

長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の応用可能性

松村 直人[†]

(受付 2002 年 10 月 11 日; 改訂 2003 年 4 月 2 日)

要 旨

林分統計量の推定の基礎となる樹高曲線式の選択について、いくつかの経験式と理論式を取り上げ、その特徴、当てはまりの精度、データ特性への対応などについて検討した。理論式としては座屈式を対象に、また比較のための経験式としては、従来当てはまりの良さからよく用いられている、以下の式を対象として当てはめた。用いた曲線は、Näslund 式、Henricksen 式、Michailoff 式、相対成長式といずれも 2 つのパラメータを持っている関数である。平均平方偏差では、座屈式が最も当てはまりが悪かったが、その他はどれも同程度の当てはまりであった。若齢、老齢、超高齢の全林分データに対する当てはめでは、座屈式が比較的良好な当てはまりを示した。

キーワード：森林計測，座屈，樹高曲線，理論式，相対成長。

1. はじめに

森林の蓄積量を推定したい場合などにおいて、様々な林分調査の方法が取られるが、通常は標準地と呼ばれる試験区を設定し、全立木を対象に単木測定を行う。この時、立木の地上 1.3 m 高(日本では北海道以外 1.2 m を採用)の直径を胸高直径と呼び、直径分布の把握、幹形の記述、単木材積やバイオマス量の推定など、あらゆる林分統計量を求める際の基本データとして利用される。

これら林分統計量の推定精度を上げるため、さらに樹高と呼ばれる単木の高さを測定する。一般的な人工林などでは、立木本数が多いため、直径階ごとの樹高がほぼ均等と思われる場合には、毎木の樹高測定を省略して、各直径階ごとに適当数の標準木の樹高を測定し、樹高曲線を用いて毎木の樹高、もしくは直径階の平均樹高を推定する。

ここで適用される樹高曲線を選択することは、対象林分の樹高曲線式を決めることであり、最適な樹高モデルを決定する作業となる。このようなモデル選択に当たっては、従来経験的にその当てはまりの良さが認められている曲線式や、計算機が発達する以前には、簡便な計算、場合によっては野外での計算で曲線式のパラメータの推定が可能であったものがよく用いられてきた。これらは一般に「経験式」と呼ばれるが、利用の簡便さに対して、反面では、その理論的根拠には乏しいものが多い。また、外挿や関数の結合などの際、予期しない振る舞いを示したりする場合もあり、注意が必要である。

ここでは、林分統計量の推定の基礎となる樹高曲線式の選択に際し、いくつかの経験式と理論式、特に座屈式を取り上げ、その特徴、当てはまりの精度、データ特性への対応などについて検討してみたい。

[†] 三重大学 生物資源学部：〒514-8507 三重県津市上浜町 1515

表 1. 比較した樹高曲線式 .

樹高曲線式*	直線式に変形するための座標変換		直線式表現 Y=a+b · X
	X 軸方向	Y 軸方向	
Näslund 式 (Nas)			
$H = \frac{D^2}{(a+bD)^2}$	D	$\frac{D}{\sqrt{H}}$	$\frac{D}{\sqrt{H}} = a+bD$
Henricksen 式 (Hen)			
$H = a+b \log D$	log D	H	$H = a+b \log D$
Michailoff 式 (Mic)			
$H = ae^{-\frac{b}{D}}$	$\frac{1}{D}$	log H	$\log H = a'-b \frac{1}{D}$
相対成長式 (All)			
$H = aD^b$	log D	log H	$\log H = a'+b \log D$

* : () 内を省略形として使用. また, 1.3(1.2)m の胸高を付ける場合もある.

2. 樹高曲線について

樹高曲線とは, 「胸高直径に対する樹高の平均的大きさを示す関係曲線」と定義されている (大隅 他 1981)). また, 「毎木調査による林分材積推定における樹高曲線の役割は, 毎木調査結果より明らかにされる胸高断面積から幹材積への移行を行うにあたっての媒介役をはたすことにある」とも述べている. つまり, 次元的には 1 次元の直径から, 2 次元の断面積へ, さらに 3 次元の材積へスケールアップさせる手段として用いられてきた.

