企業(2002 年データ)信用リスク値 Z 推定密度. 左: 総資産 1 億ドル以上先の近似, 右: 総資産 5 億ドル以上先の近似.

の変化によって倒産確率が高まるというシナリオ設定が可能になり、こうした場合の影響分析等金融機関のリスク管理の精緻化につながると考える。

補論. 信用リスク値計測

実証分析を行うに当たり、信用リスク値 Y (倒産企業の信用リスク値 Z) のデータを用意する必要がある。ここでは便宜的に金融機関で一般的に用いられている二項ロジット・モデルによる倒産判別モデルを構築し、そのモデルで計測した線形予測子(ロジット変換前)を企業の信用リスク値とした。

なお、ロジット・モデルにおける倒産判別の考え方と本研究における倒産判別の考え方は必ずしも整合的ではない。ロジット・モデルを含む統計モデルは財務比率からなる信用リスク値が観測される原因だとして倒産(結果)予測が可能との考え方を前提としている。しかしながら、本研究では閾値が倒産分布に与える影響を解明しようとしているため、信用リスク値は所与の値として外生的に与えられているとの前提をとる。そこで一般的に最も利用されている二項ロジット・モデルを用い信用リスク値の代用とすることにした。

A.1 財務データサンプル

財務データとして、ここでは米国上場企業データを用いた(S&P社 Compustat データ)。正常先として S&P500 社中から金融保険・不動産を除く 397 社の 2001 年データを用い、倒産企業として 2002 年に倒産した米国上場企業 67 社の 2001 年データを用いた(財務データが入手できる上場企業で、かつ、総資産 1 億ドル以上の全 67 社)。ここで「倒産企業」は米国連邦破産法 Chapter 7 (清算手続)および Chapter 11 (会社更生手続)を申請した企業とした。また、この倒産判別モデルをつかって計測した信用リスク値を用いて、2001 年から 2006 年までの正常先、倒産先データを分析した(表 3)。

モデル構築に当たり正常先と倒産先の規模の乖離が大きいと不都合である。正常先たる S&P 500 (除く金融保険・不動産)のモデル作成年の総資産は最小値 100.4 百万ドル、最大値 495,023 百万ドルであったため、比較対象たりうる規模という観点から総資産 1 億ドル以上の倒産先をサンプルとした(表 4)。

A.2 財務指標とモデル作成手順

モデル作成のための財務指標候補としてデータベース S&P Compustat で使用されている 48 種類の指標を用いた。各指標に対数変換を施したが、対数変換する際、負の財務指標値の取り扱いに関しては森平・岡崎(2009)を参考に、(A.1)式に示す負の対数変換(ngl: negative logarithmic transformation)を利用した。

森平・岡崎(2009)では「変数の内で、一の値をとる物については負の対数変換を試みることによって説明力の顕著な増加をみることができた。… ngl 変換は、報告利益水準がゼロを境にして、デフォルト確率に与える影響を測定しようとする」としており、本件信用リスク値モ

表 3. データサンプル(単位 社)。

	2001 年 データ	2002 年 データ	2003 年 データ	2004 年 データ	2005 年 データ	2006 年 データ
正常先(S&P500 より)	397	394	389	399	402	409
倒産先(総資産 ≥ 1 億 ^{ドル})	67	41	23	19	9	11

表 4. 分析対象企業のプロフィール (単位 百万ドル).

	2001年(モデル作成用)		2002年	
	正常先	倒産先	正常先	倒産先
企業数	397社	67社	394社	41社
総資産平均	15,489	3,571	16,160	1,295
総資産最大値	495,023	25,197	575,244	19,415
総資産最小値	100	120	92	114
自己資本平均	5,014	742	4,818	-56
売上平均	11,953	2,143	11,588	801
純益平均	302	-484	60	-360

デルでも同様の理由から ngl 変換を用いることとした.

$$(A.1) \quad ngl(x) = \begin{cases} -\log(1-x) & \text{if } x \leq 0 \\ +\log(1+x) & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

倒産予測モデル作成の手順としては、まず、S&P Compustat の 48 財務指標に関し各指標毎の単回帰分析により倒産判別力を判定し (説明変数は各財務指標の負の対数変換値、目的変数は倒産 1、非倒産 0 のダミー変数)、財務的な意味も含めて説明力が高い 18 指標を選び出した (表 5)。ちなみにこの 18 指標を財務的な特性で分類すれば収益性指標 8 種類、キャッシュフロー指標 5 種類、レバレッジ指標 1 種類、インタレストカバレッジ指標 2 種類、効率性指標 1 種類、成長性指標 1 種類となっている。

次に、この 18 指標の組み合わせをステップワイズ減少法 (尤度比を用いた変数選択) で絞り込むことで最終のロジット・モデルを構築した (説明変数の有意水準が 10% 以上であれば排除、5% 未満であれば採択)。

A.3 二項ロジット・モデル

上記手続きにより構築したモデルは下記の通り。

$$(A.2) \quad \text{倒産確率: } P(Y) = \frac{\exp(Y)}{1 + \exp(Y)}$$

$$(A.3) \quad \begin{aligned} \text{信用リスク値 } Y &= -0.484x_1 + 0.629x_2 + 1.355x_3 - 8.497 + \varepsilon \\ x_1 &: ngl (\text{Oper. Margin Before Depreciation, } \%) \\ x_2 &: ngl (\text{Net Profit Margin, } \%) \\ x_3 &: ngl (\text{Total Debts/Market Value of Equity Margin, } \%) \\ \varepsilon &: \text{誤差項} \end{aligned}$$

ここで $ngl(\cdot)$ は負の対数変換を示す。

$$ngl(x) = \begin{cases} -\log(1-x) & \text{if } x \leq 0 \\ +\log(1+x) & \text{if } x > 0 \end{cases}$$

(A.3) 式の線形予測子たる Y の値は財務内容の悪さを示す信用リスク値で、減価償却前税引前利益率 (キャッシュフローに近い概念)、純益率 (損益計算書上の最終利益率)、総借入/株式時価総額比率 (時価ベースでみたレバレッジ) という 3 説明変数を負の対数変換したものの線形結合となっている (表 6)。

表5. 二項ロジットモデル構築に用いた18財務指標.

財務指標	定義	決定係数	t 値
ROA	Net Income/ Total Assets*100	0.459	-19.575
Cash Flow Margin	(Net Income+Depreciation+Amortization) /Sales*100	0.453	-19.367
ROAA	Net Income/Average Total Assets*100	0.452	-19.307
ROAI	Net income/Average Invested Capital*100 (Note) Invested Capital=LTD+Pref.stock +Minority Interest+Total Common Equity	0.418	-18.023
Net Profit Margin	Net Income/Sales*100	0.414	-17.893
TD /Market Value of Equity	(LT Debt+ST Debt) /Market Capitalization*100	0.398	+17.234
Pretax Profit margin	Pretax Income/Sales*100	0.392	-17.094
ROI	Net income/Invested Capital*100	0.342	-15.342
Operating margin After Depreciation	(Operation Income before Depreciation - Depreciation & Amortization) /Sales*100	0.333	-15.039
Operating margin before Depreciation	Operation Income before Depreciation /Sales*100	0.295	-13.767
LTD/Comm	LT Debt/Common Equity*100 (Note) Common Equity=Common Stock +Retained earnings+Capital Surplus - Treasury stock adjustment	0.25	-12.308
LTD/Stock	LT Debt/Stockholders' Equity*100 (Note) Stockholders' Equity =Common stock+Redeemable preferred stock+Nonredeemable preferred stock +Capital surplus+Retained earnings - Treasury stock	0.213	-11.086
P/S	Stock Price /Sales/Common shares outstanding)	0.211	-10.94
TA growth	Total Assets(current) /Total Assets(prior year)*100-100	0.177	-9.887
Interest Coverage After Tax	(Net Income+Interest Expense) /Interest Expense	0.173	-9.774
Interest Coverage Before Tax	(Pretax Income+Interest Expense) /Interest Expense	0.166	-9.533
FCF/Sales	(Net Cash Flow - Cash Dividends - Capital Expenditure)/Sales*100 (Note) Cash Flow =Net Income+Depreciation+Amortization	0.151	-9.002
Funds Flow Adequacy Ratio	Cash Flow /Capital Expenditure +Inventory Increase+Cash Dividends)	0.129	-8.211