樹高曲線は, 通常 X 軸に胸高直径を, Y 軸に樹高をとって与えられるが, 一時期の測定では, その形状は直線もしくは右上がりの滑らかな曲線で示される. 従来, 樹高の測定には, 「頂端が見にくい」, 「測高器の精度, 利用の習熟度の影響を受けやすい」などの問題点があり, 時間と労力を取られる割に, 測定精度が悪いという欠点があった. そのため, 通常は胸高直径については毎木の測定を行うが, 樹高については, 各直径階に応じた標準木を選定し, これらの胸高直径と樹高の測定値から樹高曲線を決めていた. これまで比較的当てはまりが良いとされ, よく用いられてきた樹高曲線式を表 1 に示す. これらは通常経験式と呼ばれ, 相対成長を基礎に仮定するアロメトリー式以外は理論的根拠に乏しい.

しかしながら, 簡単な変換により線形関数式になり, 野外などでも電卓を利用する程度で, 最小二乗法による当てはめが容易であることなどからよく用いられている.

3. 樹高曲線としての座屈式の検討

構造力学的視点から, 長柱の座屈理論に基づいて樹木の高さを推定しようとする樹高曲線式について検討する. 地上に直立している樹木は, その太さが十分大きなものでなければ自重によって湾曲し, 加重のわずかな増加によっても大きな変形を起こし, 破壊してしまうはずである. したがって, 樹木が自重による座屈に耐えられる形をしているとすると, その高さ H と半径 R との関係は, 次元解析的に,

$$(3.1) \quad \frac{H^3}{R^2} < \frac{2E}{\rho g} \propto 2 * 10^6 \text{ m}$$

を満足しなければならないとされている(McMahon(1973), 青野(1982)). ここで, E, ρ は木材のヤング率, 密度であり, g は重力の加速度である. このことから, 樹高 H は胸高直径 D の $2/3$ 乗に比例すると考え,

$$(3.2) \quad H = aD^{\frac{2}{3}}$$

という樹高曲線式(以下, 座屈式)が導出されている(山本 他(1984), 山本(1985)).

この式は前述の相対成長式の指数部分を $2/3$ と固定した事例に相当する. この式の一般的な形状について, 山本(1985)は「曲線の形状は非常に固定的であり, 従来の樹高曲線式ほどの柔軟性は望めない. しかし, 定数の 1 つを $2/3$ と固定することにより, a の次元が長さの $1/3$ 乗という次元をもつ. よって, この a の値により, 林分間, 樹種間, その他の比較が可能となる .」と述べている.

4. 資料及び解析方法

導出された座屈式の検討材料として, 樹種は異なるが若齢(8年生)のフタバガキ科チェンガリ(*Neobalanocarpus heimii*), 高齢(62年生)のスギ人工林(*Cryptomeria japonica*)と超高齢(約250年生)のスギ天然生林の胸高直径と樹高の測定結果を用いた. 各試験地の林齢, 樹種, 平均胸高直径, 平均樹高, 標準偏差などを表2に示す. 樹高の測定は, チェンガリについては測棒, スギについてはブルーメライスを利用して行った.

また, 当てはめに際しては, 2cm 括約の各直径階ごとに平均樹高を求め, 滑らかな樹高データとしたが, 一部において依然大きな樹高変動が残っている.

座屈式の特徴を分析するために, 各データへの当てはまりを検討した. 比較のために, 従来よく用いられ, 当てはまりが良いとされているいくつかの樹高曲線を当てはめた. 用いた曲線は, 表1に示した Näslund 式(Nas), Henricksen 式(Hen), Michailoff 式(Mic, Michailoff(1943)), 相対成長(アロメトリー)式(All)といずれも2つのパラメータを持っている関数であり, 簡単な変数変換で直線回帰することができる(表1). また座屈式(3.2)のパラメータ a は最小二乗法により求めた.

各式の適合度は, 残差平方和(RSS)および平均平方偏差(MSE)で比較した.

$$(4.1) \quad H = \frac{D^2}{(a + bD)^2}$$

$$(4.2) \quad H = a + b \log D$$

$$(4.3) \quad H = ae^{-\frac{b}{D}}$$

$$(4.4) \quad H = aD^b$$

表2. 対象試験地の諸統計量.