表 6. 二項ロジット・モデルの説明変数一覧（ロジット変換前の回帰係数）。（注）*5%有意，**1%有意，***0.1%有意。

Independent Variables	Coefficient	Std.Error	Wald	Sig.
Oper. Margin Before Depreciation	-0.484	0.197	6.054	0.014*
Net Profit Margin	-0.629	0.195	10.428	0.001**
Total Debts/Market Value of Equity Margin	1.355	0.254	28.349	0.000***
Constant	-8.497	1.264	45.217	0.000***

表 7. 二項ロジット・モデルによる年別倒産判別力。

	2001年 データ (モデル)	2002年 データ	2003年 データ	2004年 データ	2005年 データ	2006年 データ
AUC 値	0.987	0.867	0.962	0.947	0.996	0.993
正常先数	397	394	389	399	402	409
倒産先数	67	41	23	19	9	11

A.4 二項ロジット・モデルの妥当性

ここでは 2001 年のみを用いてロジット・モデルを推計し、2006 年までの信用リスク値を算出している。これは実務上、倒産予測モデルを作る場合に対象先(正常先、倒産先)の最初の年のデータのみを用いてモデルを作り、翌年以降のデータで検証するという手順をとることに基づいている。データ年が変われば金融環境が変わり判別基準も変わると考える為、モデル作成用データは単年度のものとしているのである。

2001 年データを用いて倒産予測モデルを構築し、このモデルを用いて正常先・倒産先の判別力を AUC 値(ROC カーブ分析)で測定したところ表 7 のような結果となった。2001 年データを用いたモデルによる信用リスク値ではあるが翌年以降の検証年データで見ても極めて高い判別力のあるモデルとなっている(一般的には 0.7~0.8 の AUC 値があれば判別力ありとみられる)。

A.5 信用リスク値分布の正規性分析

二項ロジット・モデルで計測した全企業の各年信用リスク値分布のモーメントと分布適合度(コルモゴロフ=スミルノフ検定統計量)を示せば表 8 の通り。

ここで全企業標本作製に関しては以下のような操作を行った。そもそも標本データのうち倒産先データは総資産 1 億ドル以上の倒産上場企業全先(除く金融・不動産、除くデータ欠損先)であるのに対し、正常先は上場企業の一部たる S&P500 社からの標本である。これを単純に合算して全企業先とすると倒産先構成比率が極めて高くなってしまう。そこで米国 S&P 社倒産率データが示す 1981 年から 2008 年までの倒産比率 1.1% (過去 28 年間の中間値)を倒産企業の構成比と考え、各年の倒産企業からランダムに 1.1%に相当する倒産先(ここでは 4 社)をサンプリングし正常先標本と合わせて疑似全企業標本とした。このサンプリングを各年ごとに 11 回繰り返し、分布の平均値が 11 ケースのなかで中央値を示すケースを当該年を代表する全企業標本とみなしモーメント計測、分布適合度検定を行った。

こうして作成された全企業分布をみれば、正規性を前提とした歪度検定では正の歪みがあるものの全 12 種類の連続分布への適合度(コルモゴロフ=スミルノフ検定統計量)ではガンマ、対

表 8. 全企業信用リスク値の分布適合度.

年	2001	2002	2003	2004	2005	2006
標本数	401	398	393	403	406	413
平均値	-6.511	-6.412	-6.837	-7.402	-7.540	-7.568
中央値	-6.496	-6.563	-6.840	-7.374	-7.560	-7.582
標準偏差	2.743	2.992	2.679	2.547	2.578	2.353
分散	7.525	8.954	7.180	6.486	6.644	5.535
歪度	0.548	0.598	0.376	0.287	0.618	0.288
(同標準誤差)	(0.122)	(0.122)	(0.123)	(0.122)	(0.121)	(0.120)
歪度検定統計量	4.492	4.902	3.057	2.352	5.107	2.400
尖度	2.044	1.312	1.106	0.772	2.183	0.834
(同標準誤差)	(0.243)	(0.244)	(0.246)	(0.243)	(0.242)	(0.240)
ロジスティック分布 K-S 検定統計量	0.0211	0.0330	0.0271	0.0400	0.0347	0.0376
(同 p-value)	(0.915)	(0.237)	(0.588)	(0.044)	(0.162)	(0.077)
正規分布 K-S 検定統計量	0.0464	0.0626	0.0507	0.0481	0.0651	0.0487
(同 p-value)	(0.037)	(0.000)	(0.017)	(0.026)	(0.000)	(0.019)
分布適合度トップ 5 (K-S 検定統計量)						
1 位	ロジスティック (0.0211)	ロジスティック (0.0330)	ロジスティック (0.0271)	Student t (0.0387)	ロジスティック (0.0347)	ロジスティック (0.0376)
2 位	Student t (0.0237)	Student t (0.0440)	Student t (0.0387)	ロジスティック (0.0404)	Student t (0.0410)	Student t (0.0414)
3 位	正規 (0.0464)	対数正規 (0.0585)	正規 (0.0507)	正規 (0.0481)	正規 (0.0651)	正規 (0.0487)
4 位	ベータ (0.0469)	ガンマ (0.0591)	ベータ (0.0510)	ベータ (0.0484)	ベータ (0.0655)	ベータ (0.0491)
5 位	ガンマ (0.0491)	正規 (0.0626)	ガンマ (0.0534)	ガンマ (0.0579)	対数正規 (0.0658)	ガンマ (0.0611)

(注) 正規分布コルモゴロフ=スミルノフ検定における帰無仮説は「 H_0 : 正規分布に従う」.
ロジスティック分布コルモゴロフ=スミルノフ検定における帰無仮説は「 H_0 : ロジスティック分布に従う」.

(注) 分布適合度で当てはめを行った連続分布はロジスティック, Student t, 正規, 対数正規, ガンマ, ベータ, 最大値極値, ワイブル, ベータ PERT, 最小値極値, 三角, 一様の 12 種類.

数正規, 最大値極値, ワイブルといった非対称分布ではなくロジスティック, Student t, という裾の重い対称分布への適合度が高く, 正規分布はそれに次ぐという位置づけである(表 8). 適合度順ということからすれば本稿においてもロジスティック分布を前提に議論を進めるべきかもしれないが, 本稿では元の分布がより標準的な正規分布に従うとの仮定で議論を進めた. 即ち, 倒産企業は一般的には正常企業に比べて外れ値に位置することが多く, 倒産企業を含めれば歪度が大きくなることは不自然ではない. また, 分布の右裾(財務内容が極端に悪い領域)に位置しているがゆえにこうした企業が倒産することは否定しないが, 元の企業分布が対称分布であっても閾値変動のメカニズムにより倒産すること, 様々な非対称分布が形成されることを本稿では主張していることから, 本稿では元の分布が正規分布に従うとの仮定で議論を進めた.

非対称分布という考え方においては, Y と W が互いに独立に対称な確率密度関数であれば

歪んだ分布を生成することができる。Y と W が正規分布以外の対称分布であったとしても 2 つの対称分布から歪んだ分布が生成される。このため一般的には前提となる分布は必ずしも正規分布である必要はないが、裾の重いロジスティック分布あるいは Student t 分布当てはめの可能性は今後の課題といたしたい。

謝 辞

本研究は、日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究(B) (21330087, 研究代表者 大野忠士) の助成を受けたものである。

参 考 文 献

- Altman, E. I. (1968). Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy, *Journal of Finance*, **23**, 589–609.
- Arnold, B. C. and Beaver, R. J. (2002). Skewed multivariate model related to hidden truncation and/or selective reporting, *Test*, **11** (1), 7–54.
- Arnold, B. C., Beaver, R. I., Greneveld, R. A. and Meeker, W. Q. (1993). The nontruncated marginal of a truncated bivariate normal distribution, *Psychometrika*, **58** (3), 471–488.
- Azzalini, A. (1985). A class of distributions which includes the normal ones, *Scandinavian Journal of Statistics*, **12** (12), 171–178.
- Azzalini, A. (1986). Further results on a class of distribution which includes the normal ones, *Statistica*, **46**, 199–208.
- Azzalini, A. (2005). The skew-normal distribution and related multivariate families, *Scandinavian Journal of Statistics*, **32** (2), 159–188.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical application of the multivariate skew-normal distribution, *Journal of the Royal Statistical Society*, **B61**, 579–602.
- Azzalini, A. and Capitanio, A. (2003). Distributions generated by perturbation of symmetry with emphasis on a multivariate skew-t distribution, *Journal of the Royal Statistical Society*, **B65**, 367–389.
- Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996). The multivariate skew-normal distribution, *Biometrika*, **83**, 715–726.
- Beaver, W. (1966). Financial ratios as predictors of failure, *Journal of Accounting Research*, **4** (Supp), 71–111.
- Benedetti, S. M. (2004). Hedge fund portfolio selection with higher moments, Diploma Thesis to the Eth Zurich and University of Zurich, 1–44.
- Betts, J. and Belhoul, D. (1987). The effectiveness of incorporating stability measures in company failure models, *Journal of Business Finance and Accounting*, **14** (3), 323–334.
- Black, F. and Cox, J. (1976). Valuing corporate securities: Liabilities: Some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance*, **31**, 351–367.
- Deakin, E. B. (1972). A discriminant analysis of predictors of business failure, *Journal of Accounting Research*, **10** (1), 167–179.
- Duffie, D. and Singleton, K. (1999). Modeling term structure of defaultable bonds, *Review of Financial Studies*, **12**, 687–720.
- Giesecke, K. (2005). Default and information, *Journal of Economic Dynamic and Control*, **30**, 2281–2303.
- Giesecke, K. and Goldberg, L. R. (2004). Forecasting default in the face of uncertainty, *The Journal*