試験地	林齢 (年)	樹種/林種	樹高測定本数 本	平均直径 cm	平均樹高 m	標準偏差		変動係数	
						直径 cm	樹高 m	直径 %	樹高 %
マレーシア	8	チェンガリ人工林	91	4.84	4.36	1.67	0.95	34.5	21.7
三重県	62	スギ人工林	59	31.05	20.73	6.12	2.14	19.7	10.3
高知県	約250	スギ天然生林	25	61.60	30.27	23.98	6.13	38.9	20.3

H は樹高, D は胸高直径, a, b はパラメータである. また,

$$(4.5) \quad RSS = \sum_{i=1}^n (H_i - \hat{H}_i)^2, \quad MSE = \sqrt{\frac{RSS}{n-m}}$$

H_i は樹高の測定値, \hat{H}_i はその推定値である. また, n はデータ数, m はパラメータの数である.

5. 結果と考察

各試験地における当てはめ結果の一覧を表 3 に示した. また, その当てはまりの程度を図 1~3 に示した. さらに全林分データに対しても同様の当てはめを行った(図 4). 若齢のチェンガル林分では, 平均平方偏差が最も小さかったのは, 相対成長式で, 他の式もほぼ同程度の当てはまり具合を示した(表 3). 座屈式は MSE の値ではそれほど差は出ていないと思われた. 高齢のスギ人工林では MSE も 2.2m 程度と, 大きくなっていった. 2 つのパラメータをもつ式はいずれかの試験地で最良の当てはまりを示し, 座屈式はおおよそ 2 倍の MSE であった. スギの天然生林においては, 最小は Michailoff 式, MSE が 2.5 m 前後, 最大はやはり座屈式で MSE が 4 m に達している. ある式が常に上位というわけではなく, 各式とも, どれも同程度の当てはまりであるといえよう. 敢えてあげれば, Näslund 式と Henricksen 式は 4 位, 5 位の当てはまり結果となることなく, 比較的良好な結果を示した. 山本(1985)の例では, Näslund 式の当てはまりが良かったが, 今回はデータ特性に差があると思われる.

表 3. 樹高曲線式の当てはめ結果.

樹種/林種	直径階数		Nas	Hen	Mic	All	Buc
チェンガル人工林	5	RSS	0.32	0.20	0.41	0.16	1.45
		MSE	0.326	0.255	0.369	0.234	0.601
スギ人工林	13	RSS	10.12	9.44	10.35	9.46	56.92
		MSE	0.959	0.926	0.970	0.927	2.178
スギ天然生林	20	RSS	111.02	123.18	108.79	165.37	342.45
		MSE	2.483	2.616	2.458	3.031	4.245
全林分	32	RSS	144.71	285.43	1080.07	435.21	336.11
		MSE	2.196	3.085	6.000	3.809	3.293

$RSS(m^2)$: 残差平方和, $MSE(m)$: 平均平方偏差

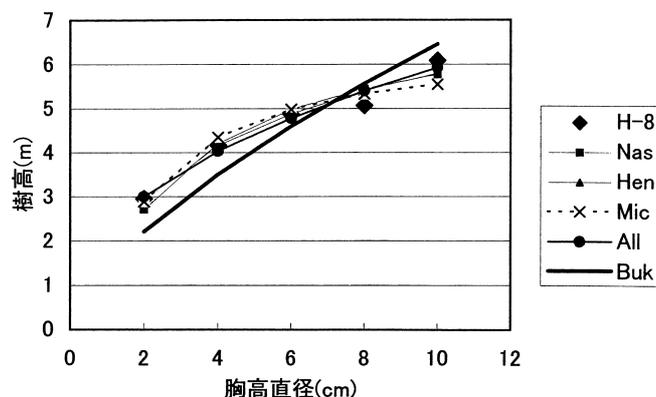


図 1. 樹高曲線の当てはめ(チェンガル人工林).

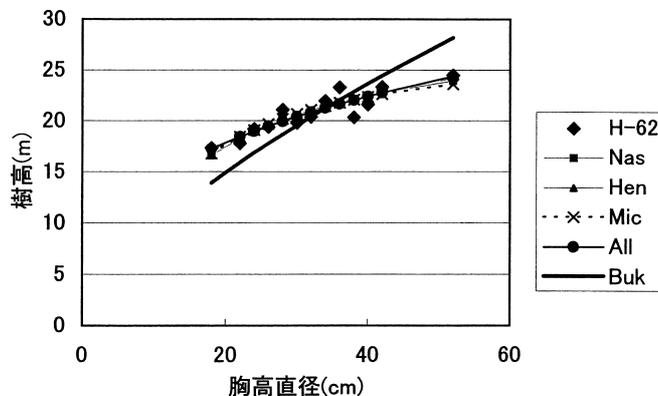


図 2. 樹高曲線の当てはめ(スギ人工林).

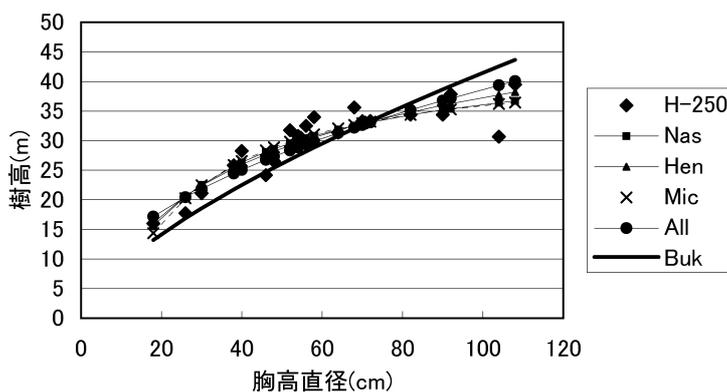


図 3. 樹高曲線の当てはめ(スギ天然生林).

地域、樹種、林種の違う 3 林分であるが、年齢構成上、若齢、高齡、超高齡の林分であることから、一括して「胸高直径-樹高」の関係を調べてみた(図 4)。スギ天然生林は森林簿の記録や近隣の林分での樹幹解析結果から、約 250 年生と推定しているが、屋久スギほどではないにしても、ある種の極限状態に達した林分と想定される。この全林分の事例では、Michailoff 式が極端に悪い当てはまりを示し、限界を示した。その他、相対成長式も座屈式よりも悪い当てはめ結果であり、結果的に座屈式が 3 位と良好な当てはまりとなった。

6. 座屈式の特徴について

林齢の異なる 3 地域のデータをすべて並べてみると、座屈式の特徴が伺える(図 4)。MSE は 3 m と比較的良好な当てはまりを示しているが、胸高直径が大きくなるにつれて過大になる傾向は同じである。しかし、全林分への当てはめに対して、Henricksen 式は小径木に対して、負の値を示したが、座屈式ではこのような心配はない。

各樹高曲線の安定性について考察するために、パラメータ(a, b)、座屈式については a につ

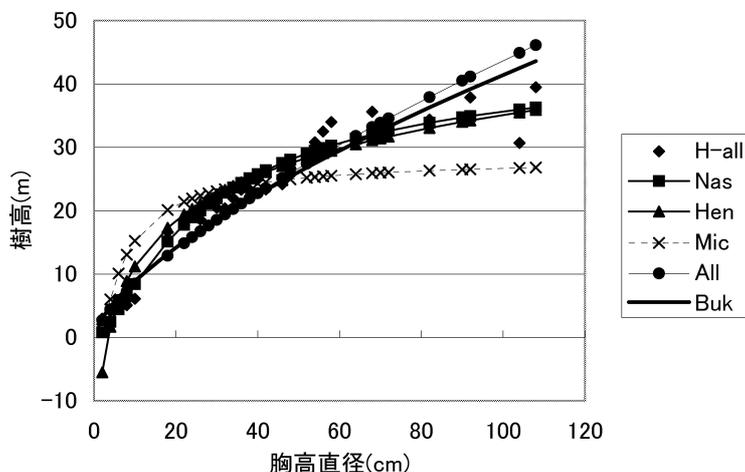


図 4. 樹高曲線の当てはめ(全林分).