- of *Derivatives*, **12**, 11–25.
- Gupta, R. C. and Gupta, R. D. (2004). Generalized skew normal model, *Test*, **13**(2), 501–524.
- Hopwood, W., Mckeown, J. and Mutchler, J. (1994). A reexamination of auditor versus model accuracy within the context of the going-concern opinion decision, *Contemporary Accounting Research*, **10**(2), 409–431.
- Jarrow, R. and Turnbull, S. (1992). Credit risk: Drawing the analogy. *Risk*, **5**(9), 64–71.
- Jarrow, R. and Turnbull, S. (1995). Pricing options on financial securities subject to credit risk, *Journal of Finance*, **50**, 53–86.
- Lennox, C. (1999). Identifying failing companies: A reevaluation of the logit, probit and DA approaches, *Journal of Economics and Business*, **51**(4), 347–364.
- Longstaff, F. and Schwarz, E. (1995). A simple approach to valuing risky fixed and floating rate debt, *Journal of Finance*, **50**, 789–819.
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: The risk of interest rates, *Journal of Finance*, **29**, 449–470.
- 森平爽一郎, 岡崎貫治(2009). マクロ経済効果を考慮したデフォルト確率の期間構造推定, 2009年度日本ファイナンス学会第17回大会予稿集, 103–112.
- Ohlson, J. (1980). Financial ratios and the probabilistic prediction of bankruptcy, *Journal of Accounting Research*, **18**(Spring), 109–131.
- 大野忠士, 椿 広計, 山下智志(2010). 確率変動する閾値による倒産企業分布のモデル化, 2010年度日本ファイナンス学会第18回大会予稿集, 548–561.
- 敦賀智裕, 山下智志(2007). デフォルト境界が不確実な場合の損失率: 優先劣後構造を持つ債権への応用, IMES Discussion Paper Series, 2007–J–6, 1–23, 日本銀行金融研究所, 東京.
- Walls, W. D. (2005). Modelling heavy tails and skewness in firm returns, *Applied Financial Economics*, **15**, 1181–1188.

Default Distribution Model Truncated by
 Stochastic Credit Decision
 —Application of Skew-normal Distribution—

Tadashi Ono¹, Satoshi Yamashita² and Hiroe Tsubaki²

¹Graduate School of Business Sciences, University of Tsukuba

²The Institute of Statistical Mathematics

The univariate skew-normal distribution was introduced by Azzalini in 1985 as a natural extension of the normal density to accommodate asymmetry. In the finance context, a company will be generally deemed to go bankrupt when its credit score exceeds a critical threshold. This paper applies the skew-normal distribution to default company distribution. It assumes that credit decision and corporate credit score are both normally distributed and vary stochastically. The corporate credit distribution is truncated by the stochastic threshold (credit decision) and results in a skew-normal distribution of default companies.

This paper refers to the basic feature of the skew-normal distribution. When the threshold parameters are inferred using empirical default data, the location parameter shows consistency with the historical credit decision trend. Additionally, the skew-normal distribution model can indicate the skewness of the default distribution caused by the parameters, especially the scale parameter of the threshold.