表 4. 樹高曲線式のパラメータの変化.

樹種/林種		Nas	Hen	Mic	All	Buc
チェンガル	a	0.478	1.666	6.541	2.242	1.393
人工林	b	0.369	1.796	1.635	0.423	
スギ人工林	a	1.138	-2.420	28.298	6.695	2.024
	b	0.183	6.736	9.444	0.327	
スギ天然生林	a	1.898	-19.610	43.913	4.384	1.925
	b	0.147	12.351	20.111	0.473	
全林分	a	1.968	-12.719	28.389	1.647	1.922
	b	0.148	10.383	6.219	0.712	

いて、表 4 に示した。Henricksen 式と Michailoff 式のパラメータは不安定であるのに対し、その他の式については比較的安定している。座屈式については 1.39(チェンガル), 2.02(スギ人工林), 1.93(スギ天然生林)であり、全林分に対して 1.92 となっている。山本(1985)も指摘するように、座屈式の安定性は一時期の調査結果を他時期に応用できる可能性をもつと思われる。また、広域の森林調査に対して、概算値を必要とする場合などに、有効性が期待できる。

今回比較に用いた樹高曲線式はすべて 2 つのパラメータを有しているのに対し、座屈式は 1 個だけであり、これだけでは柔軟性に欠けるのはやむを得ない。しかし、樹木が長柱として限界まで立っている状況を考え、理論的に樹高の限界を規定することにもなり、座屈式の検討は仮説を立てる点でも有用と思われる。

7. おわりに

山本(1985)は、座屈式に従来の樹高曲線にない斬新さを認めており、「樹高は胸高直径の $2/3$ 乗に比例する」ということを示し、樹木が自然な状態で成長した場合、この関係になるということで、極端に現実の値から離れることがないと指摘している。このような理論式に注目することは、従来の樹高曲線にない「仮定の展開」や「新しい利用法」につながっていくものと期待される。また、樹木の材積式への応用においても、材積は単純に長さの 3 乗ではなく、 $8/3$ 乗に比例すると仮定でき、「2.7 次元」という次元を規定するなど、今後の利用法の展開におい

て、さまざまな可能性があると思われる(山本 他(1984), 山本(1985))。

謝 辞

今回使用したデータは、チェンガル林は JICA によるマレーシアの複層林プロジェクトから、スギ人工林は三重県美杉村の三重大学付属平倉演習林から、スギ天然生林は高知県馬路村の魚梁瀬国有林において、森林総研四国支所が収集したものであり、各関係機関に対し、厚くお礼申し上げたい。

また、査読者の方からは、非常に有益なご指摘とご助言をいただいた。深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 青野 修(1982) 『次元と次元解析』, 共立出版, 東京。
- McMahon, T. (1973) Size and shape in biology, *Science*, **179**, 1201–1204.
- Michailoff, I. (1943) Zahlenmäßiges Verfahren für die Ausführung der Bestandeshöhenkurven, *Forstw. Cbl. u. Thar. Forstl. Jahrb.*, **6**, 273–279.
- 大隅真一 他(1981) 『森林計測学』, 養賢堂, 東京。
- 山本充男(1985) 長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式の検討, 島根大農研報, **19**, 29–33.
- 山本充男, 松村直人, 鈴木太七(1984) 長柱の座屈理論に基づく樹高曲線式について, 95 回日林論, 89–90.

Applicability of Height Curve Derived from the Theory of Column Buckling

Naoto Matsumura

(Faculty of Bioresources, Mie University)

A model selection of suitable height curves is used as a basis for estimating forest stand statistics. Using selected empirical and theoretical height curves, its characteristics, goodness of fit and response to data types are discussed. The height curve derived from buckling theory was tested as a theoretical equation, and Näslund, Henricksen, Michailoff, Allometry equations were selected for empirical use and proved.

The mean square of errors showed the worst performance in case of buckling height curve and almost the same by other equations. Because of the number of free parameters, the buckling curve with only one parameter showed less flexibility. However, this buckling height curve provides theoretically a natural growth limit and it is also be expected to be useful for an iteration of measurements, multi-species and regional inventory.